Современная теория информации

Лекция 2. Выпуклые функции. Условная энтропия. Стационарные источники.

Содержание лекции

1. Выпуклые функции.
2. Условная энтропия.
3. Дискретные источники.
4. Дискретные стационарные процессы.

Выпуклые функции

- Множество вещественных векторов $\boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{x}\}$ выпукло, если $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}$ и $\forall \alpha \in [0, 1]$, вектор $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}'$ принадлежит $\boldsymbol{R}$.

Theorem

Множество вероятностных векторов длины M выпукло.

- **Доказательство.** Для множества $\boldsymbol{X} = \{1, 2, \ldots, M\}$, рассмотрим два распределения вероятностей $\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_M)$ и $\boldsymbol{p}' = (p_1', ..., p_M')$, и $\alpha \in [0, 1]$. Рассмотрим векторы вида

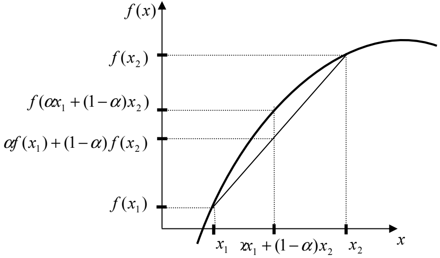
$$\boldsymbol{q} = \alpha \boldsymbol{p} + (1 - \alpha)\boldsymbol{p}'.$$

1. $q_i \geq 0$.
2. Сумма компонент вектора $\boldsymbol{q}$

$$\sum_{i=1}^{M} q_i = \alpha \sum_{i=1}^{M} p_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{M} p_i' = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Выпуклые функции

- Функция $f(\boldsymbol{x})$ выпуклая, если $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^1$ и $\forall \alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство: $f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}') \geq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}')$



- Для случая функции одной переменной:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

[1] $\boldsymbol{R}$ – выпуклая область

Выпуклые функции

Theorem

Пусть $f(\boldsymbol{x})$ *– выпуклая* $\cap$ *функция вектора* $\boldsymbol{x}$*, определённая на выпуклой области* $\boldsymbol{R}$*, и пусть константы* $\alpha_1, ..., \alpha_M \in [0, 1]$ *такие, что* $\sum_{m=1}^{M} \alpha_m = 1$*. Тогда* $\forall \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_M \in \boldsymbol{R}$ *справедливо неравенство:*

$$f\left(\sum_{m=1}^{M} \alpha_m \boldsymbol{x}_m\right) \geq \sum_{m=1}^{M} \alpha_m f(\boldsymbol{x}_m).$$

Если α_m означает вероятность $\boldsymbol{x}_m$, то получим *неравенство Йенсена*:

$$f\left(\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\}\right) \geq \mathrm{E}\{f(\boldsymbol{x})\}.$$

Выпуклые функции. Свойства.

1. Сумма выпуклых функций выпукла.
2. Произведение выпуклой функции и положительной константы является выпуклой функцией.
3. Линейная комбинация выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами – выпуклая функция.

Доказательство свойства 5.

Theorem

Энтропия $H(\boldsymbol{p})$ ансамбля с распределением вероятностей $\boldsymbol{p}$ – выпуклая $\cap$ функция от $\boldsymbol{p}$.

Доказательство.

$$H(\boldsymbol{p}) = -\sum_{m=1}^{M} p_m \log p_m.$$

Рассмотрим слагаемые $f_m(\boldsymbol{p}) = -p_m \log p_m$.
Вторая производная $f''_m(\boldsymbol{p}) = -(\log e)/p_m$.
$f''_m(\boldsymbol{p}) < 0 \ \forall p_m \in (0, 1)$.

