1.1 Кинематические переменные

Кинематические переменные – векторные величины, используемые для описания движения (**r, v, w…**).

Траектория – геометрическое место точек, которое последовательно проходит движущейся объект.

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ – вектор перемещения по траектории, это вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиус-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени):

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$. В пределе $\Delta t \to 0$ модуль элементарного перемещения равен элементарному пути: $|d\mathbf{r}| = ds$

Длина кривой линии, ограничивающий вектор перемещения называется путём, проходимым телом **(Δl)**.

Быстрота изменения радиус-векторов называется вектором скорости. Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения (из геометрического смысла производной):

$\mathbf{v}(t) = (\mathbf{r}(t))' = d\mathbf{r} / dt.$

Быстрота изменения скорости объекта называется вектором ускорения:

$\boldsymbol{\omega}(t) = (\mathbf{v}(t))' = d\mathbf{v}/dt.$

Разложим вектор перемещения по осям координат:

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$

Данное разложение указывает, что любое сложное движение можно заменить на 3 поступательных движения вдоль осей.

Подставим координатное представление r в v:

$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt = d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) / dt = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

$v_x = dx / dt.$

Теперь в определение ω:

$\boldsymbol{\omega} = d\mathbf{v} / dt = d(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) / dt$

1.2 Перемещение. Путь. Среднее значение

Перемещение определяется законом наращивания скорости: $d\mathbf{r} = \mathbf{v} * dt$.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения точки. Если траектория лежит в одной плоскости, т.е. плоская кривая, то движение точки называют плоским. Движение точки называется равномерным, если точка в любые равные промежутки времени проходит равные расстояния. При этом модуль скорости точки не изменяется с течением времени:

$v_{ср} = v$. Длина пути, пройденного равномерно движущейся точкой, является линейной функцией времени.

При криволинейном движение используют эквивалентность данного движения 3-м последовательным по координатам осям:

$dx = v_x * dt$ – закон наращивания координаты x при движение по Ox со скоростью v_x.

$dv_x = \omega_x * dt$ – закон наращивания скорости vx при движении по Ox с ускорением wx.

Вычисление пути при ω = const:

Из закона наращивания скорости:

$\int_{v0}^{v(t)} dv = \int_0^t a * dt;\ v(t) - v0 = a*t.$

Подставим v(t) в закон наращивания координаты:

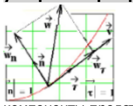
$dx = v(t) * dt;\ \int_{x0}^{x(t)} dx = \int_0^t (v0 + a * t1) * dt1$

$S(t) = x(t) - x0 = \int_0^t v0 * dt1 + a * \int_0^t t1 * dt1 = v0 * t + \frac{at^2}{2}$

Среднее значение функции на интервале от x1 до x2:

$\langle y \rangle = \frac{1}{x2 - x1}\int_{x1}^{x2} y(x) * dx;\ \langle v \rangle = \frac{1}{t2 - t1}\int_{t1}^{t2} v(t) * dt$

1.3 Ускорение при криволинейном движении. Нормальное и тангенциальное ускорение при криволинейном ускорении.

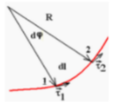


Рассмотрим криволинейную траекторию. Пусть мат. точка имеет w. Введём локальный ортогональный базис η (ед. вектор нормали) и τ (ед. вектор касательной) (базис движения). Рассмотрим компоненты представления v и ω в базисе:

$v = v * \tau + 0 * n;$

$\omega = dv/dt = d(v * \tau)/dt = dv/dt + v * d\tau/dt$

$\omega = \omega\eta * n + \omega\tau * \tau;\ \omega\tau = dv / dt$



<u>Установим вид нормальной составляющей ωη</u>:

Рассмотрим 2 точки на траектории: пусть перемещение межу ними происходит за время dt, а радиус-вектор поворачивается на угол dφ; $\tau1$, $\tau2$ – положения вектора касательной в т.1,2.

dl – хорда, совпадающая с дугой. Выполним параллельный перенос $\tau2$ к $\tau1$, чтобы имели общее начало. Тогда:

$d\tau = \tau2 - \tau1.$

Используем определение угла в радианах, получим: $d\varphi = \frac{dl}{R} = \frac{|d\tau|}{|\tau|}$.

Угол между $\tau1$ и $\tau2$ мал → $d\tau \perp \tau1$ и $d\tau \perp \tau1$ →

$d\tau = 0 * \tau + |d\tau| * n$

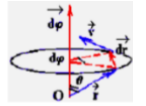
$\frac{d\tau}{dt} = \frac{|d\tau|}{dt} * n = \frac{dl * n}{dt * R} = \frac{v}{R} * n$

$wn = v * \frac{d}{dt}\tau = \frac{v^2}{R} * n$

1.4 Кинематика твёрдого тела. Вращение вокруг неподвижной оси: вектор угловой скорости и углового ускорения

Абс.тв.телом – называется система мат.точек жёстко связанных между собой.

При вращательном движении твердого тела каждая его точка движется по собственной окружности, центр каждой окружности находится на некоторой неподвижной оси.



Для абс.тв.тела нужны общие хар-ки. Пусть есть ось Z. Рассмотрим движение точки по спиральной траектории.

θ - угол наклона r к оси Z.

За бесконечно малый интервал dt точка совершает перемещение dr, поворачиваясь при этом около окружности на угол dφ. При повороте на беск.малый угол dφ недостаточно скалярного представления угла. Беск.малому повороту против час.стрелки соответствует вектор dφ (направление из начала коорд. По оси).

Из рисунка: dφ = dr / R; R = r*sin(θ);

$dr = r \cdot sin\theta \cdot d\varphi;\ d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}.$

Угловая скорость – скорость изменения угла поворота за единицу времени: $\omega = \frac{d}{dt}\varphi$.

Угловая скорость является единой хар-кой для всех точек тв.тела.

$T = 2\pi\omega;\ \nu = 1/T$

$v = \omega \times r$ – связь между линейной и угловой скоростью при вращ.движении.

$v = \omega r sin\theta = \omega R$

Угловое ускорение – быстрота изменения угловой скорости за ед. времени.

$\beta = \frac{d\omega}{dt}$

1.5 Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея

Рассмотрим две системы отсчета: xOy – неподвижную; x'Oy' – подвижную, движ. со скоростью V. И пусть поисходит некот.физ.событие A, радиус-вектор которого r в непод. и r' в подвижн.

Принцип Гегеля: все инерц. сист-мы по своим мех.свойствам эквиваленты друг другу. dt = dt'

Для установления связи межу пространственными координатами используется правило сложения векторов. Между координатами этого события устанавливаются отношения:

r = Vt + r'

Покажем, что преобразования не противоречат принципу. Возьмем производную от левой и правой части:

$\frac{d}{dt}r' = \frac{d}{dt}r - V\frac{d}{dt}t$; v' = v – V

Возьмем производную по времени от этого соотношения, т.к. V = const, то оно не изменяется. Получили равенство w'=w → в инерциальных системах ускорения не изменяются. Это значит, что никакими механическими опытами, проводимыми внутри данной ИСО, нельзя установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно.

1.6 Определение кинематических переменных из второго закона Ньютона.

Для объяснения Второго закона Ньютона как ур-я движения обговорим некоторое понятия:

Масса – мера инертности тела (способности препятствовать изменению своей скорости движения) при поступательном движении.

Импульс(p) – векторная физ.величина, являющаяся мерой мех.движения тела. p = mv.

Тогда Второй закон Ньютона можно записать в таком виде: $\frac{dp}{dt} = F$

Импульс изменяется, если на тело действует сила, при m = const: $m\frac{dv}{dt} = F$

Получим из данного закона кинематические переменные:

1) Ускорение фигурирует в самом законе: ma = F

2) Скорость можно получить из закона наращивания скорости, который получим, выразив dv из 2 закона Ньютона: $dv = \frac{1}{m}\int Fdt$

3) Радиус-вектор получим из закона наращивания координаты: dr = vdt

Тогда $r = \int vdt$

1.7 Импульс системы частиц. Закон сохранения импульса системы

Импульс системы – сумма импульсов частиц, входящих в систему. Аддитивная величина.

$$p = \sum_{i=1}^{n} pi$$

Из системы выделим частицу с импульсом pi, для которой выполняется 2 з.Ньютона:

$\frac{d}{dt}pi = Fi;\ \ dpi = Fi * dt$

Причиной изменения импульса i-той частицы является действие на нее результирующей силы:

$pi2 - pi1 = \int_{t1}^{t2} Fi * dt$ – изм. Импульса импульс силы.

