数学建模

简单优化模型

简单的优化模型(静态优化)

- 现实世界中普遍存在着优化问题.
- 静态优化问题指最优解是数(不是函数).
- 建立静态优化模型的关键之一是根据
建模目的确定恰当的目标函数.
- 求解静态优化模型一般用微分法.

简单的优化模型 ——静态优化模型

- 存贮模型
- 生猪的出售时机
- 森林救火
- 消费者的选择
- 生产者的决策

存贮模型

问 题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时要付贮存费. 该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出.

已知某产品日需求量100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元. 试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小.

要求

不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系.

问题分析与思考

日需求100件，准备费5000元，贮存费每日每件1元.

- 每天生产一次, 每次100件,无贮存费,准备费5000元.

  每天费用5000元

- 10天生产一次, 每次1000件，贮存费900+800+…+100 =4500元，准备费5000元，总计9500元.

  平均每天费用950元

- 50天生产一次,每次5000件, 贮存费 4900+4800+…+100 =122500元，准备费5000元，总计127500元.

  平均每天费用2550元

10天生产一次,平均每天费用最小吗?

问题分析与思考

- 周期短，产量小 ⇨ 贮存费少，准备费多
- 周期长，产量大 ⇨ 准备费少，贮存费多

⇨ 存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小.

- 这是一个优化问题，关键在建立目标函数.

显然不能用一个周期的总费用作为目标函数.

目标函数——每天总费用的平均值.

模 型 假 设

1. 产品每天的需求量为常数 r;

2. 每次生产准备费为 c_1, 每天每件产品贮存费为 c_2;

3. T天生产一次（周期）, 每次生产Q件，当贮存量为零时，Q件产品立即到来（生产时间不计）；

4. 为方便起见，时间和产量都作为连续量处理.

建 模 目 的

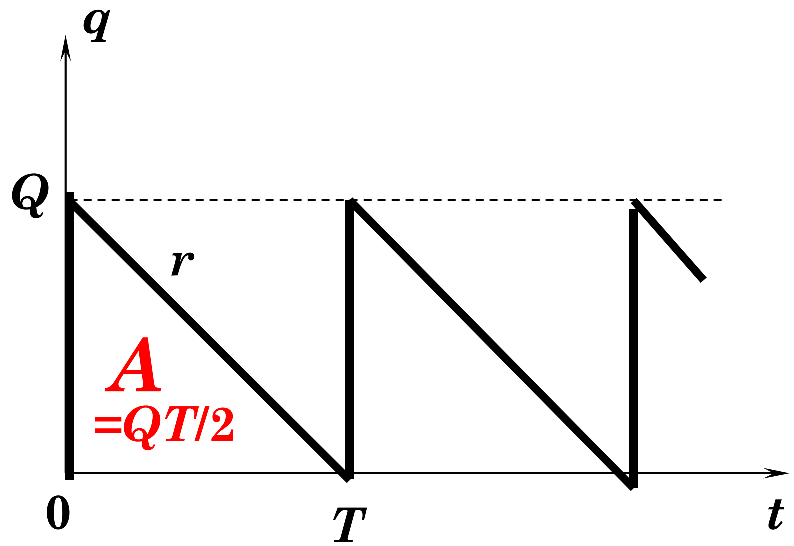
设 r, c_1, c_2 已知，求T, Q 使每天总费用的平均值最小.

模 型 建 立

离散问题连续化

贮存量表示为时间的函数 $q(t)$

t=0生产Q件，$q(0)=Q$, $q(t)$以需求速率r递减，$q(T)=0$.



$$\Rightarrow \quad Q = rT$$

一周期贮存费为

$$c_2 \int_0^T q(t)dt = c_2 \frac{QT}{2}$$

一周期总费用

$$\tilde{C} = c_1 + c_2 \frac{QT}{2} = c_1 + c_2 \frac{rT^2}{2}$$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2}$$

模型求解　　求 T 使 $C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 rT}{2}\to Min$

$$\frac{dC}{dT}=0 \Rightarrow \boxed{T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}} \qquad \boxed{Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}}$$

模型解释

定性分析　$c_1\uparrow\Rightarrow T,Q\uparrow$　　$c_2\uparrow\Rightarrow T,Q\downarrow$　　$r\uparrow\Rightarrow T\downarrow,Q\uparrow$

敏感性分析　**参数c_1,c_2,r的微小变化对T,Q的影响**

T对c_1的(相对)敏感度

$$S(T,c_1)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_1/c_1}\approx\frac{dT}{dc_1}\frac{c_1}{T}=\frac{1}{2}$$

c_1增加1%，T增加0.5%

$S(T,c_2)$=-1/2, $S(T,r)$=-1/2　c_2或r增加1%, T减少0.5%

模型应用

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

- 回答原问题 $c_1=5000$，$c_2=1$，$r=100$

$\Rightarrow$ $T=10$(天), $Q=1000$(件), $C=1000$(元)

思考: 为什么与前面计算的$C=950$元有差别?

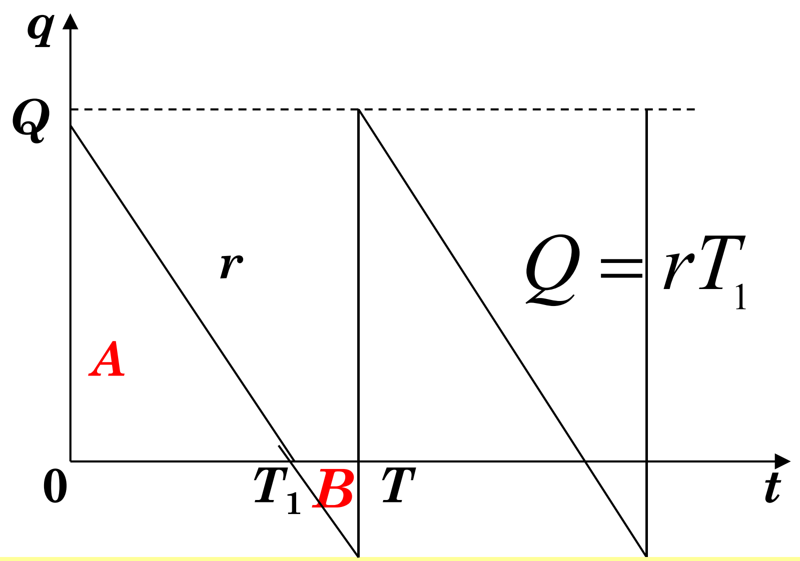
- 用于订货供应情况: 每天需求量 r，每次订货费 c_1, 每天每件贮存费 c_2 , T天订货一次(周期)，每次订货Q件，当贮存量降到零时，Q件立即到货.

经济批量订货公式（EOQ公式）

不允许缺货的存贮模型

允许缺货的存贮模型

当贮存量降到零时仍有需求r，出现缺货，造成损失.



原模型假设：贮存量降到零时Q件立即生产出来(或立即到

现假设：允许缺货, 每天每件缺货损失费 c_3 , 缺货需补足.

周期T, $t=T_1$贮存量降到零

一周期贮存费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2 A$

一周期缺货费 $c_3\int_{T_1}^{T} |q(t)|dt = c_3 B$

一周期总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\frac{QT_1}{2} + c_3\frac{r(T-T_1)^2}{2}$$

允许缺货的存贮模型

一周期总费用 $\overline{C} = c_1 + \frac{1}{2}c_2 QT_1 + \frac{1}{2}c_3 r(T - T_1)^2$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T,Q) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT-Q)^2}{2rT}$$

求 T, Q 使 $C(T,Q) \rightarrow Min$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial Q} = 0$$

为与不允许缺货的存贮模型相比，T记作T'，Q记作Q'.

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

不允许缺货模型

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

记 $\mu = \sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}$

$$T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu}$$

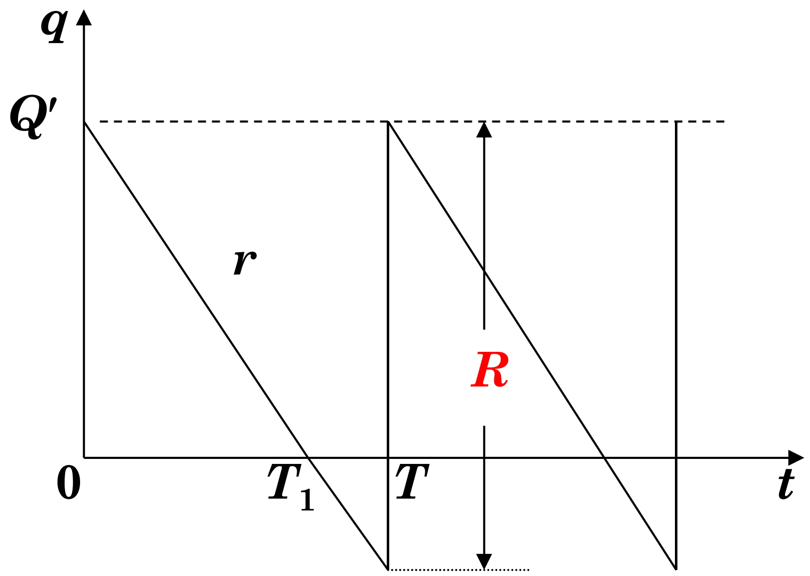
$\mu > 1 \Rightarrow T' > T, \quad Q' < Q \qquad c_3 \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$

不允许缺货 $\Leftrightarrow c_3 \to \infty \Rightarrow \mu \to 1 \Rightarrow T' \to T, \; Q' \to Q$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$



注意：缺货需补足

Q'~每周期初的存贮量

每周期的生产量
R（或订货量）

$$R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$R = \mu Q > Q$$

Q~不允许缺货时的产量(或订货量)

简单的优化模型

- 存贮模型
- 生猪的出售时机
- 森林救火
- 消费者的选择
- 生产者的决策

生猪的出售时机

问题 饲养场每天投入4元资金，用于饲料、人力、设备，估计可使80kg重的生猪体重增加2kg.

