

如何选择一本适合你的《数学分析》教科书？

刘思齐教授 出处 BV1xp4y1e7Nh

2020 年 9 月 24 日

目录

1 一般原则	2
1.1 为什么要选书？	2
1.2 选一本就够了吗？	2
1.3 选国内的还是选国外的？	2
1.4 选经典的还是选新出的？	2
2 好书的看点	3
2.1 实数的定义	3
2.2 微积分基本定理	3
2.3 隐函数定理	3
2.4 重积分换元法	4
2.5 如何在数学分析中讲拓扑、实分析、复分析、泛函分析、微分流形.....	4
3 精读书籍	4
3.1 (Baby) Rudin (美)	4
3.2 Zorich (俄)	5
3.3 Amann-Escher (德): Analysis	5
3.4 Godement (法): Analysis	5
3.5 陈天权 (中): 数学分析讲义	5
4 参考书籍 (国外)	6
4.1 Terrence Tao (美): 陶哲轩实分析	6
4.2 Apostol (美): Mathematical Analysis	6
4.3 阿黑波夫、萨多夫尼奇、丘巴里阔夫 (俄): 数学分析讲义	6
4.4 菲赫金哥尔茨 (俄): 微积分学教材	7
4.5 吉米多维奇 (俄): 数学分析习题集	7
4.6 Biler, Witkowski (俄): Problems in Mathematical Analysis	7
4.7 Stein, Shakarchi (美): Princeton Lectures in Analysis	7
4.8 Munkres(or Spivak) (美): Analysis(or Calculus) on Manifolds	8
4.9 Duistermaat, Kolk (荷): Multidimensional Real Analysis	8
5 参考书籍 (国内)	8
5.1 张筑生: 数学分析新讲	8
5.2 王昆扬: 数学分析简明教程	8
5.3 郇中丹、刘永平、王昆扬: 简明数学分析	9

5.4 梅加强：数学分析	9
5.5 常庚哲、史济怀：数学分析教程	9
5.6 徐森林、薛春华：数学分析	9
5.7 谢惠民、恽自求、易法槐、钱定边：数学分析习题课讲义	10

1 一般原则

1.1 为什么要选书？

数学教材怎么写是一个教育学问题，而教育学属于社会科学，社会科学不存在标准答案。一本好的数学分析教材反映的是作者对数学分析乃至整个现代数学的认识，这种认识因人而异。从读者角度来说，人和人的成长经历不同，对教学方式的偏好也不同。

- 有的人只看Bourbaki的书就能学会数学，有的人思考任何问题都需要在黑板上画一个图。

所以，学习数学分析一定要选择适合自己的书。

1.2 选一本就够了吗？

作者写书是要将其数学观念全都写到书里，读者读书则是要建立属于自己的数学观念。就算读者选到一本最适合他的教材，作者的观念也未必完全符合读者的观念。所以，只看一本书是不够的，要看很多本才能达到能够凭此建立观念的程度。

但是另一方面，时间有限，不可能把很多书都看完。因此需要以一本为主，对其精读，然后以其他书做参考才是合理的做法。

所以真正的问题是：哪一本书是适合精读的，哪些书适合做参考？

1.3 选国内的还是选国外的？

外国有很多，这里我们所说的国外仅指发达国家，而把中国这个发展中国家跟所有发达国家的总和去比较是不公平的。国外当然也有不那么好的教材，只是它们不会被引进到中国，所以我们看不到。

中国最好的一批数学分析教材的平均水平的确略逊于国外最好的几套数学分析教材。但国内教材的好处是微积分和数学分析一起学，和高中知识衔接较好。而国外数学分析教材往往只讲数学分析不讲微积分，因为国外学生在高中学过了微积分。所以，国内的学生选择外国教材的话，一定要自己补充微积分知识，比如微积分的运算技巧。

1.4 选经典的还是选新出的？

经典之所以成为经典就是因为它们真的很经典。

1. Whittaker-Watson, *A Course of Modern Analysis* (1902)
2. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis* (1904)

