Решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране

30 юни 2019

Съдържание

1 Първа задача на пролог

Нека за всяко положително число i с $\xi(i)$ и с $\eta(i)$ означим съответно броя на простите числа от вида $6k+1$ и $6k+5$, които са по-малки от i.
Да се дефинират на пролог едноместни предикати $su(X)$ и $mu(X)$, които по дадено цяло число X разпознават дали за някое положително цяло число i е в сила равенството $X = i + \xi(i)$ за $su(X)$ и $X = i - \eta(i)$ за $mu(X)$.

1.1 Общи предикати

```
isPrime(P) :-
    not(P=<1),
    P1 is P div 2,
    not(( between(2, P1, Try),
          not(P mod Try=\=0)
        )).

between(A, B, A) :-
    A=<B.
between(A, B, C) :-
    A<B,
    A1 is A+1,
    between(A1, B, C).
```

1.2 Примерно решение на I.1

```
count(K, I, 0) :-
    PK is 6*K+1,
    PK>=I.
count(K, I, N) :-
    PK is 6*K+1,
    PK<I,
    isPrime(PK),
    K1 is K+1,
    count(K1, I, M),
    N is M+1.
```

```
count(K, I, N) :-
    PK is 6*K+1,
    PK<I,
    not(isPrime(PK)),
    K1 is K+1,
    count(K1, I, N).

su(X) :-
    between(0, X, I),
    count(2, I, XiI),
    X=:=I+XiI.
```

1.3 Примерно решение на I.2

```
count(K, I, 0) :-
    PK is 6*K+5,
    PK>=I.
count(K, I, N) :-
    PK is 6*K+5,
    PK<I,
    isPrime(PK),
    K1 is K+1,
    count(K1, I, M),
    N is M+1.
count(K, I, N) :-
    PK is 6*K+5,
    PK<I,
    not(isPrime(PK)),
    K1 is K+1,
    count(K1, I, N).

mu(X) :-
    XX is X*X,
    between(X, XX, I),
    count(2, I, EtaI),
    X=:=I-EtaI.
```

2 Втора задача на пролог

G-*списък* ще наричаме списък, всички елементи, на който са двуместни списъци от естествени числа. Нека L е G-*списък*. За всяко естествено число k с $do(L, K)$ да означим броя на онези елементи на L, чийто първи елемент k ,а с $di(L, k)$ да означим броя на онези елемнти от L, чийто втори елемент е k.
Да се дефинират на пролог едноместни предикати $e1g(L)$ и $e2g(L)$, които при преудовлетворяване генерират в L всички G-*списъци*, такива че за всяко естествено число k е в сила неравенството:

$$|do(L, k) - di(L, k)| \leq j, j \in \{1 \rightarrow e1g, 2 \rightarrow e2g\}$$

2.1 Общи предикати

```
nat(0).
nat(N) :-
    nat(M),
    N is M+1.

do([], _, 0).
do([[K, _]|T], K, N) :-
    do(T, K, M),
    N is M+1.
do([[K1, _]|T], K, N) :-
    K1\=K,
    do(T, K, N).

di([], _, 0).
di([[_, K]|T], K, N) :-
    di(T, K, M),
    N is M+1.
di([[_, K1]|T], K, N) :-
    K1\=K,
    di(T, K, N).

pairs(A, B) :-
    nat(N),
```

```
    between(1, N, A),
    B is N-A.

genKS(1, S, [S]).
genKS(K, S, [XI|R]) :-
    K>1,
    K1 is K-1,
    between(0, S, XI),
    S1 is S-XI,
    genKS(K1, S1, R).

generateList(L, S) :-
    pairs(K, S),
    K mod 2=:=0,
    genKS(K, S, L1),
    packTuples(L1, L).

packTuples([], []).
packTuples([Do, Di|T], [[Do, Di]|R]) :-
    packTuples(T, R).
```

2.2 Примерно решение на I.1

```
e1g([]).
e1g(L) :-
    generateList(L, S),
    not(( between(0, S, K),
          not(condition(L, K))
      )).

condition(L, K) :-
    do(L, K, N),
    di(L, K, M),
        abs(N-M)=<1.
```

