Современная теория информации

Лекция 7. Кодирование с заданным критерием искажения. Квантование.

Содержание лекции

1. Меры искажения.
2. Функция скорость-искажение.
3. Теоретическая функция скорость-искажение.
4. Квантование.

Кодирование с заданным критерием искажения

Меры искажения

- Рассмотрим множество $X = \{x\}$, элементами которого являются сообщения источника и множество $Y = \{y\}$, которое будем называть аппроксимирующим.
- Мера искажения $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ определяется как функция на множестве $X^n \times Y^n = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} \in X^n, \boldsymbol{y} \in Y^n\}$ и обладает следующими ограничениями:
  1. Для любых $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)$
  $$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i),$$
  2. $d(x, y) \geq 0$ для всех $x \in X, y \in Y$.

Кодирование с заданным критерием искажения

Меры искажения

1. Вероятностная (Хеммингова) мера искажения:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i) \approx \mathrm{P}(x \neq y)$$

2. Квадратичная мера искажения: $d(x,y) = (x-y)^2$.

$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$ – мощность шума, который появляется в результате кодирования.

3. Абсолютная мера искажения: $d(x,y) = |x-y|$.

$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|.$$

Кодирование с заданным критерием искажения

Общая идея

1. Последовательность сообщений источника разбивается на блоки длины n.
2. Каждый из блоков $\boldsymbol{x}$ аппроксимируется последовательностью $\boldsymbol{y} \in Y^n$.
3. Аппроксимирующие подмножества выбираются из *кодовой книги* (дискретного подмножества) $B = \{\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_M\} \subseteq Y^n$, $M = |B|$.
4. Задача кодера: выбрать наилучшее слово $\boldsymbol{b}_m$ из B и передать по каналу (сохранить) m, где $m = \arg\min_{i \in M} d_n(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x})$.
5. Декодер тоже хранит B и по индексу m выдаёт аппроксимирующую последовательность $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_m$.

Кодирование с заданным критерием искажения

Общая идея

- Для передачи номера m достаточно $\lceil M \rceil$ бит, поэтому скорость кода
$$R = \frac{\log M}{n} \quad \text{бит/сообщение.}$$
- При фиксированной кодовой книге и вероятностной модели источника $p(\boldsymbol{x})$ можно подсчитать *среднюю ошибку*
$$D = \mathrm{E}\left\{d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\right\} = \mathrm{E}\left\{d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\right\},$$
где $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ – аппроксимирующая последовательность, которую декодер выбирает для $\boldsymbol{x}$.

Кодирование с заданным критерием искажения

Функция скорость-искажение

- Для заданного n можно варьировать различными B. В результате возникнут различные пары (D, R).
- Задача: минимизировать D при заданном R или минимизировать R при заданном D.
- В итоге, можно получить функцию скорость-искажение $R(D)$ (rate-distortion function) вида

$$R(D) = \inf_n \min_{B:D(R) \le D} R_n(B),$$

  где inf – нижняя грань.
- Также можно определить функцию искажение-скорость $D(R)$.

Кодирование с заданным критерием искажения

Теоретическая функция скорость-искажение

- Как вычислить теоретико-информационную $R(D)$ не привязанную к процедуре кодирования (без перебора всех возможных кодовых книг и т.д.)?

Кодирование с заданным критерием искажения

Средняя взаимная информация

- Взаимная информация для любой пары $(x, y) \in XY$[1]

$$I(x; y) = I(x) - I(x|y) = \log \frac{p(x|y)}{p(x)}.$$

- Средняя взаимная информация:

$$I(X; Y) = \mathrm{E}[I(x; y)] = \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}.$$

- Симметричность: $I(X; Y) = I(Y; X)$.
- Неотрицательность: $I(X; Y) \geq 0$.
- Если X и Y независимы, то $I(X; Y) = 0$.
- $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(XY)$

[1] Количество информации об x, содержащейся в y

Кодирование с заданным критерием искажения

Теоретическая функция скорость-искажение $H(D)$

- Y^n – аппроксимирующее множество для X^n.
- $I(X^n; Y^n)$ – среднее количество информации в Y^n об X^n, доставленное декодеру.
- Поэтому, затраты на одну букву составляют $\frac{1}{n} I(X^n; Y^n)$
- Пусть $\phi_n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$ – условные вероятности, соответствующие всем возможным способам кодирования.
- Нас интересуют только такие ϕ_n, что $D(\phi_n) \leq D$, поэтому $H(D)$ определяется как

$$H(D) = \inf_n \min_{\phi_n : D(\phi_n) \leq D} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n).$$

