

TRIANGULATION DE DELAUNAY

1. INTRODUCTION

Au milieu du 19^{ème} siècle, un problème majeur de géométrie, celui des Diagrammes de Proximité, s'était posé dans une motivation mathématique (ex : Démonstration de l'unique réductibilité des formes quadratiques, Dirichlet) ou physique (ex : Croissance et arrangements cristallins). Ce fut Voronoï, mathématicien russe, qui formalisa en premier cette notion. Par la suite, Delaunay, un autre mathématicien russe, l'a formalisé et étendu. Ainsi fut définie la Triangulation (voir l'annexe A) de Delaunay, obtenue en reliant par une arête les points dont les régions correspondantes dans le diagramme de Voronoï sont adjacentes, que nous détaillerons dans la suite.

Cette triangulation est particulièrement utilisée en traitement d'images, puisqu'il s'agit d'un type de partitionnement qui peut s'adapter au contenu de l'image et qui est calculé à partir d'un ensemble de points positionnés n'importe où sur le support de l'image. En particulier, cette technique est utilisée en cartographie, lorsque l'on veut numériser une région à partir de relevés ponctuels.

2. DIAGRAMME DE VORONOÏ

2.1. Points, sites, germes

On désigne par P un ensemble composé de n points P_i de l'espace \mathbb{R}^2 appelés aussi sites ou germes :

$$P = \{P_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n\}$$

2.2. Arête

Le segment ou l'arête est repéré par deux points d'appui x et y .



2.3. Région de Voronoï

On appelle polygone de Voronoï associé au site P_i la région $Vor(P_i)$ (chaque région étant l'ensemble des points x les plus proches d'un point de P) telle que chaque point de P a pour plus proche site P_i .

$$Vor(P_i) = \{x \in \mathbb{R}^2, d(x, P_i) \leq d(x, P_j), \forall P_j \in P - P_i\}$$

où d représente la distance Euclidienne.

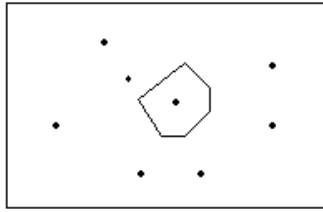


Figure 1 : Polygone de Voronoï d'un point P_i .

2.4. Diagramme de Voronoï

On décrit le diagramme de Voronoï comme l'union des régions de Voronoï de tous les points.

$$VOR_M(P) = \bigcup_{p \in P} Vor_p(P)$$

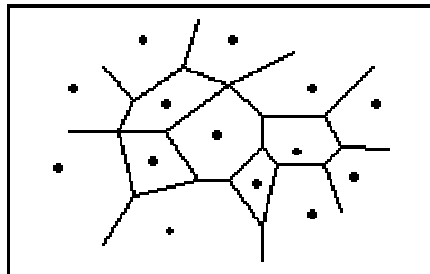


Figure 2 : Diagramme de Voronoï de l'ensemble P formé de N points.

2.5. Propriétés du Diagramme de Voronoï

Chaque sommet du diagramme de Voronoï est le point de rencontre de trois arêtes de Voronoï

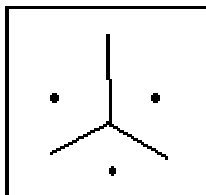


Figure 3 : Trois arêtes autour d'un sommet de Voronoï.

- Pour chaque sommet S du diagramme de Voronoï, le cercle passant par les trois points voisins à ce sommet, ne contient aucun autre point de P .

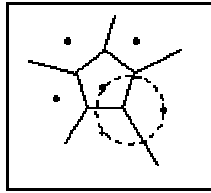


Figure 4 : Le cercle ne contient aucun autre point de P , c'est un diagramme de Voronoï.

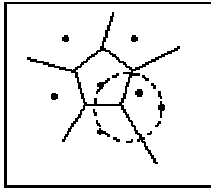


Figure 5 : Le cercle contient un point de P , ce n'est pas un diagramme de Voronoï.

- Une arête de Voronoï sépare tout point de son plus proche voisin.



Figure 6 : Une arête sépare un point de son plus proche voisin.