Полный импульс системы можно изменить только под воздействием внешних сил.

Возьмем производную по времени от левой и правой частей определения импульса системы:

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{dpi}{dt}$$

Необходимо показать, что быстрота изменения импульса равна 0.

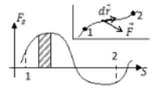
Пусть после взаимодействия импульсы частиц поменялись. Разложим dpi/dt в виде двух слагаемых:

$$\frac{dpi}{dt} = \sum Fik + Fik(\text{внеш})$$

$$\frac{dpi}{dt} = \sum_i\left(\sum_{k(\text{внутр})} Fik\right) + \sum_i Fi(\text{внеш})$$

Когда $\sum_i\left(\sum_{k(\text{внутр})} Fik\right) = 0$, $\frac{dP}{dt} = \sum_i Fi(\text{внеш})$

1.8 Работа и мощность. Консервативные силы.



Силы называются **консервативными**, если совершаемая работа между точками 1,2 не зависит от формы траектории.

Если в каждой точке пространства задан F, то говорят, что задано поле векторы F. Поле силы называется **стационарным**, если оно не изменяется во времени.

Энергия – это универсальная мера различных форм движения и их взаимодействия.

Работа – мера превращения одного вида энергии в другой.

Рассмотрим траекторию движения с точками 1,2, по которой движется тело под действием силы F.

Пусть за время dt тело совершает перемещения dr. Тогда

$\delta A = F * dr$, где δA – **элементарная работа** и она равна площади под графиком функции.

Пример: Результат упругой силы

$$F = -kr$$

$$\delta A = F * dr = -krdr$$

Можно показать, что rdr = r(dr_r). Тогда:

$\delta A = -\frac{kdr^2}{2}\quad A = -\int_1^2 rdr$

$$A = -\int_1^2 d\left(\frac{kr^2}{2}\right)dt = \frac{kr1^2}{2} - \frac{kr2^2}{2}$$

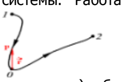
Полная работа консервативных сил по замкнутой траектории равно 0.

Мощность – скалярная физ.величина, равная в общем случае скорости изменения, преобразования, передачи или потребления энергии системы.

$$N = F * \frac{dr}{dt} = F * v = \frac{\delta A}{dt}$$

1.9 Потенциальная энергия частицы в поле. Связь потенциальной энергии и силы поля.

Потенциальная энергия – функция состояния системы, зависящая только от координат, т.е. она определяется взаимным расположением частей системы. Работа является функцией процесса, производимого над системой.



Рассмотрим замкнутую траекторию с точками 1,2. Поместим начало координат в т.О (произвольное место на траектории) и будем рассматривать отклонение от нее на r (радиус-вектор).

Работа по перемещению на участке PO будет определятся как:

в$A_{P0} = \int_P^0 Fdr = U(r)$

С другой стороны, данная работа будет определятся перемещением r. В этом случае U(r) будет называться потенциальной энергией точки, помещенной в точку P. Потенциальная энергия определяется неоднозначно, зависит от выбора точки отсчёта (т. O).

Учитывая это определение, получим, что работа по перемещению из т.1 в т.2:

$A_{12} = A_{10} + A_{20} = A_{10} - A_{20}$

(Если пределы интегрир. Взаимно меняются, то изм. Знак перед интегралом)

Можно сказать, что A_{12} будет определена некоторой разностью функций, т.е. работа на всем участке будет определена разностью потенциальной энергии.

$$A_{12} = \int_1^2 Fdr = U_1 - U_2$$

Работа консервативных сил определяется убылью потенциальной энергии.

1.10 Кинетическая энергия частицы. Полная энергия частицы.

Кинетическая энергия – функция состояния системы, которая зависит от скорости движения её частей.

Рассмотрим определение элементарной работы δA и воспользуемся 2-ым законом Ньютона как уравнение движения: $\delta A = Fdr = mdv * \frac{dr}{dt} = mvdv$ – окончательное выражение для работы, скорость изменяется от v до v + dv.

Тогда элементарная работа равна скалярному произведению v*dv = v*dv*cos0 = v*dv

После раскрытия скалярного произведения можно перенести модуль скорости под дифференциал:

$$\delta A = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_к$$

Ек – это функция состояния, которая зависит от скорости движения. Эта функция называется **кинетической энергией**. $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Результирующая всех сил, действ. на тело:

F = Fконс + Fсторон

$\delta A = \delta A\text{консер} + \delta A\text{сторон} = -dU + \delta A\text{сторон}$

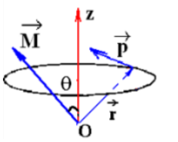
δA – работа всех сил, действующих на тело.

В работе всех сил выделим слагаемое, связанное с консервативными силами, и выполним подстановку в изменение кинетической энергии:

d(Ek + U) = δAсторон

Сумма потенциальной и кинетической энергии называется полной энергией частицы, тогда изменение полной механической энергии частицы сопровождается работой сторонних сил.

1.11 Момент импульса частицы. Уравнение моментов.



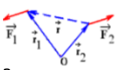
Рассмотрим Oz, начало которой находится в точке O и м.т. с радиус-вектором r и импульсом p. Для того, чтобы описать движение частицы на удаление от центра, вводится новая векторная характеристика – **момент импульса**, который одновременно учитывает 2 величины: r и p. **Момент импульса** – векторная физ.величина, характеризующая кол-во вращательного движения. Количественная хар-ка выражается векторным произведением. $M = r \times p$. При движении частицы вектор M будет описывать коническую поверхность к Oz.

Теперь рассмотрим **момент силы**. $N = r \times F$. Момент силы – векторная физ.величина, характеризующая вращательное действие силы.

Найдем связь между моментом импульса и моментом силы: $\frac{dM}{dt} = \frac{d(r \times p)}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt}$.

Т.к. $\frac{dr}{dt} \times p = 0$ и $\frac{dp}{dt} = F$, тогда мы получаем след. выражение, которое называется уравнением моментов: $\frac{dM}{dt} = r \times F$

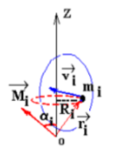
Рассмотрим пару сил (две силы, которые равны по модулю, но у них нет общей прямой):



Рассмотрим начало координат O. r1, r2 определяют положение точек 1, 2.

Задача: вычисление момента силы относительно O.

2.1 Момент импульса тела относительно неподвижной оси. Момент инерции. Теорема Штейнера.



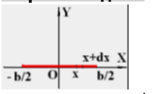
Oz – закрепленная ось вращения. Введем момент импульса относительно оси Oz. Требуется выразить момент импульса тела через характеристики движения твердого тела как целого. Рассмотрим проекцию i-ой точки на Oz: M_{zi} = Mi cos(αi) = mi * ri * vi * cos(αi) = mi * ri * wz * Ri * cos(ai) = $miRi^2wz$ $Mz = \sum_{i=1}^{N} Mzi = wz\sum_{i=1}^{N} miRi^2$

По определению: проекция момента импульса на ось – сумма моментов проекций точек. Множитель в виде суммы является характеристикой распределения массы по объему тела

Mz = Iz*wz – момент импульса тела отн.неподв.оси, где $Iz = \sum_{i=1}^{N} miRi^2$ - момент инерции твердого тела. Момент инерции тела характеризует инертные свойства твердого тела. Момент инерции – скалярная физ. Величина, мера инерции во вращательном движении вокруг оси, подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении. Возьмем производную от полученного выражения $\frac{dMz}{dt} = Iz\frac{dwz}{dt}$. Получим выражение, которое называется **основным уравнением динамики вращательного движения тв.тел**: Izβz = Nz

Ось относительно которой вращается тело в отсутствие внешних сил, называется свободной осью. Можно показать, что существует 3 свободных оси, которые называются главными осями. Вращение относительно главной оси называется устойчивым.