新书有新书的好处：定义更合理、结论更强、证明更简单、观点更现代。新书也更容易买到（或者更容易获取电子版）。作者仍在世的书会不断更新，书中的各种错误会得到修正。而且，读者的水平也比以前的时代提高了。

所以，所以，最好还是选择能跟上时代发展的新书作为精读的备选。

2 好书的看点

2.1 实数的定义

实数理论是数学分析的基础，好的数学分析书必须要讲清楚什么叫实数。

实数的几种定义方法：

1. 无穷小数法

优点：直观、易于证明完备性

缺点：不易定义四则运算、与实数不是一一对应的

2. Dedekind分割法

优点：可以证明各种性质（包括四则运算、完备性等）

缺点：不够直观、证明过程比较冗长

3. Cantor/Cauchy基本列法

优点：可以证明各种性质（包括四则运算、完备性等）

缺点：需要先讲数列极限、需要等价关系和商集的知识

4. 公理法

优点：不必谈论具体构造，直接从公理出发

缺点：公理系统的相容性依赖于前三种构造

（实数公理系统的相容性依赖于集合论公理系统的相容性，而后者从Goedel定理可知是无法解决的）

四种方法各有优劣，但都是很好的方法，最重要的是看教材是否能讲清楚它们。

2.2 微积分基本定理

微积分基本定理是数学分析I的终极目标。

入门版： $F(x)$ 连续可导、 $f(x)$ 是其导数。

标准版： $F(x)$ 可导、 $f(x)$ Riemann可积、 $f(x) = F'(x)$

- 存在的问题：一个函数的导数也不一定Riemann可积、Riemann可积的函数不一定是某函数的导数

推广的版本：

- $F(x)$ 可导、 $f(x)$ Riemann可积、 $f(x) = F'(x)$ 可以在有限多个点处不成立
- $F(x)$ 可导、 $f(x)$ Riemann可积、 $f(x) = F'(x)$ 可以在可数多个点处不成立
- $F(x)$ Lipschitz连续、 $f(x)$ Riemann可积、 $f(x) = F'(x)$ 几乎处处成立
- $F(x)$ 绝对连续、 $f(x)$ 是其几乎处处导数（Lebesgue积分版）

2.3 隐函数定理

隐函数定理的各种推论对于理解流形的概念非常重要，而流形的概念是条件极值、曲面积分等后续内容的基础。

常见证明方法：

1. 消元法

优点：传统方法、思路清晰、易于理解

缺点：证明过程繁琐，无法推广到无穷维空间

2. 极值法

优点：证明过程简洁

缺点：技巧性较强，只适用于欧氏空间

3. 不动点法

优点：现代方法、证明过程简介、可推广到Banach空间

缺点：需要度量空间、压缩映照原理等准备知识

2.4 重积分换元法

重积分换元法是整个数学分析中最难的一个定理，但很多常见的数学分析教材对这个定理的处理都是不严格的。

常见证明方法：

1. 最简微分同胚法

优点：传统方法

优点：需要微分同胚和单位分解的知识

2. Schwartz法(1954)

优点：现代方法、易于Lebesgue积分对接

缺点：需要无穷范数和相应的有限增量定理

3. Lax法

优点：后现代方法、证明过程简洁

缺点：对区域边界要求较高、需要先讲曲面积分

2.5 如何在数学分析中讲拓扑、实分析、复分析、泛函分析、微分流形.....

数学分析中的很多定理其实是拓扑、泛函中某些更加一般的定理在欧氏空间中的特殊情况，暂时忘掉欧氏空间中那些不相关的结构、只保留最必要的结构反而可以使定理得到简化，让证明思路更加清晰。