市场价格目前为8元/kg，但是预测每天会降低0.1元，问生猪应何时出售?

如果估计和预测有误差，对结果有何影响?

分析 投入资金使生猪体重随时间增加，出售单价随时间减少，故存在最佳出售时机，使利润最大.

建模及求解

估计r=2，g=0.1

若当前出售，利润为80×8=640（元）

t 天出售

生猪体重 $w=80+rt$　　销售收入 $R=pw$

出售价格 $p=8-gt$　　资金投入 $C=4t$

利润 $Q=R-C=pw-4t$

$$Q(t)=(8-gt)(80+rt)-4t$$

求 t 使$Q(t)$最大

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}=10$$

$Q(10)=660 > 640$

10天后出售，可多得利润20元.

敏感性分析

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}$$ 估计r=2， g=0.1

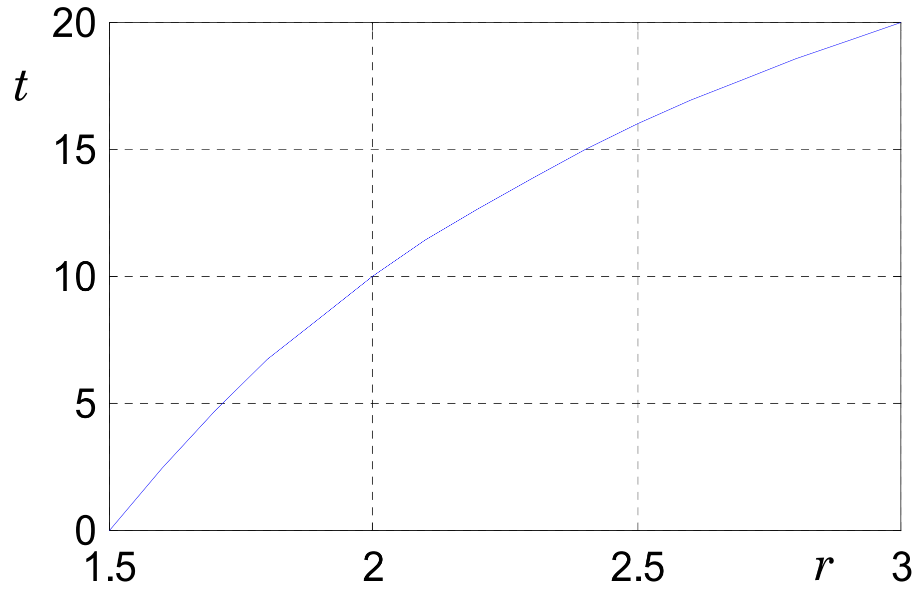
研究 r, g微小变化时对模型结果的影响.

- 设g=0.1不变 $$t=\frac{40r-60}{r},\quad r\ge 1.5$$

t 对r 的（相对）敏感度

$$S(t,r)=\frac{\Delta t/t}{\Delta r/r}\approx\frac{dt}{dr}\frac{r}{t}$$

$$S(t,r)\approx\frac{60}{40r-60}=3$$



生猪每天增加的体重 r 变大1%，出售时间推迟3%.

敏感性分析

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}$$ 估计r=2， g=0.1

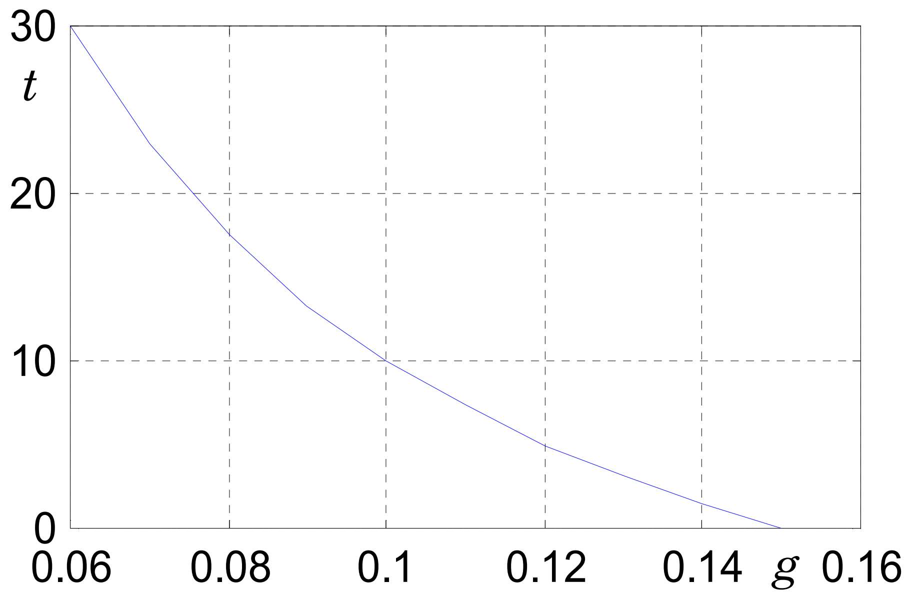
研究 r, g微小变化时对模型结果的影响.

- 设r=2不变 $$t=\frac{3-20g}{g},\quad 0\le g\le 0.15$$

t 对g的（相对）敏感度

$$S(t,g)=\frac{\Delta t/t}{\Delta g/g}\approx\frac{dt}{dg}\frac{g}{t}$$

$$S(t,g)=-\frac{3}{3-20g}=-3$$



生猪价格每天的降低g增加1%，出售时间提前3%.

强健性分析

研究 r, g不是常数时对模型结果的影响.

$w=80+rt \to w = w(t)$

$p=8-gt \to p = p(t)$

$\Rightarrow$ 利润 $Q(t) = p(t)w(t) - 4t$

$Q'(t) = 0 \Rightarrow p'(t)w(t) + p(t)w'(t) = 4$

每天收入的增值　　每天投入的资金

保留生猪直到每天收入的增值等于每天的费用时出售.

由 $S(t,r)=3$　若 $1.8 \le w' \le 2.2$ (10%), 则 $7 \le t \le 13$　（30%）

建议过一周后(t=7)重新估计 p, p', w, w'，再作计算.

简单的优化模型

- 存贮模型
- 生猪的出售时机
- 森林救火
- 消费者的选择
- 生产者的决策

森林救火

问题

森林失火后，要确定派出消防队员的数量.
队员多，森林损失小，救援费用大；
队员少，森林损失大，救援费用小.
综合考虑损失费和救援费，确定队员数量.

问题分析

记队员人数x, 失火时刻t=0, 开始救火时刻t_1, 灭火时刻t_2, 时刻t森林烧毁面积$B(t)$.

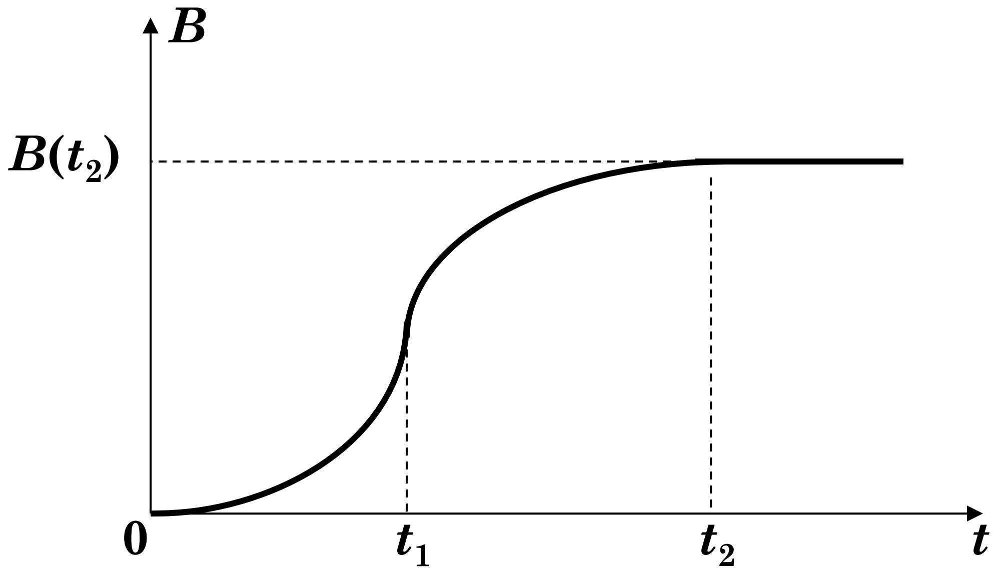
- 损失费$f_1(x)$是x的减函数, 由烧毁面积$B(t_2)$决定
- 救援费$f_2(x)$是x的增函数, 由队员人数和救火时间决定
- 存在恰当的x，使$f_1(x)$, $f_2(x)$之和最小.

问题分析

· 关键是对$B(t)$作出合理的简化假设

· 失火时刻$t=0$, 开始救火时刻t_1, 灭火时刻t_2, 画出时刻t森林烧毁面积$B(t)$的大致图形.

分析$B(t)$比较困难, 转而讨论单位时间烧毁面积 dB/dt (森林烧毁的速度).



模型假设

1）$0 \le t \le t_1$, dB/dt 与 t成正比，系数β (火势蔓延速度).