2.2 Примеры расчета момента инерции: стержень и диск.



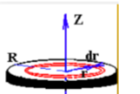
Тонкий стержень.

$\propto = \frac{m}{b}$ – линейная плотность массы, тогда $dm = \propto * dx$

$dI = dm * x^2 = \propto x^2 dx$

На произвольном расстоянии x от начала координат, отрезок dx.

$$Iy = \int_{-b/2}^{b/2} \propto x^2 dx = \propto \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = \frac{\propto}{3}\left(\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8}\right)\right) = \frac{ab^3}{12} = \frac{mb^2}{12}$$



Тонкий диск.

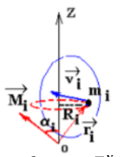
$\sigma = \frac{m}{s}$ – поверхностная плотность массы.

Воспользуемся свойствами симметрии фигуры. Существует геометрическое место точек на поверхности которого момент инерции dI не меняется. Таким геом.местом является кольцевой слой радиусом r и шириной dr. dm = σ*dS (масса кольцевого слоя), где dS – площадь кольцевого слоя.

dS можно найти геометрически и путем дифференцирования.

1) Геометрический. Разрежем кольцевой слой и получим прямоугольник:

2.3 Основное уравнение динамики вращательного движения

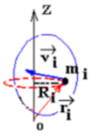


Oz – закрепленная ось вращения. Введем момент импульса относительно оси Oz. Требуется выразить момент импульса тела через характеристики движения твердого тела как целого. Рассмотрим проекцию i-ой точки на Oz: M_{zi}= Mi cos(αi) = mi * ri * vi * cos(αi) = mi * ri * wz * Ri * cos(ai) = $miRi^2wz$ $Mz = \sum_{i=1}^{N} Mzi = wz\sum_{i=1}^{N} miRi^2$

По определению: проекция момента импульса на ось – сумма моментов проекций точек. Множитель в виде суммы является характеристикой распределения массы по объему тела

Mz = Iz*wz – момент импульса тела отн.неподв.оси, где $Iz = \sum_{i=1}^{N} miRi^2$- момент инерции твердого тела. Момент инерции тела характеризует инертные свойства твердого тела. Момент инерции – скалярная физ. Величина, мера инерции во вращательном движении вокруг оси, подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении. Возьмем производную от полученного выражения $\frac{dMz}{dt} = Iz\frac{dwz}{dt}$. Получим выражение, которое называется **основным уравнением динамики вращательного движения тв.тел**: Izβz = Nz. Где Nz – суммарный момент всех внешних сил, действующих на тело относительно оси Oz. Iz – момент инерции тела отн. Oz. βz – проекция углового уск. На Oz.

2.4 Кинетическая энергия вращательного тела. Работа по вращению твёрдого тела



Кинетическая энергия тела будет определяться как алгебраическая сумма кинетических энергий составных частей тела. Рассмотрим тело, вращающиеся вокруг оси Oz, выделим м.т. Определим кинетическую энергию i-ой точки: $Eki = \frac{mivi^2}{2}$

Кинетическая энергия вращающегося тв.тела:

$$тEk = \sum_{i=1}^{N} \frac{mivi^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{mi(wzRi)^2}{2} = \frac{wz^2}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{miRi^2}{2} = \frac{Iwz^2}{2}$$

Работа – мера инерции. В соответствии с законом изменения мех.энергии системы элементарная работа всех внешних сил равна приращению кинетической энергии тела:

$τδA = dEk = d\left(\frac{Iwz^2}{2}\right) = Iwz * dwz = I\frac{dwz}{dt}wzdt = Nzwzdt = Nz\frac{dφ}{dt}dt = Nzdφ$

Если Nz и dφ имеют одинаковые знаки, то δA>0. Иначе δA < 0. При повороте тела на конечный угол dφ = φ2 – φ1 работа внешних сил будет равна: $A = \int_{φ1}^{φ2} Nzdφ$

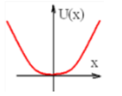
Таким образом, работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси определяется действием момента Nz этих сил относительно этой оси. Если силы таковы, что Nz = 0, то работу они не производят.

2.5 Малые колебания. Условия существования, уравнения и закон колебаний

Колебательный процесс – любое механическое движение, отличающиеся той или иной степенью повторяемости движения. Время $T = \frac{1}{\vartheta} = \frac{w}{2\pi}$, через которое колебания повторяются, называется периодом, при этом тело возвращается в исходную точку.

Малые колебания – изменение величины являются малой.

Рассмотрим требования, чтобы колебания можно было считать малыми. В качестве данной функции возьмем пот.энергию.



Рассматриваем одномерный случай колебаний. Пусть график Ep имеет минимум равный нулю. $U(x)_{X=0} = 0$

Воспользуемся определением силы как изменение Ep в пространстве.

$F = -\frac{d}{dx}U(x)$

$\left(\frac{d}{dx}U(x)\right)_{x=0} = 0$ – экстремум.

Потенциальная энергия должна иметь точку экстремума равную нулю.

Найдем координату равновесия. Она задаётся формулой: G(x)' = 0 – решение: величина экстремума.

$\left(\frac{d^2}{dx^2}U(x)\right) > 0$ – минимум, если < 0 – максимум.

Разложим данную функцию в ряд Маклорена (разложение вблизи нуля):

Найдем связь между лин. (w) и угловым (β) ускорениями:

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{d(w\times r)}{dt} = \frac{dw}{dt}\times r + w\times\frac{dr}{dt} = |\beta\times r| = \beta r sin\theta = \beta R = \omega\tau$$

Из определения вект. Произведения вектор $\beta\times r$ направлен по касательной к окружности.

$$|\omega\times v| = \omega * v * sin\frac{\pi}{2} = \omega v = \frac{v^2}{R} = \omega n$$

Полное линейное ускорение:

$$\omega = \omega\tau * \tau + \omega n * n$$

$$|\omega| = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$$

Связь между угловыми и линейными скоростями:

$$v = w\times r$$

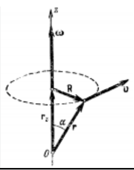
Мы можем представить r в виде суммы двух составляющих – вектора rz, параллельного оси z, и вектора R, перпендикулярного к оси z: $r = rz + R$

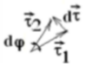
Подставим это выражение в формулу и получим:

$$w\times r = w\times(rz + R) = w\times rz + w\times R$$

Векторы w и rz коллинеарные. Поэтому их векторное произведение равно 0. Следовательно, можно записать:

$$v = w\times R$$





Полное ускорение:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}v\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$$\omega = \omega\tau + \omega n = \left[\left(\frac{d}{dt}v\right) * \tau + \frac{v^2}{R} * n\right]$$

Если внешние силы отсутствуют, или ими можно пренебречь, то импульс системы частиц сохраняется. p = const.

Слабый закон сохранения импульса.

Пусть e – орт, соответствует такому направлению, что Fвнеш * e = 0. Тогда:

$$\frac{dp}{dt} * e = Fвнеш * e$$

$$\frac{dp}{dt} * e = \frac{d}{dt}p * e = \frac{dpe}{dt} \to pe = const$$

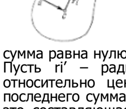
Теорема Штейнера: Пусть имеется какое-то тело и центр массы (С). Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проведенной параллельно данной через центр масс и произведения массы на квадрат расстояния между осями.

Iz1 = Iz + ma²

Доказательство. Пусть положение i-го элемента твердого тела относительно осей О и С характеризуется векторами pi и pi', а положение оси С относительно оси О – вектором а. Воспользовавшись связью между этими векторами (pi = pi' + a), преобразуем выражение для момента инерции тела относительно оси О след образом:

$$I = \sum mipi^2 = \sum mi(pi' + a)^2 \text{ или}$$

$$I = \sum mipi'^2 + 2a\sum mipi' + \sum mia^2$$



В правой части этого равенства первая сумма представляет собой момент инерции Ic относительно оси С, а последняя сумма просто равна ma². Остается показать, что средняя сумма равна нулю.