Кодирование с заданным критерием искажения

Теоретическая функция скорость-искажение $H(D)$

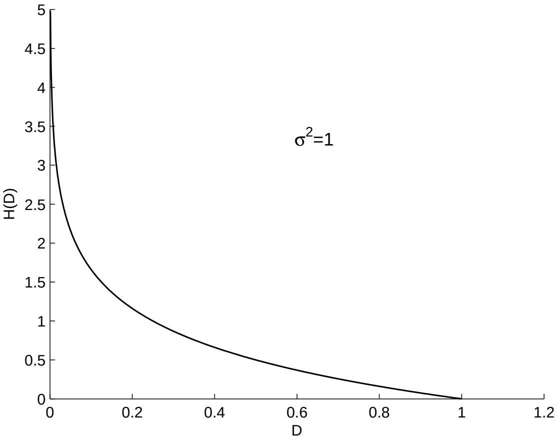
- $H(D) \geq 0$.
- $H(D)$ – невозрастающая функция от D.
- Для стационарного источника без памяти

$$H(D) = \min_{\phi : D(\phi) \leq D} I(X;Y).$$

Кодирование с заданным критерием искажения

$H(D)$ для Гауссовского источника

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad H(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}, & 0 \le D \le \sigma^2 \\ 0, & D > \sigma^2 \end{cases}$$



Кодирование с заданным критерием искажения

Прямая и обратная теоремы кодирования для постоянного источника

Теорема

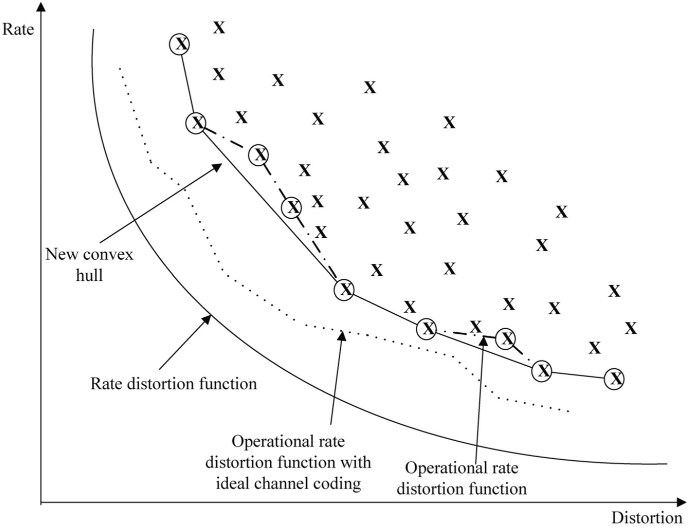
Пусть заданы дискретный алфавит постоянного источника $X = \{x\}$, *аппроксимирующий алфавит* $Y = \{y\}$ *и мера искажения* $\{d(x, y), x \in X, y \in Y\}$. *Для любого кода со скоростью* R *и средней ошибкой* D *имеет место неравенство* $R \geq H(D)$.

Теорема

Для дискретного постоянного источника $X = \{x, p(x)\}$, *аппроксимирующего множества* $Y = \{y\}$ *и меры искажения* $d(x, y)$, *для любых положительных* ϵ, δ *найдётся достаточно большое число* n_0, *такое что, при* $n \geq n_0$ *при любом заданном* D *найдётся код со скоростью* $R \leq H(D) + \delta$ *и средним искажением не больше* $D + \epsilon$.