3. LA TRIANGULATION DE DELAUNAY

On peut à partir du diagramme de Voronoï, en construire le *dual* (figure 7), c'est à dire construire un nouveau diagramme où cette fois, on relie par un segment toutes les paires de sites dont les régions de Voronoï correspondantes sont adjacentes, c'est à dire séparées par une arête de Voronoï.

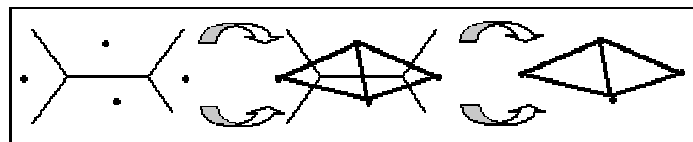


Figure 7 : Construction du dual.

Nous donnons alors le théorème fondamental suivant :

Le dual du diagramme de Voronoï est une triangulation sur l'ensemble des points.

Ce théorème est démontré en vérifiant que ce dual définit une partition du domaine intérieur à l'enveloppe convexe de l'ensemble des points. En ayant remarqué de manière préliminaire qu'à chaque sommet de Voronoï correspondait un triangle du dual, on vérifie pour cela que :

- Un triangle intersectant l'intérieur de l'enveloppe convexe n'est pas plat.
- Pour une paire de sommets de Voronoï donnée, si les cercles associés à ces deux sommets ont une intersection sachant qu'ils ne peuvent être l'un à l'intérieur de l'autre, alors les deux points d'intersection qu'ils définissent forment un segment séparant les deux triangles correspondants.

- 100
- Chaque point intérieur à l'enveloppe convexe est aussi contenu dans au moins un triangle.
 - On définit la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points du plan comme étant la dual du diagramme de Voronoï correspondant (figure 8).

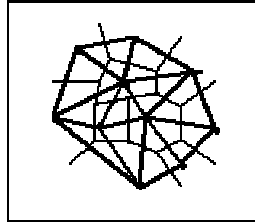


Figure 8 : La triangulation de Delaunay, duale du diagramme de Voronoï.

On peut par la dualité et non colinéarité de tous les points et non cocyclicité de quatre points déduire des résultats portant sur le diagramme de Voronoï les propriétés suivantes:

- 110
- La triangulation de Delaunay est unique.
 - La triangulation de Delaunay est une triangulation complète.
 - Les cercles passant par les trois sommets de chaque triangle ne contiennent aucun autre site en leur intérieur.

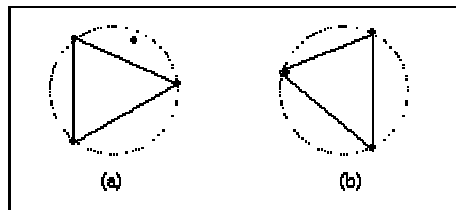


Figure 9 : (a) Triangle non-Delaunay – (b) Triangle Delaunay

Cette dernière propriété est essentielle, et elle va être utilisée pour caractériser la triangulation de Delaunay sans avoir à recourir à la dualité avec le diagramme de Voronoï. Elle va aussi être utilisée comme critère de choix des triangles à construire, lors de l'exécution d'une triangulation.

4. LA TRIANGULATION DE DELAUNAY CONTRAINTE

Certaines applications peuvent nécessiter que des arêtes soient imposées dans la triangulation, sans que celles-ci soient nécessairement en accord avec les arêtes de la triangulation de Delaunay. On va alors générer une triangulation qui, tout en respectant ces arêtes, aura par ailleurs les propriétés d'une triangulation de Delaunay normale. On parle alors de *Triangulation de Delaunay Contrainte*.

On restreint le critère de validité d'un triangle de Delaunay aux points *visibles* de tous les sommets du triangle vis-à-vis des arêtes de contrainte (Un point est dit *visible* d'un autre vis-à-vis d'un objet si on peut les relier entre eux par un segment qui ne coupe pas l'objet). Dans le critère du cercle, cela revient à ne pas prendre en compte l'appartenance de sommets de graphe à la partie du cercle se situant derrière cette arête par rapport au triangle.

