数学建模

概率模型

随机模型

确定性因素和随机性因素

随机因素可以忽略

随机因素影响可以简单地以平均值的作用出现 ⇒ **确定性模型**

随机因素影响必须考虑 ⇒ **随机性模型**

概率模型　　**马氏链模型**　　**随机游走模型**

概率模型

1. 简单概率模型

2. 马氏链模型

3. 随机游走模型

9.7　学生作弊现象的调查和估计

背景

统计调查中会遇到因涉及个人隐私或利害关系而不受调查对象欢迎或感到尴尬的所谓**敏感问题**, 如是否有考试作弊、赌博、偷税漏税等.

即使无记名调查也很难消除被调查者的顾虑, 极有可能拒绝或故意做出错误的回答, **难以保证数据的真实性**, 使得调查结果存在很大的误差.

以对学生考试作弊现象的调查和估计为例, **建立数学模型研究敏感问题的调查和估计方法**.

问题及分析

设计合理的调查方案来提高应答率，降低不真实回答率，尽量准确地估计有过作弊行为的学生所占的比例 .

调查方案设计的基本思路

让被调查者从包含是否作过弊的若干问题中，随机地选答其中一个，让调查者也并不知道被调查者回答的是哪一个问题，以便消除被调查者的顾虑，对自己所选的问题真实作答.

美国统计学家Wanner1965年最早提出“随机化选答”方法.

Warner模型（正反问题选答）

方案设计

设计两个相反的问题供学生们选答其中一个：

问题A. 你在考试中作过弊吗?

问题B. 你在考试中没有作过弊吗?

选答规则

- 准备一套13张同一花色的扑克(如红心).
- 被调查的学生随机抽取一张，看后还原.
- 学生抽取的是不超过10的数（A看作1），则回答问题A.
- 学生抽取的是J、Q或K，则回答问题B.

Warner模型

模型假设

- 共n位被调查学生均独立作答.
- 被调查学生一旦选定应回答的问题，他将真实作答.
- 选答A题的学生比例为 p.
- 对问题A，B两题选答“是”的学生共n_1位, 选答“是”的比例(概率)π的估计值为

$$\hat{\pi} = n_1 / n$$

目的

估计有过作弊行为学生的比例 π_A ~对问题A回答“是”(或对问题B回答“否”)的比例(概率).

Warner模型

p~选答A题的概率.　　π~对两题选答“是”的概率

π_A ~问题A回答“是”(或问题B回答“否”)的概率

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第}i\text{个被调查学生回答“是”}, \\ 0, & \text{若第}i\text{个被调查学生回答“否”}, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ **独立同分布**　$E(X_i) = \hat{\pi}, D(X_i) = \hat{\pi}(1-\hat{\pi})$

全概率公式　$\pi = P(X_i = 1) = p\pi_A + (1-p)(1-\pi_A)$

⇨ π_A 的估计值　$\hat{\pi}_A = \dfrac{\hat{\pi} - (1-p)}{2p-1}, \quad p \neq 1/2$

Warner模型

$$\hat{\pi}_A = \frac{\hat{\pi} - (1-p)}{2p-1}$$

$\hat{\pi}_A$ 的性质及分析

- 无偏性

$$E(\hat{\pi}_A) = \frac{1}{2p-1} E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - (1-p)] = \pi_A$$

$$E(X_i) = \hat{\pi}$$

- 方差

$$D(\hat{\pi}_A) = \frac{\pi(1-\pi)}{(2p-1)^2 n}$$

方差分解

$$D(\hat{\pi}_A) = \frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n} + \frac{p(1-p)}{(2p-1)^2 n}.$$

直接调查并真实回答下的方差(p=1, $\pi = \pi_A$)

随机选答机制带来的方差.

Warner模型的数值结果

n=400，A,B两题选答“是”的学生数 n_1=112，

p=10/13， $\hat{\pi} = n_1 / n = 7/25$

有作弊行为学生的比例的估计值 $\hat{\pi}_A = \dfrac{\hat{\pi} - (1-p)}{2p-1}$ =0.091

估计的标准差 $\sqrt{D(\hat{\pi}_A)} = \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{(2p-1)^2 n}}$ =0.042

以2倍标准差为估计标准，有作弊行为学生的比例 $9.1 \pm 8.4(\%)$

Simmons模型 (无关问题选答)

Warner模型的缺陷

问题A与B均为敏感性问题，且 p不能为1/2.

Simmons模型调查方案设计

设计供学生们选答的问题：

问题A. 你在考试中作过弊吗?

问题B'. 你生日的月份是偶数吗?

⇩

无关(非敏感)问题

Simmons模型

模型假设

- 选答规则与部分记号同Warner模型的假设.
- 学生对问题A回答“是”的概率为 π'_A ，对问题B’回答“是”的概率设为 π'_B =1/2.
- 学生中对问题A和B’回答“是”的人数为n_2，故对问题 A和B’两问选答“是”的概率的估计值为 $\hat{\pi} = n_2 / n.$

目的 估计有过作弊行为学生的比例，即为对问题A回答“是”的概率π'_A

Simmons模型

全概率公式 $\pi = P(X_i = 1) = p\pi'_A + (1-p)\pi'_B$

π'_A 的估计 $\hat{\pi}'_A = \dfrac{\hat{\pi} - (1-p)\pi'_B}{p}$

- **无偏性** $E(\hat{\pi}'_A) == \pi'_A$
- **方差** $D(\hat{\pi}'_A) = \dfrac{\pi(1-\pi)}{np^2}$

当 $\pi'_B = 1/2$ **时**
的方差分解公式

$$D(\hat{\pi}'_A) = \frac{\pi'_A(1-\pi'_A)}{n} + \frac{1-p^2}{4np^2}.$$

直接调查并真实回答下的方差

随机选答机制带来的方差

Simmons 模型的数值结果

n=400， n_2=80， p=10/13， $\hat{\pi} = n_2 / n = 1/5$， $\pi'_B = 1/2$

有作弊行为学生的比例的估计值

$$\hat{\pi}'_A = \frac{\hat{\pi} - (1-p)\pi'_B}{p} = 0.11$$

估计的标准差

$$\sqrt{D(\hat{\pi}'_A)} = 0.026$$

以2倍标准差为估计标准，有作弊行为学生的比例

$$11 \pm 5.2(\%)$$

Simmons模型与Warner模型的精度比较

选答A题的学生比例 *p*相同

Warner模型

$$D(\hat{\pi}_A) = \frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n} + \frac{p(1-p)}{(2p-1)^2 n}.$$

Simmons模型 $\pi'_B = 1/2$

$$D(\hat{\pi}'_A) = \frac{\pi'_A(1-\pi'_A)}{n} + \frac{1-p^2}{4np^2}.$$

数值结果 $\sqrt{D(\hat{\pi}_A)} = 0.042$ $\sqrt{D(\hat{\pi}'_A)} = 0.026$

π'_B 对任意的 $p > 1/3$ $\Rightarrow$ $D(\hat{\pi}'_A) < D(\hat{\pi}_A)$

Simmons模型的估计精度比Warner模型的高.

Christofides模型（2003）

回答用数字替代“是”或“否”，以减少被调查者的顾虑.

准备工作

一套外形相同的卡片，每张卡片上写有1～L中某一数字，数字为k的卡片在卡片总数中所占的比例为p_k ($k=1,2,\ldots,L$), p_k不全相等.

选答机制

- 被调查者随机抽取一张卡片，看后放回；
- 若被调查者做过弊, 回答$L+1$与他抽取的数字之差；
- 若被调查者未做过弊, 回答他抽取的数字 .

假设被调查者按照选答机制独立、真实作答.

估计有过作弊行为学生的比例 π_A

Christofides模型

$$Z_i=\begin{cases} L+1, & 第i个被调查者有过作弊行为, \\ 0, & 第i个被调查者未有作弊行为, \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

$$\pi_A=P(Z_i=L+1)$$ ~需要估计的概率

Y_i~第 i个被调查者抽到的数字, Y_i独立同分布, Y_i, Z_i独立.

选答机制

做过弊, 回答$L+1$与抽取数字之差；

未做过弊, 回答抽取的数字 .

第 i个被调查者所回答的数字 $d_i=|Y_i-Z_i|$

全概率公式

$$P(d_i=k)=(1-\pi_A)p_k+\pi_A p_{L+1-k}, \quad k=1,2,\cdots,L$$

Christofides模型

$$P(d_i = k) = (1-\pi_A)p_k + \pi_A p_{L+1-k}, \quad k = 1,2,\cdots,L$$

$$\Rightarrow \quad E(d_i) = \sum_{k=1}^{L} kp_k + \pi_A(L+1-2\sum_{k=1}^{L} kp_k)$$

$$= E(Y) + \pi_A(L+1-2E(Y))$$

$$D(d_i) = D(Y) + \pi_A(1-\pi_A)(L+1-2E(Y))^2$$

调查数据 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ $\Rightarrow$ $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$ $\Rightarrow$ $E(d_i)$

π_A 的估计 $\hat{\pi}_A^* = \dfrac{\bar{d} - E(Y)}{L+1-2E(Y)}, \quad L+1-2E(Y) \neq 0$

Christofides模型

$$\hat{\pi}_A^* = \frac{\bar{d} - E(Y)}{L+1-2E(Y)}$$

- 无偏性 $E(\hat{\pi}_A^*) = \pi_A$

- 方差 $D(\hat{\pi}_A^*) = \dfrac{1}{(L+1-2E(Y))^2} D(\bar{d})$

- 方差分解 $D(\hat{\pi}_A^*) = \dfrac{\pi_A(1-\pi_A)}{n} + \dfrac{D(Y)}{n(L+1-2E(Y))^2}$

直接调查并真实回答下的方差

随机选答机制带来的方差

Christofides模型的数值结果

L=6　$(p_1,\cdots,p_6)=(0.5,\ 0.25,\ 0.15,\ 0.03,\ 0.05,\ 0.02)$

$\Rightarrow E(Y)=1.94,\ D(Y)=1.5364$

调查结果

被调查者回答1,2,…,6 的人数：

176，96，40，40，28，20.