Пусть ri' – радиус-вектор i-го элемента тела относительно центра масс, тогда относительно последнего суммарный вектор $\sum miri' = 0$. Но pi' – это составляющая вектора ri', перпендикулярная осям О и С. Отсюда ясно, что если суммарный вектор равен нулю, то и сумма его составляющих в плоскости, перпендикулярной осям О и С, также равна нулю, т.е. $\sum mipi' = 0$. Теорема доказана.

$$F1 = F2; N = r1\times F1 + r2\times F2 = (r1 - r2)\times F1 = r\times F1$$

Из этого следует:

Момент пары сил относительно произвольной точки не зависит от выбора этой точки и определяется расстоянием между точками приложения этих сил.

Рассмотрим систему частиц (i=1, N): $\frac{dMi}{dt} = Ni$

$$\sum_{i=1}^{N} Ni = \sum_{i=1}^{N}(Niвнут + Niвнеш) = \sum_{i=1}^{N} Niвнеш = Nвнеш$$

$\frac{dM}{dt} = Nвнеш$ – уравнение моментов для системы частиц.

ЗСМИ: в замкнутой системе частиц полный момент импульса системы сохраняется. M = const

Тогда в дифференциальном виде можно записать:

Fdr = -dU

$F_r = -\frac{dU}{dr}$ проекции на оси Fx = -dU/dx Fy = -dU/dy

Сила называется потенциальной, если она имеет следующий вид:

$$F = -\frac{dU}{dx}i - \frac{dU}{dy}j - \frac{dU}{dz}k$$

Чуточку упростим:

Оператор вектор производной (набла – переводит одну функцию в другую):

$$\nabla = \frac{di}{dx} + \frac{dj}{dy} + \frac{dk}{dz}$$

Тогда F = –∇U (такой вид производной называется градиентом (F = -gradU)

Сила есть мера однородности потенциальной энергии в пространстве.

$$U(x) = U(x)_{x=0} = 0 + \left(\frac{d}{dx}U(x)\right)_{x=0} * x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}U(x)\right) * x^2 + O(x^2)$$

Обрываем ряд Маклорена условием малости колебаний. $O(x^2)$ означает, что мы пренебрегаем всеми степенями больше 2.

$U(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}U(x)\right)_{x=0} * x^2 = \frac{kx^2}{2}$ – получаем явный вид потенциальной энергии.

В случае малых колебаний, чтобы происходило всё, нужно чтобы

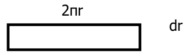
$k = \left(\frac{d^2}{(dx^2)}U(x)\right)_{x=0}$ – положительный множитель.

Для получения дифф.уравнения применим 2 з.Ньютона: $m\omega = F$.

$m * \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$; т.к. $\omega^2 = \frac{k}{m} \to k = m\omega^2$; $m * \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2$.

Получаем диф.ур.колеб:

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. Его решения: $x = Acos(\omega t + \varphi 0)$



dS = 2πrdr

2) dS = d(πr²)' = (πr²)'dr = 2πr*dr

r → r + dr

s → s + ds

$$dIz = dm * r^2 = \frac{m}{\pi R^2} * r^2 * 2\pi r * dr$$

$$Iz = \int_0^R \frac{m}{\pi * R^2} * r^2 * 2\pi r * dr = \frac{2m}{4R^2}(R^4 - 0) = \frac{mR^2}{2}$$

2.6 Решение уравнения гармонических колебаний. Начальные условия

Уравнение 2-го порядка даст решение с 2 неопр. Значениями: $x'' + w0 * x = 0$; $x(0) = x0$; $v(0) = v0$

Дополнительные условия – начальные: 1) где находится точка в начале колебаний 2) какая начальная скорость.

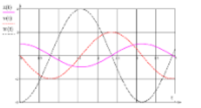
В теории показано, что общим **решением** уравнения является данная функция:

$$x(t) = A * \cos(w0t + \varphi 0)$$
$$v(t) = x(t)' = -Awsin(w0t + \varphi 0)$$
$$A * \cos(w0 * 0 + \varphi 0) = x0;$$
$$-Aw0sin(w0 * 0 + \varphi 0) = v0$$

$$cos\varphi 0 = \frac{x0}{A}; sin\varphi 0 = -\frac{v0}{Aw0}; \ \varphi 0 = arctg\left(-\frac{v0}{w0x0}\right)$$

По основному тригон.тождеству:

$$\left(\frac{x0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v0}{Aw}\right)^2 = 1; \quad A^2 = x0^2 + \frac{v0^2}{w^2}$$



Кол. называют гармоническими, если они происходят по закону sin или cos. По гармоническому закону будут изменяться: x(t), v(t), w(t)

$$w(t) = v(t)' = -A^2 w0\cos(w0t)$$

Av = Aw0 – амплитуда скорости

Aw = Aw0² – амплитуда ускорения.

Кин.элементы с нулевой начальной фазой:

$$x(t) = Acos(w0t)$$
$$v(t) = Avcos\left(w0t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$w(t) = Awcos(w0t + \pi)$$

2.7 Энергия гармонического осциллятора

Гармонический осциллятор – мат точка, совершающая гармонический колебания во времени.

Функция состояния от системы координат -Ep, функция скорости – Ek.

$.Ep = \frac{kx^2}{2} = \frac{mw^2}{2}\left(Acos(wt + \propto)\right)^2 = \frac{m(wA)^2}{4}\{1 + cos[2(wt + \propto)]\}$; $w^2 = \frac{k}{m}$

$.Ek = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(-Awsin(wt + \propto)\right)^2 = \frac{m(wA)^2}{4}[1 - cos[2(wt + \propto)]]$

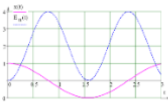
Колебания во времени Ep происходят с удвоенной частотой коорд.колебаний.

Фазы колебаний кинетической и потенциальной энергий не совпадает. Разница в колебаниях π. Поэтому выражение для полной энергии гармонического осциллятора примет вид:

$$E = \frac{w0^2 mA^2[\cos^2(w0t + \propto) + \sin^2(w0t + \propto)]}{2} = \frac{w0^2 mA^2}{2} = const$$

Полная энергия не явл. ф-й времени → она постоянна.

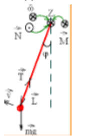
x(t)=Acos(w0t)



$$Ep(t) = \frac{w0^2}{2}[1 - cos[2(wot)]]$$

2.8 Уравнения колебаний математического и физического маятника

Математический маятник – система, состоящая из длинной нерастяжимой нити и точечной массе, закрепленной к ней.



Для определенности рассмотрим фазу движения справа налево.

L – радиус-вектор в точку приложения силы тяжести.

En – вект.сумма всех моментов сил.

φ – угол отклонения от положения равновесия.

Поскольку колебания происходят под действием моментов сил, необх исп уравнен динамики, кот связывает моменты сил и моменты импульсов мат точки.

$N = \frac{dM}{dt} \to$ M – несохр величина

Рассмотри проекцию уравнения моментов на Oz, которая проходит через точку подвеса, перпендикулярно плоскости рисунка

$\frac{dMz}{dt} = Nz$; $v = w \times L$ – линейная скорость. С помощью L определяется положение в пространстве; L – длина нити. Вектор w направлен так, что с его острия вращение – против часовой стрелки.

$N = L \times mg$ – момент сил (значение вектора силы)

Момент силы натяжения = 0 (sin=0)

$M = L \times mv$ – момент инерции отн точки подвеса

Там, где начинается L, начинаются M, N.

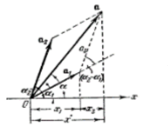
Проекции на Oz:

$Nz = -Lmgsin\varphi = |N|cos\pi$; $Mz = Lmvsin\frac{\pi}{2}$

$mL\frac{dv}{dt} = -mgLsin\varphi$

Перейдем от линейной скорости к угловой и воспользуемся малостью колебаний:

2.9 Сложение колебаний. Вектор-диграмма



Рассмотрим одномерные колебания с одинаковой частотой.

$$x1(t) = a1\cos(wt + \varphi 1)$$
$$x2(t) = a2\cos(wt + \varphi 2)$$

W – совпадает с цикл частотой вектора вращения a1 или a2.

Наша цель – получение результирующего закона колебаний:

$$x(t) = acos\,(wt + \varphi)$$

Вектор-диаграмма – это абстрагирование процесса с использованием мат величин.