Пример

- $X = \{0, 1\}$. Пусть $p(1) = p$, $p(0) = 1 - p = q$.
- Энтропия двоичного ансамбля

$$H(X) = -p \log p - q \log q \triangleq \eta(p).$$

- Первая производная от $\eta(p)$.

$$\eta'(p) = -\log p + \log(1 - p),$$

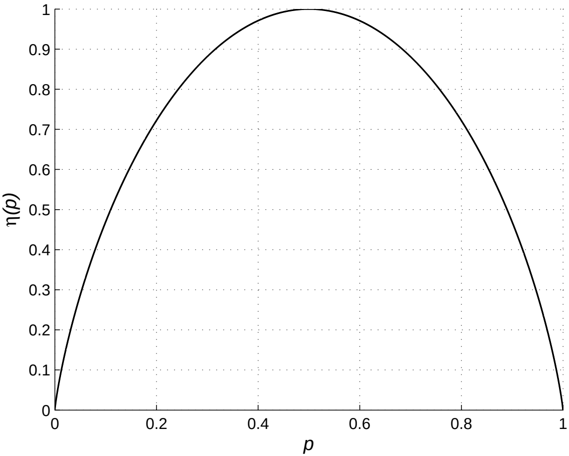
$\eta'(p)$=0, при $p = \frac{1}{2}$ – точка экстремума.

- Вторая производная от $\eta(p)$.

$$\eta''(p) = -\log e/p - \log e/(1 - p) < 0.$$

Энтропия двоичного ансамбля

$$H(X) = \eta(p) = -p \log p - (1-p)\log(1-p)$$



Доказательство свойства 5.

- Обозначим $\tilde{\boldsymbol{p}} = ((p_1 + p_2)/2, (p_1 + p_2)/2, p_3, ..., p_M)$.
- Необходимо доказать, что

$$H(\tilde{\boldsymbol{p}}) \geq H(\boldsymbol{p}).$$

- Обозначим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} &= (p_1, p_2, p_3, ..., p_M), \\ \boldsymbol{p}'' &= (p_2, p_1, p_3, ..., p_M). \end{aligned}$$

- Заметим, что: $H(\boldsymbol{p}') = H(\boldsymbol{p}'') = H(\boldsymbol{p})$.
- $\tilde{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}'')/2$.
- Из выпуклости энтропии следует, что:

$$H(\tilde{\boldsymbol{p}}) = H\left(\frac{\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}''}{2}\right) \geq \frac{1}{2}H(\boldsymbol{p}') + \frac{1}{2}H(\boldsymbol{p}'') = H(\boldsymbol{p}).$$

Произведение ансамблей и условное распределение

- Произведение ансамблей $XY = \{(x, y), p_{XY}(x, y)\}$.
- Условное распределение вероятностей:

$$p(x|y) = \begin{cases} \frac{p(x,y)}{p(y)}, & \text{if } p(y) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad x \in X.$$

- Ансамбли X и Y – независимы, если

$$p(x, y) = p(x)p(y), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Условная энтропия

- Условная собственная информация сообщения x при фиксированном y
$$I(x|y) = -\log p(x|y),$$
- Условная энтропия X при заданном $y \in Y$
$$H(X|y) = -\sum_{x \in X} p(x|y) \log p(x|y),$$
- Условная энтропия X при фиксированном ансамбле Y
$$H(X|Y) = -\sum_{y \in Y} \left(p(y) \sum_{x \in X} p(x|y) \log p(x|y) \right) =$$
$$= -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(x|y).$$

Свойства условной энтропии

1. $H(X|Y) \geq 0$
2. $H(X|Y) \leq H(X)$, равенство, если X и Y независимы.
3. $H(XY) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$
4. $H(X|YZ) \leq H(X|Y)$ равенство, если X и Z условно независимы для всех $y \in Y$.

Свойства условной энтропии

5.

$$\begin{aligned} H(X_1 ... X_n) = H(X_1) &+ H(X_2|X_1) + \\ &+ H(X_3|X_1 X_2) + ... + \\ &+ H(X_n|X_1, ..., X_{n-1}). \end{aligned}$$

6. $H(X_1 ... X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$ равенство, если $X_1, \ldots, X_n$ являются совместно независимыми.