2.3 Примерно решение на I.2

```
e2g([]).
e2g(L) :-
    generateList(L, S),
    not(( between(0, S, K),
            not(condition(L, K))
        )).

condition(L, K) :-
    do(L, K, N),
    di(L, K, M),
    abs(N-M)=<2.
```

3 Задача за определимост

Сума на две множества от точки в равнината $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ наричаме:

$$A + B = \{(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \,|\, (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B\}.$$

Разглеждаме език $\mathcal{L} = \langle sum; cat \rangle$ с двуместен функционален и двуместен предикатен символ. $S = \langle 2^{\mathbb{R}^2}; sum^S, cat^S \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$ с носител множествата от точки в равнината и интерпретации:

$$\begin{array}{rcl} sum^S(A,B) & = & A + B \\ cat^S(A,B) & \iff & A \cap B \neq \emptyset \\ cut^S(A,B) & \iff & A \cap B = \emptyset. \end{array}$$

$* \; cut^S(A,B) \equiv \neg cat^S(A,B)$

Да се докаже, че в S:

1. равенството на множества от точки е определимо.

2. подмножество на множества от точки е определимо.

3. $\{(0,0)\}$ и $\mathbb{R}^2$ са определими.

4. $single \rightleftharpoons \{\{(a,b)\} | \, a, b \in \mathbb{R}^2\}$, множеството от всички едноточкови множества е определимо.

5. $centerSymmentric \rightleftharpoons \{A \,|\, A \subseteq \mathbb{R}^2, A = \{(-a,-b) \,|\, (a,b) \in A\}\}$ множеството от централно симетрични множества е определимо.

6. Определими ли са множествата $\{(0,1),(0,-1)\}$ или $\{(1,0),(-1,0)\}$? Защо?

7. Кои са автоморфизмите на S? Защо?

3.1 Примерно решение

$\varphi_{\emptyset}(A) \rightleftharpoons \neg\exists C cat(A, C)$.
$\Psi_{\emptyset}(A) \rightleftharpoons \neg cat(A, A)$.
$\varphi_{=}(A, B) \rightleftharpoons \forall C(cat(A, C) \iff cat(B, C))$.
$\varphi_{\subseteq}(A, B) \rightleftharpoons \forall C(cat(A, C) \implies cat(B, C))$.
$\varphi_{(0,0)}(A) \rightleftharpoons \forall C \varphi_{=}(C, sum(A, C))$.
$\varphi_{\mathbb{R}^2}(A) \rightleftharpoons \forall C \varphi_{=}(A, sum(A, C))$.
$\varphi_{single}(A) \rightleftharpoons \forall C(\varphi_{\subseteq}(C, A) \implies (\varphi_{\emptyset}(C) \vee \varphi_{=}(C, A)))$.
$\varphi_{centerSymmentric}(A) \rightleftharpoons \exists B \forall C \exists D(\varphi_{(0,0)}(B) \,\&\, (\varphi_{\subseteq}(C, A) \,\&\, \varphi_{single}(C) \implies (\varphi_{\subseteq}(D, A) \,\&\, \varphi_{single}(D) \,\&\, \varphi_{=}(sum(D, C), B))$.

Нека $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $h((a, b)) = (b, a)$, $(b, a) \in \mathbb{R}^2$.
Лесно се показва, че е биекция и $h = h^{-1}$.
Имаме и $\{h((a_1 + b_1, a_2 + b_2))\} = sum^S(\{h((a_1, a_2))\}, \{h((b_1, b_2))\})$, $(a_1, a_2) \in A$, $(b_1, b_2) \in B$. т.е.
$h((a_1+b_1, a_2+b_2)) = h((a_1, a_2))+h((b_1, b_2)), (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B$.

