вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
O.I.1					
Име:					

Устен изпит по логическо програмиране
29 януари 2022 год.

Зад. 1. а) Какво означава едно множество от съждителни формули да е изпълнимо? Вярно ли е, че ако Γ_1 и Γ_2 са изпълними, то и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ е изпълнимо?
б) Нека $\Gamma \cup \{\psi\}$ е множество от съждителни формули. Да се докаже, че $\Gamma \models \psi$ точно тогава, когато $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ е неизпълнимо.
в) Да се опише алгоритъм, който по дадено крайно множество от съждителни формули Γ разпознава дали то е изпълнимо.

Зад. 2. Нека S е множество от дизюнкти, а D е дизюнкт.
а) Какво е *резолютивен извод от* S? Какво означава $S \stackrel{r}{\vdash} D$?
б) Нека $S \stackrel{r}{\vdash} D$. Докажете, че има такова крайно подмножество S_0 на S, че $S_0 \stackrel{r}{\vdash} D$.

Зад. 3. Нека S е множество от съждителни дизюнкти, което е затворено относно правилото за резолюцията и не съдържа празния дизюнкт. Да се докаже, че S има булев модел.

Зад. 4. а) Да се дефинира понятието *хорнов дизюнкт*. Да се докаже, че множеството от хорновите дизюнкти е затворено относно правилото за резолюцията.
б) Нека Σ е множество от непразни хорнови дизюнкти. Да се докаже, че ако Σ е неизпълнимо, то поне един факт принадлежи на Σ.

Пожелаваме ви приятна и успешна работа!

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
O.I.2					
Име:					

Устен изпит по логическо програмиране
29 януари 2022 год.

Зад. 1. а) Нека $\Gamma \cup \{\psi\}$ е множество от съждителни формули. Какво означава $\Gamma \models \psi$? Вярно ли, че ако $\Gamma \models \varphi \vee \psi$, то $\Gamma \models \varphi$ или $\Gamma \models \psi$?
б) Да се докаже, че за всяка съждителна формула φ е в сила $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$ точно тогава, когато $\Gamma, \varphi \models \psi$.
в) Да се опише алгоритъм, който по дадено крайно множество от съждителни формули Γ разпознава дали то е неизпълнимо.

Зад. 2. а) Какво означава *дизюнктът D е резолвента на дизюнктите D_1 и D_2*?
б) Нека дизюнктът D е резолвента на дизюнктите D_1 и D_2, а I е булева интерпретация. Да се докаже, че:
$$I \models \{D_1, D_2\} \longleftrightarrow I \models \{D_1, D_2, D\}.$$

Зад. 3. Нека A е фамилия от множества.
а) Какво е *трансверзала за* A? Какво е *минимална трансверзала за* A?
б) Да се докаже, че една трансверзала Y за A е минимална трансв. за A точно тогава, когато $(\forall y \in Y)(\exists x \in A)(Y \cap x = \{y\})$.

Зад. 4. а) Да се дефинира понятието *хорнов дизюнкт*. Да се докаже, че множеството от хорновите дизюнкти е затворено относно правилото за резолюцията.
б) Нека Σ е множество от непразни хорнови дизюнкти. Да се докаже, че ако Σ е неизпълнимо, то поне една цел принадлежи на Σ.

Пожелаваме ви приятна и успешна работа!

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
O.II.1					
Име:					

Устен изпит по логическо програмиране
29 януари 2022 год.

Избирате 3 от следващите 4 задачи!

Зад. 5. а) Дефинирайте понятията *свързано участие* и *свободно участие* на индивидна променлива в предикатна формула.
б) Нека $\mathcal{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$. Да се докаже, че за всяка формула φ от $\mathcal{L}$ всеки път, когато v и w са оценки в $\mathcal{A}$ и за всяка свободна променлива x на φ е в сила $v(x) = w(x)$, то $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[w]$.
в) Нека $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$, Γ е множество от формули от $\mathcal{L}$ и x е индивидна променлива, която няма свободни участия във формулите от Γ. Да се докаже, че ако $\Gamma \models \psi$, то $\Gamma \models \forall x \psi$.