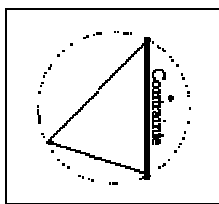


Figure 10 : Triangle de Delaunay Contraint.

Inspiré de la définition de la triangulation non contrainte, Seidel définit la triangulation contrainte comme suit :

Une triangulation de Delaunay contrainte est une triangulation complète pour laquelle chaque contrainte est une arête de la triangulation et que pour chaque autre arête, il existe un cercle tel que :

- Les points extrémités de l'arête se situent sur le cercle.
- Si un point se trouve à l'intérieur du cercle, alors il existe au moins un des deux points extrémités d'arêtes auquel on ne peut le relier par un segment sans couper une contrainte.

5. PRINCIPAUX CALCULS DES PARTITIONS

Il existe différentes techniques pour la construction du diagramme de Voronoï et de Delaunay. Ces techniques se décomposent essentiellement en deux classes :

- Approches incrémentales qui fonctionnent d'une manière dynamique.
- Approches globales appliquées sur un ensemble prédéfini de points.

5.1. Méthodes Incrémentales

Leur principe est simple : on commence par générer un grand triangle qui inclut tous les points situés sur le support de l'image, puis on "ajoute" ces points un par un par subdivision du triangle dans lequel ils se trouvent et par modification éventuelle des triangles voisins (éventuellement bloquée par une arête de contrainte) .

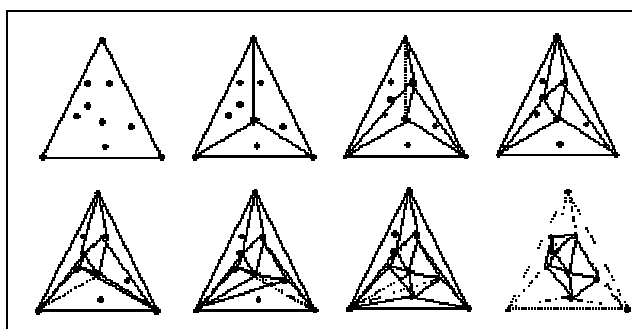


Figure 11 : Triangulation incrémentale

Structure de données

La manipulation dynamique des données (l'insertion et la suppression des points) nécessite une structure de données adaptative et efficace pour le parcours des points dans le graphe de Delaunay.

Partant du fait que chaque sommet associé à un triangle admet exactement trois sommets voisins, alors pour chaque sommet on utilise la structure de données suivantes :

- Un champ *triangle* (formé de trois points).
- Trois pointeurs vers les trois sommets voisins.

Cette structure de données est illustrée par la figure suivante.

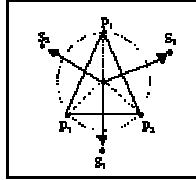


Figure 12 : Structure de données d'un triangle.

Insertion d'un nouveau point

Pour insérer un nouveau point P_{n+1} dans le diagramme de Voronoï $VOR_n(P)$, on suit les étapes suivantes:

- La recherche du premier sommet à supprimer: cette recherche est appliquée au diagramme de Voronoï afin de trouver le sommet dont le triangle dual contient le point P_{n+1} .
- La recherche de tous les autres sommets à supprimer : cette étape consiste à trouver les sommets qui sont plus proches de ce nouveau point P_{n+1} que de leur points générateurs (les points des triangles duaux de ces sommets). Ceci est équivalent à trouver tous les centres des triangles pour lesquels le cercle de Delaunay contient le point P_{n+1} . Les triangles des sommets à supprimer forment un polygone étoilé. La recherche nécessite le stockage d'une liste de points ordonnés des triangles supprimés.
- Construction de la nouvelle triangulation de Delaunay à l'intérieur du polygone : elle consiste à former des triangles à partir du point central P_{n+1} et les points des extrémités déjà stockés, et de créer tous les sommets de Voronoï correspondants aux nouveaux triangles ainsi que la mise à jour de leurs relations de voisinage (mise à jour des pointeurs).

La figure ci-dessous montre le changement local de triangulation après l'insertion d'un nouveau point P . (Pour une autre explication, voir l'annexe B.)