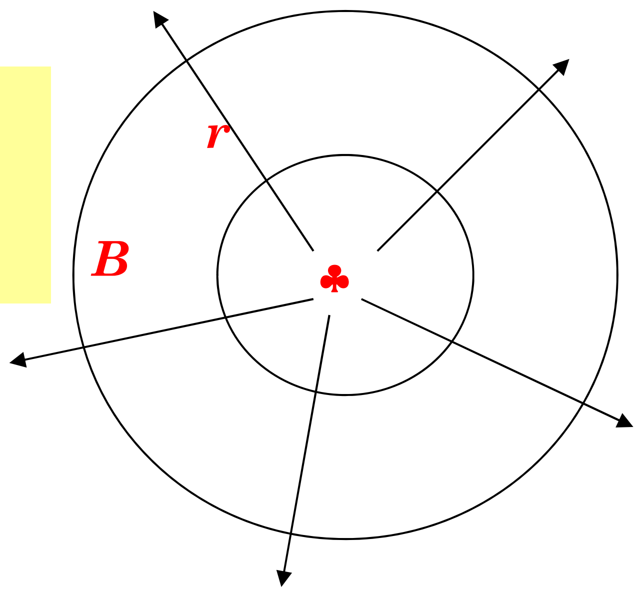
2）$t_1 \le t \le t_2$，β 降为β-λx (λ为队员的平均灭火速度).

3）$f_1(x)$与$B(t_2)$成正比，系数c_1 (烧毁单位面积损失费）

4）每个队员的单位时间灭火费用c_2, 一次性费用c_3 .

假设1）的解释

火势以失火点为中心，均匀向四周呈圆形蔓延，半径 r与 t 成正比.



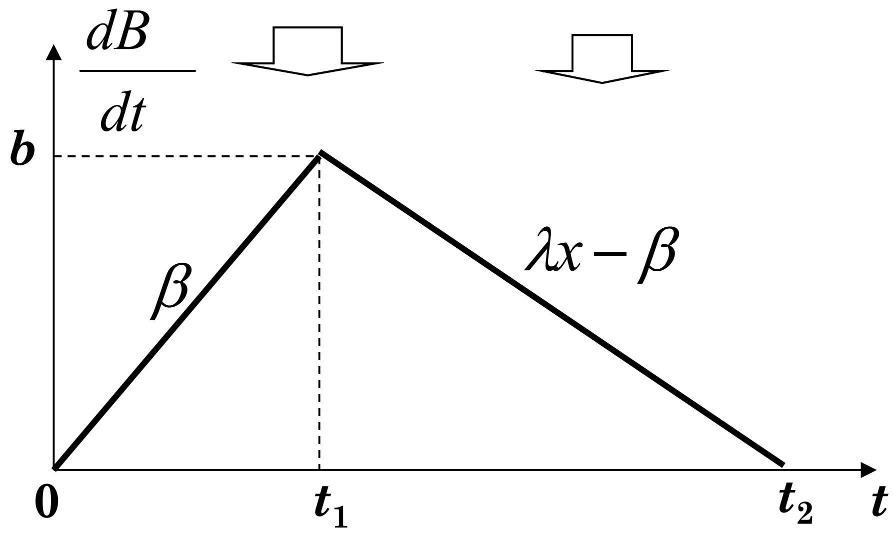
⇨ 面积 B与 t^2 成正比

⇨ dB/dt与 t 成正比

模型建立

假设1）　　假设2）

$$b = \beta t_1, \quad t_2 - t_1 = \frac{b}{\lambda x - \beta}$$



$$\Rightarrow \quad t_2 = t_1 + \frac{\beta t_1}{\lambda x - \beta}$$

$$B(t_2) = \int_0^{t_2} \frac{dB}{dt} dt = \frac{b t_2}{2} = \frac{\beta t_1^2}{2} + \frac{\beta^2 t_1^2}{2(\lambda x - \beta)}$$

假设3）4）　$\Rightarrow f_1(x) = c_1 B(t_2), \quad f_2(x) = c_2 x (t_2 - t_1) + c_3 x$

目标函数——总费用　$C(x) = f_1(x) + f_2(x)$

模型建立

目标函数——总费用

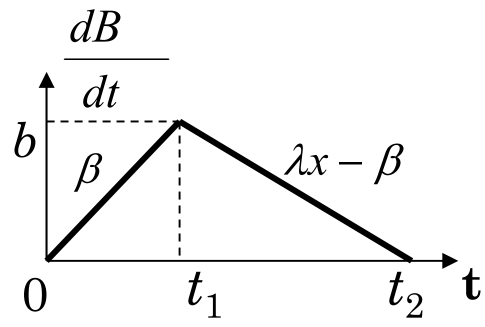
$$C(x)=\frac{c_1\beta t_1^2}{2}+\frac{c_1\beta^2 t_1^2}{2(\lambda x-\beta)}+\frac{c_2\beta t_1 x}{\lambda x-\beta}+c_3 x$$

其中 $c_1,c_2,c_3,t_1,\beta,\lambda$ 为已知参数

模型求解

求 x 使 $C(x)$ 最小

$$\frac{dC}{dx}=0 \Rightarrow x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2 t_1}{2c_3\lambda^2}}$$



结果解释

- β/λ 是火势不继续蔓延的最少队员数

结果解释

$$x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2t_1}{2c_3\lambda^2}}$$

c_1~烧毁单位面积损失费, c_2~每个队员单位时间灭火费, c_3~每个队员一次性费用, t_1~开始救火时刻, β~火势蔓延速度, λ~每个队员平均灭火速度.

$c_1, t_1, \beta\uparrow \rightarrow x\uparrow$　　　　$c_3, \lambda\uparrow \rightarrow x\downarrow$

$c_2\uparrow\rightarrow x\uparrow$　　为什么?

模型应用

c_1,c_2,c_3已知, t_1可估计, β,λ可设置一系列数值

由模型决定队员数量 x

简单的优化模型

- 存贮模型
- 生猪的出售时机
- 森林救火
- 消费者的选择
- 生产者的决策

消费者的选择

背景

消费者在市场里如何分配手里一定数量的钱，选择购买若干种需要的商品.

根据经济学的一条最优化原理——“消费者追求最大效用”，用数学建模的方法帮助消费者决定他的选择.

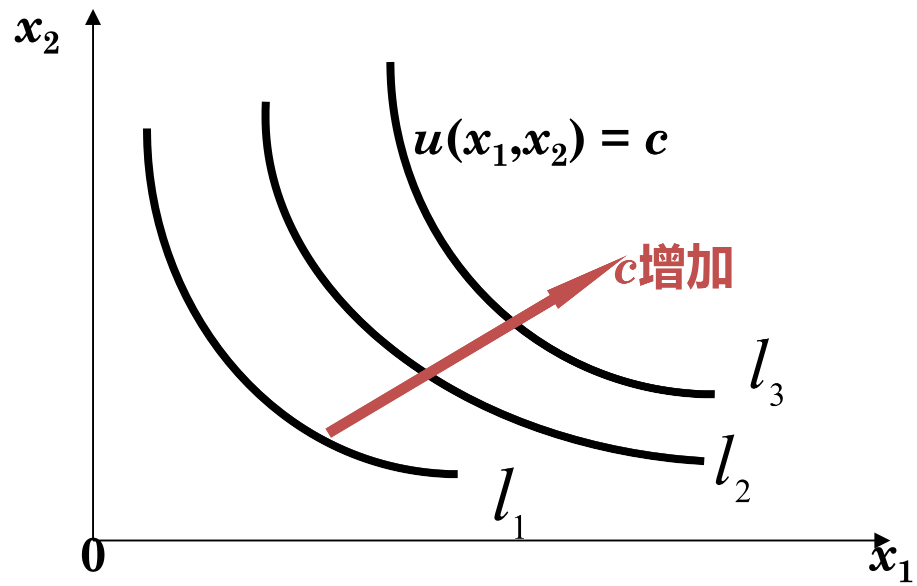
- 假定只有甲乙两种商品供消费者购买，
- 建立的模型可以推广到任意多种商品的情况.

效用函数

当消费者购得数量分别为x_1, x_2的甲乙两种商品时，得到的效用可用函数u (x_1, x_2)度量，称为**效用函数**.

利用等高线概念在x_1, x_2平面上画出函数u 的等值线, u (x_1, x_2)=c 称为**等效用线** ——一族单调减、下凸、互不相交的曲线.

等效用线就是“ 实物交换模型”中的**无差别曲线**，效用就是那里的**满意度**.



效用最大化模型　x_1, x_2~购得甲乙两种商品数量

p_1, p_2~甲乙两种商品的单价，y~消费者准备付出的钱

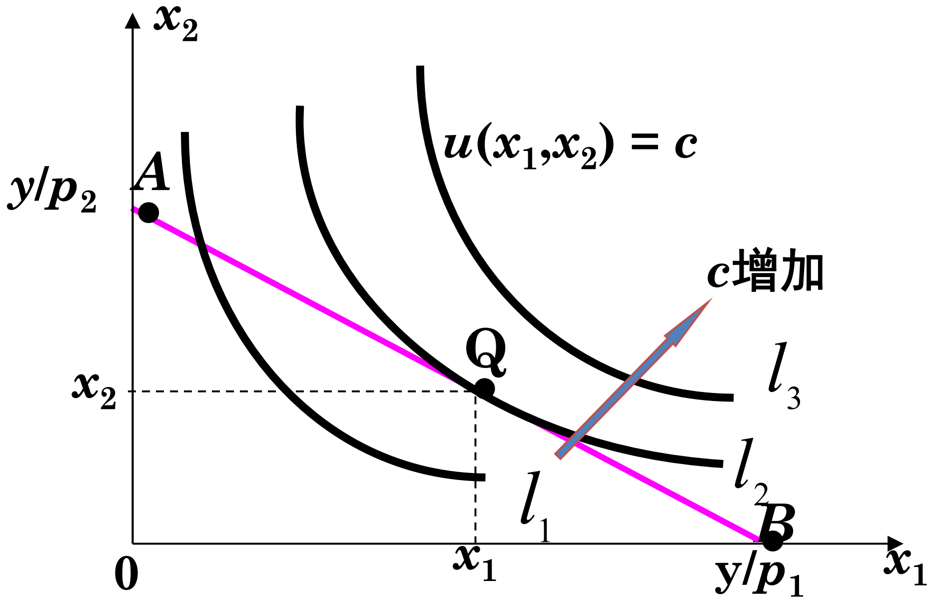
在条件 $p_1 x_1+p_2 x_2 =y$ 下使效用函数$u(x_1, x_2)$最大.