另一方面，数学分析中的很多结果如果不引入更高级的知识的话是讲不清楚的

1. 有理函数的不定积分依赖代数基本定理、代数基本定理依赖复分析

2. 积分学中的很多结果在实分析中有更优美的形式

3. Green公式、Gauss公式和Stokes公式都是流形上的一般Stokes公式的特例

讲高级知识还是初级知识都只是一种讲授的途径，主要看的还是到底怎么讲这些知识。

数学分析中高级知识的各种讲法：

× 我觉得这东西很牛逼、很流行、很现代，所以要讲给你们听

✓ 我觉得这东西对理解数学分析很有帮助，所以要讲给你们听

× 我把高级知识课本里的定义、定理堆在这儿，你们就应该能看懂了

✓ 我结合数学分析的具体问题，把高级知识改造成更容易理解的形式

3 精读书籍

以下均代表作者本人观点及品味。书的内容普遍偏难，可以自己寻找更适合更简单的。

3.1 (Baby) Rudin (美)

- 实数定义：Dedekind分割
- 微积分基本定理：标准版
- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：最简微分同胚法
- 高级内容：

- 1. 度量空间
- 2. 微分形式的Stokes公式（不太好）
- 3. Lebesgue积分（不太好）
- 其他特色：清晰简明，可能过于简明；习题比较多

3.2 Zorich（俄）

- 实数定义：公理法
- 微积分基本定理：有限例外点
- 隐函数定理：消元法（第一册）+不动点法（第二册）
- 重积分换元法：最简微分同胚法（附Schwartz法）
- 高级内容：
 1. 度量空间的拓扑学
 2. 赋范空间的微分学
 3. 一般流形上的积分学
- 其他特色：非常传统（俄式）、重视物理应用

3.3 Amann-Escher（德）：Analysis

- 实数定义：Dedekind分割+Cantor基本列（漂亮，涉及抽代，不友好）
- 微积分基本定理：极简法+Lebesgue积分
- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法（Lebesgue积分）
- 高级内容：所有你能想到的都讲了.....
- 其他特色：
 1. 完全的现代观点、对传统内容交代不足
 2. 内容过于丰富、不要奢望完全掌握
 3. 适合自学（至少作者是这么希望的）

3.4 Godement（法）：Analysis

- 实数定义：Dedekind分割（极简）+公理法（有思路，友好）
- 微积分基本定理：标准版+可数例外点
- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法（有调和分析）
- 高级内容：你甚至能学到模形式
- 其他特色：
 1. 非常话痨、经常跑题、注重传统
 2. 内容过于丰富、不要奢望完全掌握
 3. 法式章节顺序（多一种讲法，多一种证法，多一种理解）

3.5 陈天权（中）：数学分析讲义

- 实数定义：公理法（附Dedekind分割）
- 微积分基本定理：标准版+可数例外点

- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法（Lebesgue法）
- 高级内容：比Goldment只少了模形式
- 其他特色：
 1. 补充教材、笔记和参考文献极具价值
 2. 习题极好，但是可能做不完
 3. 部分内容与其他教材有改动地雷同
 4. 文本比较粗糙，较难理解

4 参考书籍（国外）

4.1 Terrence Tao（美）：陶哲轩实分析

- 此书的章节安排和选材与Baby Rudin类似，可视为对Baby Rudin 的补充
- 缺少重积分换元法、流形上的积分等重要内容，所以只能做参考
- 第5章用Cantor基本列法定义实数是其它书中少见的讲法，最具参考价值
- 陶哲轩的文风轻松亲切，不像Rudin那么冷峻，对很多东西背后的思想解释得比较到位
- 中译本质量很高，而且译者力图还原了原文轻松亲切的口语化文风

4.2 Apostol（美）:Mathematical Analysis

这是一本在各种意义上都和Baby Rudin互补的书：

1. Baby Rudin的三个版本出版于1953年、1964年和1976年，此书两个版本出版于1957年和1974年
2. 两者都讲了Riemann-Stieltjes积分
3. Baby Rudin的隐函数定理用的不动点法，此书用的极值法
4. Baby Rudin的重积分换元用的最简微分同胚法，此书用的Schwartz法
5. 对Lebesgue积分的处理，Baby Rudin用的是测度论讲法，此书用的是泛函讲法
6. 此书包含一些Big Rudin的内容如（Fourier分析和复分析），但是完全没讲流形上的积分
7. Baby Rudin语言简练，此书有些话痨（这是好事）
8. Baby Rudin的习题比较难，此书习题较容易