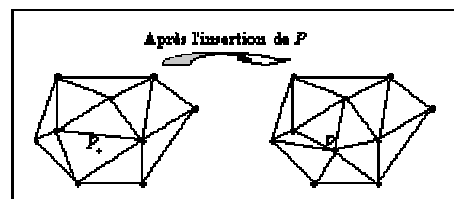


Figure 13 : Insertion d'un nouveau point.

5.2 Méthodes Globales

La méthode la plus connue est la méthode dénommée "Diviser pour Construire" (divide and conquer). Elle est calculée sur un ensemble de points distribués sur le support de l'image en utilisant un algorithme récursif. Le principe est de décomposer récursivement un grand problème en plusieurs sous problèmes indépendants de plus petite taille et à en rassembler les résultats.

210 L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas l'insertion et la suppression des points
 dans le diagramme de Voronoï ; elle nécessiterait une réévaluation complète du diagramme.
 Dans le problème de triangulation, cette méthode revient à découper l'ensemble des points en
 deux sous ensembles de taille comparable, séparable par une droite, et la fusion revient à relier
 deux sous triangulations en une seule par adjonction des triangles intermédiaires.

215

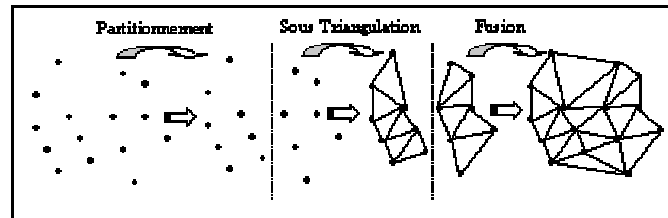


Figure 14 : Une étape de "SousTriangulation".

Présentation de l'Algorithme

220

Le "Diviser pour Construire" est adapté de la triangulation comme suit :

```

Si NbPointListe(liste) Alors Renvoyer(RésultatListe(liste));
Sinon
  Trier(liste);
  Partition(liste,liste1,liste2);
  Résultat1 = Traiter(liste1);
  Résultat2 = Traiter(liste2);
  Renvoyer(Fusion(Résultat1,Résultat2));
Fin Si
  
```

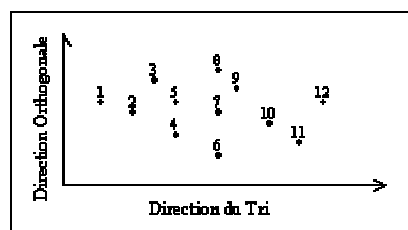
Les différentes étapes de l'algorithme sont les suivantes :

225

a- Le tri préliminaire des points

Avant d'entamer la récursion, on trie la liste des points lexicographiquement selon une direction donnée.

230 Le tri lexicographique correspond à trier les points par comparaison des projections sur un axe de la direction donnée, et en cas d'égalité pour deux points, les comparer sur la direction orthogonale. Ce tri assure la séparabilité de deux demi-ensembles par une droite infiniment peu décalée par rapport à la direction orthogonale au tri, quelle que soit la disposition des points.



235

Figure 15: Tri lexicographique

b- La partition de la liste des points en deux sous-listes

La partition de l'ensemble des points s'effectue par découpage de la liste de ces points préalablement triée lexicographiquement en deux sous-listes de tailles à peu près égales.

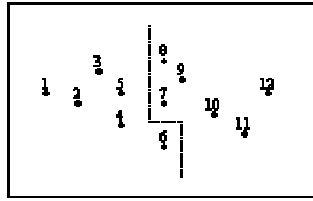


Figure 16 : La partition en deux sous-listes.

c- La triangulation séparée des deux sous-listes

Il s'agit simplement d'un appel récursif pour trianguler indépendamment les deux sous-listes de points. Cette indépendance est garantie par la séparabilité des deux sous-ensembles par une droite.

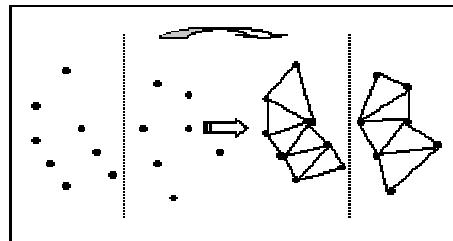


Figure 17 : Triangulations.