$\Rightarrow \bar{d}=2.27$

$D(\bar{d})=0.0058$

有作弊行为学生的比例的估计值

$$\hat{\pi}_A^*=\frac{2.27-1.94}{6+1-2\times1.94}=0.106$$

估计的标准差

$$\sqrt{D(\hat{\pi}_A^*)}=0.0244$$

以2倍标准差为估计标准，有作弊行为学生的比例

$$10.6\pm4.88(\%)$$

3种模型的比较

当 L=2 时 **Christofides模型** $\Leftrightarrow$ **Warner模型**

3个模型的精度只需比较随机选答机制带来的方差大小

Warner

$$\frac{p(1-p)}{(2p-1)^2 n}.$$

Simmons

$$\frac{1-p^2}{4np^2}.$$

Christofides

$$\frac{D(Y)}{n(L+1-2E(Y))^2}$$

当 p 相同时 **Simmons模型优于Warner模型**

选择合适的参数 L 与 p_k，可使Christofides 模型的估计精度比Simmons模型及Warner模型的高.

概率模型

1. 简单概率模型

2. 马氏链模型

3. 随机游走模型

马氏链模型

- **11.1 健康与疾病**
- **11.2 钢琴销售的存贮策略**

马氏链模型

描述一类重要的随机动态系统(过程)的模型.

- 系统在每个时期所处的状态是随机的.
- 从一时期到下时期的状态按一定概率转移.
- 下时期状态只取决于本时期状态和转移概率.

已知现在，将来与过去无关（无后效性）

马氏链 (Markov Chain)

——时间、状态均为离散的随机转移过程

11.1 健康与疾病

通过有实际背景的例子介绍马氏链的基本概念和性质.

人的健康状态随着时间的推移会随机地发生转变.

保险公司要对投保人未来的健康状态作出估计, 以制订保险金和理赔金的数额 .

例1. 人的健康状况分为健康和疾病两种状态，设对特定年龄段的人，今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8, 而今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7.

若某人投保时健康, 问10年后他仍处于健康状态的概率.

状态与状态转移

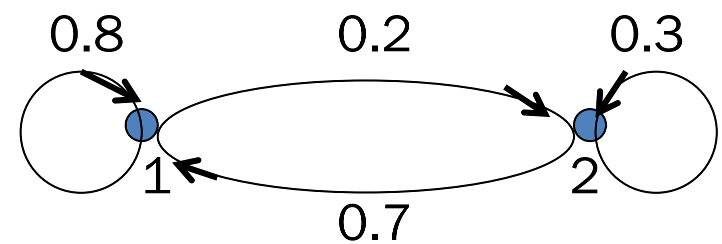
$$\text{状态}X_n=\begin{cases}1, & \text{第}n\text{年健康}\\ 2, & \text{第}n\text{年疾病}\end{cases}$$

$$\text{状态概率}a_i(n)=P(X_n=i),\quad i=1,2,\ n=0,1,\cdots$$

$$\text{转移概率}p_{ij}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i),\ i,j=1,2,\ n=0,1,\cdots$$

$p_{11}=0.8$ $\quad p_{12}=1-p_{11}=0.2$

$p_{21}=0.7$ $\quad p_{22}=1-p_{21}=0.3$



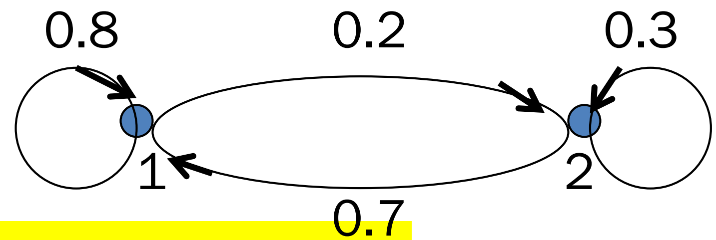
X_{n+1}只取决于X_n和p_{ij}, 与X_{n-1}, ...无关

状态转移具有无后效性

$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}$$

状态与状态转移



$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} \end{cases}$$

给定$a(0)$, 预测$a(n)$, n=1,2,…

设投保时健康

n	0	1	2	3	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	…	7/9
$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	…	2/9

设投保时疾病

$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	…	7/9
$a_2(n)$	1	0.3	0.23	0.223	…	2/9

$n\to\infty$时状态概率趋于稳定值, 稳定值与初始状态无关.

健康与疾病

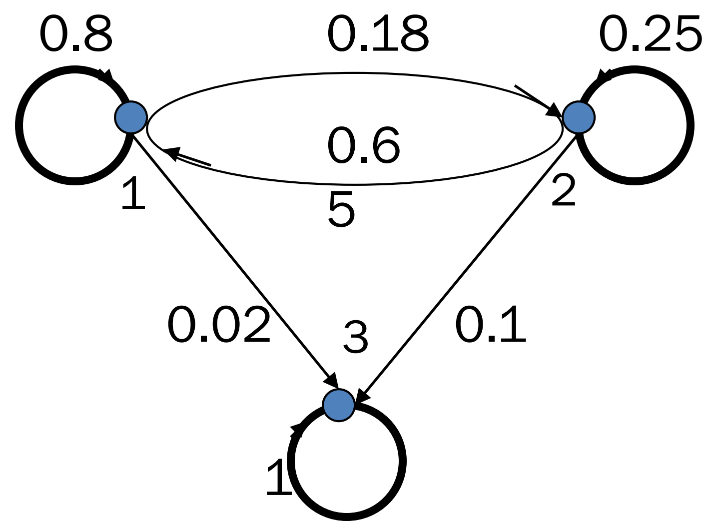
例2. 健康和疾病状态同上，$X_n=1$~ 健康, $X_n=2$~ 疾病

死亡为第3种状态，记$X_n=3$

$p_{11}=0.8$, $p_{12}=0.18$, $p_{13}=0.02$

$p_{21}=0.65$, $p_{22}=0.25$, $p_{23}=0.1$

$p_{31}=0$, $p_{32}=0$, $p_{33}=1$



$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}+a_3(n)p_{31}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}+a_3(n)p_{32}$$

$$a_3(n+1)=a_1(n)p_{13}+a_2(n)p_{23}+a_3(n)p_{33}$$

状态与状态转移

设投保时处于健康状态，预测 $a(n)$, n=1,2,...

n	0	1	2	3	…	50	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.757	0.7285	…	0.1293	…	0
$a_2(n)$	0	0.18	0.189	0.1835	…	0.0326	…	0
$a_3(n)$	0	0.02	0.054	0.0880	…	0.8381	…	1

- 不论初始状态如何，最终都要转到状态3；
- 一旦$a_1(k)= a_2(k)=0$, $a_3(k)=1$, 则对于$n>k$, $a_1(n)=0$，$a_2(n)=0$，$a_3(n)=1$, 即从状态3不会转移到其他状态.

马氏链的基本方程

状态$X_n = 1,2,\cdots,k \quad (n = 0,1,\cdots)$

状态概率$a_i(n) = P(X_n = i),$ $\quad \sum_{i=1}^{k} a_i(n) = 1$

$i = 1,2\cdots,k,\ n = 0,1,\cdots$

转移概率$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$ $\quad p_{ij} \ge 0,\ \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,k$

基本方程 $\quad a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} a_j(n) p_{ji},\quad i = 1,2,\cdots,k$

$a(n) = (a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n))$

$\sim$ 状态概率向量

$P = \{p_{ij}\}_{k\times k} \sim$ 转移概率矩阵

（非负，行和为1）

$$a(n+1) = a(n)P$$

$$\Downarrow$$

$$a(n) = a(0)P^n$$

马氏链的两个重要类型

$$a(n+1)=a(n)P$$

1. 正则链 ~ 从任一状态出发经有限次转移能以正概率到达另外任一状态 (如例1) .

$$\text{正则链} \Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$$

$$\text{正则链} \Rightarrow \exists w, a(n) \to w (n \to \infty)$$ w ~ 稳态概率

w满足 $wP = w$

例1. $P=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.8w_1 + 0.7w_2 = w_1 \\ 0.2w_1 + 0.3w_2 = w_2 \end{cases} \Rightarrow 0.2w_1 = 0.7w_2$$

w满足 $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$

$$w_1 + w_2 = 1 \Rightarrow w = (7/9, 2/9)$$

马氏链的两个重要类型

2. 吸收链 ~ 存在吸收状态（一旦到达就不会离开的状态i, $p_{ii}=1$）,且从任一非吸收状态出发经有限次转移能以正概率到达吸收状态 (如例2).

有r个吸收状态的吸收链的转移概率阵标准形式

$$P=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

R有非零元素

$$M=(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}Q^s$$

$$y=(y_1,y_2,\cdots y_{k-r})=Me$$

$$e=(1,1,\cdots,1)^T$$

y_i ~ 从第 i 个非吸收状态出发，被某个吸收状态吸收前的平均转移次数.

