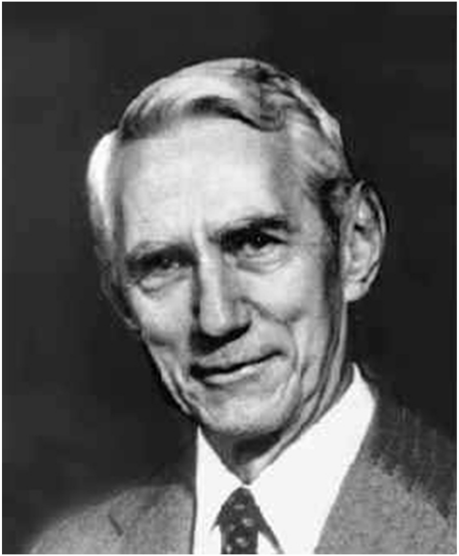
Современная теория информации

Лекция 1. Измерение информации. Энтропия.

Содержание лекции

1. Историческая заметка.
2. Дискретные ансамбли.
3. Измерение информации.
4. Энтропия

К. Шеннон, «отец» Теории информации



Клод Элвуд Шеннон, 1916–2001

Шеннон и информационный век

Мы пишем, чтобы предложить памятную [почтовую] марку в честь столетия со дня рождения Клода Элвуда Шеннона, отца информационного века. Информационные системы, такие как смартфоны, MP3-плееры и Интернет изменяют нашу жизнь. Они хранят наши воспоминания, объдиняют наши сообщества и развлекают. Они облегчают доставку медицинских услуг и обеспечивают основы для наших финансовых, промышленных и правительственные организаций.

Шеннон и информационный век

Подобно тому как Ньютон открыл законы гравитации и движения, Шеннон открыл законы информации. Раскрывая простые законы, лежащие в основе таких чрезвычайно сложных проблем, как связь, вычислительная техника, память и криптография, Шеннон открыл дверь, которая привела нас к информационной эпохе. Его игривый дух и использование науки, технологии, техники и математики для решения реальных проблем, которые меняют мир, будут вдохновлять как молодых, так и старых... Настоящей петицией мы просим USPS [U.S. Postal Service] создать марку в его честь.[1].

[1] president of IEEE Mary Sue Coleman, president of Bell Labs Gee Rittenhouse and president of MIT Rafael Reif, 2013.

Реакция на работу Шеннона в 1940-х

Эта статья плохо мотивирована и чрезмерно абстрактна. Неясно, к какой практической проблеме она имеет отношение. Автор утверждает, что «семантические аспекты коммуникации не имеют отношения к инженерным проблемам», что, по-видимому, указывает на то, что его теория подходит в основном для передачи тарабарщины. Увы, люди не платят, чтобы тарабарщина передавалась повсюду.

Реакция на работу Шеннона в 1940-х

Я не понимаю значимости дискретных источников: независимо от того, что делается, в конце концов, сигнал ... всегда будет аналоговым. Автор упоминает вычислительные машины ... дюжины или около того таких машин будет достаточно для всех вычислений, которые нам ... нужны в обозримом будущем... IBM решил не заниматься бизнесом в сфере электронных вычислительных машин и этот журнал, вероятно, должен сделать тоже самое[2].

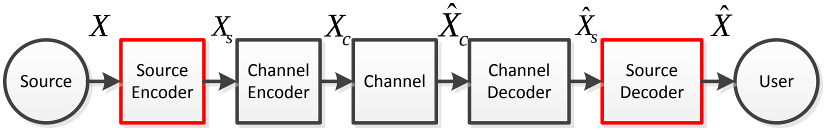
- С 1953 года издаётся журнал "IEEE Transactions on Information Theory".

[2] Santini S. We are sorry to inform you... IEEE Computer, 2005.