4.3 阿黑波夫、萨多夫尼奇、丘巴里阔夫（俄）：数学分析讲义

- 这是一本比较新的教材，初版出版于1999年，最新版出版于2004年，中译本出版于2006年
- 它的实数理论部分讲的很糟糕，其它看点也乏善可陈
- 但是它包含很多别的书里没有的现代或古典内容，比如：
 1. 滤子基上累次极限存在且相等的条件(1995)（强于卓里奇的结果）
 2. 复合函数高阶导数的Faà di Bruno公式（陈天权的习题）
 3. Lagrange反演公式
 4. Kepler问题和Bessel级数
 5. 无穷行列式的Poincare定理

4.4 菲赫金哥尔茨（俄）：微积分学教材

之前我们说过，国外的数学分析教材往往缺乏微积分的内容，菲赫金哥尔茨的这套书正好补足这个缺陷

这套书包含有非常丰富的例题，如：

1. 椭圆积分的处理方法
2. e 的超越性的证明
3. 各种稀奇古怪的积分和级数的计算
4. Lagrange反演公式
5. Kepler问题和Bessel级数

最后的附录还讨论了Moore-Smith的“网”的概念以及基于此的一般极限理论，这是滤子基方法之前的一种极限理论。

4.5 吉米多维奇（俄）：数学分析习题集

此书市面上有多种版本，但是我只推荐高教社俄选的这版。

这一版的序言很有意思：

和许多数学家一样，我也曾两次使用这部广为流传的著作：首先是别人教我数学分析的时候，然后是我自己教别人数学分析的时候。在B.P.吉米多维奇的习题集筹备再版之际，我深感欣喜，并以特别感激的心情应其子V.B.吉米多维奇之邀为本版作序。

序言的作者是卓里奇，所以精读卓里奇的《数学分析》时，建议以吉米多维奇作为参考。卓里奇上习题一般偏难，而且不强调计算，因此要用吉米多维奇来补充。

做题的目的，一个是为了检查自己是否学懂了，另一个是锻炼计算能力，把计算变成本能一样的东西。我们要把计算培养一种肌肉记忆一样的东西，不应认为它是一个难题或是障碍，而是非常自然的东西。我们要计算得非常熟练、非常快，以达到一种程度：我们在计算见过的题时只是在通过计算回忆出自己曾算出过的结果。在后续学习中难以理解一个事物时，可以通过大量的计算相关例子以培养出经验和直觉。

最后，别看题解，做错了就记下题号，过几天再做。

4.6 Biler, Witkowski（俄）：Problems in Mathematical Analysis

题目超难：如果吉米多维奇不能满足你，那么可以试试这本。

我只会做第一题：

1.1 Show that an irrational power of an irrational number can be rational.

第二题是这样的

1.2 Prove that if $c > 8/3$, then there exists a real number θ such that $\lfloor \theta^{c^n} \rfloor$ is prime for every positive integer n .

像这样的变态题目后面还有1333道。

喜报：这本书的后半本是答案。（强烈不推荐大家刷）

4.7 Stein, Shakarchi（美）：Princeton Lectures in Analysis

书是好书，但是当教科书好像差点意思，当参考书正好。

- 第一本《Fourier Analysis》可以作为Baby Rudin的后续，或者直接取代卓里奇的第十八章。
- 第二本《Complex Analysis》对几何观点讲得不够，建议参考Ahlfors或者Kodaira的复分析。

- 第三本某些定理的处理方法比较初等，学数学分析的话可以借鉴，比如Lebesgue微分定理是用Riesz的日出引理证的，不需要Vitali覆盖（陈天权的习题）。
- 书里的练习和问题都很不错，建议多做做。
- 作者的写作动机是想凸显分析的整体性，以使四大分析内容相互穿插，不适合单独使用某一本作为教材。但实际上却导致四本书的内容安排有些凌乱，读者总是找不到想找的主题。