11.2 钢琴销售的存贮策略

背景与问题

钢琴销售量很小，商店的库存量不大以免积压资金.

一家商店根据经验估计，平均每周的钢琴需求为1架.

存贮策略：每周末检查库存量，仅当库存量为零时，才订购3架供下周销售；否则，不订购.

- 估计在这种策略下失去销售机会的可能性有多大?以及每周的平均销售量是多少?

问题分析

顾客的到来相互独立，需求量近似服从泊松分布，其参数由需求均值为每周1架确定，由此计算需求概率.

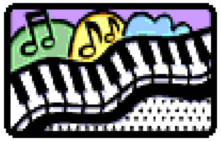
存贮策略是周末库存量为零时订购3架 →周末的库存量可能是0, 1, 2, 3，周初的库存量可能是1, 2, 3.

用马氏链描述不同需求导致的周初库存状态的变化.

动态过程中每周销售量不同，失去销售机会（需求超过库存）的概率不同.

可按稳态情况（时间充分长以后）计算失去销售机会的概率和每周的平均销售量.

模型假设



钢琴每周需求量服从泊松分布，平均每周1架.

存贮策略：当周末库存量为零时，订购3架，周初到货；否则，不订购.

以每周初的库存量作为状态变量，状态转移具有无后效性.

在稳态情况下计算失去销售机会的概率和每周的平均销售量, 作为该存贮策略的评价指标.

模型建立

D_n~第n周需求量，均值为1的泊松分布

$$P(D_n = k) = e^{-1}/k! \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

D_n	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

S_n~第n周初库存量(状态变量） $S_n \in \{1,2,3\}$

状态转移规律

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n - D_n, & D_n < S_n \\ 3, & D_n \geq S_n \end{cases}$$

$$p_{11} = P(S_{n+1} = 1 \mid S_n = 1) = P(D_n = 0) = 0.368$$

$$p_{12} = P(S_{n+1} = 2 \mid S_n = 1) = 0$$

$$p_{13} = P(S_{n+1} = 3 \mid S_n = 1) = P(D_n \geq 1) = 0.632$$

…… ……

$$p_{33} = P(S_{n+1} = 3 \mid S_n = 3) = P(D_n = 0) + P(D_n \geq 3) = 0.448$$

状态转移阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

模型建立　状态概率 $a_i(n) = P(S_n = i),\ i = 1,2,3$

马氏链的基本方程　$a(n+1) = a(n)P$

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

已知初始状态，可预测第 n周初库存量$S_n=i$ 的概率

正则链 $\Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$　$P^2 > 0$ ⇨ **正则链**

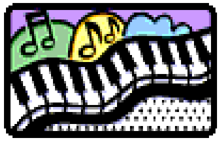
⇨ 稳态概率分布 w 满足 $wP=w$

$$w = (w_1, w_2, w_3) = (0.285,0.263,0.452)$$

$n\to\infty$，状态概率 $a(n) = (0.285,0.263,0.452)$

模型求解

存贮策略的评价指标



1. 估计失去销售机会的可能性

第n周失去销售机会的概率

$$P(D_n > S_n) = \sum_{i=1}^{3} P(D_n > i \mid S_n = i) P(S_n = i)$$

n充分大时 $P(S_n = i) = w_i$

$$= P(D > 1)w_1 + P(D > 2)w_2 + P(D > 3)w_3$$

$$= 0.264 \times 0.285 + 0.080 \times 0.263 + 0.019 \times 0.452 = 0.105$$

D	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

$$w = (0.285, 0.263, 0.452)$$

从长期看，失去销售机会的可能性大约 10%。

模型求解　存贮策略的评价指标

2. 估计每周的平均销售量

每周平均需求量1架

第n周平均售量

$$R_n = \sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n = j, S_n = i) + iP(D_n > i, S_n = i)\ ]$$

需求不超过存量,需求被售　　需求超过存量,存量被售

$$= \sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n = j | S_n = i) + iP(D_n > i | S_n = i)]P(S_n = i)$$

$$= 0.632 \times 0.285 + 0.896 \times 0.263$$

$$+ 0.977 \times 0.452 = 0.857$$

n充分大时 $P(S_n = i) = w_i$

从长期看，每周的平均销售量为 0.857(架)

思考：为什么每周的平均销售量略小于平均需求量?

敏感性分析

当平均需求在每周1 (架) 附近波动时，最终结果有多大变化。

设D_n服从均值λ的泊松分布

$$P(D_n = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!,\ (k = 0,1,2,\cdots)$$

状态转移阵

$$P = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} \\ \lambda^2 e^{-\lambda}/2 & \lambda e^{-\lambda} & 1-(\lambda+\lambda^2/2)e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

第n周(n充分大)失去销售机会的概率 $P = P(D_n > S_n)$

λ	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
P	0.073	0.089	0.105	0.122	0.139

当平均需求(λ=1.0)增长(或减少)10%时，

失去销售机会的概率P将增长(或减少)约15%。

钢琴销售的存贮策略

存贮策略(周末库存为0则订购3架, 否则不订购)已定, 计算两个指标(失去销售的概率和每周平均销售量).

给出其他存贮策略(如周末库存为0或1则订购使下周初库存为3架, 否则不订购), 讨论这两个指标(习题1).

关键是在无后效性的前提下恰当地定义系统的状态变量(本例是每周初的库存量).

动态随机存贮策略是马氏链的典型应用.

概率模型

1. 简单概率模型

2. 马氏链模型

3. 随机游走模型

随机游走模型

- **随机游走**
- **稳态分布**
- **Pagerank**

赌徒破产问题

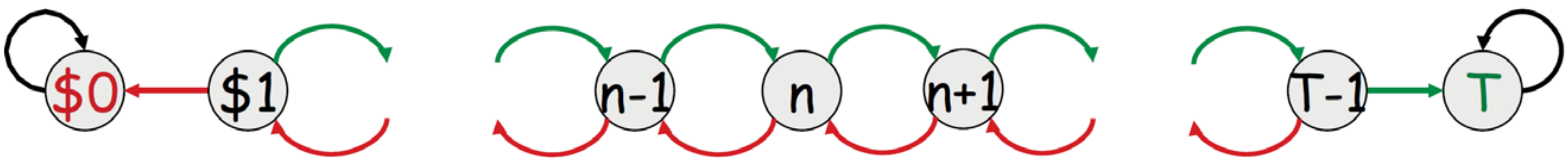
- 赌徒带着n元本金来到赌场，每次下注1元，胜则赢1元，负则输掉1元
- 赌徒将一直下注，直至**赢到T元**
- 或者 **输光破产**
- 每次下注，赢的概率为 $p > 0$
- 输的概率 $q ::= 1 - p > 0$.
- 问题?
  - 赌徒最终会因赢到T元获胜而终止，还是因输光破产而终止?
  - 如何建模?

猜测

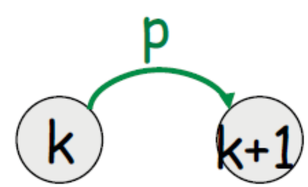
- 如果 $p > 1/2$，感觉赌徒会赢
- 如果 $p < 1/2$，感觉赌徒会输。
- 如果是 fair game, $p = q = 1/2$，又当如何?
- 如果赢取目标T和获胜概率p固定，赌徒的原始赌资 n 将对最终输赢有何影响。
- 例如$n=1000$, $T = 1100$, 或者 $n=10000$, $T = 10100$?

一维随机游走问题

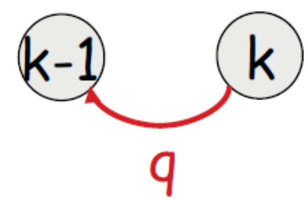
——Random walk on a line



p ::=Pr[win a bet]



q ::= 1-p = Pr[lose a bet]



What is Pr[reach T before 0]?

求解

- 用 w_n 表示赌徒在初始赌资为n的情况下，最终获胜的概率
- 考虑w_0 和 w_T 各是多少?
  - $w_0 = 0$； $w_T = 1$
- w_n 满足线性递推，即
  - 对于某常数 a, b 与 $0 < n < T$， $w_{n+1} = aw_n + bw_{n-1}$,.

$$w_n = Pr\{\text{ win game } | \text{ win the first bet }\} Pr\{\text{ win the first bet }\}$$
$$+ Pr\{\text{ win game } | \text{ lose the first bet }\} Pr\{\text{ lose the first bet }\}$$
$$= pw_{n+1} + qw_{n-1}$$

$$pw_{n+1} = w_n - qw_{n-1}$$
$$w_{n+1} = \frac{w_n}{p} - \frac{qw_{n-1}}{p}$$

引理证明

$$g(x) ::= \sum_{n=1}^{\infty} w_n x^n \Rightarrow g(x) = \frac{w_1 x}{(1-x)(1-\frac{q}{p}x)}$$

$$w_{n+1} = \frac{w_n}{p} - \frac{q w_{n-1}}{p}$$

$$\begin{array}{rcllllllll}
g(x) & = & w_0 & + & w_1 x & + & w_2 x^2 & + & w_3 x^3 & + \cdots \\
xg(x)/p & = & & & w_0 x/p & + & w_1 x^2/p & + & w_2 x^3/p & + \cdots \\
(q/p)x^2 g(x) & = & & & & & (q/p)w_0 x^2 & + & (q/p)w_1 x^3 & + \cdots
\end{array}$$

$$g(x) - \left(\frac{xg(x)}{p} - \frac{qx^2 g(x)}{p}\right) = w_0 + w_1 x - w_0 x/p = w_1 x,$$

$$g(x)\left(1 - \frac{x}{p} + \frac{qx^2}{p}\right) = w_1 x.$$

$$1 - \frac{x}{p} + \frac{qx^2}{p} = (1-x)(1-\frac{q}{p}x)$$

定理证明

- $w_n = c + d\left(\frac{q}{p}\right)^n$ 其中c, d 为常数
- **证明:**
  - 如果是非公平赌博 $p/q \neq 1,$

$$g(x) = \frac{w_1 x}{(1-x)(1-\frac{q}{p}x)} \Rightarrow g(x) = \frac{c}{1-x} + \frac{d}{1-\frac{q}{p}x}$$