Теория информации в СССР и России

- В 1961 году был создан *Институт проблем передачи информации* (ИППИ) РАН.
  - С 1965 года издаётся журнал "Проблемы передачи информации".
- В 1962 году была образована *кафедра технической кибернетики* ЛИАП (ныне СПбГУАП).
  - В 1982 году издан учебник Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш., "Курс теории информации".
  - В 2010 году издан учебник Кудряшов Б.Д., "Теория информации".

Общая схема системы связи[3]



- *Кодирование дискретных источников*: отвечает за представление сообщений источника в наиболее компактной форме для хранения или передачи.
- *Помехоустойчивое кодирование*: отвечает за защиту сообщений от помех в канале связи.

[3] Shannon, C.E. ,"A Mathematical Theory of Communication", Bell System Technical Journal, 1948.

Практическое применение

- Архивирование данных (ZIP, RAR, 7-Zip);
- Сжатие речи (CELP);
- Сжатие звука (MP3);
- Сжатие изображений (JPEG, JPEG2000, PNG);
- Сжатие видео (MPEG-2, H.264/AVC, H.265/HEVC, H.266/VVC);

Практическое применение

- Архивирование данных (ZIP, RAR, 7-Zip);
- Сжатие речи (CELP);
- Сжатие звука (MP3);
- Сжатие изображений (JPEG, JPEG2000, PNG);
- Сжатие видео (MPEG-2, H.264/AVC, H.265/HEVC, H.266/VVC);

Практическое применение

- Архивирование данных (ZIP, RAR, 7-Zip);
- Сжатие речи (CELP);
- Сжатие звука (MP3);
- Сжатие изображений (JPEG, JPEG2000, PNG);
- Сжатие видео (MPEG-2, H.264/AVC, H.265/HEVC, H.266/VVC);

Практическое применение

- Архивирование данных (ZIP, RAR, 7-Zip);
- Сжатие речи (CELP);
- Сжатие звука (MP3);
- Сжатие изображений (JPEG, JPEG2000, PNG);
- Сжатие видео (MPEG-2, H.264/AVC, H.265/HEVC, H.266/VVC);

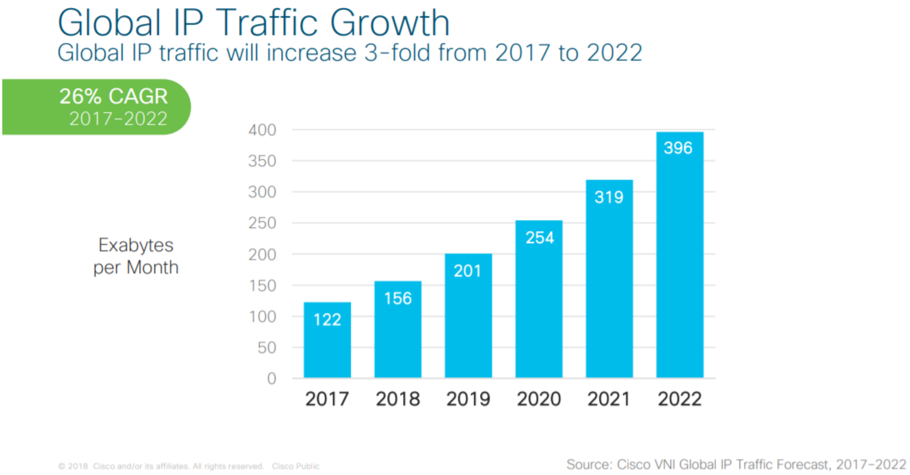
Практическое применение

- Архивирование данных (ZIP, RAR, 7-Zip);
- Сжатие речи (CELP);
- Сжатие звука (MP3);
- Сжатие изображений (JPEG, JPEG2000, PNG);
- Сжатие видео (MPEG-2, H.264/AVC, H.265/HEVC, H.266/VVC);