4.8 Munkres(or Spivak) (美) : Analysis(or Calculus) on Manifolds

Baby Rudin对流形上的微积分处理得不够充分，这两本书可作为其后续。

Spivak的书写于1965年，非常薄，证明简捷、图示清晰，但是错误很多，有的还很严重，不建议初学者读。Munkres的书写于1991年，很厚，证明详细（有的甚至可以说冗长），读着有点累，但是好在都是对的。

可以先看Munkres把东西学会，然后再看Spivak看看能不能挑出错。

4.9 Duistermaat,Kolk (荷) : Multidimensional Real Analysis

这是流形上的微积分的高级版，一般作为研究生教材。

- 第一册讲微分学，重点是隐函数、流形和切空间的几何。
- 第二册讲积分学，给了重积分换元法的三种证明，正确地区分了对密度的第一型积分和对微分形式的第二型积分。
- 这两本书的结构非常奇特，前半本全是定理、后半本全是习题，而且习题超多，对于培养几何的感觉非常有好处。

5 参考书籍（国内）

5.1 张筑生：数学分析新讲

- 实数定义：无穷小数法（Dedekind风格）
- 微积分基本定理：入门版
- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法+最简微分同胚法（没用单位分解）
- 高级内容：非常有限
- 其他特色：
 1. 对于传统内容的讲解极为出色
 2. 没有习题，这是一个重大缺陷

5.2 王昆扬：数学分析简明教程

- 实数定义：无穷小数法（Cantor风格）
- 微积分基本定理：标准版
- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法
- 高级内容：测度论（尤其是曲线和曲面上的测度）
- 其他特色：
 1. 一维和多维混在一起讲，难度忽上忽下
 2. 有理数、无理数译成比例数、非比例数

3. 不能讲授一般流形上的第二型积分

5.3 郇中丹、刘永平、王昆扬：简明数学分析

- 实数定义：无穷小数法（Dedekind风格）
- 微积分基本定理：标准版
- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法（Lebesgue积分）
- 高级内容：滤子基和Lebesgue积分
- 其他特色：
 1. 完全匹配阿黑波夫的书的教程，但某些地方写得更好。可与阿黑波夫等人的书课对比着读。
 2. 并没有充分发挥滤子集的作用
 3. 有Faà di Bruno公式，但证明“细节留做习题”

5.4 梅加强：数学分析

- 实数定义：Dedekind分割
- 微积分基本定理：标准版（定积分换元法加强）
- 隐函数定理：不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法（绕过无穷范数）
- 高级内容：
 1. 余面积公式
 2. Riemann-Stieltjes积分
 3. 微分形式的Stokes公式
- 其他特色：在连续函数的最后，一致连续性部分讲了定积分的定义和性质，应用了一致连续性

5.5 常庚哲、史济怀：数学分析教程

- 实数定义：错的
- 微积分基本定理：入门版
- 隐函数定理：消元法
- 重积分换元法：错的
- 高级内容：无
- 其他特色：
 1. 这是何琛、史济怀、徐森林的《数学分析》的不成器的后代，后面徐森林、薛春华的也是。
 2. 此书唯一的亮点是练习题和问题不错，很多题目其实来自华罗庚
 3. 网上有视频教程，可以看

5.6 徐森林、薛春华：数学分析

- 实数定义：四种全讲了，但是都有问题
- 微积分基本定理：入门版+有限例外点
- 隐函数定理：消元法+不动点法
- 重积分换元法：Schwartz法（反证无穷范数）
- 高级内容：堆砌了一些点集拓扑的东西

- 其他特色:

1. 逻辑混乱, 有大量冗余内容, 从复杂到简单 (不要按顺序学)
2. 有配套的习题解答 (这是缺点)
3. 常庚哲、史济怀中的问题做不出来可以在这里找答案

5.7 谢惠民、恽自求、易法槐、钱定边: 数学分析习题课讲义

- 这才是真正的数学分析习题集, 吉米多维奇只能叫微积分习题集
- 这套书中有很多其它书中没有的有趣的结果
- 很多问题都带美国数学月刊之类的参考文献
- 如果参考题实在做不出来, 书后有提示
- 与动力系统相关的东西可以不看
- 不要只做题, 正文中的各种讨论更有价值