Амплитуда результирующего колебания находится с использованием теоремы косинусов и равна:

$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_2)]$

Так как разность фаз в общем случае зависит от времени, то амплитуда A результирующего колебания непостоянна. Поэтому результирующее колебание не является гармоническим, а представляет собой сложный колебательный процесс с пульсирующей амплитудой.

Если частоты колебаний равны, то разность фаз этих колебаний не зависит от времени: $\Delta\varphi = \varphi 2 - \varphi 1$. Такие колебания называются когерентными.

Начальная фаза результирующего колебания определяется соотношением:

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{a_1\sin(\alpha_1) + a_2\sin(\alpha_2)}{a_1\cos(\alpha_1) + a_2\cos(\alpha_2)}$$

Очевидно, что:

1) если разности начальных фаз обоих колебаний равна 0 или $2\pi n$, то $cos\Delta\varphi = 1$ и амплитуда результирующего колебания максимальна и равна сумме

2.10 Уравнение затухающих колебаний и его решение. Логарифмический декремент затухания

Затухающие колебания – это колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени под действием внешних сил. $F = F0coswt * \frac{F0}{m} = f0$

$$mw = -Fc - Fупр; \quad m * \frac{d^2}{dt^2}x = -r * \frac{dx}{dt} - kx$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\beta * \frac{dx}{dt} + w0^2 x = 0; \quad 2\beta = \frac{r}{m}$$

β – коэф затухания;

w0 – частота своб колебаний (без затухания)

Решение:

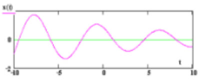
$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(wt + \propto)$

В затух колебаниях A – переменная.

$\begin{cases} x(t) = A(t)\cos\,(wt + \propto) \\ A(t) = A * e^{-\beta t} \end{cases}$

Частота затух колебаний w != w0

$w = \sqrt{w0^2 - \beta^2}$



$\frac{A(0)}{A(\tau)} = e$; $\frac{Ae^0}{Ae^{-\beta\tau}} = e$

$e^{\beta\tau} = e$; $\tau = \frac{1}{\beta}$

τ – характ. времени, в течение которого амплитуда убывает в e раз

Как уменьшается амплитуда за период?

$A(t) = ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{ae^{-\frac{t}{\tau}}}{ae^{-\frac{(t+T)}{\tau}}} = \frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{e^{-\frac{t}{\tau}}e^{-\frac{T}{\tau}}} = e^{\frac{T}{\tau}}$$

2.11 Уравнение вынужденных колебаний и структура его решения.

В качестве исходного уравнения, рассмотрим 2 з.Ньютона:

$$mw = Fупр - Fсопр + Fвн$$

Колебания называются вынужденными, если они происходят под действием внешней силы.

Случай, когда внешнее воздействие является периодическим:

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t)$

W – частота внешнего воздействия

w0 – частота собственных колебаний

2 з.Ньютона приведем к стандартной форме:

$f0 = \frac{F0}{m}$, F0 – амплитуда вынуждающей силы

$w1 = \sqrt{w0^2 - \beta^2}$ – частота вынужденных колебаний

Из уравнения следует, что результирующее колебание, которое соответствует сумме 3-х колебаний, из левой тороны уравнения должно совпадать с f0. Общее решение уравнения – решение однородного уравнения и частное решение неоднородного:

$xобщ(t) = Ae^{-\beta t}\cos(w1t + \propto)$ – общее решение однородного уравнения

$xнеодн(t) = Bcos(wt - \varphi)$ – частное решение неоднородного уравнения

Теорема:

$$x(t) = xобщ(t) + xнеодн(t)$$
$$x'' + 2\beta x' + w0^2 x = f0\cos(wt)$$
$$x' = -wBsin(wt - \varphi) = wBcos\left(wt - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x'' = -w^2 Bcos(wt - \varphi) = w^2 Bcos(wt - \varphi + \pi)$$

Подставим:

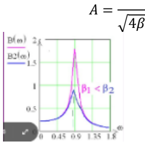
$.w^2 Bcos(wt - \varphi + \pi) + 2\beta wBcos\left(wt - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + w0^2 Bcos(wt - \varphi) = f0coswt$

2.12 Резонанс. Резонансные кривые

Резонанс – резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой к собственной частоте кол системы.

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f0}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (w0^2 - w^2)^2}}$$



Чтобы определить резонансную частоту, нужно найти максимум функции вынужденных колебаний или, что то же самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение под корнем в знаменателе по частоте и приравняв нулю, мы получим условие, определяющее w0:

$\frac{d}{dw}(4\beta^2\omega^2 + (w0^2 - w^2)^2) = 0$

$-4(w0^2 - w^2)w + 8\beta^2 w = 0$

Уравнение имеет три решения: w = 0 и $w = \pm\sqrt{w0^2 - 2\beta^2}$. Решение равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено, как не имеющее физ смысла (частота не может быть отриц). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$wрез = \sqrt{w0^2 - 2\beta^2}$$

График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающего воздействия называется **резонансной кривой**.

2.13 Механические волны в упругих средах. Нормальные и тангенциальные напряжения. Продольные и поперечные волны

Нормальное напряжение – физ вел, равная отношению силы к площади поверхности, на которую действует сила, когда сила перпендикулярна поверхности. $\sigma = \frac{Fn}{S}$.

Если после прекращения действия силы, тело принимает прежние размеры и форму, это упругая деформация.

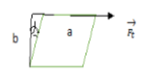
Относительное изменение длины стержня (продольная деформация): $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Для малых деформаций з Гука: $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга – напряжение при нормальной деф, при котором относит деф равна 1, но при этом не превзойдет предел упругих напряжений.

$\frac{Fn}{S} = E * \frac{\Delta l}{l}$; $Fn = \frac{SE}{l}\Delta l = k\Delta l$; $k = \frac{SE}{l}$ – жесткость

$$aWn = \frac{k\Delta l^2}{2}$$

Тангенциальное напряжение – такое напряжение, при котором сила направлена по касательной к поверхности.



$\tau = \frac{F\tau}{S}$

Введем относительную деформацию. Ее определяет отклонение по вертикали $\gamma = tg \propto$

Модуль сдвига – физ величина, характеризующая способность материала сопротивляться сдвиговой деформации. $\tau = G * \gamma$

$$w\tau = \frac{G\gamma^2}{2}$$

2.14 Уравнение плоской волны. Одномерное волновое уравнение

Пусть смещение точек среды происходит по направлению Y, а волна распространяется по X; v – скорость движения фазы волны.

Запишем уравнение: $y(x,t) = Asinwt$; т.к. для волнового процесса характерно явление волнового запаздывания со временем $\tau = \frac{x}{v}$, то уравнение примет вид: $y(x,t) = Asinw(t - \tau)$

Где k – волновое число, которое показывает сколько длин волн укладывается на 2π: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{w}{\vartheta}$

$w * \tau = w * \frac{x}{v} = \frac{w}{v} * x = kx \to y(x,t) = Asin(wt - kx)$

Зафиксируем какое-либо значение фазы: $wt - kx = C$

Теперь возьмем производную от уравнения по времени: $\omega\frac{dt}{dt} - k\frac{dx}{dt} = 0 \;\; => \;\; \omega = kv$

Таким образом скорость распр. волны. в уравн. есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют фазовой скоростью $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$

Ур-е любой волны явл. решением диф., назыв. волновым: $\frac{\partial^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{dt^2}$

Чтобы его проверить, сопоставим первые частные производные по времени и по координате от $y(x,t)$, описывающей плоскую волну.

$-A\omega^2\sin(wt - kx) = -\frac{1}{v^2}A\,k^2\sin(wt - kx)$

т.к. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ Получаем: 1=1 рав. Верно

2.15 Гармоническая плоская и сферические волны

Волна называется гармонической, если колебания точек среды происходят с одинаковыми циклическими частотами ω по закону sin или cos.

$\varphi(x,y,z,t) = A(x,y,z)\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$ – *уравнение волны*

$\vec{k}$ - волновой вектор, $\vec{r}$ –радиус-вектор. $\vec{k} = k\cdot\vec{n}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$

Уравнение волны удовлетворяет волновому уравнению: $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$

При движении волны из одной среды в другую частота не меняется, а длина волны изменяется.