On obtient donc deux domaines convexes triangulés. Ces deux domaines sont disjoints et séparables comme précédemment par une droite orthogonale à la direction de tri.

d- La fusion des deux sous-triangulations

Il faut ensuite réunir les deux sous-triangulations en une seule par adjonction des triangles dans la "région interne" – qui est la partie interne à la nouvelle enveloppe convexe séparant les deux enveloppes convexes précédentes – est limitée aux extrémités par deux segments reliant les domaines entre eux qui correspondent à l'enveloppe convexe de la réunion des deux domaines, qu'il convient tout d'abord de déterminer.

La fusion s'effectue donc en deux étapes successives :

- La détermination des deux segments d'enveloppe convexe.
- Le remplissage de l'espace interne qu'ils délimitent.

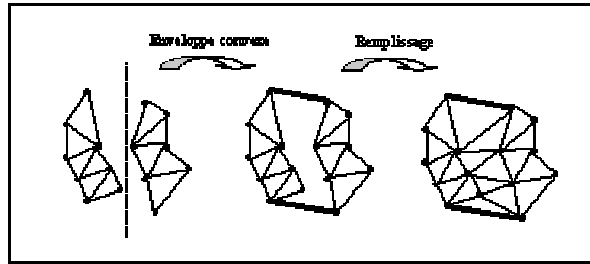


Figure 18 : La fusion.

6. Partitionnement Adapté au Contenu d'une Image

Nous détaillons dans cette partie quelques algorithmes de partitionnement en triangulation de Delaunay du support d'une image en niveaux de gris. Cette partition est qualifiée de souple puisqu'elle retourne la triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble quelconque de points, distribués sur le support de l'image.

Au cours de la construction de la partition, et lorsque celle-ci est entièrement calculée, chacun des éléments triangulaires est caractérisé par la valeur moyenne et la variance des niveaux de gris qu'il englobe.

6.1. Algorithme de Division et Fusion

Première étape : phase d'initialisation

On dispose d'un ensemble de points distribués régulièrement sur le support de l'image formant un maillage triangulaire. La taille et la forme des triangles, dans cette étape, ne dépendent pas de leurs caractéristiques (variance et moyenne).

Deuxième étape : phase de division

A partir de l'ensemble de triangles initiaux, on insère de nouveaux points sur le barycentre des triangles qui ne vérifient pas le prédicat d'homogénéité (un bloc est déclaré homogène si la variance des niveaux de gris de celui-ci est inférieure à un seuil donné), et on calcule la nouvelle triangulation sur le polygone étoilé généré par l'ensemble des triangles supprimés.

L'algorithme de division est implémenté ci-après:

```

- Fixer une surface de subdivision à un seuil minimal  $T_{\text{sur}}$  .
- Fixer une valeur de variance des niveaux de gris à un seuil d'homogénéité  $T_{\text{hom}}$ .
Pour chaque triangle TR dans la file des triangles
Faire :
Calculer les paramètres de TR (surface, variance et moyenne ).
Si variance (TR) >  $T_{\text{hom}}$  et surface (TR) >  $T_{\text{sur}}$ 
Alors
    - Insérez un nouveau point  $P$  sur le barycentre de TR .
    - Supprimer tous les triangles dont les sommets sont plus proches de  $P$  que de leurs
      points générateurs (l'ensemble de ces triangles forme un polygone étoilé).
    - Reconstruire la nouvelle triangulation de Delaunay à l'intérieur du polygone étoilé.
Fin Si
Fin Faire
  
```

Troisième étape : phase de fusion

300 Cette étape consiste à regrouper tous les blocs (triangles) homogènes et de même amplitude (les triangles sont de même amplitude si la différence maximale entre leur valeur moyenne des niveaux de gris demeure inférieure à un seuil T_{amp}).

L'ensemble de ces triangles forme un polygone étoilé. L'intérêt de cette étape est d'éliminer tous les points centraux de ces polygones, ce qui diminue le nombre des triangles après la nouvelle

305 triangulation de tous les polygones étoilés.

