Решения на задачите от контролно 1 по Логическо програмиране

23 март 2019

1 Определелимост

Нека $\mathcal{A}$ е структура с универсиум естествените числа и е за език без символи за константи и функционални символи и единствен предикатен символ p, който е двуместен и се интерпретира така:

Вариант 1

За всеки два елемента n и m на $\mathbb{N}$:

$$p^{\mathcal{A}}(n,m) \iff m - n > 2$$

(i) Определете равенство $\{\langle n,m\rangle \mid n = m\}$

(ii) Определете множествата $\{0\}$ и $\{1\}$

(iii) Да се докаже, че всяко множество от вида $\{n\}$ е определимо.

Вариант 2

За всеки два елемента n и m на $\mathbb{N}$:

$$p^{\mathcal{A}}(n,m) \iff m \leq 3 + n$$

(i) Определете равенство $\{\langle n,m\rangle \mid n = m\}$

(ii) Определете множествата $\{0\}$ и $\{1\}$

(iii) Да се докаже, че всяко множество от вида $\{n\}$ е определимо.

Примерно решение на вариант 1

$\varphi_=(x,y) \rightleftharpoons \forall z(p(z,x) \Leftrightarrow p(z,y))$.
$\varphi_{\{0,1,2\}}(x) \rightleftharpoons \neg\exists y p(x,y)$.
$\varphi_{\langle 0,3\rangle}(x,y) \rightleftharpoons \varphi_{\{0,1,2\}}(x) \& p(y,x) \& \forall z(\varphi_{\{0,1,2\}}(z) \& \neg\varphi_=(x,z) \implies \neg p(y,z))$.
$\varphi_0(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 0,3\rangle}(x,y)$.
$\varphi_3(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 0,3\rangle}(y,x)$.
$\varphi_{\langle 1,4\rangle}(x,y) \rightleftharpoons \varphi_{\{0,1,2\}}(x) \& \neg\varphi_0(x) \& p(y,x) \&$
$\quad \forall z(\varphi_{\{0,1,2\}}(z) \& \neg\varphi_0(z) \& \neg\varphi_=(x,z) \implies \neg p(y,z))$.
$\varphi_1(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 1,4\rangle}(x,y)$.
$\varphi_4(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 1,4\rangle}(y,x)$.
$\varphi_2(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_{\{0,1,2\}}(x) \& \varphi_0(x) \& \varphi_1(x)$.

За да докажем, че за $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$ е изпълнимо, ще използваме пълна математическа индукция.
База: $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$.
Индукционна хипотеза: Нека за $m < n$, $\{m\}$ е определима с формула φ_m.
Индукционна стъпка: $\varphi_n(x) \rightleftharpoons \exists y \exists z(\varphi_{n-3}(y) \& \varphi_{n-2}(z) \& p(y,x) \& \neg p(y,z))$.

Примерно решение на вариант 2

$\varphi_=(x,y) \rightleftharpoons \forall z(p(z,x) \Leftrightarrow p(z,y))$.
$\varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \rightleftharpoons \neg\exists\neg y p(x,y)$.
$\varphi_{\langle 0,4\rangle}(x,y) \rightleftharpoons \varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \neg p(y,x) \& \forall z(\varphi_{\{0,1,2,3\}}(z) \& \neg\varphi_=(x,z) \implies p(y,z))$.
$\varphi_0(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 0,4\rangle}(x,y)$.
$\varphi_4(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 0,4\rangle}(y,x)$.
$\varphi_{\langle 1,5\rangle}(x,y) \rightleftharpoons \varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \neg\varphi_0(x) \& \neg p(y,x) \&$
$\quad \forall z(\varphi_{\{0,1,2,3\}}(z) \& \neg\varphi_0(z) \& \neg\varphi_=(x,z) \implies p(y,z))$.
$\varphi_1(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 1,5\rangle}(x,y)$.
$\varphi_5(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 1,5\rangle}(y,x)$.
$\varphi_{\langle 2,6\rangle}(x,y) \rightleftharpoons \varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \neg\varphi_0(x) \& \neg\varphi_1(x) \& \neg p(y,x) \&$
$\quad \forall z(\varphi_{\{0,1,2,3\}}(z) \& \neg\varphi_0(z) \& \neg\varphi_1(z) \& \neg\varphi_=(x,z) \implies p(y,z))$.
$\varphi_2(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 2,6\rangle}(x,y)$.
$\varphi_6(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi_{\langle 2,6\rangle}(y,x)$.
$\varphi_3(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \varphi_0(x) \& \varphi_1(x) \& \varphi_2(x)$.