1)A(x,y,z)=a – плоская волна. (если A=const, то волна называется плоской)

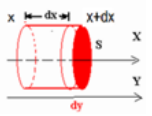
2)A(x,y,z)=a(если A обратно пропорционально радиус-вектору, то волна называется сферической)

Под скоростью гармонической волны понимается фазовая скорость, т.е. скорость перемещения фазы волны.

$.r = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0 -$ геометричес место точек, кол в однфа

2.16 Скорость продольной одномерной волны

Пусть одномерная волна распределяется вдоль направления X. Смещение точек в волне характеризуется Y.



Рассмотрим элементы V бесконечно малого пространства dV, которое имеет форму цилиндра. Площадь - S, высота dx. Под действием волны основание изменяется от x до x+dx.

dV=S·dx

dm=S · dx · ρ

$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\frac{\partial y}{\partial x}$

$\sigma = \frac{F_x}{S} \to F_x = S\cdot E\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$

Рассмотрим II з-н Ньютона в проекции на Ox для данного цилиндра:

$ma_x = F_{xdx} - F_x, a_x = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ y – смещение цилиндра.

$$F_{xdx} - F_x = S\cdot E\cdot\left[\frac{\partial y(x + \partial x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right]$$

Разложим производную $\frac{dy(x+dx)}{dx}$:

$$\frac{dy(x + dx)}{dx} = \frac{dy}{dx}(x) + \frac{d^2y}{dx^2}dx + O(dx^2)$$

2.17 Энергия продольной одномерной волны

Рассмотрим продольную волну. dy - абсолютная деформация объема, которая определяет смену точек среды. dV=S·dx, dm=S · dx · ρ, т.к. среда обладает упругими свойствами, то в соответствии с законом Гука можно ввести изменение потенциальной энергии:

$dE_p = \frac{k(dy)^2}{2}$

Кинетическая энергия объема определяется скоростью смещения точек среды: $dE_k = \frac{dm\,v_y^2}{2}$

В соответствии с законом Гука:

$k = \frac{ES}{dx}, v_y = \frac{dy}{dt}$ –положение точек среды. $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{ES} = \varepsilon$ (dy – абсолютная деформация, dx – первоначальный размер)

Понадобится фазовая скорость: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Пол. эн. эл-та dV: $dW = dE_k + dE_n = \frac{k(dy)^2}{2} + \frac{dm\,v_y^2}{2} = \frac{1}{2}(\rho Sdx)\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{ES}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2$

Пусть колебания происходят по закону sin: $y(x) = asin\,(\omega t - kx)$

$\frac{dy}{dt} = \omega\,a\cos(\omega t - kx)$, $\frac{dy}{dx} = -k\,a\cos(\omega t - kx)$

2.18. Поток и плотность потока энергии. Вектор Умова

Поток энергии – количество энергии, переносимое волной за единицу времени через площадку перпендикулярную к направлению распространения волны.

Для удобства вводится среднее значение потока энергии (т.к. процесс периодический). Функция состояния объема будет все время изменяться.

$W\text{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T dW = \frac{1}{T}\int_0^T wSdx = \frac{1}{T}\int_0^T wSvdt$, где w – плотность

Учитывая фазовую скорость волны $dx = vdt$ =>

$$W\text{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(a\omega)^2 cos^2\left(kx - \frac{2\pi}{T}t\right)Svdt;$$

$$W\text{ср} = \frac{1}{2}\,\omega^2\rho a^2 Sv\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + kx\right)\ dt$$

$$\tau = \frac{2\pi}{T}t - kx \qquad d\tau = \tau' dt = \frac{2\pi}{T}dt$$

dt=$\frac{T}{2\pi}\int_{-kx}^{2\pi-kx}\cos^2(\tau)\quad d\tau = \frac{T}{2\pi}\int_{-kx}^{2\pi-kx}\left(\frac{\cos\ (2\tau)+1}{2}\right)d\tau = \frac{T}{4\pi}\int_{-kx}^{2\pi-kx}dt + \frac{T}{4\pi}\int_{-kx}^{2\pi-kx}\cos\ (2\tau)\quad d\tau=$

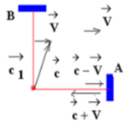
Используя графический смысл определенного интеграла $\int_{-kx}^{2\pi-kx}\mathbf{cos}\ \ (\mathbf{2\tau})\quad \boldsymbol{d\tau}$=0 (т. к его величина равна сумме площадей под функцией. А на участке $\mathbf{2\pi}$ сумма площадей равна $\mathbf{0}$)

$=\frac{T}{4\pi}\int_{-kx}^{2\pi-kx}dt = \frac{T}{4\pi}\tau\oint_{-kx}^{2\pi-kx} = \frac{T}{4\pi}\frac{2\pi-kx+kx}{1} = \frac{T}{2}$

амплитуд складываемых колебаний;

2) если разность начальных фаз равна $\pm\pi$, т.е. $\cos(\Delta\varphi) = -1$ (колебания находятся в противофазе), амплитуда результирующего колебания минимальна и равна: *A = A1 – A2. В случае равенства амплитуд, наблюдается молное гашение колебаний.*

3.1 Опыт Майкельсона-Морли



Майкельсон и Морли решили проверить и вычислить относительную скорость движения эфира. Они использовали интреферометр – система зеркал, установленных на каменной плите площадью 1,5 мвк и толщиной 30 см, которая плавала на ртутной подушке и может поворачиваться на 360 градусов в горизонтальной поверхности.

Принцип измерения скорости эфира был основан на том, что должна существовать разность времени при прохождении светового сигнала через расстояние ОА и ОВ, так как различается направление с движением Земли.

Если бы эксперимент дал положительный результат, то это бы означало, что принцип относительности Галилея не выполняется для света.

По итогу, эксперимент не дал положительный результат, а значит принцип отн.Галилея (скорость света в пустоте одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источника и приемников света) работает.

Принцип относительности Галилея лег в основу созданной Эйнштейном специальной теории относительности.

$$ta = \frac{L}{c-V} + \frac{L}{c+V} = 2*\frac{L}{c}*\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$tb = 2*\frac{L}{c1} = 2*\frac{L}{c}*\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$sin\varphi = \varphi;\ \ w = \frac{d\varphi}{dt};\ \ v = w\times L^2;\ \ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}sin\varphi = 0$$

$$w0^2 = \frac{g}{l};\ \ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + w0^2 sin\varphi = 0$$

$$\varphi(t) = \varphi0\cos(w0t + \alpha);\ \ \ w0 = \sqrt{\frac{g}{l}};\ \ \ T = \frac{2\pi}{w0}$$

Физ маятник – абс твердое тело, у которого центр масс и точка подвеса не совпадают. Идёт справа налево.

Т.к. тело твердое, то воспользуемся основным уравнением динам движ

$Iz * \beta z = Nz$ – момент сил, под которым происходит движение.

$$N = L\times mg;\quad Nz = -Lmgsin\varphi$$

$$Iz * \frac{dw}{dt} = -mgLsin\varphi$$

e$\frac{d^2\varphi}{dt} + \frac{mgL}{Iz}sin\varphi = 0; w0 = \frac{mgL}{Iz}; w0 = \frac{g}{L\text{пр}}$

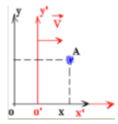
Приведенная длина (Lпр) – длина тонкого мат маятника, частота которого совпадает с физическим: $L\text{пр} = \frac{Iz}{mL}$.

$\frac{d^{2\varphi}}{dt} + w0^2\varphi = 0$ – уравнение колебаний

$\varphi(t) = \varphi0\cos(w0t + \varphi0)$ – закон колебаний.

Если в физ маятнике поменять точку подвеса (О) и точку качания (О’), то период не изменится.

