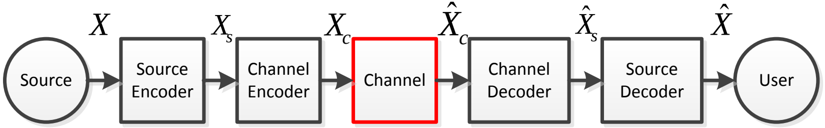
Современная теория информации

Лекция 11. Модели каналов связи. Информационная ёмкость каналов связи.

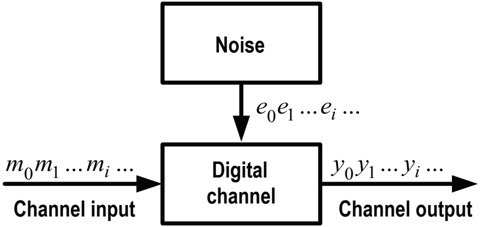
Введение



- Кодер канала вносит в передаваемую информацию избыточность, чтобы при искажении части данных сообщение источника было правильно декодировано.
- Каков предел пропускной способности канала связи при идеальном кодере канала?

Введение

- Пусть сообщение $m_0, m_1, ..., m_i, ...$ передаётся в канал, $m_i \in \{0, 1\}$.
- $y_0, y_1, ..., y_i, ...$ – сообщение, принятое из канала, $y_i \in \{0, 1\}$.
- Шум в канале моделируется как источник, который генерирует двоичный вектор ошибок $e_0, e_1, ..., e_i, ...,$ где $e_i = 1$ – в случае возникновения ошибки в канале, и $e_i = 0$ - в противном случае.



Введение

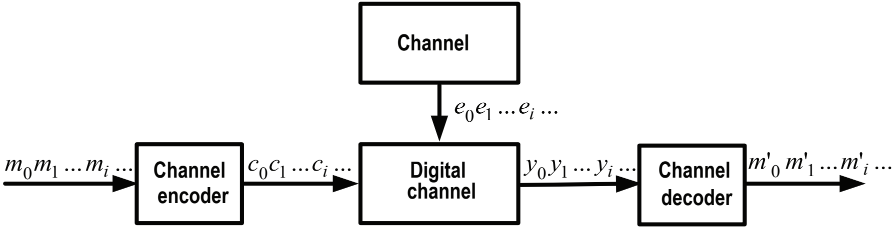
- Как уменьшить долю ошибок в принятой последовательности?
  - Кодер канала:

$$\mathbf{c} = \begin{cases} 000, \text{ если } m_i = 0. \\ 111, \text{ если } m_i = 1. \end{cases}$$

  - Декодер канала:

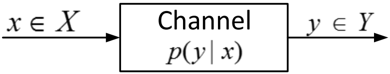
$$m'_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \mathbf{y} \in \{000, 001, 010, 100\}. \\ 1, \text{ если } \mathbf{y} \in \{011, 101, 110, 111\}. \end{cases}$$

- Скорость кода: $R = \frac{1}{3}$.
- Событие $m_i \neq m'_i$ – ошибка декодирования.



Модели каналов связи

Стационарный канал без памяти или дискретный постоянный канал (ДПК)



Обозначим через $X = \{0, 1, 2, ..., K-1\}$ и $Y = \{0, 1, 2, ..., L-1\}$ входной и выходной ансамбли канала, а переходные вероятнсти через $p_{ij} = p(y = j|x = i), i \in X, j \in Y$.

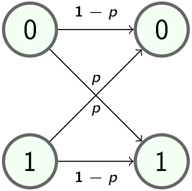
ДПК полностью описывается матрицей переходных вероятностей :

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdot & p_{0,L-1} \\ p_{10} & p_{22} & \cdot & p_{1,L-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{K-1,0} & p_{K-1,1} & \cdot & p_{K-1,L-1} \end{bmatrix}.$$

Модели каналов связи

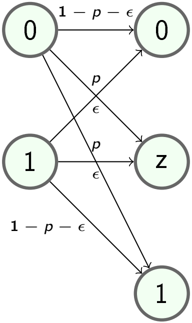
Двоично-симметричный канал (ДСК) и ДСК со стираниями

Двоично-симметричный канал



$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

ДСК со стираниями



$$P = \begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & \epsilon & p \\ p & \epsilon & 1-p-\epsilon \end{bmatrix}.$$

Взаимная информация[1] для пар $(x, y) \in XY$ определяется как

$$I(x; y) = I(x) - I(x|y).$$

$I(x; y)$ изменение собственной информации об x при получении y.