Кодирование с заданным критерием искажения

Теоретическая функция скорость-искажение $H(D)$



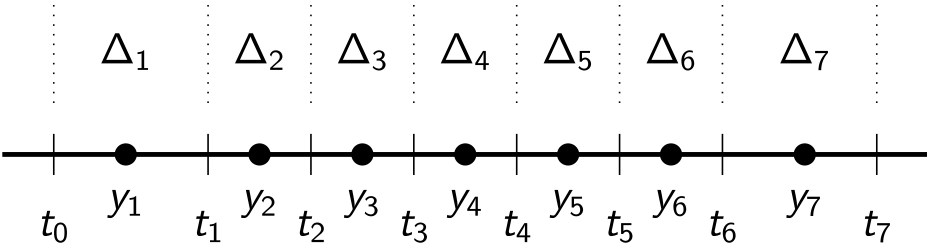
Кодирование с заданным критерием искажения

Квантование

- Квантование отвечает за аппроксимацию входного вектора $\boldsymbol{x}$ вектором $\boldsymbol{y}$.
- Виды квантования:
  - *Скалярное*, если входные символы обрабатываются независимо.
    - Равномерное.
    - Неравномерное.
  - *Векторное*, если входные символы обрабатываются блоками.

Кодирование с заданным критерием искажения

Равномерное скалярное квантование



- Область значений $x \in X, X = (-\infty, \infty)$ разбивается на отрезки (кванты) одинаковой длины $\Delta = t_m - t_{m-1}$.
- На стороне кодера, для очередного значения x_i определяется соответствующий квант Δ_m, номер которого передаётся декодеру.
- Декодер по номеру кванта m однозначно определяет соответствующее аппроксимирующее значение y_i, например, $y_i = \frac{t_m + t_{m-1}}{2}$.

Кодирование с заданным критерием искажения

Равномерное скалярное квантование

- Пусть $x \in X$ – непрерывная величина с плотностью распределения $f(x)$.
- Допустим, что Δ принимает небольшие значения (точность квантования высока). В этом случае плотность распределения можно считать постоянной в пределах кванта, т.е., $f(x) \approx f(y_j)$.
- Тогда вероятность попадания в квант j равна

$$p_j = \int_{b_{i-1}}^{b_i} f(x)dx \approx \Delta f(y_j).$$

- Тогда искажение D можно оценить как

$$D = \sum_j \int_{I_j} (x - y_j)^2 f(x)dx = \sum_j \int_{I_j} (x - y_j)^2 f(y_j)dx \approx$$

$$\approx \sum_j \frac{p_j}{\Delta} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} (x - y_j)^2 dx = \sum_j \frac{p_j}{\Delta} \frac{(x - y_j)^3}{3} \Big|_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12}.$$

- $D \approx \frac{\Delta^2}{12}$.
- Скорость можно оценить как

$$
\begin{aligned}
R &= -\sum_j p_j \log p_j \approx -\sum_j p_j \log(\Delta f(y_j)) = \\
&= -\sum_j p_j \int_{I_j} f(x) \log(\Delta f(y_j)) dx \approx -\sum_j p_j \int_{I_j} f(x) \log(\Delta f(x)) dx = \\
&- \int_X f(x) \log f(x) dx - \log \Delta = h(X) - \log \Delta.
\end{aligned}
$$

Кодирование с заданным критерием искажения

Равномерное скалярное квантование

- Граница Шеннона. Функция скорость-искажение источника независимых сл. величин с дисперсией σ^2 и дифференциальной энтропией $h(X)$ при квадратическом критерии качества удовлетворяет неравенству

$$H(D) \geq h(X) - \frac{1}{2} \log \sqrt{2\pi e D}$$

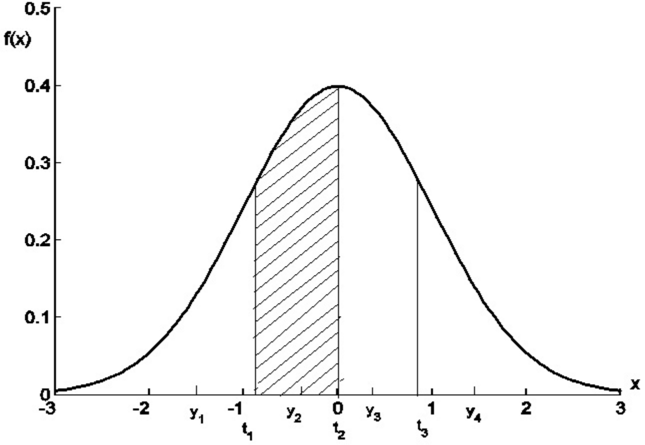
- Выигрыш от других других типов квантования (векторного) при $\Delta \to 0$ можно оценить как

$$R(D) - H(D) \leq \frac{1}{2} \log \frac{\pi e}{6} = 0.2546.$$

- В итоге получим, что максимальный выигрыш за счет векторного квантования равен 0.2546 бит на сивмол.