За да докажем, че за $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$ е изпълнимо, ще използваме пълна математическа индукция.
База: $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$.
Индукционна хипотеза: Нека за $m < n$, $\{m\}$ е определима с формула φ_m.
Индукционна стъпка: $\varphi_n(x) \rightleftharpoons \exists y \exists z(\varphi_{n-3}(y) \& \varphi_{n-2}(z) \& \neg p(y,x) \& p(y,z))$.

Още едно примерно решение

$\varphi_=(x,y) \rightleftharpoons \forall z(p(z,x) \Leftrightarrow p(z,y))$.
$\varphi_\leq(x,y) \rightleftharpoons \forall z(p(z,x) \implies p(z,y))$.
$\varphi_<(x,y) \rightleftharpoons \varphi_\leq(x,y) \& \neg\varphi_=(x,y)$.
$\varphi_0(x) \rightleftharpoons \forall y \varphi_\leq(x,y)$.
$\varphi_1(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_0(x) \& \forall y(\varphi_<(y,x) \implies \varphi_0(y))$.
$\varphi_2(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_0(x) \& \neg\varphi_1(x) \& \forall y(\varphi_<(y,x) \implies (\varphi_0(y) \vee \varphi_1(y)))$.

За да докажем, че за $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$ е изпълнимо, ще използваме пълна математическа индукция.
База: $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$.
Индукционна хипотеза: Нека за $m < n$, $\{m\}$ е определима с формула φ_m.
Индукционна стъпка: $\varphi_n(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_0(x) \& \neg\varphi_1(x) \& \; ... \; \neg\varphi_{n-1}(x)$
$\& \forall y(\varphi_<(y,x) \implies (\varphi_0(y) \vee \varphi_1(y) \& \; ... \; \neg\varphi_{n-1}(y)))$.

2 Изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

Вариант 1

$\forall x \forall y \forall z (f(f(x, y), z) \doteq f(x, f(y, z)))$
$\exists x \forall y ((f(x, y) \doteq y) \,\&\, (f(y, x) \doteq y))$
$\forall x (f(f(x, x), x) \doteq x)$
$\exists x \neg (f(x, x) \doteq x)$

Вариант 2

$\forall x \forall y \forall z (f(f(x, y), z) \doteq f(x, f(y, z)))$
$\exists x \forall y ((f(x, y) \doteq y) \,\&\, (f(y, x) \doteq y))$
$\forall x (f(x, x) \doteq x)$
$\exists x \exists y \neg (x \doteq y)$

Примерни решения на вариант 1

$$S = (\{0, 1\}, f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons x \ xor \ y, \ \ x, y \in \{0, 1\}$$

$$S = (\{0, 1\}, f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons x + y \ mod \ 2, \ \ x, y \in \{0, 1\}$$

$$S = (\{-1, 1\}, f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons x * y, \ \ x, y \in \{-1, 1\}$$

Примерни решения на вариант 2

$$S = (\mathbb{N}, f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons max(x, y), \ \ x, y \in \mathbb{N}$$

$$S = (\{0, 1\}, f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons min(x, y), \ \ x, y \in \{0, 1\}$$

$$S = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons x \cup y, \ \ x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$S = (\{0, 1\}, f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons x \vee y, \ \ x, y \in \{0, 1\}$$

$$S = (\{0, 1\}, f^S)$$
$$f^S(x, y) \rightleftharpoons x \& y, \ \ x, y \in \{0, 1\}$$