La triangulation obtenue après la fusion contient des triangles de grandes tailles sur les régions homogènes de l'image et des autres de petites tailles sur les régions textures ou avec contours.

Remarque :

310 Une solution très rapide pour calculer une partition de Delaunay adaptée au contenu de l'image consiste à n'opérer qu'une seule étape de fusion après la phase d'initialisation.

6.2. Algorithme de Division Simple

C'est l'algorithme précédent, sauf l'étape de fusion qui n'est pas appliquée.

315

6.3. Triangulation Contrainte par les Contours

Cette partition est telle qu'en moyenne, les bords des triangles s'appuient sur les frontières d'orientation quelconque de l'image. La plupart des blocs ainsi générés le long d'un même

320 contour se ressemblent et sont homogènes. Le partitionnement est adapté à la forme des objets de l'image.

La triangulation contrainte est calculée sur un ensemble P de points obtenus selon l'algorithme détaillé ci-dessous en quatre points :

- détecter les principaux contours de l'image.
- 325 • échantillonner les contours en plaçant des points aux endroits de forte courbure.
- ajouter des points régulièrement espacés sur les contours, entre chacun des points précédemment détectés. L'écart entre les points ajoutés est noté d_1 .
- placer des points supplémentaires de chaque côté des contours, perpendiculairement aux segments. L'ajout d'un de ces points se fait dans un contexte de contrôle de proximité vis
- 330 à vis des autres points déjà insérés.

7. Conclusion

335 Nous avons décrit dans ce document les notions du diagramme de Voronoï ainsi que le graphe dual de Delaunay, chacun retournant une partition du support de l'image. L'intérêt de ces partitionnements est qu'ils sont souples puisqu'ils sont calculés sur un ensemble de points pouvant être positionnés à peu près n'importe où sur le support de l'image. Nous avons introduit les principales définitions et propriétés de ces deux modèles de

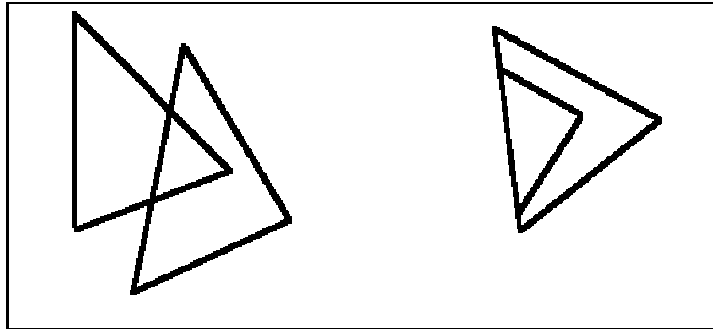
340 partitionnement du plan, ainsi que différents algorithmes du partitionnement triangulaire.

Annexe A: notion de triangulation

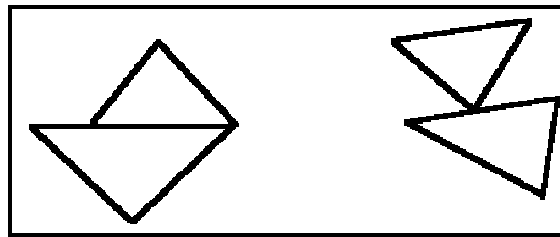
On dit qu'un ensemble de triangles constituent une triangulation de la surface qu'ils recouvrent si:

- i. l'intersection de l'intérieur de deux triangles est vide quels que soient les deux triangles
- ii. l'intersection de deux triangles est soit vide, soit un côté, soit un sommet

Cas "interdits":



condition i, deux triangles se chevauchent ou un triangle est inclus dans l'autre

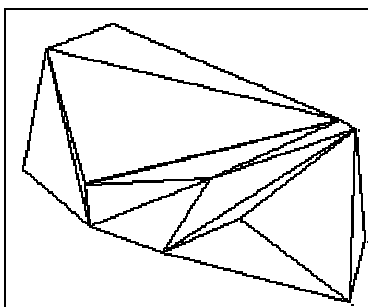


condition ii.