3.2 Преобразования Лоренца



Пусть в некоторой координатной точке происходит событие А. Согласно II постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и та же и равна с. $x' = c * t'\quad x = ct$

Замечание: в соответствии с постулатами Эйнштейна, время течет в разных системах отсчета:

$$t \neq t'$$

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$

$$ct' = \gamma(ct - vt)(1)$$

$$ct = \gamma(ct' - vt')(2)$$

Перемножим 1 и 2:

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v0^2)$$

Отсюда:

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v0^2}{c^2}}$$

Получим совокупность преобразований Лоренца:

$$x = \frac{x' + v0t'}{\sqrt{1-\frac{v0^2}{c^2}}};\ \ y = y';\ \ z = z';\ \ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$x' = \frac{x - v0t}{\sqrt{1-\frac{v0^2}{c^2}}};\ \ y' = y;\ \ z' = z;\ \ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Эти преобразования устанавливают связь между координатами (x, y, z) и моментом времени t события, наблюдаемого в система отсчета K, и координатами (x’, y’, z’) и моментом времени t’ этого же события, наблюдаемого в системе K’. Преобразования Лоренца выражают отн характер времени и расстояний

3.3 Относительное понятие одновременности. Относительность длин и промежутков времени

Пусть в K в точках с координатами x1 и x2 происходит одновременно два события t1=t2. В системе K’ время этих событий:

$$t1' = \frac{t1 - \frac{vx1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}};\ t2' = \frac{t2 - \frac{vx2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta - \text{относительное зн.скорости}$$

Из этих формул видно, что в случае, если события в системе K пространственно разобщены (x1 != x2), то в K’ они не будут одновременными (t1’ != t2’).

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\Delta t - \frac{v * \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

В одних системах 1 событие может предшествовать 2, а в других – наоборот (это работает только в том случае, если между событиями отсутствует причинная связь).

Два события называются одновременными, если временной интервал для них расхождения =0.

Исходя из $\Delta t'$ следует: если два события неподвижны в системе одновременно, то они разделены пространственным интервалом Δx, то они не будут одновременны в системе координат.

$$\Delta t = 0,\text{тогда}\ \Delta t' < 0 <=> t_2' < t_1'$$

Длина в подвижной системе

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt - x_1 + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Начальная фза:

Постоянная $\varphi0$ представляет собой значение фазы в момент времени t=0 и называется начальной фазой колебания. С изменением начала отсчета времени будет изменяться и $\varphi0$. Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени.

Амплитуда:

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется амплитудой колебания. Ее значение определяется величиной первоначального отклонения или точка, которым система была выведена из положения равновесия.

Волна – периодич. Во времени и пространстве процесс колебания частицы среды, которая распространяется с опред скоростью. При прохождении волны, частицы среды не увлекаются волной, а продолжают совершать колебательные движения около положительного равновесия.

Волновая поверхность – геом место точек пространства, колебл в одной фазе. Волна называется **продольной**, если напр распространение волны и напр колеб точек среды параллельны. Такие волны – результат норм.напряжения в упругой среде (возник в ж, тв и газ телах)

Волна называется **поперечной**, если напр колеб точек среды перпенликулярно напр распространения волны. Такие волны возникают при тангенциальном напряжении.

Характерным для волновых процессов явлением является наличие времени запаздывания при передаче фазы движения.

Волновым вектором называется k = k * n, где k – волновое число, которое показывает сколько длинных волн укладывается на 2π

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{w}{\vartheta} \qquad v = \lambda\vartheta = \frac{\lambda}{T}$$

В изотропных средах направление распространения волны определяется направлением k

Луч – линия, в каждой точке которой k является касательной.

Подставим wрез в формулу для ампл.вын.колеб.получаем: $A\text{рез} = \frac{f0}{2\beta\sqrt{w0^2-2\beta^2}}$

Выражение для определения резонансной частоты. Чем меньше β, тем больше Арез.

Из формулы амплитуды вытекает, что при малом затухании (т.е. при $\beta \ll w0$) амплитуда при резонансе приближенно равна

$$A\text{рез}\sim\frac{f0}{2\beta w0}$$

Поскольку будем использовать векторную диаграмму, изменим аргумент cos справа добавляя и отнимая φ

части ур-ния.

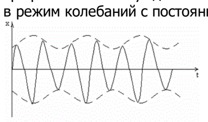
$f_0^2 = (2\beta B\omega)^2 + ((\omega_0^2 - \omega^2)\beta)^2$

$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Амплитуда частного решения является функцией частоты $B(\omega)$ внешней вынужденной силы.

$B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega^4}}$

График закона вынужденных колебаний перейдет в режим колебаний с постоянной Амплитудой.



$e^{\frac{T}{\tau}}$ – декремент затухания

$\lambda = \ln\left(e^{\frac{T}{\tau}}\right) = \frac{T}{\tau}$ – логарифмический декремент затухания

Логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за время, при котором амплитуда уменьшается в e раз:

$$\frac{\tau}{T} = Ne$$

$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$ – добротность осциллятора (параметр кол системы, определяющий ширину резонанса и характеризующий, во сколько раз запаса энергии в системе больше, чем потери энергии за время изменения фазы за 1 радиан). Чем больше добротность осцилляторы, тем больше он совершит колебаний.

$\frac{1}{\lambda} = N_e$

Значит

$dW = \frac{1}{2}(\rho Sdx)\cdot a^2\cdot cos^2(kx - \omega t)\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}ES\cdot dx\cdot a^2\cdot cos^2(kx - \omega t)\cdot k^2 = \frac{1}{2}\cdot S\cdot a^2\cdot cos^2(kx - \omega t)\cdot dx\cdot(\rho\omega^2 + Ek^2);$

$\rho\omega^2 + Ek^2 = \rho\omega^2 + v^2\rho\frac{\omega^2}{v^2}\ = 2\,\rho\omega^2$

$$dW = S\rho a^2\omega^2 cos^2(wt - kx)dx$$

$W = \frac{1}{S}\frac{dW}{dx} = \rho a^2\omega^2 cos^2(kx - \omega t)$

$O(dx^2)$- означает, что мы пренебрегаем всеми слагаемыми начиная от dx до dx^2.Подставим разложенную функцию в [ ].

$$dma_x = F_{xdx} - F_x, a_x$$

$$dm = \rho Sdx$$

$$a_x = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$\rho Sdx\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = S\cdot E\cdot\frac{d^2y}{dx^2}dx, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\rho}{E}\frac{d^2y}{dx^2}$ - преобразованный 2ой закон Ньютона с учетом малости dx.

С другой стороны, существует одномерное волновое уравнение следующего вида $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dx^2}$.

Из сравнения этих уравнений получаем выражение для фазовой скорости продольной волны. $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

В случае однородной среды векторы $\vec{k},\vec{n},\vec{v}$ коллинеарны.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт каждый момент времени только один. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется **плоской** или **сферической**.

$v_{\text{продол}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ \ v_{\text{попереч}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ (E-модуль Юнга, G-модуль сдвига)

Длина волны определяется как минимальное расстояние между точками пространства, в которых фазы колебаний совпадают. Период гармонических колебаний– минимальный временной интервал, когда колебания в данной координатной точке имеют одинаковые интервалы.

$$\Delta l = l * \sqrt{1-\beta^2}$$

Таким образом, длина стержня l, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины l0, измеренной в системе, относительно которой он покоится.
В направление осей y и z размеры стержня одинаковы во всех системах отсчета.
Лоренцова (или фицджеральдовое) сокращение: у движущихся тел размеры их в направление движения сокращается тем больше, чем больше скорость движения.
Время для неподвижного наблюдателя

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v * x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v * x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \Delta t' = \Delta\tau$$

$$\Delta\tau = \Delta t * \sqrt{1-\beta^2}, \quad \Delta\tau < \Delta t$$

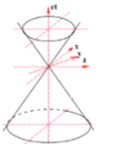
τ – собственное время тела (время, отсч. По часам, движущимся вместе с телом)

Постулаты Эйнштейна: 1) Принцип относительности Эйнштейна. Законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета; 2) Принцип постоянства скорости света. Скорость света в вакууме не зависит от движения источника света или наблюдателя, одинакова во всех направлениях и равна 3,0·108 м/с.