几何分析　　消费线AB

$u(x_1, x_2) = c$ 单调减、下凸、互不相交.

AB必与一条等效用线相切于Q点 (消费点).

$Q\ (x_1, x_2)$ 唯一



模型求解

$$\max \quad u(x_1, x_2)$$
$$s.t. \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$$

引入拉格朗日乘子λ构造函数

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1, x_2}}{\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_1, x_2}} = \frac{p_1}{p_2}}$$

与几何分析得到的 Q 一致

等效用线 $u\ (x_1, x_2) = c$ **的斜率** $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}$

消费线AB的斜率 $\quad -p_1 / p_2$

结果解释

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}$ ~ 边际效用——商品数量 增加一个单位时效用的增量

当商品边际效用之比等于它们价格之比时效用函数最大.

效用函数的构造

等效用线$u(x_1, x_2)=c$ 所确定的函数 $x_2(x_1)$单调减、下凸

充分条件 $\frac{\partial U}{\partial q_1} > 0, \frac{\partial U}{\partial q_2} > 0, \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} > 0$

- 解释条件中正负号的实际意义

效用函数$u(x_1,x_2)$几种常用的形式

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$1.\ u = (\frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_2})^{-1},\ \alpha, \beta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \eta \sqrt{\frac{p_1}{p_2}},\ \eta = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

· 购买两种商品费用之比与二者价格之比的平方根成正比, 比例系数是参数α与β之比的平方根.

· $u(x_1,x_2)$中参数 α, β分别度量甲乙两种商品对消费者的效用，或者消费者对甲乙两种商品的偏爱 .

效用函数$u(x_1,x_2)$几种常用的形式

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$2.\ u = x_1^{\lambda} x_2^{\mu},\ 0 < \lambda, \mu < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- 购买两种商品费用之比只取决于λ,μ, 与价格无关.
- $u(x_1,x_2)$中λ,μ 分别度量两种商品的效用或者偏爱.

$$3.\ u = (a\sqrt{x_1} + b\sqrt{x_2})^2,\ a,b > 0$$

实际应用时根据对最优解的分析，决定采用哪种效用函数，并由经验数据确定其参数.

效用最大化模型应用举例

例1 征销售税还是征收入税

政府从消费者身上征税的两种办法:

- 销售税 ~ 根据消费者购买若干种商品时花的钱征税
- 收入税 ~ 根据消费者的收入征收所得税

利用图形从效用函数和效用最大化的角度讨论

征税前设甲乙两种商品的单价为p_1, p_2，消费者准备花的钱为y, 等效用线为$u(x_1, x_2)=c$，消费点为$Q(x_1, x_2)$.

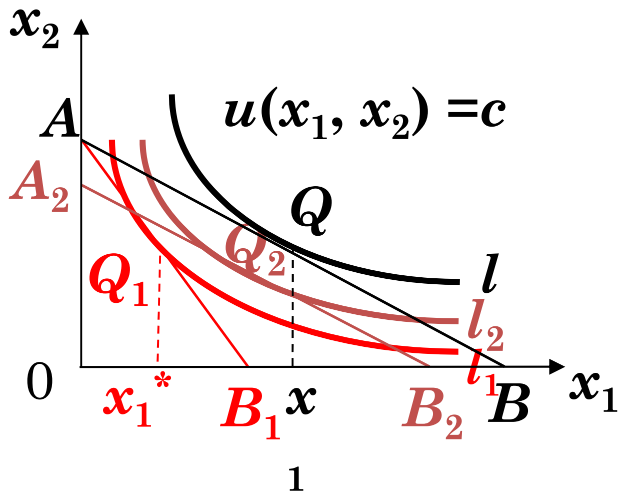
例1 征销售税还是征收入税

征税前的消费点Q

对甲商品征销售税，税率为p_0

$$(p_1+p_0)x_1+p_2x_2=y$$

- 消费线AB_1, B_1在B的左边
- AB_1与l_1相切于$Q_1(x_1^*, x_2^*)$
- 政府得到的销售税额 $p_0x_1^*$



若改为征 收入税

- 征收的税额与销售税额 $p_0x_1^*$相同 $p_1x_1+p_2x_2=y-p_0x_1^*$
- 消费线A_2B_2与l_2相切于Q_2, 可证B_2在B_1的右边.

l_2在l_1上？
l_2在l_1下？

如果l_2在l_1上方，Q_2的效用函数值将大于Q_1, 对消费者来说征收入税比征销售税好.

例2 价格补贴给生产者还是消费者

政府为鼓励商品的生产或者减少消费者的负担所采取的两种价格补贴办法：

补贴前的消费点Q

- 把补贴款直接给生产者 ~鼓励商品生产,对消费者无影响
- 把补贴款发给消费者而让商品涨价

让甲商品价格涨到p_1+p_0, 补贴消费者多花的钱 $p_0 x_1^*$,使仍达到消费点Q

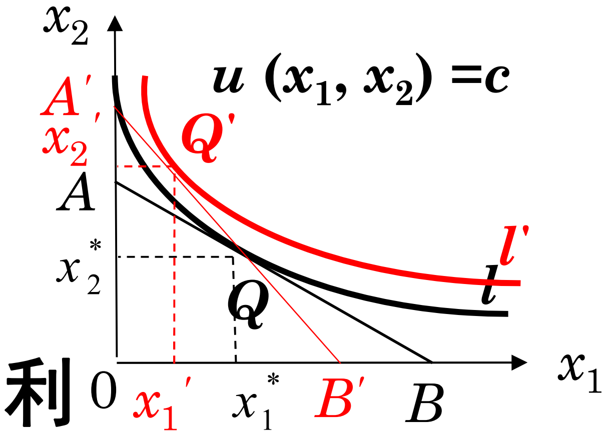
$$(p_1+p_0)x_1+p_2x_2=y+p_0x_1^*$$

消费线 $A'B'$ 过Q, 与l'相切于Q'

$Q'(x_1',x_2')$ 的效用函数值大于Q

⇨ 对消费者更有利

$x_1' < x_1^*$, $x_2' > x_2^*$ ⇨ 对甲商品生产不利



简单的优化模型

- 存贮模型
- 生猪的出售时机
- 森林救火
- 消费者的选择
- 生产者的决策

生产者的决策

背景

在市场经济中“消费者追求最大效用”，生产者呢？

生产者或供销商根据产品的成本和产值决定投入，按照商品的销售情况制订价格.

根据经济学的又一条最优化原理——“生产者追求最大利润”，用数学建模的方法帮助生产者或供销商做出决策.

最大利润模型 假定产品可以全部销售出去变成收入

x~产品产量　　$f(x)$ ~ 产值(收入)，$c(x)$ ~ 成本

利润 $r(x) = f(x) - c(x)$

达到最大利润的产量 x^* $\Rightarrow$ $r'(x^*) = 0$ $\Rightarrow$ $f'(x^*) = c'(x^*)$

$f'(x)$ ~ 边际产值—— x变化一个单位时产值的改变量

$c'(x)$ ~ 边际成本—— x变化一个单位时成本的改变量

最大利润在边际产值等于边际成本时达到.

最优定价模型

在产品可以全部销售出去的条件下确定商品价格，使利润最大.

- 产量x等于销量，数量无限制.
- 收入与x 成正比，系数 p 即价格.
- 成本与 x 成正比，系数 c 即边际成本.
- 销量x 依于价格 p, $x(p)$是减函数.