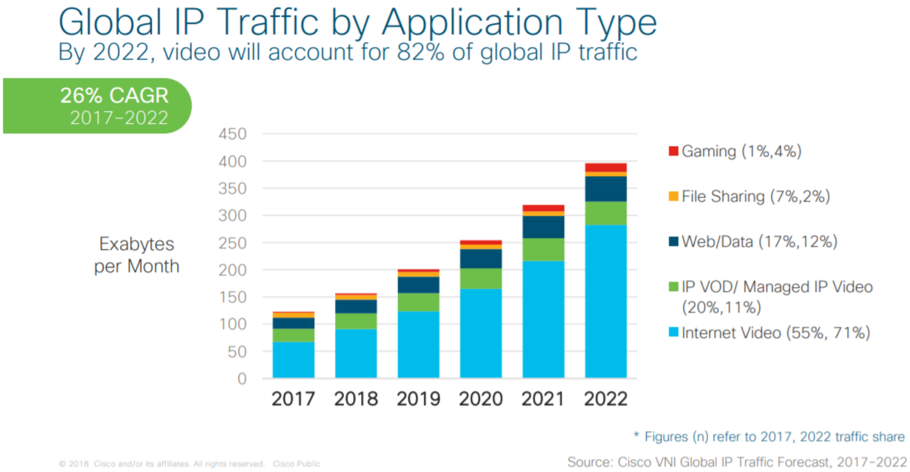
Практическое применение

- Архивирование данных (ZIP, RAR, 7-Zip);
- Сжатие речи (CELP);
- Сжатие звука (MP3);
- Сжатие изображений (JPEG, JPEG2000, PNG);
- Сжатие видео (MPEG-2, H.264/AVC, H.265/HEVC, H.266/VVC);