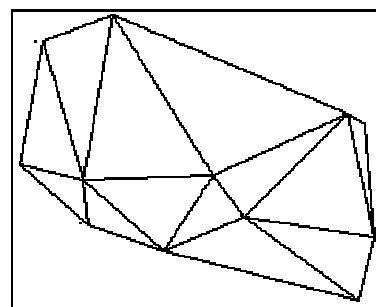
Dans une triangulation, nous avons les relations suivantes:

- $\text{nb_triangles} = 2 * (\text{nb_points} - 1) - \text{nb_côtés_du_périmètre}$
- $\text{nb_segments} = 3 * (\text{nb_points} - 1) - \text{nb_côtés_du_périmètre}$

Le problème qui se pose est de trouver la meilleure triangulation possible. Intuitivement, il s'agit d'avoir les triangles "les moins allongés" possibles. La triangulation de Delaunay permet de caractériser la meilleure triangulation possible.



semis mal triangulé
(les triangles sont allongés)



semis bien triangulé
(triangles compacts)

Remarque : un semis est un ensemble de germes (voir § 2.1)

Annexe B: Algorithme de Delaunay:

360 Il permet de déterminer la triangulation du même nom. Cet algorithme est incrémental. On part
d'une triangulation partielle du semis (trois points quelconque du semis suffisent), et on construit
la triangulation en y intégrant un point à chaque étape. Il existe deux cas : le point à rajouter est à
l'extérieur de la triangulation existante, ou à l'intérieur. Nous ne détaillerons que le deuxième cas.
365 Dans la pratique, il suffira de partir de quatre points fictifs englobant les semis à trianguler.

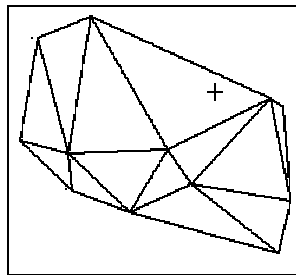
Ajout d'un point à semis déjà triangulé :

Soient les n points P_i déjà triangulés et le point O à trianguler, contenu dans l'enveloppe convexe
de $\{P_i\}$ (l'ensemble des points P_i).

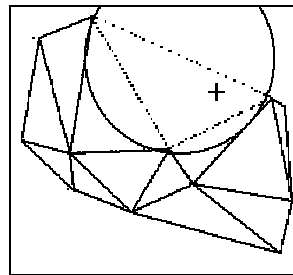
370 On cherche l'ensemble des triangles existants dont le cercle circonscrit contient O . On sépare
alors les arêtes des triangles ainsi trouvés en deux :

- l'ensemble $\{a_j\}$ de celles qui appartiennent à deux de ces triangles.
- l'ensemble $\{b_j\}$ de celles qui n'appartiennent qu'à un seul de ces triangles.

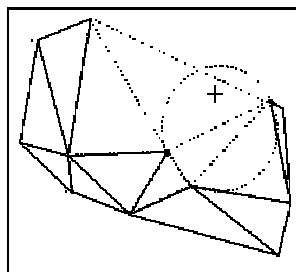
La nouvelle triangulation consiste à casser les triangles trouvés, en supprimant les arêtes a_j . On
forme les nouveaux triangles de façon qu'il s'appuient sur une arête b_j et sur O .



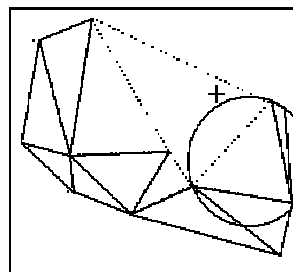
on veut trianguler un autre point



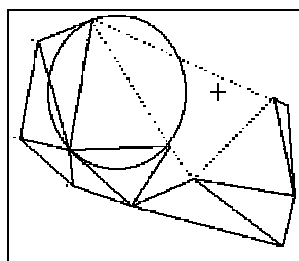
Se trouve-t-il dans le cercle circonscrit



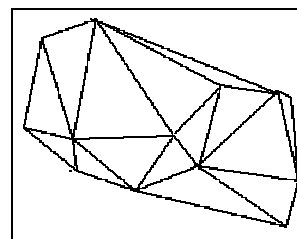
test deuxième triangle, une arête à éliminer



test troisième triangle



test triangle



on construit les nouveaux triangles

Etape de l'algorithme de Delaunay