简化假设 $x(p) = a - bp,\ a, b > 0$

利润 $r(p) = px - cx = (p - c)(a - bp)$

求p使 $r(p)$ 最大

最优定价模型

利润 $r(p)=(p-c)(a-bp)$

$$\frac{dr}{dp}=0 \Rightarrow \boxed{p^*=\frac{c}{2}+\frac{a}{2b}}$$ ~ 利润达到最大的定价

$$x(p)=a-bp \Rightarrow b=-\frac{dx}{dp}$$

b ~弹性系数——价格上升1单位时销量的下降幅度（需求对价格的敏感度）

$b\uparrow \rightarrow p^*\downarrow$

a ~ 绝对需求(p很小时的需求)

$a\uparrow \rightarrow p^*\uparrow$

$c/2$ ~ 成本的一半

a, b可由p和x的统计数据作拟合得到

投资费用一定下的产值最大模型

x_1, x_2 ~甲乙产品的产量　　　$f(x_1, x_2)$ ~产值函数

c_1, c_2 ~甲乙产品的单位成本　　　s~总投资费用

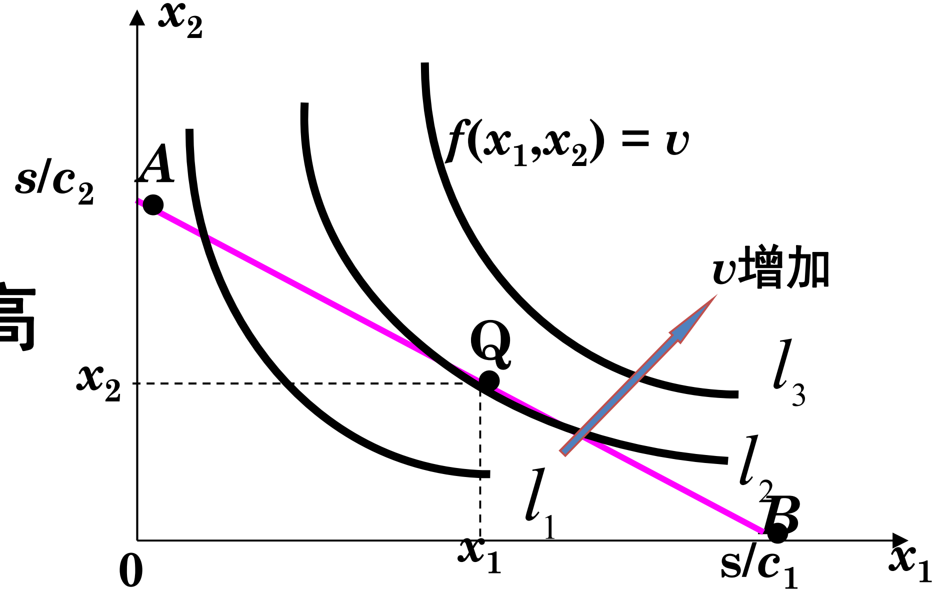
在条件 $c_1x_1 + c_2x_2 = s$ 下求x_1, x_2使产值 $f(x_1, x_2)$ 最大.

几何分析　与效用最大化模型类似

等产值线$f(x_1, x_2)=v$单调减、下凸、互不相交.

下凸~稀缺产品的产值更高

投资线AB必与一条等产值线相切于Q点.



投资费用一定下的产值最大模型

在条件 $c_1x_1+c_2x_2=s$ 下求 x_1, x_2 使产值 $f(x_1, x_2)$ 最大.

用拉格朗日乘子法求条件极值

最优解 (x_1, x_2) 满足 $$\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1,x_2}}{\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1,x_2}}=\frac{c_1}{c_2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ ~边际产值

当两种产品的边际产值之比等于它们的价格之比时，产值达到最大.

产值最大与费用最小的对偶关系

$x=(x_1, x_2)^T$, $c=(c_1, c_2)$

投资费用一定的产值最大模型 $g(s,c)=\max\{f(x) \mid cx \le s\}$

$g(s,c)$~给定的单位成本c下费用不超过s的最大产值.

产值一定的投资费用最小模型 $s(v,c)=\min\{cx \mid f(x) \ge v\}$

$s(v,c)$~给定的单位成本c下产值不低于v的最小费用.

对偶极值问题 只要解决其中之一, 另一个就迎刃而解

- 成本函数是简单的线性函数 $c(x)$.
- 产值函数$f(x)$ 在实际生产过程中常常难以确定.

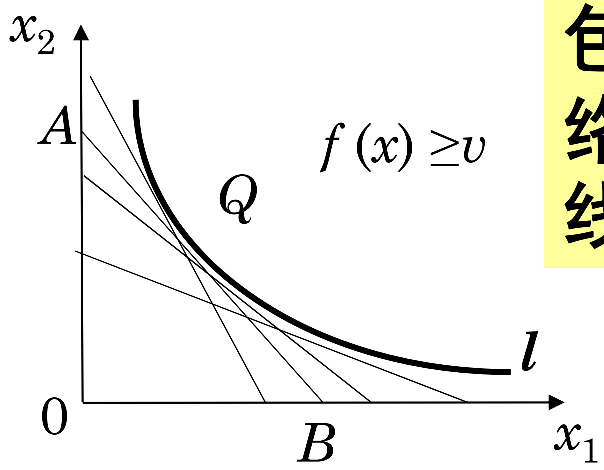
产值最大与费用最小对偶关系的应用

——从成本函数确定产值函数的图解法

$$s(v,c) = \min\{cx \mid f(x) \geq v\}$$

$x=(x_1, x_2)^T$, $c=(c_1, c_2)$

- 给定v和c求得最小费用$s(v,c)=s$
- 画出直线AB: $cx=s$
- $f(x) \geq v$的点在AB上方, 且AB上有一点Q位于l: $f(x)=v$上
- 改变c重复上述过程，得到一系列不同斜率的直线



包络线

- 区域$f(x) \geq v$在直线上方, 其边界是等产值线l: $f(x)=v$
- 改变v重复上述过程, 得到一系列等产值线

Matlab无约束优化实验

Matlab无约束优化实验

- 实验目的
  - 了解无约束最优化基本算法。
  - 掌握用数学软件包求解无约束最优化问题。
- 实验内容
  - 无约束优化基本思想及基本算法。
  - MATLAB优化工具箱简介
  - 用MATLAB求解无约束优化问题。
  - 实验作业。