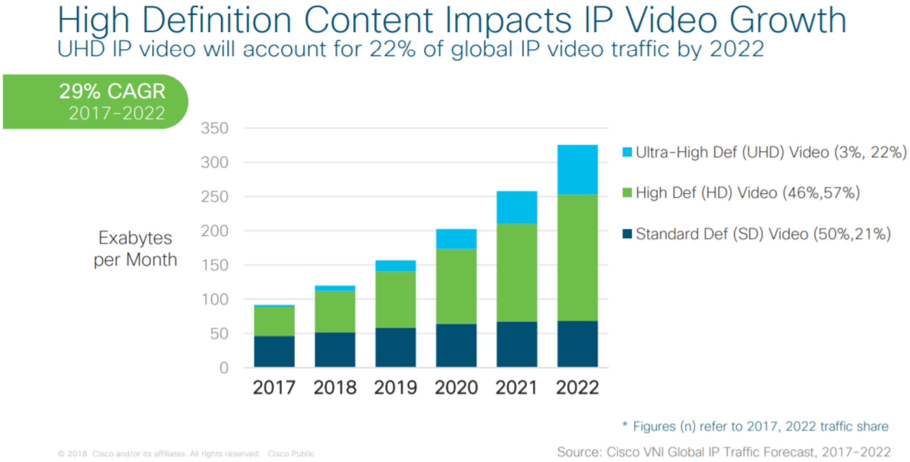
Практическое применение



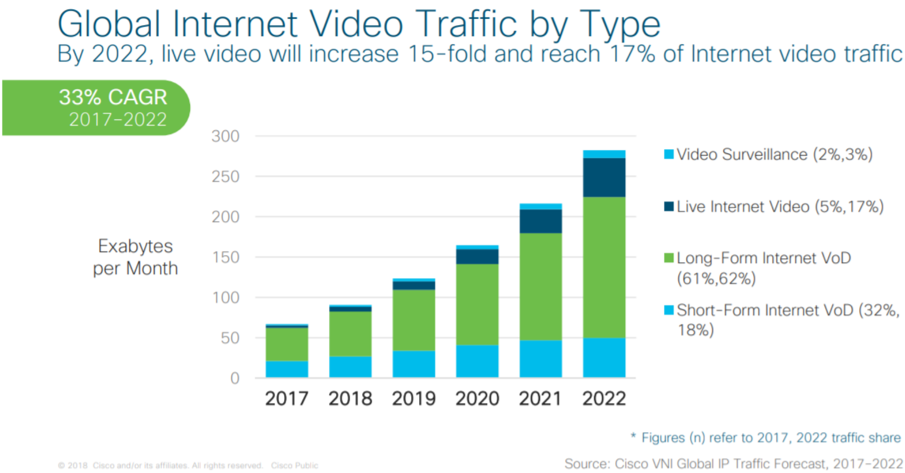
Практическое применение



Практическое применение



Практическое применение



Дискретные ансамбли

- $X = \{x\}$ – дискретное множество, содержащее конечное число элементов (элементарных событий) $x \in X$.
- Множество чисел $\{p(x)\}$, $p(x) \geq 0$, $\sum\limits_{x} p(x) = 1$ задаёт *распределение вероятностей*.
- $X = \{x, p(x)\}$ – **дискретный ансамбль.**
- $\Omega = \{A\}$ – множество всевозможных подмножеств X.
- Вероятность сложного события A:

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x), A \in \Omega.$$

Дискретные ансамбли

- Обозначим произведение событий A и B как $AB = A \cap B$.
- Для произвольной пары событий $A, B \subseteq X$ **условная вероятность**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{если } P(B) \neq 0, \text{ иначе } 0.$$

- Пусть $X = \{00, 01, 10, 11\}$, где 0 – выпала решка, 1 – орёл. Пусть A означает, что два раза выпал орёл, $A = \{11\}$, B – что из двух раз хотя бы один раз выпал орёл, $B = \{01, 10, 11\}$.

$$P(A|B) = ?$$

Дискретные ансамбли

- Обозначим произведение событий A и B как $AB = A \cap B$.
- Для произвольной пары событий $A, B \subseteq X$ **условная вероятность**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{если } P(B) \neq 0, \text{ иначе } 0.$$

- Пусть $X = \{00, 01, 10, 11\}$, где 0 – выпала решка, 1 – орёл. Пусть A означает, что два раза выпал орёл, $A = \{11\}$, B – что из двух раз хотя бы один раз выпал орёл, $B = \{01, 10, 11\}$.

$$P(A|B) = \frac{P\{11\}}{P\{01, 10, 11\}} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Дискретные ансамбли

- Обозначим произведение событий A и B как $AB = A \cap B$.
- Для произвольной пары событий $A, B \subseteq X$ **условная вероятность**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{если } P(B) \neq 0, \text{ иначе } 0.$$

- Из этого определения следует

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

- В общем случае:

$$P(A_1 ... A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1...A_{n-1}).$$

Дискретные ансамбли

- События $A,B \in \Omega$ независимы, если:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

- $A_1, ..., A_n \in \Omega$ совместно независимы, если:

$$P(A_1...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

- Эквивалентно, $A, B \in \Omega$ независимы, если:

$$P(A|B) = P(A);\ P(B|A) = P(B).$$

- Вероятность объединения событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