Зад. 6. Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език от първи ред, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$.

а) Какво означава h *е изоморфно влагане на* $\mathcal{A}$ *в* $\mathcal{B}$?

б) Нека h е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Нека φ е безкванторна формула от $\mathcal{L}$ и $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$. Да се докаже, че за произволни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ от универсума на $\mathcal{A}$ е в сила еквивалентността:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \quad\longleftrightarrow\quad \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!].$$

Зад. 7. Нека φ е предикатна формула, а x и y са индивидни променливи. Да се докаже, че ако y няма свободни участия във φ и свободните участия на x във φ не са в област на действие на квантор по y, то $\forall x \varphi$ и $\forall y \varphi[x/y]$ са логически еквивалентни.

Зад. 8. Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане без формално равенство и $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$.
а) Какво означава $\mathcal{A}$ *е ербранова структура за* $\mathcal{L}$? Ако $\mathcal{A}$ е ербранова структура за $\mathcal{L}$ и τ е затворен терм, да се намери $\tau^{\mathcal{A}}$.
б) Нека Δ е множество от затворени безкванторни формули от $\mathcal{L}$. Да се докаже, че следните са еквивалентни:

(1) Δ няма модел;

(2) Δ няма ербранов модел;

(3) има крайно подмножество на Δ, което е булево неизпълнимо.

Пожелаваме ви приятна и успешна работа!

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
O.II.2					
Име:					

Устен изпит по логическо програмиране
29 януари 2022 год.

Избирате 3 от следващите 4 задачи!

Зад. 5. а) Какво означава *замяната на свободните участия на* x *с* $\varkappa$ *във* φ *е допустима*?
б) Нека $\mathcal{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$, x е индивидна променлива, а $\varkappa$ е терм от $\mathcal{L}$. Нека φ е формула от $\mathcal{L}$ и замяната на свободните участия на x с $\varkappa$ във φ е допустима. Да се докаже, че всеки път, когато v и w са оценки, удовлетворяващи условията:

$v(x) = \varkappa^{\mathcal{A}}[w]$ и

$v(y) = w(y)$ за всяка променлива $y \in \mathrm{Var}^{\mathrm{free}}[\varphi] \setminus \{x\}$,

е в сила равенството $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi[x/\varkappa]\|^{\mathcal{A}}[w]$.
в) Да се докаже, че ако замяната на свободните участия на x с $\varkappa$ във φ е допустима, то $\models \forall x \varphi \Rightarrow \varphi[x/\varkappa]$.

Зад. 6. Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език от първи ред, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$.

а) Какво означава h *е изоморфизъм на* $\mathcal{A}$ *върху* $\mathcal{B}$?

б) Нека h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$. Нека φ е формула от $\mathcal{L}$. Да се докаже, че ако $\varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, то за произволни $a_1, \ldots, a_n$ от универсума на $\mathcal{A}$ е в сила:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, a_2, \ldots, a_n]\!] \quad\longleftrightarrow\quad \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)]\!].$$

Зад. 7. Нека φ е предикатна формула, а x и y са индивидни променливи. Да се докаже, че ако x няма свободни участия във φ и свободните участия на y във φ не са в област на действие на квантор по x, то $\exists y \varphi$ и $\exists x \varphi[y/x]$ са логически еквивалентни.

Зад. 8. Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане без формално равенство и $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$.
а) Нека $\mathcal{H}$ е ербранова структура за $\mathcal{L}$ и v е оценка в $\mathcal{H}$. Да се докаже, че за всеки терм τ, ако $\tau[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, то $\tau^{\mathcal{H}}[v]$ е $\tau[x_1/v(x_1), x_2/v(x_2), \ldots, x_n/v(x_n)]$.
б) Нека Γ е множество от затворени безкванторни формули от $\mathcal{L}$. Да се докаже, че следните са еквивалентни:

(1) Γ има модел;

(2) Γ има ербранов модел;

(3) всяко крайно подмножество на Γ е булево изпълнимо.

Пожелаваме ви приятна и успешна работа!