求解无约束最优化问题的基本思想

标准形式：

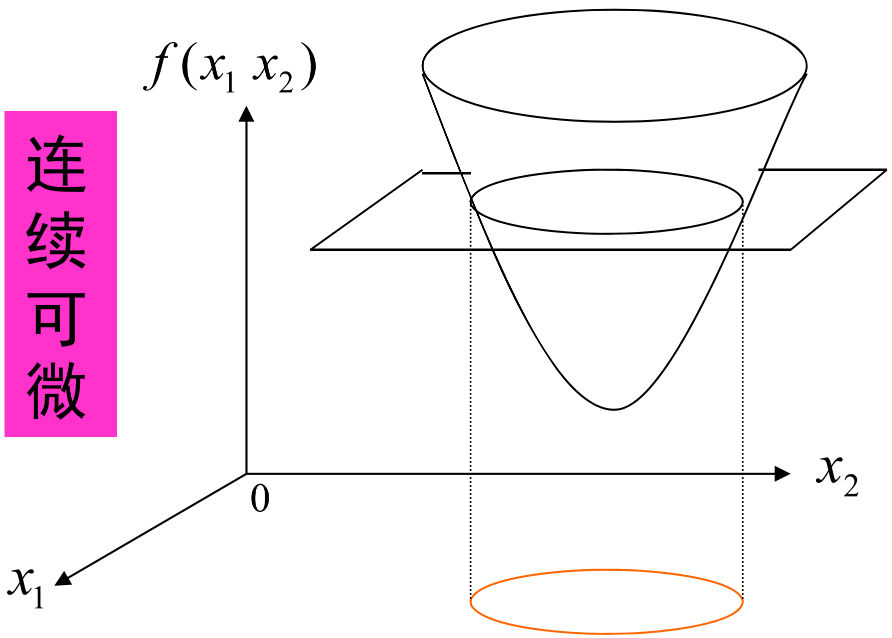
$$\min_{X\in E^n} f(X)$$

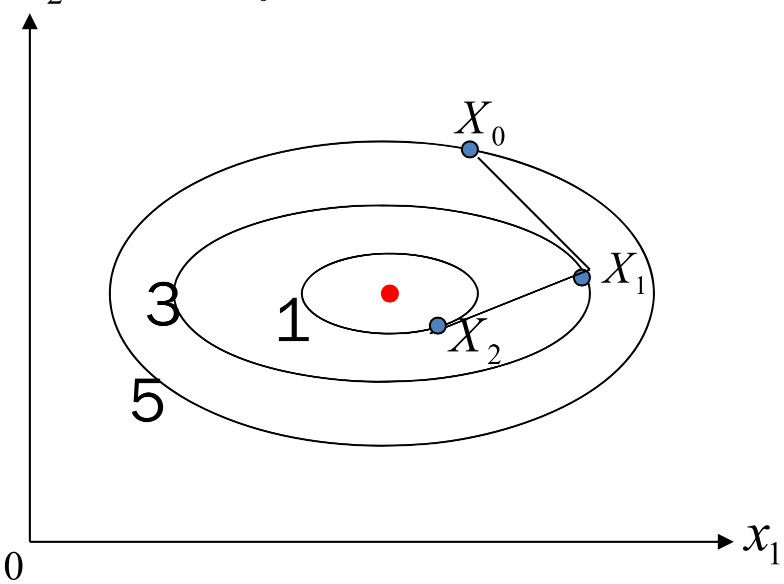
其中 $f: E^n \to E^1$

$$\max_{X\in E^n} f(X) = \min_{X\in E^n}[-f(X)]$$

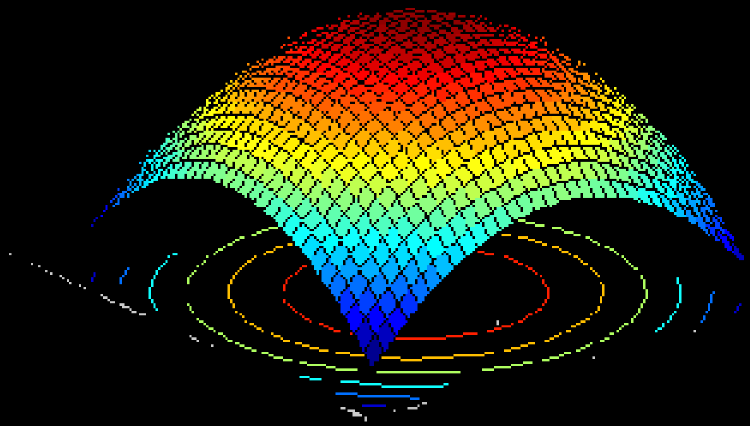
求解的基本思想（以二元函数为例）

连续可微

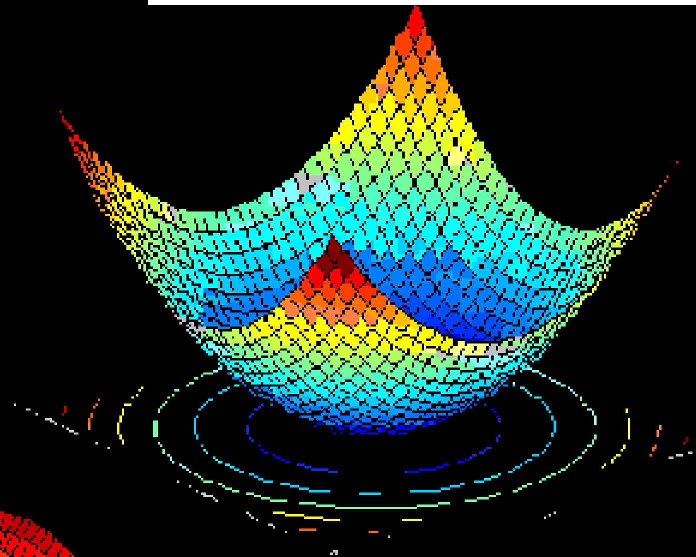


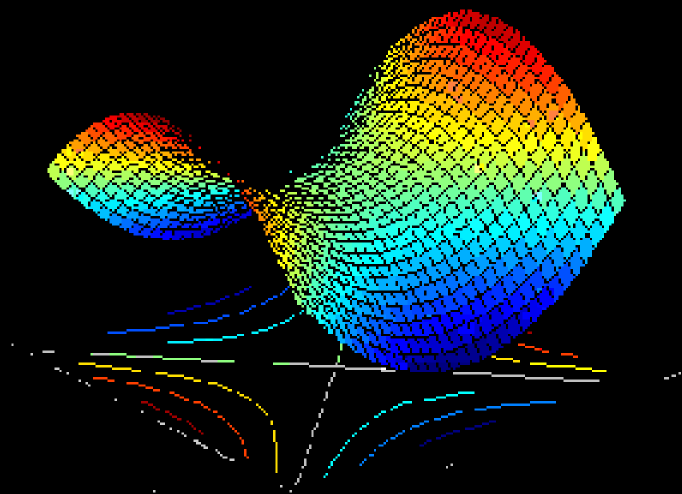


$$f(x_1 \quad x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

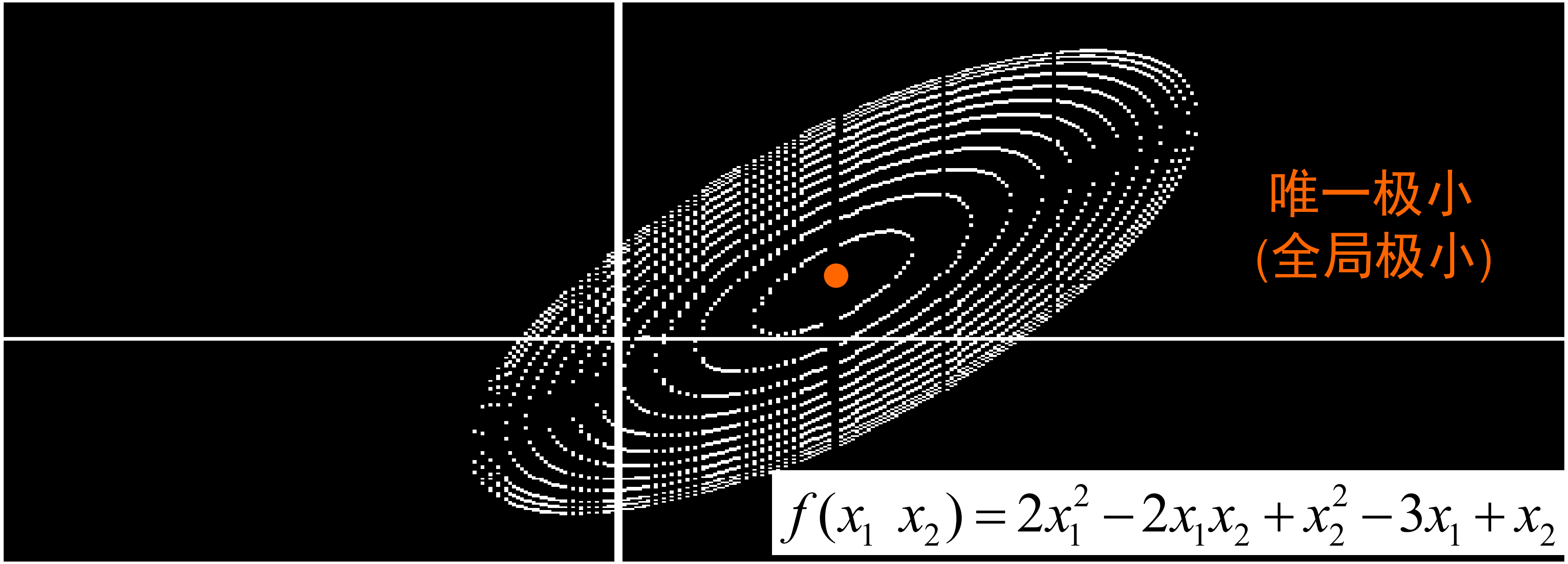


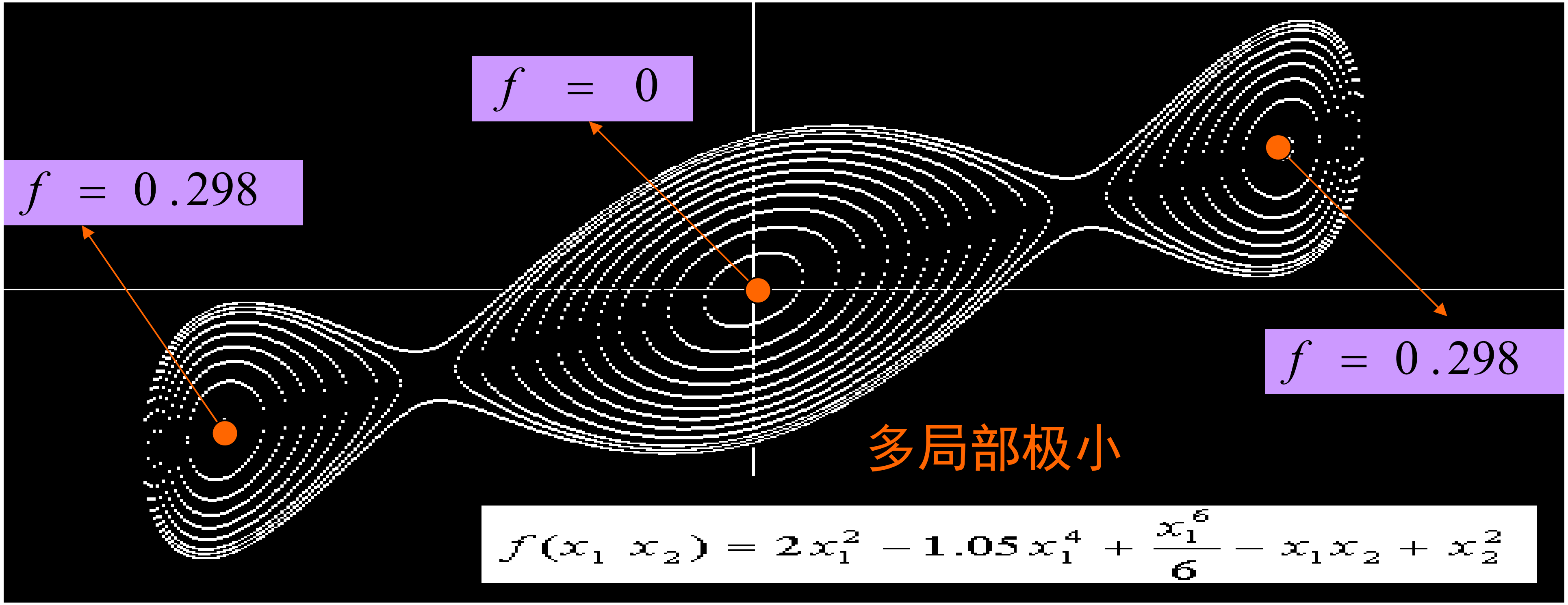
$$f(x_1 \quad x_2) = x_1^2 + x_2^2$$





$$f(x_1 \quad x_2) = x_1^2 - x_2^2$$


唯一极小
(全局极小)
$f(x_1\ x_2)=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-3x_1+x_2$