$$P(\bigcup_{m=1}^{M} A_m) \leq \sum_{m=1}^{M} P(A_m)$$

Дискретные ансамбли

Задачи: найти вероятность существования пути из A в C

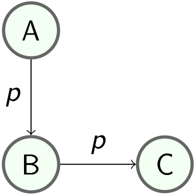


Рис.: Пример 1

Рис.: Пример 2

Рис.: Пример 3

Рис.: Пример 4

Дискретные ансамбли

Задачи: найти вероятность существования пути из A в C

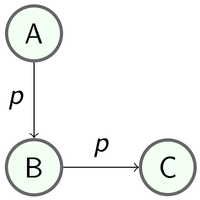


Рис.: Пример 1

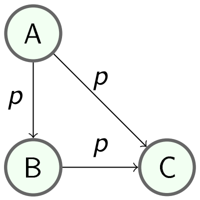


Рис.: Пример 2

Рис.: Пример 3

Рис.: Пример 4

Дискретные ансамбли

Задачи: найти вероятность существования пути из A в C

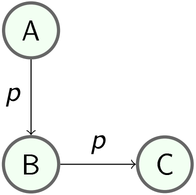


Рис.: Пример 1

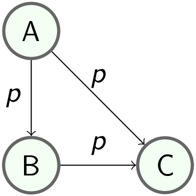


Рис.: Пример 2

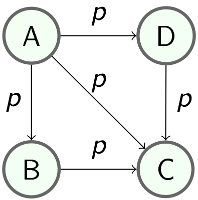


Рис.: Пример 3

Рис.: Пример 4

Дискретные ансамбли

Задачи: найти вероятность существования пути из A в C

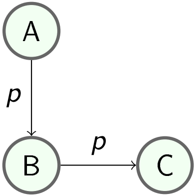


Рис.: Пример 1

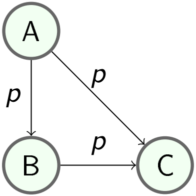


Рис.: Пример 2

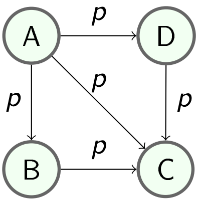


Рис.: Пример 3

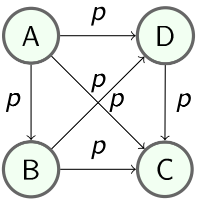


Рис.: Пример 4

Дискретные ансамбли

- Формула полной вероятности:

  Пусть даны M несовместных событий[4] $H_1, ..., H_M$ (''гипотез''), таких что $P\left(\bigcup_{m=1}^{M} H_m\right) = 1$. Тогда вероятность произвольного события A

$$P(A) = \sum_{m=1}^{M} P(A|H_m)P(H_m).$$

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

- Формула апостериорной вероятности (Байеса):

$$P(H_j|A) = \frac{P(AH_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{m=1}^{M} P(A|H_m)P(H_m)}.$$

[4] пересечение – пустое множество

Дискретные ансамбли

Пример

- Формула апостериорной вероятности (Байеса):

$$P(H_j|A) = \frac{P(AH_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum\limits_{m=1}^{M} P(A|H_m)P(H_m).}$$

- Пусть $p_1 = 0.9$ – вероятность бракованного изделия у первого рабочего, у второго – $p_2 = 0.5$, третьего – $p_2 = 0.2$. Первый изготовил $n_1 = 800$ деталей, второй – $n_2 = 600$, третий – $n_3 = 900$. Случайная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что её изготовил второй рабочий?
  - H_1, H_2 и H_3 – гипотезы, что деталь произвёл первый, второй или третий рабочий, соответственно, $P(H_i) = \frac{n_i}{\sum n_i}$.
  - A – событие, что деталь оказалась бракованной, $P(A|H_i) = p_i$.
  - $$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)} = 0.25.$$

Дискретные ансамбли

Пример

- Формула апостериорной вероятности (Байеса):

$$P(H_j|A) = \frac{P(AH_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum\limits_{m=1}^{M} P(A|H_m)P(H_m).}$$

- Пусть $p_1 = 0.9$ – вероятность бракованного изделия у первого рабочего, у второго – $p_2 = 0.5$, третьего – $p_2 = 0.2$. Первый изготовил $n_1 = 800$ деталей, второй – $n_2 = 600$, третий – $n_3 = 900$. Случайная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что её изготовил второй рабочий?
  - H_1, H_2 и H_3 – гипотезы, что деталь произвёл первый, второй или третий рабочий, соответственно, $P(H_i) = \frac{n_i}{\sum n_i}$.
  - A – событие, что деталь оказалась бракованной, $P(A|H_i) = p_i$.
  -

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)} = 0.25.$$

Дискретные ансамбли

Пример

- Формула апостериорной вероятности (Байеса):

$$P(H_j|A) = \frac{P(AH_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum\limits_{m=1}^{M} P(A|H_m)P(H_m).}$$