Доказательство свойства 2 для условной энтропии.

$$p(x) = \sum_{y \in Y} p(x|y)p(y)$$

$$\begin{aligned} H(X|Y) - H(X) &= -\sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log p(x|y) + \\ &+ \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log p(x) = \\ &= \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log \frac{p(x)}{p(x|y)} \le \\ &\le \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\left(\frac{p(x)}{p(x|y)} - 1\right)\log e = \\ &= \left(\sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(y)p(x) - \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\right)\log e = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство свойства 2 для условной энтропии.

$$p(x) = \sum_{y \in Y} p(x|y)p(y)$$

$$\begin{aligned}
H(X|Y) - H(X) &= -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log p(x|y) + \\
&\quad + \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log p(x) = \\
&= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log \frac{p(x)}{p(x|y)} \leq \\
&\leq \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \left(\frac{p(x)}{p(x|y)} - 1 \right) \log e = \\
&= \left(\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(y)p(x) - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \right) \log e = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Доказательство свойства 2 для условной энтропии.

$$p(x) = \sum_{y \in Y} p(x|y)p(y)$$

$$\begin{aligned}
H(X|Y) - H(X) &= -\sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log p(x|y) + \\
&\quad + \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log p(x) = \\
&= \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log \frac{p(x)}{p(x|y)} \le \\
&\le \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\left(\frac{p(x)}{p(x|y)} - 1\right)\log e = \\
&= \left(\sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(y)p(x) - \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\right)\log e = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Доказательство свойства 2 для условной энтропии.

$$p(x) = \sum_{y \in Y} p(x|y)p(y)$$

$$\begin{aligned}
H(X|Y) - H(X) &= -\sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log p(x|y) + \\
&\quad + \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log p(x) = \\
&= \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\log \frac{p(x)}{p(x|y)} \leq \\
&\leq \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\left(\frac{p(x)}{p(x|y)} - 1\right)\log e = \\
&= \left(\sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(y)p(x) - \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y)\right)\log e = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Доказательство свойства 3 для энтропии.

- Рассмотрим $X = \{x, p(x)\}$, $f(x)$, $Y = \{y = f(x), x \in X\}$.
- Нужно доказать, что
$$H(Y) \leq H(X).$$
- Используя свойство 3 условной энтропии:
$$H(XY) = \underbrace{H(X|Y)}_{\geq 0} + H(Y) = \underbrace{H(Y|X)}_{=0} + H(X).$$
- Поскольку $f(x)$ определена для каждого x, получим, что $H(Y|X) = 0$, $H(X|Y) \geq 0$.

Дискретные источники

- **Дискретный источник** это устройство, которое в каждый момент времени выбирает одно сообщение из дискретного множества.
- Если множество значений времени также дискретно, то источник называется **дискретным по времени**.
- Источник считается заданным, если известна его вероятностная модель. Другими словами, мы должны определить вероятностную модель **случайного процесса** генерирования случайных сообщений на выходе источника.

Дискретные источники

Дискретный источник задан, если для $n = 1, 2, ...$ и $i = 0, 1, 2, ...$ известна вероятность

$$p(x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+n})$$

случайной последовательности из $\{X_{i+1}X_{i+2}...X_{i+n}\}$, которая начинается с индекса $i+1$ и имеет длину n, где $x_j \in X_j$, $j = i+1, ..., i+n$. Обычно рассматривается случай, когда $X_j = X$ для всех j.

Дискретный стационарный процесс

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ – дискретный случайный процесс. Рассмотрим случайный вектор $\boldsymbol{x}_{j+1}^{j+n} = (x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+n})$.

Стационарность процесса означает, что для любого n и j, $p(\boldsymbol{x}_{j+1}^{j+n})$ не зависит от сдвига во времени j, т.е., $p(\boldsymbol{x}_{j+1}^{j+n}) = p(\boldsymbol{x}_1^n)$.

Если

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i)$$

тогда источник называют **дискретным источником без памяти**.

Цепь Маркова

Дискретный случайный процесс называется **цепью Маркова порядка** s если для любого n и $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ выполняется следующее равенство:

$$p(\boldsymbol{x}) = p(x_1, \ldots, x_s) p(x_{s+1} | x_1, \ldots, x_s) \times$$

$$\times p(x_{s+2} | x_2, \ldots, x_{s+1}) \ldots p(x_n | x_{n-s}, \ldots, x_{n-1})$$

Другими словами, для цепи Маркова справедливо равенство:

$$p(x_n | x_1, \ldots, x_{n-1}) = p(x_n | x_{n-s}, \ldots, x_{n-1}),$$

условная вероятность текущего значения зависит от s предыдущих значений и не зависит от остальных.