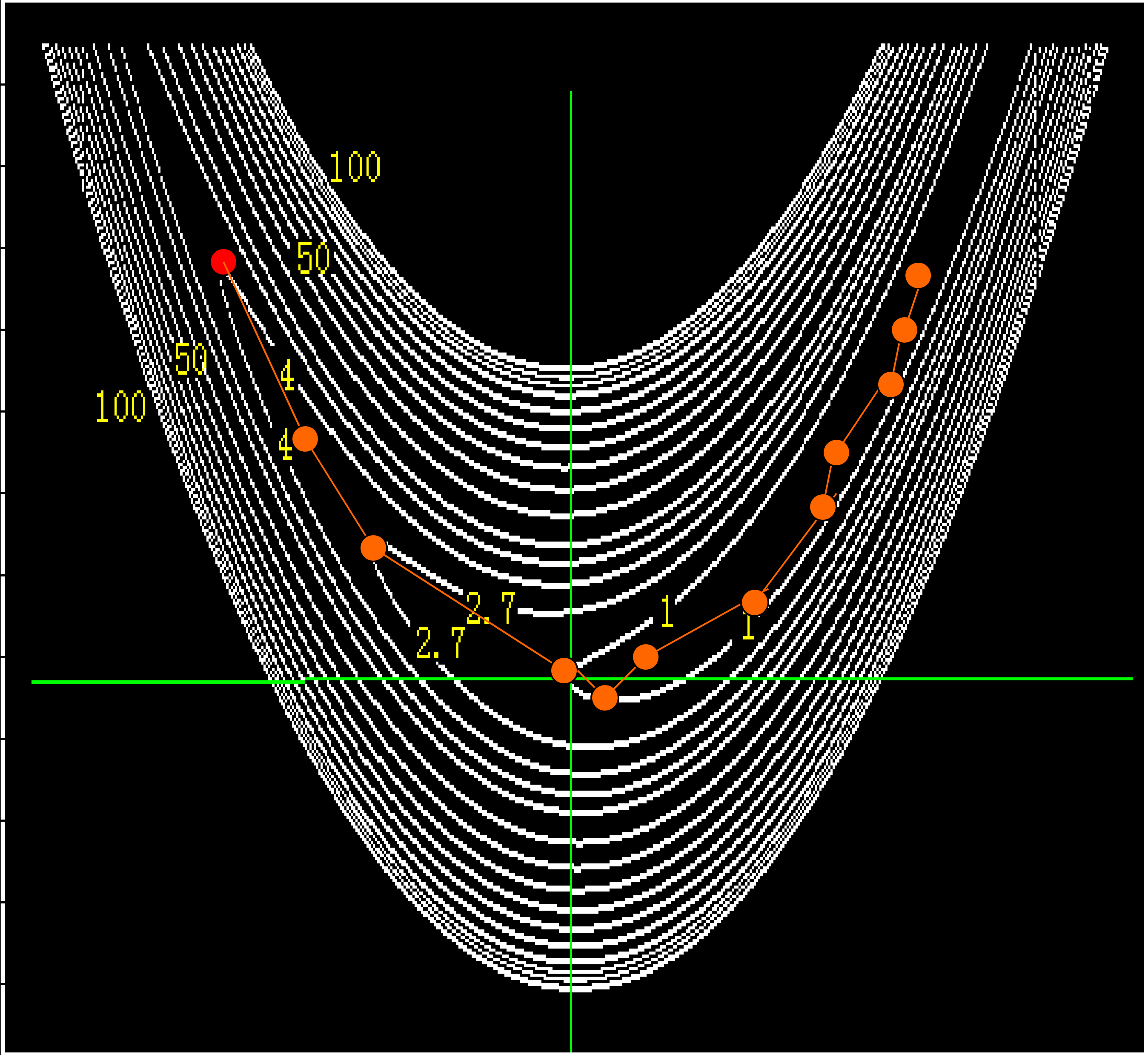

$f=0$
$f=0.298$
$f=0.298$
多局部极小
$f(x_1\ x_2)=2x_1^2-1.05x_1^4+\frac{x_1^6}{6}-x_1x_2+x_2^2$

搜索过程

$$\min f(x_1\ \ x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$$

最优点 (1　1)
初始点 (-1　1)

x_1	x_2	f
-1	1	4.00
-0.79	0.58	3.39
-0.53	0.23	2.60
-0.18	0.00	1.50
0.09	-0.03	0.98
0.37	0.11	0.47
0.59	0.33	0.20
0.80	0.63	0.05
0.95	0.90	0.003
0.99	0.99	1E-4
0.999	0.998	1E-5
0.9997	0.9998	1E-8



无约束优化问题的基本算法

1．最速下降法（共轭梯度法）算法步骤：

(1) 给定初始点 $X^0 \in E^n$，允许误差 $\varepsilon > 0$，令 k=0；

(2) 计算 $\nabla f\left(X^k\right)$；

(3) 检验是否满足收敛性的判别准则：

$$\left\|\nabla f\left(X^k\right)\right\| \le \varepsilon ,$$

若满足，则停止迭代，得点 $X^* \approx X^k$，否则进行(4)；

(4) 令 $S^k = -\nabla f\left(X^k\right)$，从 X^k 出发，沿 S^k 进行一维搜索，

即求 λ_k 使得： $\min\limits_{\lambda \ge 0} f\left(X^k + \lambda S^k\right) = f\left(X^k + \lambda_k S^k\right)$；

(5) 令 $X^{k+1} = X^k + \lambda_k S^k$，k=k+1 返回(2).

最速下降法是一种最基本的算法，它在最优化方法中占有重要地位. 最速下降法的优点是工作量小，存储变量较少, 初始点要求不高；缺点是收敛慢，最速下降法适用于寻优过程的前期迭代或作为间插步骤，当接近极值点时，宜选用别种收敛快的算法.

2．牛顿法算法步骤：

（1）　选定初始点 $X^0 \in E^n$，给定允许误差 $\varepsilon > 0$，令 k=0；

（2）　求 $\nabla f\left(X^k\right)$, $\left(\nabla^2 f\left(X^k\right)\right)^{-1}$, 检验：若 $\left\|\nabla f\left(X^k\right)\right\| < \varepsilon$, 则

停止迭代, $X^* \approx X^k$. 否则，　转向(3)；

（3）　令　$S^k = -[\nabla^2 f\left(X^k\right)]^{-1} \nabla f\left(X^k\right)$（牛顿方向）；

（4）　$X^{k+1} = X^k + S^k$, $k = k+1$, 转回(2).

如果f是对称正定矩阵A的二次函数，则用牛顿法经过**一次迭代**就可达到最优点,如不是二次函数，则牛顿法不能一步达到极值点，但由于这种函数在极值点附近和二次函数很近似,因此牛顿法的收敛速度还是很快的.

牛顿法的收敛速度虽然较快，但要求Hessian矩阵要可逆，要计算二阶导数和逆矩阵，就加大了计算机计算量和存储量.

3．拟牛顿法

为克服牛顿法的缺点，同时保持较快收敛速度的优点，利用第 k 步和第 k+1 步得到的 X^{k}，X^{k+1}，$\nabla f(X^{k})$，$\nabla f(X^{k+1})$，构造一个正定矩阵 G^{k+1} 近似代替 $\nabla^{2} f(X^{k})$，或用 H^{k+1} 近似代替 $(\nabla^{2} f(X^{k}))^{-1}$，将牛顿方向改为：

$$G^{k+1} S^{k+1}=-\nabla f(X^{k+1}), \quad S^{k+1}=-H^{k+1} \nabla f(X^{k+1})$$

从而得到下降方向.

Matlab优化工具箱简介

1.MATLAB求解优化问题的主要函数

类　　型	模　　　型	基本函数名
一元函数极小	Min F（x）s.t.x1<x<x2	x=fminbnd('F', x_1, x_2)
无约束极小	Min F(X)	X=fminunc('F', X_0) X=fminsearch('F', X_0)
线性规划	Min $c^T X$ s.t. AX<=b	X=linprog(c, A, b)
二次规划	Min $\frac{1}{2} x^T H x + c^T x$ s.t.　Ax<=b	X=quadprog(H, c, A, b)
约束极小 （非线性规划）	Min F(X) s.t.　G(X)<=0	X=fmincon('FG', X_0)
达到目标问题	Min r s.t.　F(x)-wr<=goal	X=fgoalattain('F', x, goal, w)
极小极大问题	$\underset{X}{\text{Min}}\ \underset{\{Fi(x)\}}{\max}\ \{F_i(x)\}$ s.t.　G(x)<=0	X=fminimax('FG', x_0)

2. 优化函数的输入变量

使用优化函数或优化工具箱中其它优化函数时，输入变量见下表：

变量	描　　述	调用函数
f	线性规划的目标函数f*X 或二次规划的目标函数X'*H*X+f*X 中线性项的系数向量	linprog, quadprog
fun	非线性优化的目标函数.fun必须为行命令对象或M文件、嵌入函数、或MEX文件的名称	fminbnd, fminsearch, fminunc, fmincon, lsqcurvefit, lsqnonlin, fgoalattain, fminimax
H	二次规划的目标函数X'*H*X+f*X 中二次项的系数矩阵	quadprog
A, b	A矩阵和b向量分别为线性不等式约束：$AX \le b$ 中的系数矩阵和右端向量	linprog, quadprog, fgoalattain, fmincon, fminimax
Aeq, beq	Aeq矩阵和beq向量分别为线性等式约束：$Aeq \cdot X = beq$ 中的系数矩阵和右端向量	linprog, quadprog, fgoalattain, fmincon, fminimax
vlb, vub	X的下限和上限向量：vlb≤X≤vub	linprog, quadprog, fgoalattain, fmincon, fminimax, lsqcurvefit, lsqnonlin
X_0	迭代初始点坐标	除fminbnd外所有优化函数
x_1, x_2	函数最小化的区间	fminbnd
options	优化选项参数结构，定义用于优化函数的参数	所有优化函数

3. 优化函数的输出变量下表:

变量	描　　述	调用函数
x	由优化函数求得的值.若exitflag>0,则x为解;否则,x不是最终解,它只是迭代制止时优化过程的值	所有优化函数
fval	解x处的目标函数值	linprog,quadprog,fgoalattain,fmincon,fminimax,lsqcurvefit,lsqnonlin, fminbnd
exitflag	描述退出条件: ● exitflag>0,表目标函数收敛于解x处 ● exitflag=0,表已达到函数评价或迭代的最大次数 ● exitflag<0,表目标函数不收敛	
output	包含优化结果信息的输出结构. ● Iterations:迭代次数 ● Algorithm:所采用的算法 ● FuncCount:函数评价次数	所有优化函数

4. 控制参数options的设置

Options中常用的几个参数的名称、含义、取值如下:

(1) Display: 显示水平.取值为'off'时,不显示输出;取值为'iter'时,显示每次迭代的信息;取值为'final'时,显示最终结果.默认值为'final'.