- Пусть $p_1 = 0.9$ – вероятность бракованного изделия у первого рабочего, у второго – $p_2 = 0.5$, третьего – $p_2 = 0.2$. Первый изготовил $n_1 = 800$ деталей, второй – $n_2 = 600$, третий – $n_3 = 900$. Случайная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что её изготовил второй рабочий?
  - H_1, H_2 и H_3 – гипотезы, что деталь произвёл первый, второй или третий рабочий, соответственно, $P(H_i) = \frac{n_i}{\sum n_i}$.
  - A – событие, что деталь оказалась бракованной, $P(A|H_i) = p_i$.
  -

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)} = 0.25.$$

Дискретные ансамбли

Пример

- Формула апостериорной вероятности (Байеса):

$$P(H_j|A) = \frac{P(AH_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum\limits_{m=1}^{M} P(A|H_m)P(H_m).}$$

- Пусть $p_1 = 0.9$ – вероятность бракованного изделия у первого рабочего, у второго – $p_2 = 0.5$, третьего – $p_2 = 0.2$. Первый изготовил $n_1 = 800$ деталей, второй – $n_2 = 600$, третий – $n_3 = 900$. Случайная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что её изготовил второй рабочий?
    - H_1, H_2 и H_3 – гипотезы, что деталь произвёл первый, второй или третий рабочий, соответственно, $P(H_i) = \frac{n_i}{\sum n_i}$.
    - A – событие, что деталь оказалась бракованной, $P(A|H_i) = p_i$.
    -

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)} = 0.25.$$

Дискретные ансамбли

- Произведение ансамблей $X = \{x, p_X(x)\}$ и $Y = \{y, p_Y(y)\}$ определяется совместным распр. $\{p_{XY}(x,y)\}$, $\{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$.
- Ансамбль произведений $XY = \{(x,y), p_{XY}(x,y)\}$.
- Условное распределение вероятностей:

$$p(x|y) = \begin{cases} \frac{p(x,y)}{p(y)}, & \text{if } p(y) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad x \in X.$$

- Ансамбли X и Y независимы, если

$$p(x,y) = p(x)p(y), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Измерение информации

Интуитивный подход

Количество информации = затратам (во времени или пространстве), необходимым для передачи (хранения) данных.

Данные	**Представление**
Числа (измерения)	Длина зависит от диапазона
Текст	8 бит (1 байт) на букву
Цифровая речь	13 бит на отсчет
Изображения (bmp)	3 байта на пиксель

Измерение информации

Собственная информация

$X = \{x, p(x)\}$ – ансамбль, $\mu(x)$ – мера (количество) информации в x.

- *Неотрицательность:* $\mu(x) \geq 0$.
- $\mu(x)$ должна быть функцией от $p(x)$.
- *Монотонность*: если $x, y \in X$, $p(x) \geq p(y)$, тогда $\mu(x) \leq \mu(y)$.
- *Аддитивность:* Если x и y независимы, тогда $\mu(x, y) = \mu(x) + \mu(y)$.
- $\mu(p(x)^k) = k\mu(p(x))$.

Перечисленные требования приводят к следующему определению:

$$I(x) = -\log p(x)\ , x \in X.$$

Измерение информации

Собственная информация

$X = \{x, p(x)\}$ – ансамбль, $\mu(x)$ – мера (количество) информации в x.

- *Неотрицательность:* $\mu(x) \geq 0$.
- $\mu(x)$ должна быть функцией от $p(x)$.
- *Монотонность*: если $x, y \in X$, $p(x) \geq p(y)$, тогда $\mu(x) \leq \mu(y)$.
- *Аддитивность:* Если x и y независимы, тогда $\mu(x, y) = \mu(x) + \mu(y)$.
- $\mu(p(x)^k) = k\mu(p(x))$.

Перечисленные требования приводят к следующему определению:

$$I(x) = -\log p(x)\ , x \in X.$$

Измерение информации

Собственная информация

$X = \{x, p(x)\}$ – ансамбль, $\mu(x)$ – мера (количество) информации в x.