  - w_n 应为g(x)的展开多项式中x^n 的系数。

$$w_n = c + d\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

定理

- 确定系数c,d，可得

$$w_n = \frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^T - 1}$$

- 证明:

$$\frac{w_1 x}{(1-x)(1-\frac{q}{p}x)} = \frac{c}{1-x} + \frac{d}{1-\frac{q}{p}x} \Longrightarrow w_1 x = c(1-\frac{q}{p}x) + d(1-x)$$

Letting $x = 1$ gives

$$c = \frac{w_1}{1-q/p}. \Longrightarrow w_n = \frac{w_1}{q/p-1}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1\right)$$

Letting $x = p/q$ gives

$$d = \frac{pw_1/q}{1-p/q} = \frac{w_1}{q/p-1} = -c.$$

by letting $n = T$ in (9):

$$1 = w_T = \frac{w_1}{q/p-1}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^T - 1\right) \Longrightarrow w_n = \frac{((q/p)^n - 1)}{(q/p)^T - 1}.$$

破产情况

- 引理，若 $0 < a < b$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a(1+1/b)}{b(1+1/b)} = \frac{a+a/b}{b+1} < \frac{a+1}{b+1}.$$

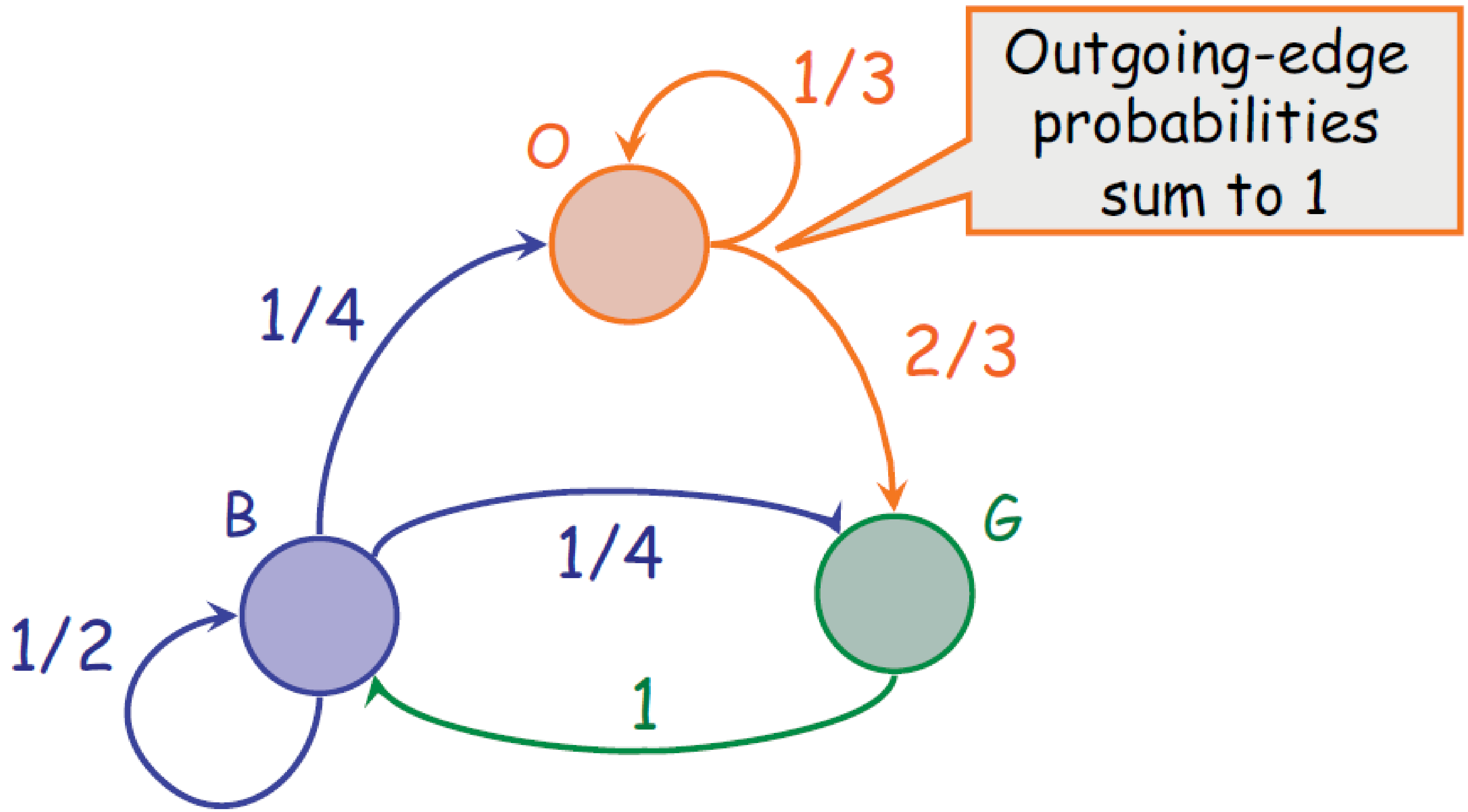
- 如果 $p < 1/2$,

$$w_n = \frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^T - 1} < \frac{(q/p)^n}{(q/p)^T} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{T-n}$$

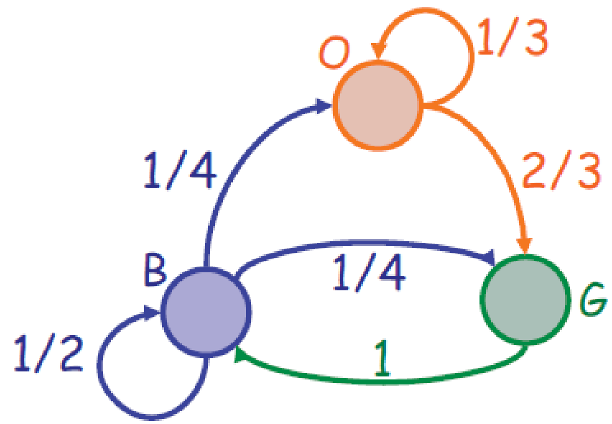
- 如果，$p=1/2$（公平赌博）

$$w_n = \frac{n}{T}$$

随机游走与概率转换图模型



基于概率状态模型的应用



1. 求解初始状态为B，在7步以内达到状态O的概率

2. 从状态B到状态O的平均步数

3. 初始状态为B，在到达状态O之前，先到达状态G的概率

- Pr[reach O in 7 steps| start at B]
- Average # steps from B to O
- Pr[reach G before O | start at B]

随机游走模型的应用

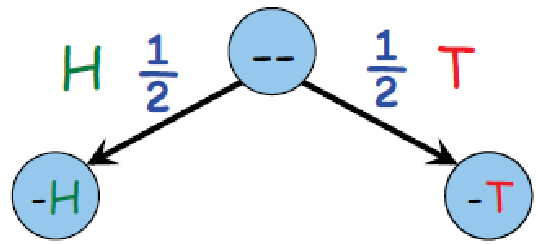
- **物理领域 — 布朗运动**
- **金融领域 — 股票，期权**
- **信息领域 — 网络搜索，聚类**

掷硬币游戏

- Heads ½ vs Tails ½
- Flip 3 times

HHH
HHT
HTH
HTT
TTT
TTH
THT
THH

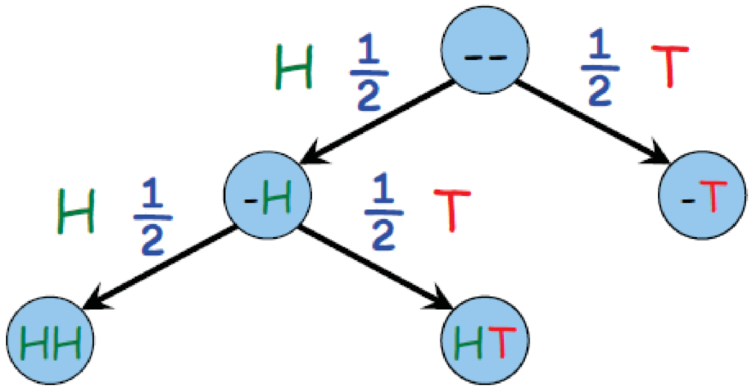
HTH 先于 TTH的概率



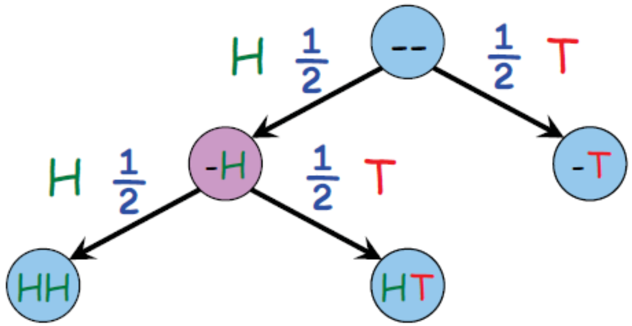
$$\Pr[\text{win}] = \Pr[\text{win} \mid \text{--}]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{-H}] + \tfrac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{-T}]$$