Средняя взаимная информация для ансамблей X и Y определяется как

$$I(X; Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)}.$$

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

[1] Количество информации в y об x

Информационная ёмкость канала связи

Средняя взаимная информация

- Средняя взаимная информация неотрицательна (т.е., $I(X;Y) \geq 0$) и симметрична (т.е., $I(X;Y) = I(Y;X)$).
- $I(X;Y) = 0$, если X и Y – независимы, т.е., если $H(Y|X) = H(Y)$, то

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(Y) = 0.$$

- Если X однозначно определяет Y и наоборот, то $H(Y|X) = 0$, и

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y).$$

Информационная ёмкость канала связи

Определение

- Пусть используется код длины n. Тогда количество информации, получаемой декодером в среднем составит $I(X^n; Y^n)$ бит, что соответствует скорости передачи информации
$$\tfrac{1}{n} I(X^n; Y^n) \text{ бит/символ канала.}$$
- Эта величина зависит от распределения вероятностей на входе канала $p(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}^n$, а также от условных вероятностей $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}^n, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}^n$. Нужно выбрать $p(\boldsymbol{x})$, так чтобы максимизировать скорость передачи:
$$\max_{\{p(\boldsymbol{x})\}} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n).$$
- Кроме этого, нужно выбрать длину кода так, чтобы скорость передачи была как можно больше. В итоге *информационная ёмкость канала* определяется как
$$C_0 = \sup_n \max_{\{p(\boldsymbol{x})\}} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n).$$

Информационная ёмкость канала связи

Каналы без памяти

Информационная ёмкость канала без памяти:

$$C_0 = \max_{\{p(x)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x)\}} (H(X) - H(X|Y)) = \max_{\{p(x)\}} (H(Y) - H(Y|X)).$$

$$I(X;Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x)p(y|x) \log \frac{p(y|x)}{p(y)}.$$

$$p(y) = \sum_{x \in X} p(x)p(y|x).$$

Модели каналов связи

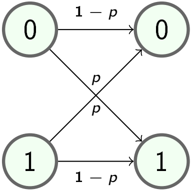
Симметричные каналы

- ДПК называется *симметричным по входу*, если все строки матрицы P могут быть получены перестановками элементов первой строки.
- ДПК называется *симметричным по выходу*, если все столбцы матрицы P могут быть получены перестановками элементов первого столбца.
- ДПК называется *полностью симметричным*, если он одновременно симметричен и по входу и по выходу.

Модели каналов связи

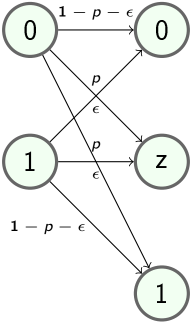
Симметричные каналы

Полностью симметричный



$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

Симметричный только по входу

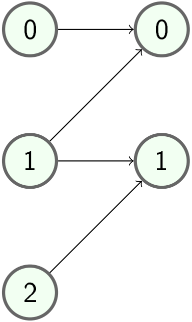


$$P = \begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & \epsilon & p \\ p & \epsilon & 1-p-\epsilon \end{bmatrix}.$$

Модели каналов связи

Симметричные каналы

Симметричный только по выходу



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Свойство 1. Для симметричного по входу канала без памяти

$$C_0 = \max_{\{p(x)\}} H(Y) - H(Y|x), x \in X.$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_x p(x)H(Y|x).$$

Поскольку все строки матрицы P одинаковы с точностью до нумерации элементов, все условные энтропии $H(Y|x)$ одинаковы. Поэтому $H(Y|X)$ не зависит от входного распределения и максимизация $I(X;Y)$ сводится к максимизации $H(Y)$.