- *Неотрицательность:* $\mu(x) \geq 0$.
- $\mu(x)$ должна быть функцией от $p(x)$.
- *Монотонность*: если $x, y \in X$, $p(x) \geq p(y)$, тогда $\mu(x) \leq \mu(y)$.
- *Аддитивность:* Если x и y независимы, тогда $\mu(x, y) = \mu(x) + \mu(y)$.
- $\mu(p(x)^k) = k\mu(p(x))$.

Перечисленные требования приводят к следующему определению:

$$I(x) = -\log p(x)\ , x \in X.$$

Измерение информации

Собственная информация

$X = \{x, p(x)\}$ – ансамбль, $\mu(x)$ – мера (количество) информации в x.

- *Неотрицательность:* $\mu(x) \geq 0$.
- $\mu(x)$ должна быть функцией от $p(x)$.
- *Монотонность*: если $x, y \in X$, $p(x) \geq p(y)$, тогда $\mu(x) \leq \mu(y)$.
- *Аддитивность:* Если x и y независимы, тогда $\mu(x, y) = \mu(x) + \mu(y)$.
- $\mu(p(x)^k) = k\mu(p(x))$.

Перечисленные требования приводят к следующему определению:

$$I(x) = -\log p(x)\ , x \in X.$$

Измерение информации
Собственная информация

$X = \{x, p(x)\}$ – ансамбль, $\mu(x)$ – мера (количество) информации в x.

- *Неотрицательность:* $\mu(x) \geq 0$.
- $\mu(x)$ должна быть функцией от $p(x)$.
- *Монотонность*: если $x, y \in X$, $p(x) \geq p(y)$, тогда $\mu(x) \leq \mu(y)$.
- *Аддитивность:* Если x и y независимы, тогда $\mu(x, y) = \mu(x) + \mu(y)$.
- $\mu(p(x)^k) = k\mu(p(x))$.

Перечисленные требования приводят к следующему определению:

$$I(x) = -\log p(x)\ , x \in X.$$

Измерение информации
Собственная информация

$X = \{x, p(x)\}$ – ансамбль, $\mu(x)$ – мера (количество) информации в x.

- *Неотрицательность:* $\mu(x) \geq 0$.
- $\mu(x)$ должна быть функцией от $p(x)$.
- *Монотонность*: если $x, y \in X$, $p(x) \geq p(y)$, тогда $\mu(x) \leq \mu(y)$.
- *Аддитивность:* Если x и y независимы, тогда $\mu(x, y) = \mu(x) + \mu(y)$.
- $\mu(p(x)^k) = k\mu(p(x))$.

Перечисленные требования приводят к следующему определению:

$$I(x) = -\log p(x)\ , x \in X.$$

Измерение информации

Энтропия

Definition

$$
\begin{aligned}
H(X) &= \mathrm{E}[I(x)].\\
H(X) &= \sum_x p(x)I(x).\\
H(X) &= \sum_x -p(x)\log p(x).
\end{aligned}
$$

Энтропия

Примеры

A: $X = \{a, b, c\}$; $p(a) = p(b) = p(c) = 1/3$,
$I(a) = I(b) = I(c) = H(X) = \log 3 = 1.59$ бит,

B: $X = \{a, b, c\}$; $p(a) = p(b) = 1/4$, $p(c) = 1/2$
$I(a) = I(b) = 2$, $I(c) = 1$
$H = 1.5$ бита.

C: $X = \{0, 1\}$; $p(0) = 0.9$, $p(1) = 0.1$,
$I(0) = 0.152$, $I(1) = 3.322$;
$H = 0.469$ бит.

D: $X = \{0, 1\}$, $p(0) = p(1) = 1/2$
$I(0) = I(1) = H(X) = 1$ бит.

1. $H(X) \geq 0$.
2. $H(X) \leq \log|X|$. Равенство, если все элементы X равновероятны.
3. Если $X = \{x, p(x)\}$ и $Y = \{y = f(x), p(y)\}$, тогда $H(Y) \leq H(X)$ с равенством, если f обратима.
4. Если X и Y независимы, тогда

$$H(XY) = H(X) + H(Y).$$

5 $H(X)$ – выпуклая $\cap$ функция распределения вероятностей на элементах ансамбля X.