(2) MaxFunEvals: 允许进行函数评价的最大次数,取值为正整数.

(3) MaxIter: 允许进行迭代的最大次数,取值为正整数.

控制参数options可以通过函数optimset创建或修改。命令的格式如下：

(1) options=optimset(‘optimfun’)

创建一个含有所有参数名，并与优化函数optimfun相关的默认值的选项结构options.

(2) options=optimset(‘param1’,value1,'param2’,value2,...)

创建一个名称为options的优化选项参数，其中指定的参数具有指定值，所有未指定的参数取默认值.

(3)options=optimset(oldops,‘param1’,value1,'param2’,
value2,...)

创建名称为oldops的参数的拷贝，用指定的参数值修改oldops中相应的参数.

例：opts=optimset(‘Display’,'iter’,'TolFun’,1e-8)

该语句创建一个称为opts的优化选项结构，其中显示参数设为’iter’，TolFun参数设为1e-8.

用Matlab解无约束优化问题

1. 一元函数无约束优化问题: $\min f(x) \quad x_1 \le x \le x_2$

常用格式如下:

(1) x= fminbnd (fun, x_1, x_2)
(2) x= fminbnd (fun, x_1, x_2 , options)
(3) [x, fval]= fminbnd (...)
(4) [x, fval, exitflag]= fminbnd (...)
(5) [x, fval, exitflag, output]= fminbnd (...)

其中(3)、(4)、(5)的等式右边可选用(1)或(2)的等式右边。

函数fminbnd的算法基于黄金分割法和二次插值法，它要求目标函数必须是连续函数，并可能只给出局部最优解。

例 1　求　f = $2e^{-x}\sin x$ 在 0<x<8 中的最小值与最大值

主程序为ex1.m:

```
f='2*exp(-x).*sin(x)';
fplot(f,[0,8]);            %作图语句
[xmin,ymin]=fminbnd (f, 0,8)
f1='-2*exp(-x).*sin(x)';
[xmax,ymax]=fminbnd (f1, 0,8)
```

运行结果:

```
xmin = 3.9270         ymin = -0.0279
xmax =  0.7854        ymax =  0.6448
```

例2　对边长为3米的正方形铁板，在四个角剪去相等的正方形以制成方形无盖水槽，问如何剪法使水槽的容积最大？

解　设剪去的正方形的边长为x，则水槽的容积为：$(3-2x^2)x$

建立无约束优化模型为：min y=-$(3-2x^2)x$，　$0<x<1.5$

先编写M文件fun0.m如下：

```
function f=fun0(x)
f=-(3-2*x).^2*x;
```

主程序为ex2.m：

```
[x,fval]=fminbnd('fun0',0,1.5);
xmax=x
fmax=-fval
```

运算结果为： xmax = 0.5000,fmax =2.0000.即剪掉的正方形的边长为0.5米时水槽的容积最大,最大容积为2立方米.

2、多元函数无约束优化问题

标准型为： *min F(X)*

命令格式为:

(1) x= fminunc（*fun*, X_0 ）；或x=fminsearch（*fun*, X_0 ）

(2) x= fminunc（*fun*, X_0 ，options）；

或x=fminsearch（*fun*, X_0 ，options）

(3) [x, fval]= fminunc（...）；

或[x, fval]= fminsearch（...）

(4) [x, fval, exitflag]= fminunc（...）；

或[x, fval, exitflag]= fminsearch

(5) [x, fval, exitflag, output]= fminunc（...）；

或[x, fval, exitflag, output]= fminsearch（...）

说明:

- fminsearch**是用单纯形法寻优.** fminunc**的算法见以下几点说明:**

[1] fminunc为无约束优化提供了大型优化和中型优化算法。由options中的参数LargeScale控制:

LargeScale='on'(默认值),使用大型算法

LargeScale='off'(默认值),使用中型算法

[2] fminunc为中型优化算法的搜索方向提供了3种算法，由options中的参数HessUpdate控制:

HessUpdate='bfgs'（默认值），拟牛顿法的BFGS公式;

HessUpdate='dfp'，拟牛顿法的DFP公式;

HessUpdate='steepdesc'，最速下降法

- **使用**fminunc**和** fminsearch**可能会得到局部最优解.**

例3 min $f(x)=(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1)*\exp(x_1)$

1、**编写M-文件** fun1.m:

```
function f = fun1 (x)
f = exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1)
```

2、**输入M文件**ex3.m**如下**:

```
x0 = [-1, 1];
x=fminunc('fun1',x0);
y=fun1(x)
```

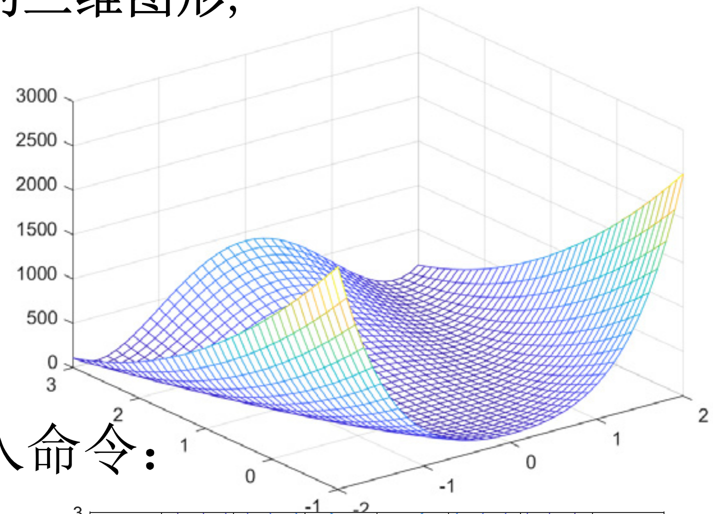
3、**运行结果**:

```
x=     0.5000         -1.0000
y =     3.6609e-16
```

例4　Rosenbrock 函数 $f(x1, x2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$ 的最优解（极小）为 x*=（1，1），极小值为 f*=0. 试用不同算法（搜索方向和步长搜索）求数值最优解.
初值选为 x0=（-1.2 ， 2）.

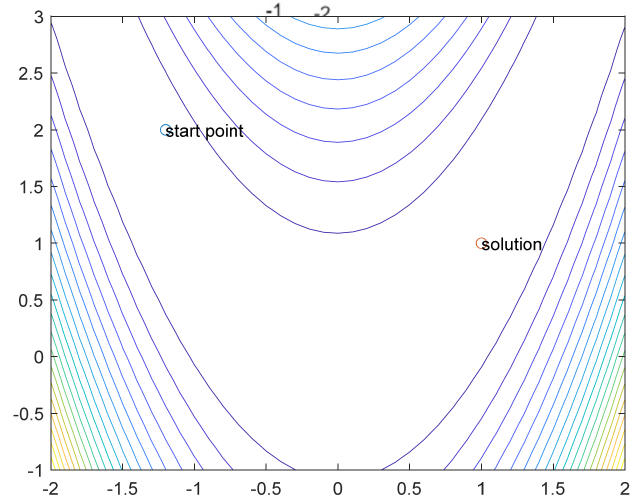
1.为获得直观认识，先画出 Rosenbrock　函数的三维图形,
输入以下命令：

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2,-1:0.1:3);
z=100*(y-x.^2).^2+(1-x).^2;
mesh(x,y,z)
```



2.　画出 Rosenbrock　函数的等高线图,输入命令：

```
contour(x,y,z,20)
hold on
plot(-1.2,2,' o ');
text(-1.2,2,'start point')
plot(1,1,'o')
text(1,1,'solution')
```



3. 用fminsearch函数求解

输入命令:

```
f='100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2';
[x,fval,exitflag,output]=fminsearch(f, [-1.2 2])
```

运行结果:

```
x =1.0000    1.0000
fval =1.9151e-010
exitflag = 1
output =
    iterations: 108
    funcCount: 202
    algorithm: 'Nelder-Mead simplex direct search'
```

4. 用fminunc 函数

(1)建立M-文件fun2.m

```
function f=fun2(x)
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2
```

(2)主程序ex4.m

```
x0 = [-1.2 2];
options=optimset('HessUpdate','bfgs')
% options=optimset('HessUpdate','dfp')
% options=optimset('HessUpdate','steepdesc')
[x,fval,exitflag,output]=fminunc('fun2',x0,options)
```

作业

- 1. 某公司每天制造x个落地灯和y个台灯，制造和销售这些灯得到的利润为 $P(x,y) = 18x + 2y - 0.05x^2 - 0.03y^2 + 0.02xy - 100$

  求每天每种等的生产数量，是公司利润最大

- 2.母牛上市，一头母牛目前有800磅，且每周能长35磅，而喂养该母牛每周需要花费6.5美元。今天的市场价格为美磅0.95美元，但每天会跌价0.01美元。建立数学模型，确定出售母牛的最佳时机和赚取最大利润。

- 3. John负责不断购买新卡车，替换公司车队的旧车。他希望确定每辆卡车的使用年限，使拥有该卡车的平均费用最小。假设购入一辆新车价格为9000美元，每辆卡车t年的维护费如下经验公式：

  $$C(t) = 640 + 180(t+1)t$$

  - 确定一辆卡车使用t年的总成本函数E(t)和平均成本函数$E_a(t)$
  - 画出$E_a(t)$关于t的函数图形
  - 确定一辆卡车应该最佳报废年限

End