Свойство 2. Для симметричного по входу канала без памяти

$$C_0 \leq \log|Y| - H(Y|x), x \in X.$$

Свойство 3. Для симметричного по выходу канала без памяти при равновероятных входных символах, выходные символы также равновероятны.

$$p(y) = \sum_x p(x)p(y|x) = \frac{1}{|X|} \sum_x p(y|x).$$

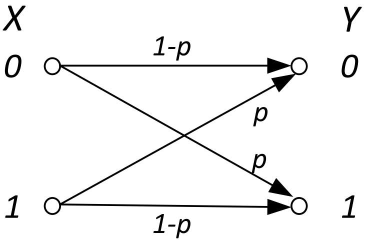
$\sum_x p(y|x)$ это сумма элементов столбца матрицы P. Поскольку все элементы столбцов одинаковы с точностью до перестановки, то суммы столбцов будут одинаковыми, т.е., $p(y) = 1/|Y|$.

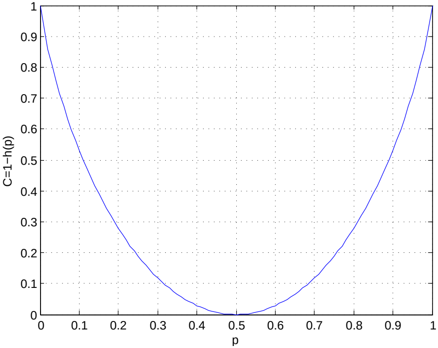
Свойство 4. Из свойств 1-3 следует, что для полностью симметричного канала без памяти

$$C_0 = \log|Y| - H(Y|x), x \in X.$$

Информационная ёмкость канала связи

Двоичный симметричный канал





$$C_0 = \log|Y| + \sum_{i=0}^{|Y|-1} p_{i0} \log p_{i0} = 1 - h(p).$$

Информационная ёмкость канала связи

Двоичный симметричный канал со стираниями

Свойство 5. Канал называется симметричным в широком смысле, если перенумерацией выходных символов его матрица может быть представлна в форме клеточной матрицы:

$$P = [P_1 | P_2 | ... | P_M],$$

в которой каждая из подматриц P_i полностью симметрична (по входу и по выходу).

Свойство 6. Для симметричного в широком смысле канала максимум взаимной информации между входом и выходом достигается при равновероятных буквах входного алфавита.

Информационная ёмкость канала связи

Двоичный симметричный канал со стираниями

Матрица переходный вероятностей для ДСК со стираниями:

$$P = \left[\begin{array}{ccc} 1-p-\epsilon & \epsilon & p \\ p & \epsilon & 1-p-\epsilon \end{array} \right].$$

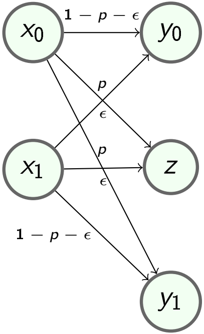
Путем перенумерации выходных символов (перестановкой столбцов) приводим матрицу к виду:

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} 1-p-\epsilon & p & \epsilon \\ p & 1-p-\epsilon & \epsilon \end{array} \right],$$

то есть ДСК со стираниями симметричен в широком смысле.

Информационная ёмкость канала связи

Двоичный симметричный канал со стираниями



$$P = \begin{bmatrix} 1-p-\epsilon & \epsilon & p \\ p & \epsilon & 1-p-\epsilon \end{bmatrix}.$$

Равновероятные входные буквы:

$$p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$$

Тогда, вероятности y_0, y_1 и z:

$$\begin{cases} p(y_0) = p(y_1) = \frac{1-\epsilon}{2} \\ p(z) = \epsilon \end{cases}$$

Подставим в $I(X;Y)$, получим:

$$C_0 = (1-\epsilon)\left(1 - h\left(\frac{p}{1-\epsilon}\right)\right).$$

При $p = 0$:

$$C_0 = (1-\epsilon).$$

Информационная ёмкость канала связи

Прямая теорема кодирования для дискретных постоянных каналов

Theorem

Для дискретного постоянного канала с информационной ёмкостью C_0, для любых $\epsilon > 0, \delta > 0$, существует достаточно большое число n_0 такое, что для любого натурального числа $n \geq n_0$ существует код длиной n со скоростью $R \geq C_0 - \delta$, средняя вероятность ошибки которого $P_e \leq \epsilon$.