Плотность потока энергии(u)- величина численно равная количеству энергии, переносимой волной в единицу времени через единицу площади поверхности, е площадка ортогональна к направлению распространению волны.
U=$\left(\frac{dW_{cp}}{dS}\right) = \frac{1}{2} w^2 \rho a^2 v$
$j^{-} = \frac{1}{2} w^2 \rho a^2 v^{-}$ – вектор Умова (определяет направление и величину переноса потока энергии)

3.4 Интервал. Причинность

В СТО время в 3-мерном пространстве независимо друг от друга не существует, а образует единое 4-мерное пространство – время Минского. **Интервал** между точками в 4х мерном пространстве может быть определен след образом.



$\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 -$ является уравнением поверхности 2го рода и является конусом в 4мерном пространстве
С помощью преобразований Лоренса можно показать, что квадрат. интервала не зависит от И.С.О., т.е. он является инвариантным.
Инвариантность – фундаментальное понятие, означающее независимость физ закономерностей от конкретных ситуаций, в которых они устанавливаются, и от способа описания этих ситуация.
$\Delta S^2 = \Delta S'^2 \; \Delta S^2 > 0$
1) $c^2\Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$
Во внутренней части конической поверхности $\Delta S^2 > 0$ –времени подобный – это означ, что 2 соб, разделенных пространственным интервалом могут быть связаны с помощью электромагнитных сигналов. Данные точки, связанные данным интервалом, обладают причинно-следственными связями.
2) $\Delta S^2 <$ -пространственноподобный;

$$c^2\Delta t^2 < \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

3.5 Релятивистский закон преобразования скоростей

Рассмотрим координатные преобразования Лоренса, определим проекцию вектора скорости:

$$x = \frac{x' + v0t'}{\sqrt{1 - \frac{v0^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$vx = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V * dt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} * \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}$$

$$vx = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{v}{c^2} * \frac{dx'}{dt'}} = \frac{(vx' + V)}{1 + \frac{Vvx'}{c^2}}$$

В отличие от проекции vx, vy является не только функцией vy', то и vx', т.е. на проекцию vy влияет движение по vx:

$$vy = \frac{vy' * \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{Vvx'}{c^2}}$$

Аналогично для vz:

$$vz = \frac{vz' * \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{Vvx'}{c^2}}$$

3.6 Релятивистский импульс. Связь энергии и импульса в СТО

Для замкнутой системы из релятивистских частиц закон сохранения ньютоновского импульса не выполняется.
Релятивистская масса частицы зависит от ее скорости. Другими словами, масса одной и той же частицы различна в разных инерциальных системах отсчёта.
В релятивистской механике существует масса покоящейся частицы; ее обозначают m0 и называют массой покоя: $m = \frac{m0}{\sqrt{1-\beta^2}}, m -$ масса движущейся частицы (релятивисткая)

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Выразим β из формулы для импульса и подставим в формулу для энергии:

$$\beta p^2(1-\beta^2) = m^2v^2; \; \frac{p^2\beta^2 + m^2\beta^2c^2}{p^2} = 1;$$

$$\frac{\beta^2(p^2 + m^2c^2)}{p^2} = 1; \quad \beta^2 = \frac{p^2}{p^2 + m^2c^2};$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m^2c^2}}} = \frac{mc^2\sqrt{p^2 + m^2c^2}}{mc} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

Получили связь энергии и импульса: E= $c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$
$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2c^2 = inv -$ инвариант
Релятивистский инвариант – физ величина, которая имеет разные значения в разных инерциальных системах.
Запишем выражение для вектора импульса: $p = \frac{E}{c^2}v$

3.7 Термодинамические и статистические методы

Система называется **макроскопической**, если она образована огромным число микрочастиц. Состояние системы задается с помощью т/д параметров (p, V, T). Если параметры системы имеют определенное значение в определенное время, то состояние называется равновесным.
Процессом называется совокупность последовательных состояний системы. Процесс называется обратимым, если параметры системы можно повторить. Равновесные процессы - обратимы.
Для неравновесных маловероятно повторение исходящих параметров, возвращение в исходящее состояние.
В качестве системы будет рассматриваться идеальный газ, в котором частицы практически не взаимодействуют, столкновение чаще происходит со стенками сосуда.
Статистический метод: макроскопические свойства системы изучаются на основе молекулярно-кинетических представлений и методов.
Системы находятся в равновесных системах.
Изучение свойств системы сводится к отысканию средних значений физических величин, которые характеризуют систему как целое.

3.8 Плотность вероятности. Среднее значение

1) Дискретное число испытаний (процесс, где происходит изменение). Полное число испытаний – сумма $\sum Ni = N$, где Ni/N – относительная частота появления результата.
Вероятностью появления величины xi и xj при дискретном измерении называется следующая величина $Pi = \lim_{N\to\infty} \frac{Ni}{N}$
Теорема о сложении вероятностей: Вероятность того, что при изменении будет появлятся величина xi и xj, определяется суммой вероятностей i-го и j-го событий.
Следствие: нормировка полной вероятности на единицу.

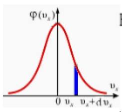
$$\sum_{i=1}^{k} Pi = \sum_{i=1}^{k} \lim_{N\to\infty} \frac{Ni}{N} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{Ni}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{N}$$

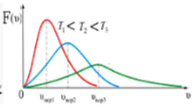
Теорема о произведении вероятностей: Вероятность того, что одновременно получается результат xi и xj, равен произведению вероятностей i-го и j-го событий.
Среднее значение величины x при дискретном измерении определяется как

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i N_i}{N} = \sum_{i=1}^{k} (x_i, P_i)$$

Непрерывный спектр величины x
Пусть задана f(x), которая определяет вероятность того, что при измерениях x мы попадаем в коридор от x до x+dx, так что Dp =f(x)dx – вероят-

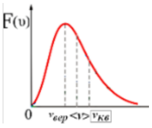
3.9 Функция распределения Максвелла





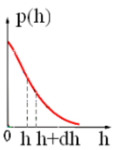
$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$
$dP = f(v) \cdot 4\pi v^2\, dv$
$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$
$F(v) = 4\pi v^2 f(v)$

Характерные скорости



$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$
$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

3.10 Функция распределения Больцмана



$p = \rho gh \qquad dp = -\rho \cdot g \cdot dh$
$p = nkT$
$\rho = \frac{m_1 N}{V}$, где m_1 - масса одной частицы.
$\frac{dN}{V} \cdot k \cdot T = \frac{-m_1 Ng}{V} dh$
$\int_{N0}^{Nz} \frac{1}{N} dN = \int_0^z \frac{-m_1 g}{kT} dh$

$$N_z = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_1 gz}{kT}\right) = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(z)}{kT}\right)$$

$$dN_{x,y,z} = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(x,y,z)}{kT}\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Термодинамический метод: изучает тепловые свойства макроскопической системы, не обращаясь к их макроскопическому строению.
В силу своей общности он ограничен в общности исследования. Не дает детальных результатов.
Оба метода взаимодополняют друг друга и обычно используются вместе.

Исследуем выражение для вектора импульса, когда $v = c$: $p = \frac{E}{c}$

Если частица движется со скоростью света, то p пропорционален E.
Какая масса у частиц, которые движутся со скоростью света? Для этого рассмотрим:

$$pc = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \;\rightarrow\; m = 0$$

Верно и обратное, если m = 0, то v=c.
В отличии от классической механики, импульс безмассовой частицы не равен 0.

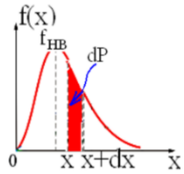
Рассмотрим частный случай: : $Vx = \frac{Vx' + V}{1 + \frac{VV'_x}{c^2}} = \frac{Vx' + c}{1 + \frac{cV'_x}{c^2}} = c -$ Формула показывает, что С – одинакова во всех измерениях

В пространстве (вне конической поверхности)
3) $\Delta S^2 = 0$ - световой интервал. На поверхности конуса $\Delta S^2 = 0$
$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 0$
Причинность: В специальной теории относительности время и 3-мерное пространство независимо друг от друга не существует, а образует единое 4-мерное пространство – время Минского.

ность. Тогда функция f(x) называется функцией распределения вероятностей (плотность вероятности) В соответствии с нормировкой вероятности

$$P = \int_a^b f(x)dx = 1$$

Функция плотности вероятности используется для определения средних величин при непрерывном спектре измеряемой величины: $< x > = \int x f(x) dx$



9.