HTH 先于 TTH的概率

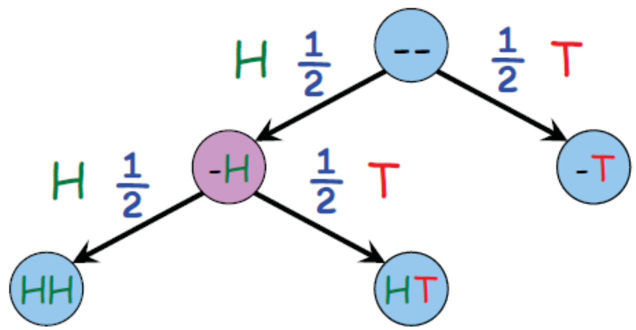


HTH 先于 TTH的概率



$$\Pr[\text{win} \mid \text{-H}]$$
$$= \tfrac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{HH}]$$

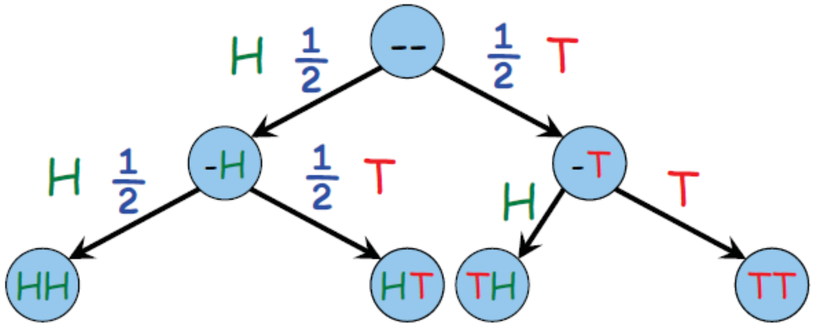
HTH 先于 TTH的概率



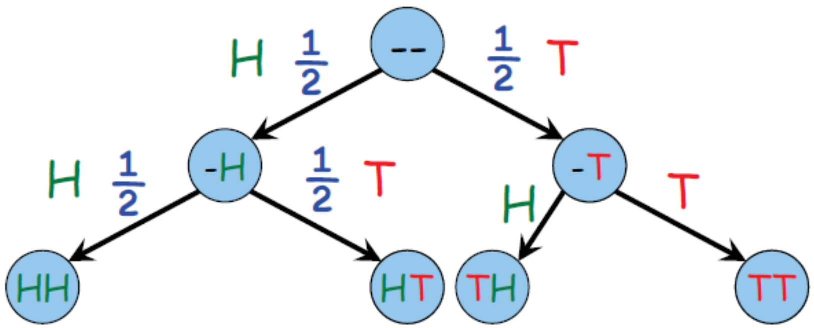
$$\Pr[\text{win} \mid \text{-H}]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{HH}] + \tfrac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{HT}]$$

HTH 先于 TTH的概率

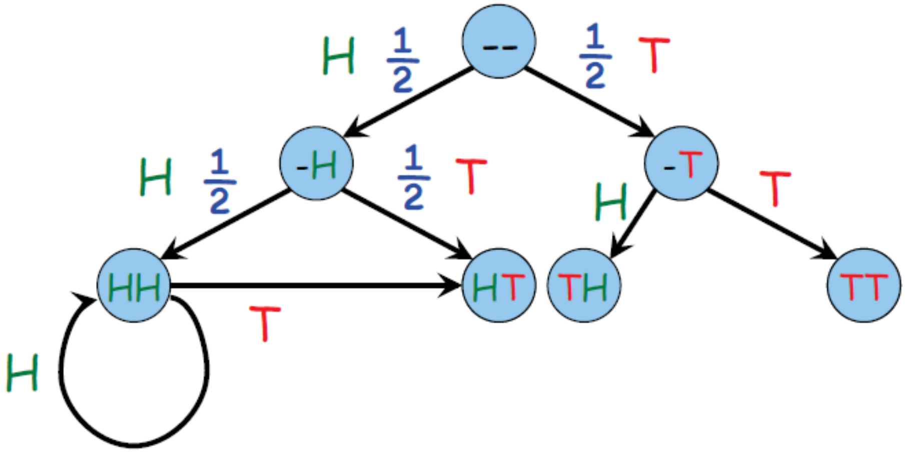


HTH 先于 TTH的概率

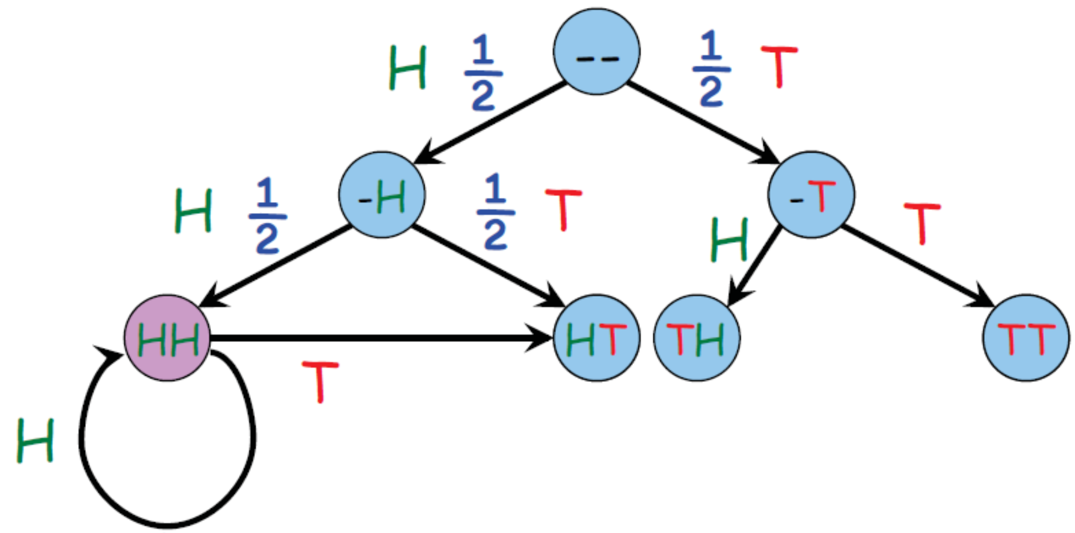


$$\Pr[\text{win} \mid \text{-T}]$$
$$= \tfrac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{TH}] + \tfrac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{TT}]$$

HTH 先于 TTH的概率

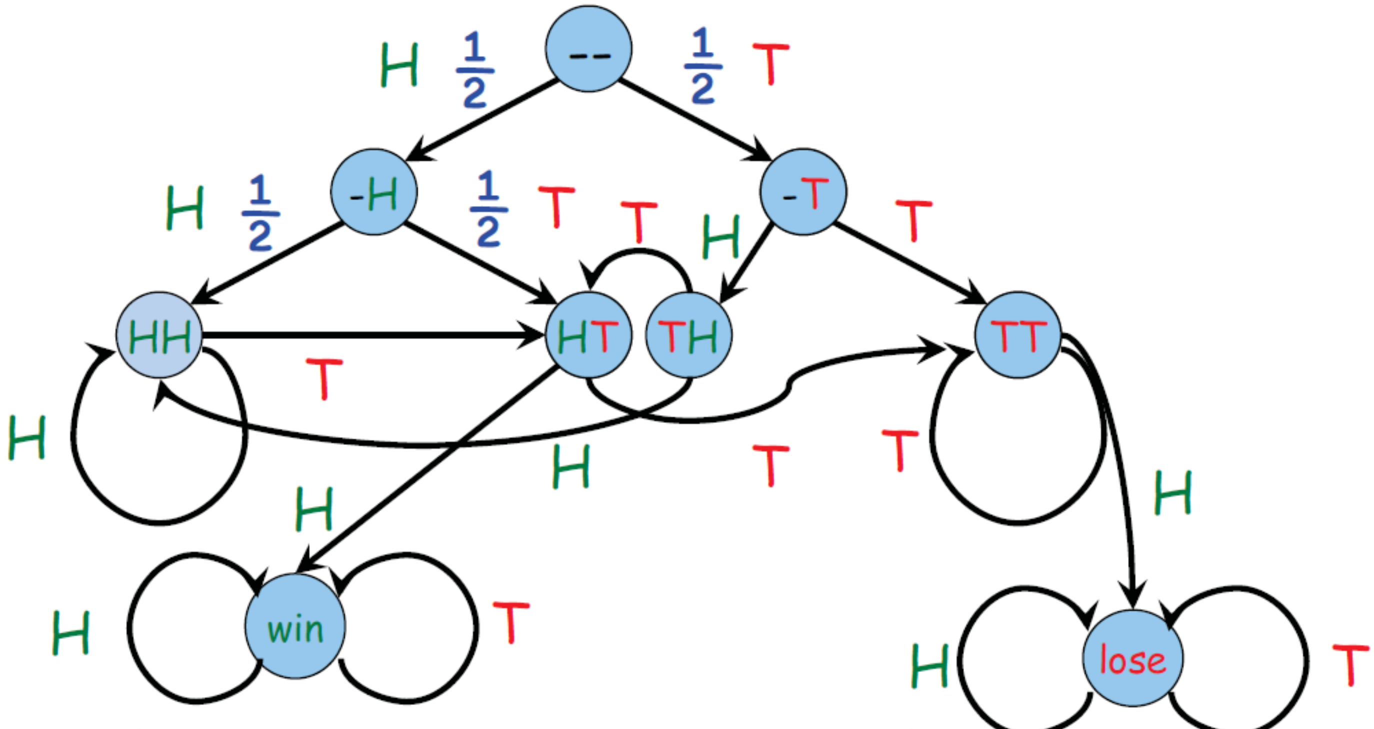


HTH 先于 TTH的概率



$$\Pr[\text{win} \mid \text{HH}] = \frac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{HH}] + \frac{1}{2}\Pr[\text{win} \mid \text{HT}]$$