6 Пусть $X = \{x, p(x)\}$ и $A \subseteq X$. Введем ансамбль $X' = \{x, p'(x)\}$ и $p'(x)$ как:

$$p'(x) = \begin{cases} \frac{P(A)}{|A|}, x \in A, \\ p(x), x \notin A. \end{cases}$$

Тогда $H(X') \geq H(X)$.

7 Если для двух ансамблей X и Y распределения вероятностей отличаются только порядком следования элементов, то $H(X) = H(Y)$.

Доказательство свойства (2)

$$\begin{aligned}
H(X) - \log|X| &\overset{\text{(a)}}{=} -\sum_{x\in X} p(x)\log p(x) - \sum_{x\in X} p(x)\log|X| = \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \sum_{x\in X} p(x)\log\frac{1}{p(x)|X|} \leq \\
&\overset{\text{(c)}}{\leq} \log e\left[\sum_{x\in X} p(x)\left(\frac{1}{p(x)|X|} - 1\right)\right] = \\
&= \log e\left(\sum_{x\in X}\frac{1}{|X|} - \sum_{x\in X} p(x)\right) = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Доказательство свойства (2)

$$
\begin{aligned}
H(X) - \log|X| &\overset{(a)}{=} -\sum_{x\in X} p(x)\log p(x) - \sum_{x\in X} p(x)\log|X| = \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{x\in X} p(x)\log\frac{1}{p(x)|X|} \le \\
&\overset{(c)}{\le} \log e\left[\sum_{x\in X} p(x)\left(\frac{1}{p(x)|X|} - 1\right)\right] = \\
&= \log e\left(\sum_{x\in X}\frac{1}{|X|} - \sum_{x\in X} p(x)\right) = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

Доказательство свойства (2)

$$\begin{aligned} H(X) - \log|X| &\overset{(a)}{=} -\sum_{x\in X} p(x)\log p(x) - \sum_{x\in X} p(x)\log|X| = \\ &\overset{(b)}{=} \sum_{x\in X} p(x)\log\frac{1}{p(x)|X|} \le \\ &\overset{(c)}{\le} \log e\left[\sum_{x\in X} p(x)\left(\frac{1}{p(x)|X|} - 1\right)\right] = \\ &= \log e\left(\sum_{x\in X}\frac{1}{|X|} - \sum_{x\in X} p(x)\right) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Доказательство свойства (2)

$$
\begin{aligned}
H(X) - \log|X| &\overset{\text{(a)}}{=} -\sum_{x\in X} p(x)\log p(x) - \sum_{x\in X} p(x)\log|X| = \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \sum_{x\in X} p(x)\log\frac{1}{p(x)|X|} \le \\
&\overset{\text{(c)}}{\le} \log e\left[\sum_{x\in X} p(x)\left(\frac{1}{p(x)|X|} - 1\right)\right] = \\
&= \log e\left(\sum_{x\in X}\frac{1}{|X|} - \sum_{x\in X} p(x)\right) = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

Доказательство (c)

- $\ln x \le x - 1 \iff \log x \le (x-1)\log e$.

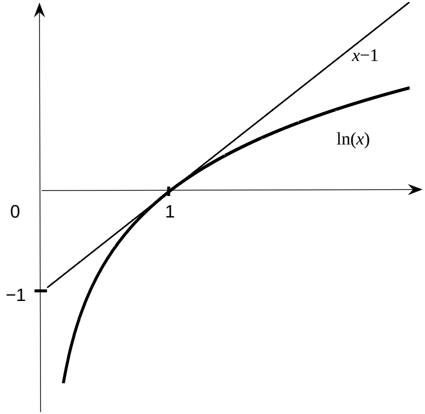


Рис.: Графическая интерпретация $\ln(x) \le x - 1$