Цепь Маркова

x_t – **состояние марковской цепи** в момент времени t. Марковская цепь порядка s задаётся начальным распределением вероятностей первых s значений (состояний) и условными вероятностями вида $p(x_n|x_{n-s},\dots,x_{n-1})$ для всевозможных последовательностей $x_{n-s},\dots,x_{n-1}$. Если эти условные вероятности не изменяются при сдвиге во времени, то марковская цепь называется **однородной**.

Цепь Маркова

Марковская цепь порядка $s = 1$ с состояниями $X = \{0, 1, \dots, M-1\}$ определяется начальным распределением $\{p(x_1), x_1 \in X\}$ и условными вероятностями

$$\pi_{ij} = P(x_t = j | x_{t-1} = i),\ i, j = 0, 1, \dots, M-1$$

Матрица переходных вероятностей:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} & \cdots & \pi_{0,M-1} \\ \pi_{10} & \pi_{11} & \cdots & \pi_{1,M-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{M-1,0} & \pi_{M-1,1} & \cdots & \pi_{M-1,M-1} \end{pmatrix}$$

Цепь Маркова

Обозначим через $\boldsymbol{p}_t = (p_t(0), \ldots, p_t(M-1))$ стохастический вектор, компоненты которого – вероятности состояний цепи Маркова в момент времени t, где $p_t(i)$, $i = 0, 1, \ldots, M-1$ – вероятность состояния i в момент времени t.

Из формулы полной вероятности следует:

$$p_{t+1}(i) = \sum_{j=0}^{M-1} p_t(j)\pi_{ji}$$

В матричном виде

$$\boldsymbol{p}_{t+1} = \boldsymbol{p}_t \Pi$$

Цепь Маркова

Для произвольного числа шагов n

$$\boldsymbol{p}_{t+n} = \boldsymbol{p}_t \Pi^n$$

Из формулы следует, что распределение вероятностей в момент времени t зависит от величины t и от начального распределения $\boldsymbol{p}_1$. Отсюда следует, что в общем случае рассматриваемый случайный процесс нестационарен. Однако, если существует стохастический вектор $\boldsymbol{p}$, так что

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\Pi,$$

то выбрав $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}$ мы получим стационарный процесс. Вектор $\boldsymbol{p}$, удовлетворяющий (1) называется **стационарным распределением вероятностей** для марковской цепи с матрицей переходных вероятностей Π.

Дискретный стационарный процесс

Энтропия символа x_t (из ансамбля $X_t = X$) сгенерированного в момент времени t не зависит от t $H(X_t) = H(X)$ и называется **одномерной энтропией источника** (процесса). Обозначим её как $H_1(X)$.

$H_1(X)$ **не учитывает зависимость между символами**, порождёнными источником.

Дискретный стационарный процесс

Рассмотрим $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $X_1 X_2 \ldots X_n = X^n$.
Энтропия $H(X_1 X_2 \ldots X_n) = H(X^n)$ называется n-**мерной энтропией** процесса.
Энтропия на символ для последовательности длины n определяется как:

$$H_n(X) = \frac{H(X^n)}{n},$$

Другой способ:

$$H(X_n | X_1, \ldots, X_{n-1}) = H(X|X^{n-1}).$$

Энтропия на сообщение:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(X) \text{ и } \lim_{n\to\infty} H(X|X^n)$$

Дискретный стационарный процесс

Theorem

Для дискретного стационарного процесса (источника)

A. $H(X|X^n)$ *не возрастает с увеличением* n;

B. $H_n(X)$ *не возрастает с увеличением* n;

C. $H_n(X) \geq H(X|X^{n-1})$;

D. $\lim_{n\to\infty} H_n(X) = \lim_{n\to\infty} H(X|X^n)$.