HTH 先于 TTH的概率



$\Pr[\text{win} \mid \text{win}] = 1$　　$\Pr[\text{win} \mid \text{lose}] = 0$

基于状态概率，求解线性方程，
求解Pr[win | --]=3/8

获胜策略

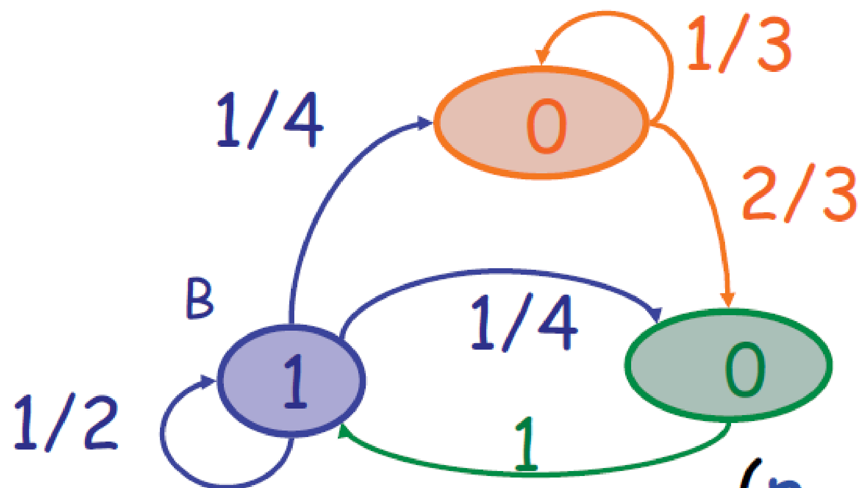
	Win	
HHH	THH	1:7
HHT	THH	1:3
HTH	HHT	1:2
HTT	HHT	1:2
TTT	HTT	1:7
TTH	HTT	1:3
THT	TTH	1:2
THH	TTH	1:2

随机游走模型

- **随机游走**
- **稳态分布**
- **Pagerank**

状态分布

处于某起始状态节点，1步以后位于各个状态的概率：

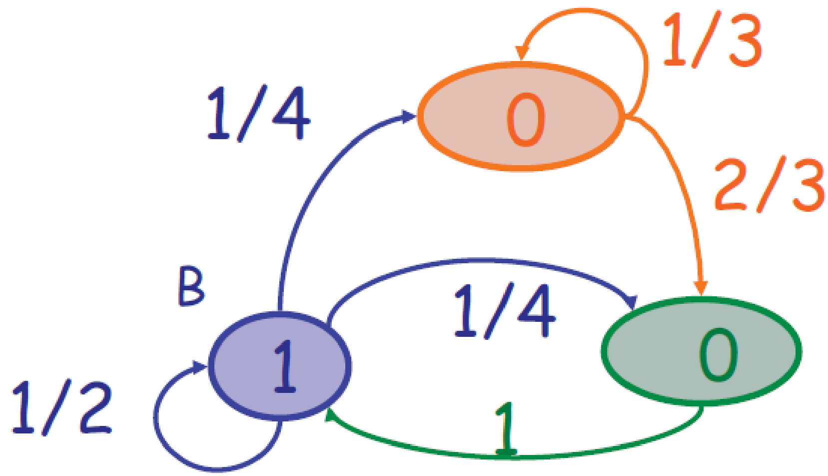


(p_B, p_O, p_G)

Suppose you start at B: $(1, 0, 0)$

What are p'_B, p'_O, p'_G after 1 step?

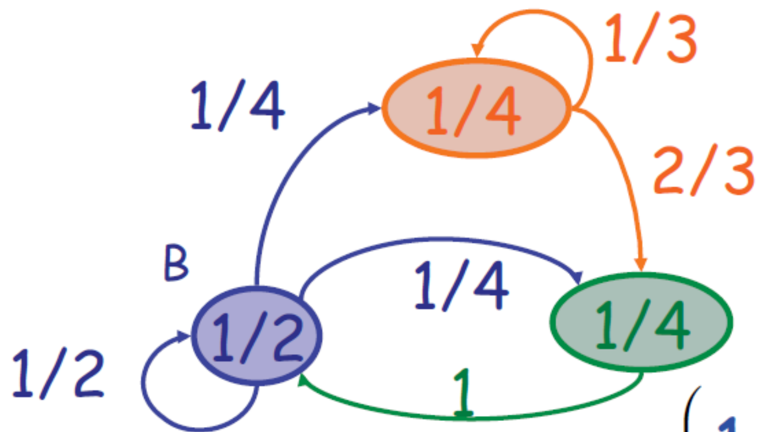
状态分布



Dist after 1 step: (p'_B, p'_O, p'_G),

only get places from B, so $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

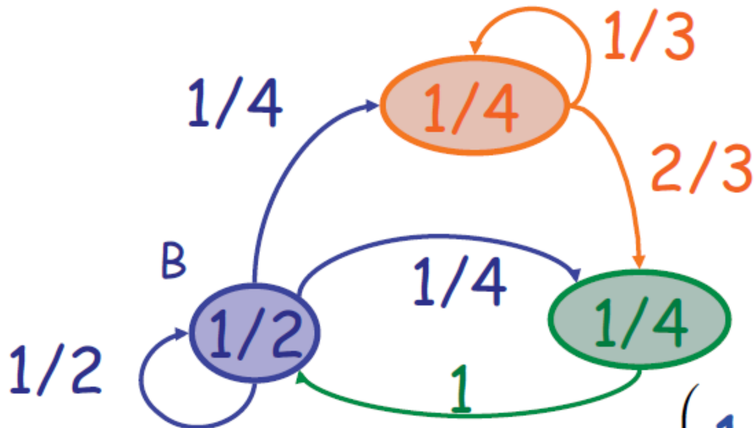
状态分布



Dist after 1 step: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Dist after 2 steps: (p''_B, p''_O, p''_G)

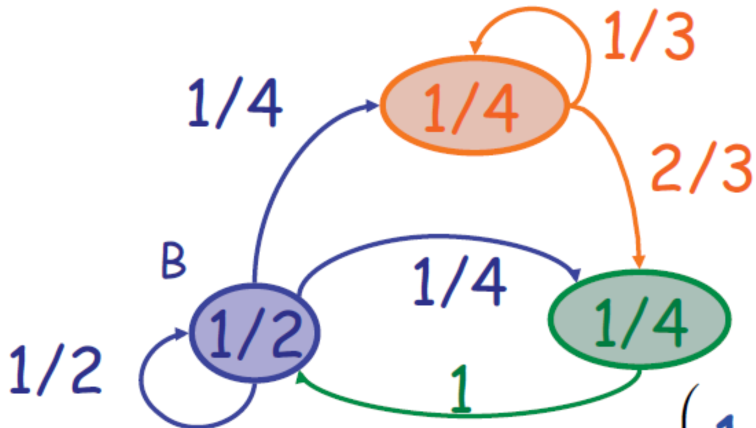
状态分布



Dist after 1 step: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$$
\begin{aligned}
p''_O = &\Pr[B \text{ to } O \mid \text{at } B]\cdot p'_B \\
&+ \Pr[O \text{ to } O \mid \text{at } O]\cdot p'_O \\
&+ \Pr[G \text{ to } O \mid \text{at } G]\cdot p'_G
\end{aligned}
$$

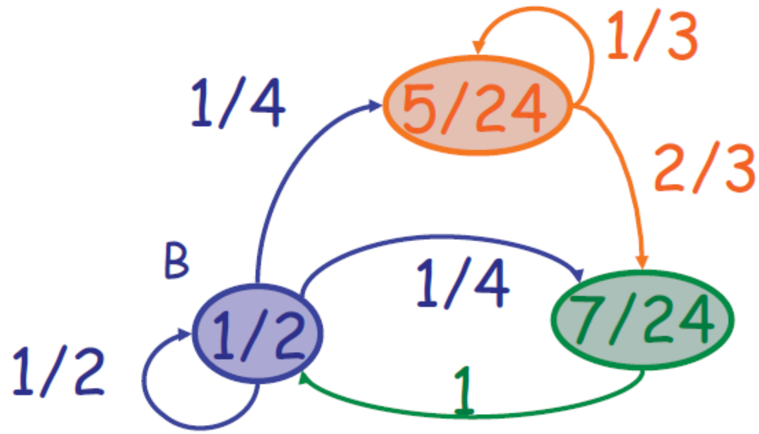
状态分布



Dist after 1 step: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$$
\begin{aligned}
p''_O &= \Pr[B \text{ to } O \mid \text{at } B]\cdot p'_B \\
&+ \Pr[O \text{ to } O \mid \text{at } O]\cdot p'_O = 5/24 \\
&+ \Pr[G \text{ to } O \mid \text{at } G]\cdot p'_G
\end{aligned}
$$