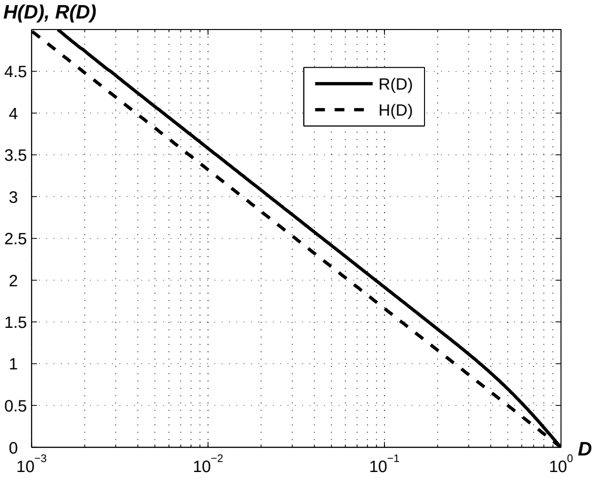
Кодирование с заданным критерием искажения

Неравномерное скалярное квантование



Кодирование с заданным критерием искажения

Скалярное квантование для Гауссовского источника



Векторное квантование

Сравнение со скалярным квантованием

Скалярное квантование	Векторное квантование
Аппроксимирующие значения $Y = \{y_i\} \subset X$	Кодовая книга $B = \{\boldsymbol{b}_i\} \subset X^n$
$\|Y\|$=M	|B|=M
$R = H(Y) \leq \log M$	$R = \frac{H(B)}{n} \leq \frac{\log M}{n}$
Кванты Δ_i	Решающие области S_i

Векторное квантование

Постановка задачи

Искажение:

$$D = \frac{1}{n} \sum_{j} \sum_{\boldsymbol{x} \in S_j} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_j\|^2 \, p(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

Если $p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|S_j|}$, то приравнивая производные (1) по $\boldsymbol{b}_j$ к нулю, получим:

$$\boldsymbol{b}_j = \frac{\sum\limits_{\boldsymbol{x} \in S_j} \boldsymbol{x}}{|S_j|}, \quad j = 1, ..., M.$$

Для $\boldsymbol{x}$ выбирается кодовое слово $\boldsymbol{c}_i$, такое что

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_i||^2 \leq ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_j||^2,$$

при $i \neq j$. Это неравенство определяет границы разрешающей области S_i от S_j.

Векторное квантование

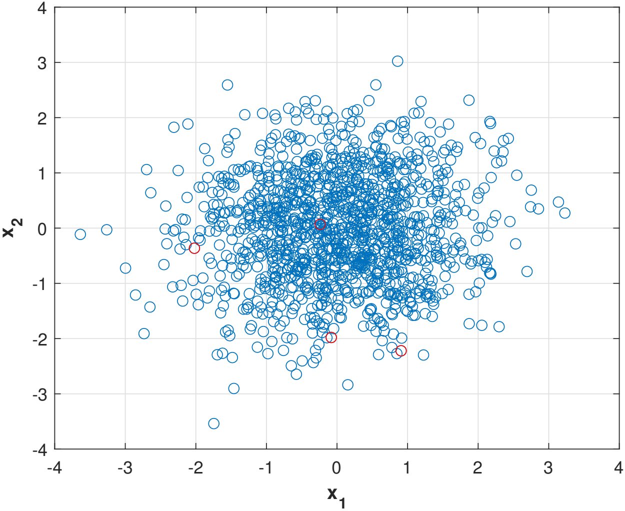
Алгоритм Линде-Бузо-Грея (минимизирует D при заданном M)

Input: Векторы $(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_K)$, $\boldsymbol{x}_i \in X^n$, объём книги M, ε, T.