状态分布



distribution after 2 steps:

$$(p''_B, p''_O, p''_G)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}\right)$$

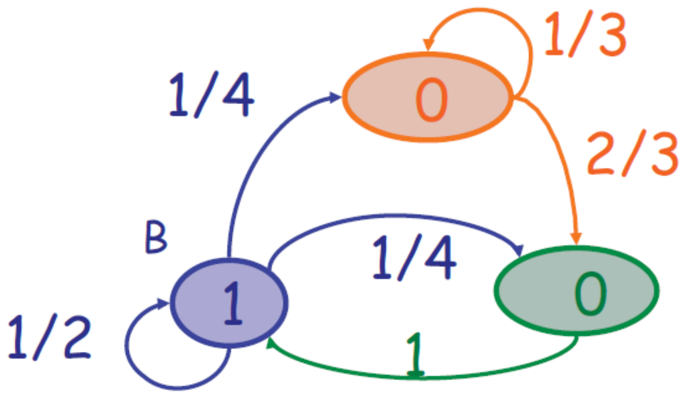
状态转移概率矩阵

- 随机游走图的边缘概率矩阵类似于图的邻接矩阵，只是用状态转移概率代替了一般图中0/1连接状态。

the edge probability matrix

$$M ::= \begin{pmatrix} \Pr[B \to B] & \Pr[B \to O] & \Pr[B \to G] \\ \Pr[O \to B] & \Pr[O \to O] & \Pr[O \to G] \\ \Pr[G \to B] & \Pr[G \to O] & \Pr[G \to G] \end{pmatrix}$$

状态转移概率矩阵



the edge probability matrix

$$M ::= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ \Pr[O \to B] & \Pr[O \to O] & \Pr[O \to G] \\ \Pr[G \to B] & \Pr[G \to O] & \Pr[G \to G] \end{pmatrix}$$

状态转移概率矩阵

the edge probability matrix

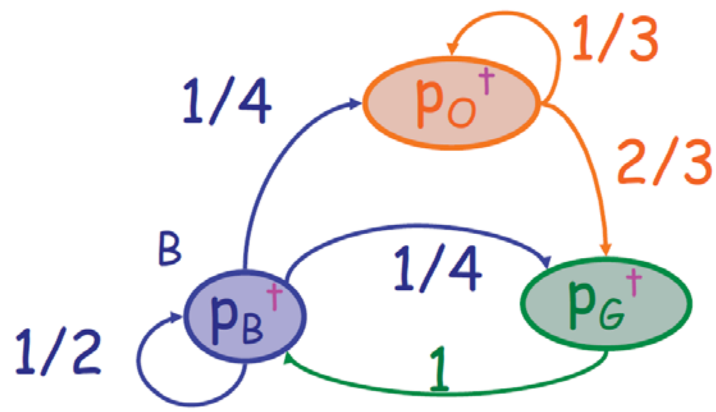
$$M ::= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

状态转移概率矩阵

- **状态转移可以建模为向量与矩阵相乘**

$$(p_B, p_O, p_G) \cdot M$$
$$= (p'_B, p'_O, p'_G)$$

稳态分布



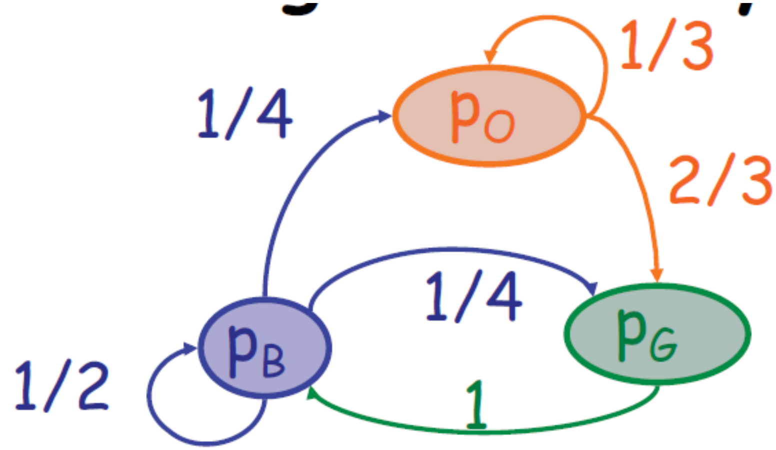
distribution after t steps?

...and as $t \to \infty$?

$$(p_B, p_O, p_G) \cdot M^t = (p_B^{\,t}, p_O^{\,t}, p_G^{\,t})$$

t时刻后，下一时刻的状态分布概率不再发生变化

求解稳态分布



$$p_B = p_B' = (1/2)p_B + 1p_G$$

$$p_O = p_O' = (1/4)p_B + (1/3)p_O$$

$$p_G = p_G' = (1/4)p_B + (2/3)p_O$$

$$p_B + p_O + p_G = 1$$

solving for (p_B, p_O, p_G): $\left(\frac{8}{15}, \frac{3}{15}, \frac{4}{15}\right)$

稳态分布向量求解的线性代数表示

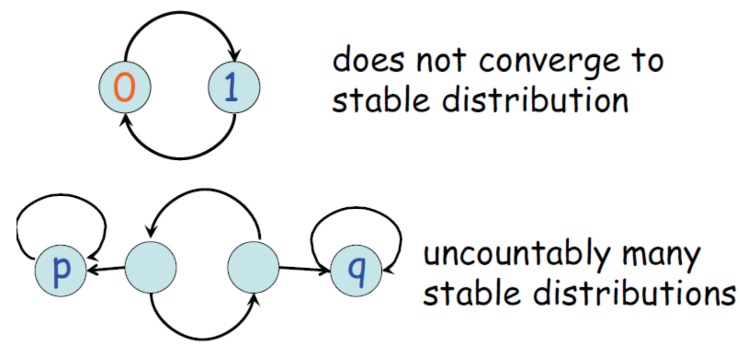
$$\vec{s} \cdot M = \vec{s}$$

$$\sum s_i = 1$$

稳态分布向量是状态转移概率矩阵的特征值为1的且满足归一化的特征向量。

稳态分布的问题

- 是否一定存在?
- 是否唯一?
- 是否能从任意起始状态抵达?
- 收敛速度如何?



随机游走模型

- **随机游走**
- **稳态分布**
- **Pagerank**

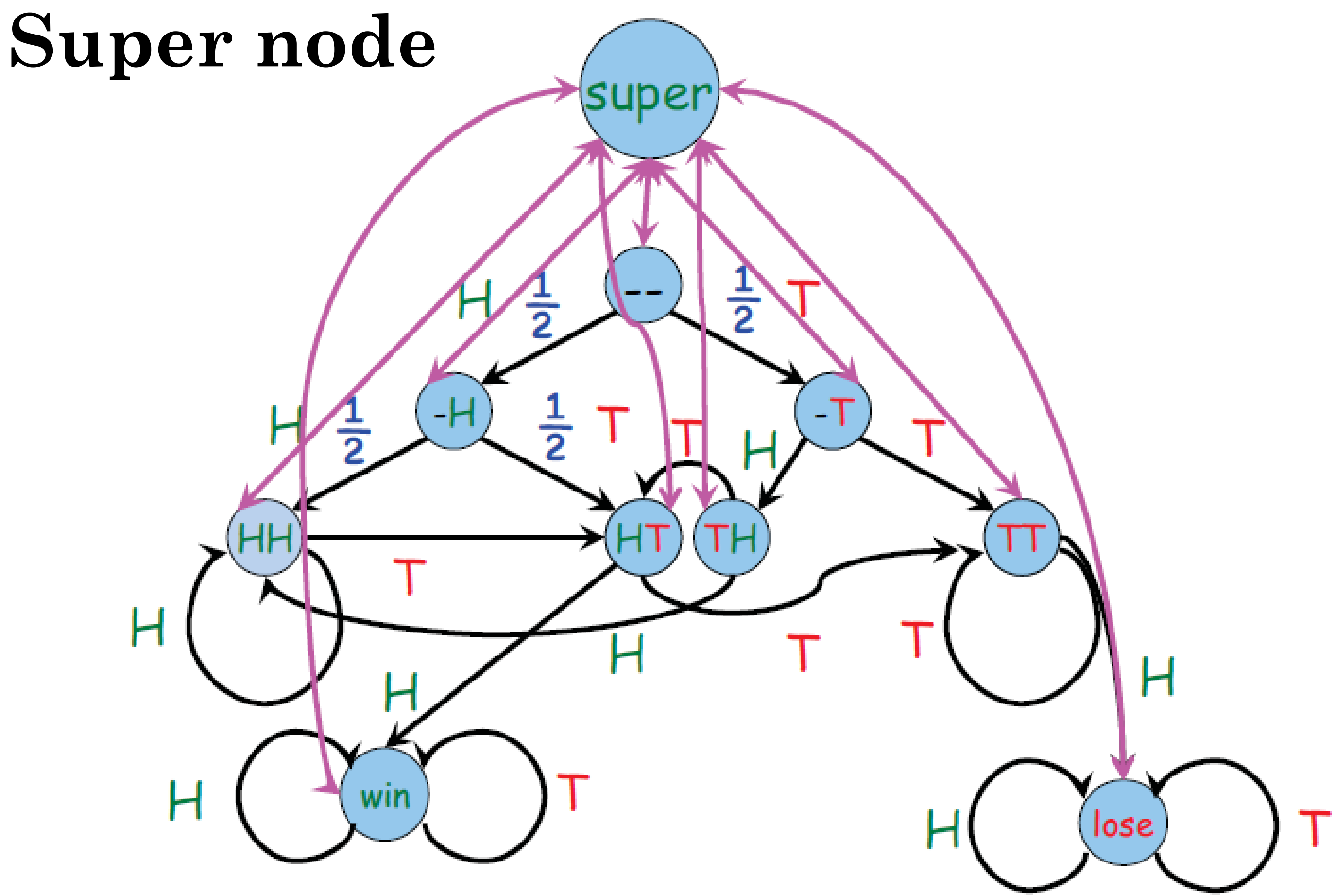
Google Rankings

- 问题背景:
  - 哪个网页更重要?
- 对Internet建模:
  - 用户从一个页面，点击链接，跳转到另一个页面.
  - 有时会关闭浏览器，重新随机打开一个页面.
- 如果某个页面，访问的时间更长或次数更多，则认为它更重要。

Web上的随机游走

- 将整个万维网视作一个双向图
- 图的节点是网页页面
- 如果页面v到页面w存在转链接，则认为图中节点v和w之间存在边edge (V,W)
- 从节点v以相等的概率，游走到其他与v连接的节点，即
  - Pr[(V,W)] = 1/outdeg(V)

超级节点



PageRank

Compute

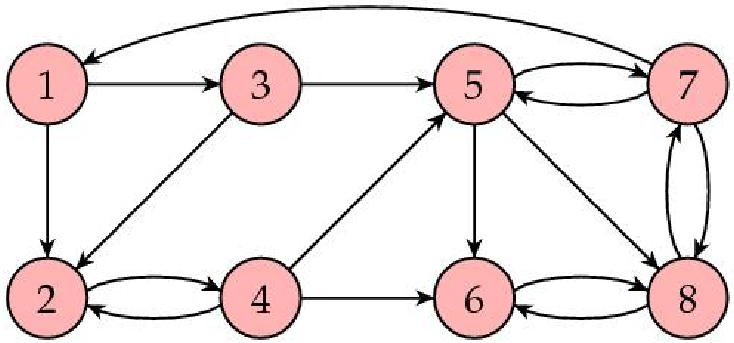
stationary distribution $\vec{s}$

$$\text{PageRank}(V) ::= s_V$$

Rank V above W when

$$s_V > s_W$$

示意



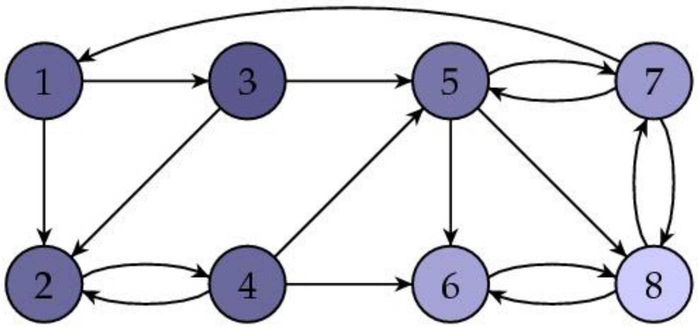
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}$$

$$I = \begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{bmatrix}$$

$$H_{ij} = \begin{cases} 1/l_j & \text{if } P_j \in B_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

示意



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}$$

$$I = \begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{bmatrix}$$

$$H_{ij} = \begin{cases} 1/l_j & \text{if } P_j \in B_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

计算稳态分布向量

- 状态转移概率矩阵行列数高达 n =25 billion.
- 大多数的项为0
- 平均每个页面度为10（平均只有10个转链接）
  - 平均每列只有10个非零元素
- 无法通过矩阵解析求解，只能使用仿真迭代方法求解

$$I^{k+1} = \mathbf{H} I^{k}$$

I^0	I^1	I^2	I^3	I^4	...	I^{60}	I^{61}
1	0	0	0	0.0278	...	0.06	0.06
0	0.5	0.25	0.1667	0.0833	...	0.0675	0.0675
0	0.5	0	0	0	...	0.03	0.03
0	0	0.5	0.25	0.1667	...	0.0675	0.0675
0	0	0.25	0.1667	0.1111	...	0.0975	0.0975
0	0	0	0.25	0.1806	...	0.2025	0.2025
0	0	0	0.0833	0.0972	...	0.18	0.18
0	0	0	0.0833	0.3333	...	0.295	0.295

Pagerank特性

- 能够抵制欺诈手段
  - 伪造节点指向自己
  - 伪造节点互相链接
  - 在自己的页面上增加到重要节点的转链接
  - 都无法提高PageRank 值
- Super-node的重要性
  - 可保证稳态分布的唯一性
  - 可保证任意初始状态都能收敛点稳态
  - 保证收敛速度

真实的 Google Rank

- Pagerank的数学模型基础是稳态分布模型和随机游走模型。
- Pagerank作为开放专利只是其核心算法思想。
- 也有众多改进算法解决一些数学问题或特例场景。
- 真实的Google rank远比pagerank算法的基本原理复杂，考虑的更多因素，如文本、位置、支付等等，迭代超过20年，也是Google的商业机密。

实验练习

1. 用稳态概率计算和Monte Carlo仿真两种方法求掷币游戏胜率比

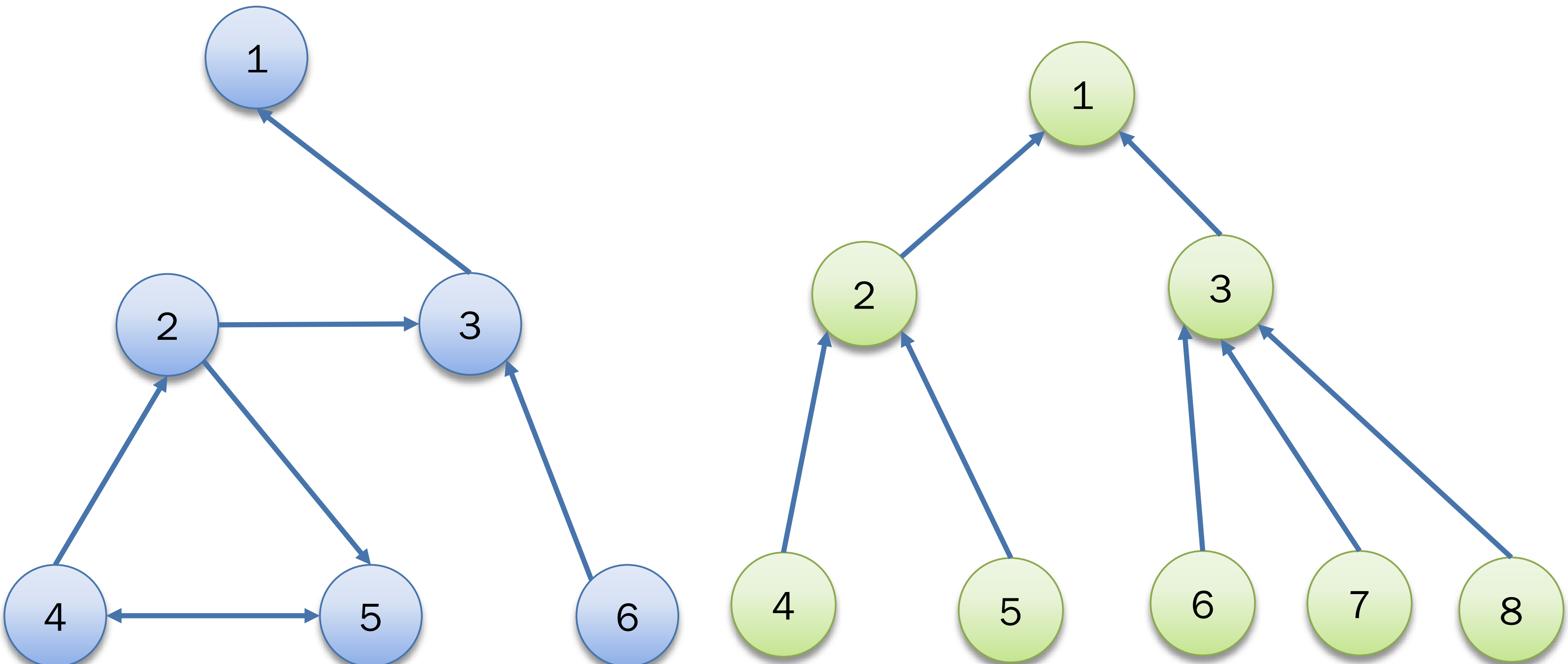
完成下表格

	HHH	HHT	HTH	HTT	TTT	TTH	THT	THH
HHH	-							1:7
HHT		-	2:1	2:1				1:3
HTH		1:2	-					
HTT		1:2		-	7:1	3:1		
TTT				1:7	-			
TTH				1:3		-	2:1	2:1
THT						1:2	-	
THH	7:1	3:1				1:2		-

红色数字为最佳/差对局策略，使用仿真法验证

2. 使用随机游走法计算以下两图的pagerank值

取阻尼系数为0.15



End