$D \leftarrow \infty$, $D_c \leftarrow \max\limits_{i=1,\dots,K} ||\boldsymbol{x}_i||^2$.
Выбрать начальные $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, ..., M$..
while $D - D_c > \varepsilon$ and $t < T$ **do**
  for j=1,...,M **do**
    $N_j \leftarrow 0$, $\boldsymbol{s}_j \leftarrow \boldsymbol{0}$
  end for
  $D_c \leftarrow D$, $D \leftarrow 0$.
  for i=1,...,K **do**
    Найти $\boldsymbol{s}_j$, ближайший к $\boldsymbol{x}_i$.
    $D \leftarrow D + \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{b}_j\|^2$.
    $\boldsymbol{s}_j \leftarrow \boldsymbol{s}_j + \boldsymbol{x}_i$.
    $N_j \leftarrow N_j + 1$.
  end for
  for j=1,...,M **do**
    $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{s}_j / N_j$.
  end for
  $D \leftarrow D/K$.
  $t \leftarrow t + 1$.
end while

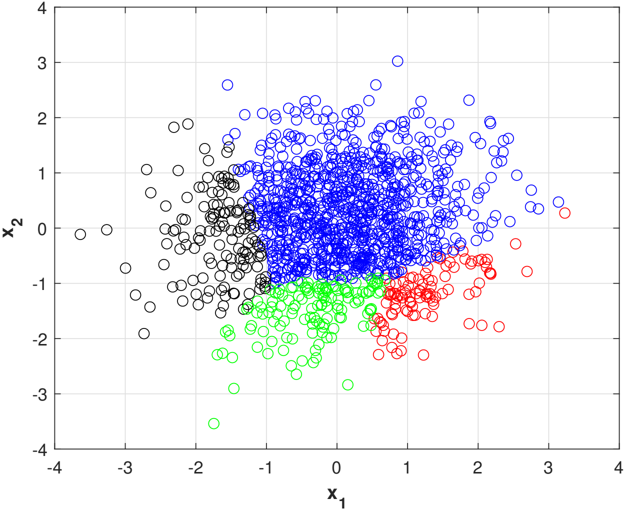
Векторное квантование

Алгоритм Линде-Бузо-Грея. Итерация $t = 1$



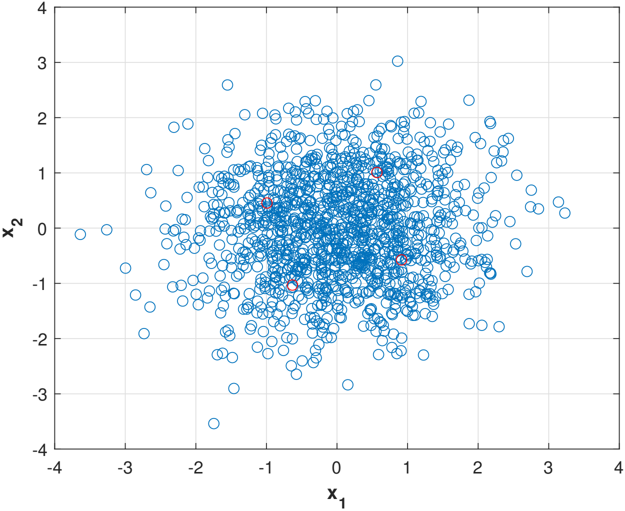
Векторное квантование

Алгоритм Линде-Бузо-Грея. Итерация $t = 1$



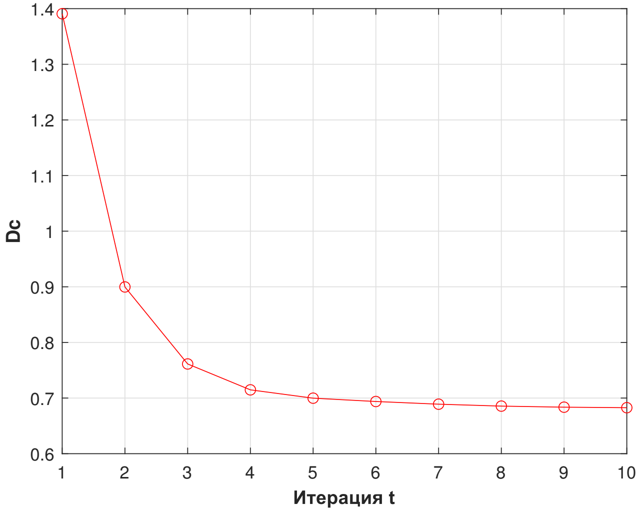
Векторное квантование

Алгоритм Линде-Бузо-Грея. Итерация $t = 10$



Векторное квантование

Алгоритм Линде-Бузо-Грея. Изменение D на итерации t



Векторное квантование

Алгоритм Линде-Бузо-Грея. Итерация $t = 10$