Нека $H : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ като $H(A) = \{h((a, b)) \,|\, (a, b) \in A\}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $H = H^{-1}$.
Сега дали е изпълнено,че $H(sum^S(A, B)) = sum^S(H(A), H(B))$ и $(A, B) \in cat^S \iff (H(A), H(B)) \in cat^S$?

$$\begin{aligned}
H(sum^S(A, B)) = \\
\{h((c_1, c_2)) \,|\, (c_1, c_2) \in A + B\} = \\
\{h((a_1 + b_1, a_2 + b_2)) \,|\, (a_1, a_2) \in A,\ (b_1, b_2) \in B\} = \\
\{h((a_1 + b_1, a_2 + b_2)) \,|\, (a_1, a_2) \in A,\ (b_1, b_2) \in B\} = \\
\{h((a_1, a_2)) + h((b_1, b_2)) \,|\, (a_1, a_2) \in A,\ (b_1, b_2) \in B\} = \\
\{(a'_1 + b'_1, a'_2 + b'_2) \,|\, (a'_1, a'_2) \in H(A),\ (b'_1, b'_2) \in H(B)\} = \\
sum^S(H(A), H(B)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A, B) \in cat^S \iff A \cap B \neq \emptyset \iff \\
\{(a_1, a_2) \,|\, (a_1, a_2) \in A\} \cap \{(b_1, b_2) \,|\, (b_1, b_2) \in B\} \neq \emptyset \iff \\
\{(a'_1, a'_2) \,|\, (a'_1, a'_2) \in H(A)\} \cap \{(b'_1, b'_2) \,|\, (b'_1, b'_2) \in H(B)\} \neq \emptyset \iff \\
H(A) \cap H(B) \neq \emptyset \iff (H(A), H(B)) \in cat^S.
\end{aligned}$$

Кои са всички автоморфизми на $\mathcal{S}$?

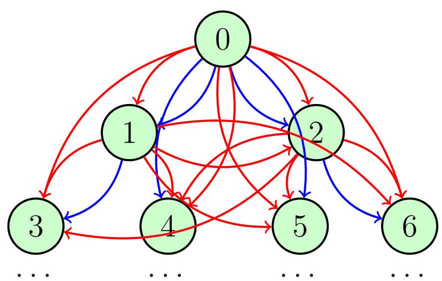
1. Ротации.
2. Осева симетрия.
3. Въртяща хомотетия с център (0,0).

4 Задача за изпълнимост

Нека $\mathcal{L}$ е език с едноместен функционален символ h (f), двуместен предикатен символ p и формално равенство. Изпълнимо ли е множеството от формули над езика $\mathcal{L}$:

$$\begin{array}{rcl} \forall x \exists y \exists z (y \neq z \& q(x,z) & \& & q(x,y)) \\ \forall x \forall z ([q(x,z) \Rightarrow p(x,z)] & \& & p(x,z) \Rightarrow \neg p(z,x)) \\ \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \& p(y,z) & \Rightarrow & p(x,z)) \\ \forall x \forall y (h(x) = h(y) & \Rightarrow & \neg q(x,y)) \\ \forall x \exists y (h(x) = h(y) & \& & p(x,y))? \end{array}$$

4.1 Примерно решение



$$S = (\mathbb{N}, p^S, q^S, h^S)$$
$$h^S(node) = node\,(mod 3), node \in \mathbb{N}$$
$$q^S \rightleftharpoons \{(node_1, node_2)\,|\,node_1 \in \mathbb{N} \,\&\, node_2 \in \mathbb{N} \,\&$$
$$node_1 < node_2 \,\&\, node(mod 3) \neq node_2(mod 3)\}$$

ребра от изходен връх node с $h^S(node)$ до върхове на следващи нива с четности спрямо h^S : $\{0, 1, 2\} \setminus \{h^S(node)\}$

$$p^S \rightleftharpoons \{(node_1, node_2)\,|\,node_1 \in \mathbb{N} \,\&\, node_2 \in \mathbb{N} \,\&\, node_1 < node_2\}$$

5 Задача за резолюция

С метода на резолюцията да се докаже, че множеството от следните четири формули е неизпълнимо:

II.1
$\forall x \exists y(p(x,y) \ \& \ \forall z(p(z,y) \Longrightarrow r(x,z)))$,
$\forall x(\exists y p(y,x) \Longrightarrow \exists y(p(y,x) \ \& \ \neg\exists z(p(z,y) \ \& \ p(z,x))))$,
$\forall x \forall y \forall z((p(x,y) \ \& \ r(y,z)) \Longrightarrow p(x,z)))$,
$\neg\forall x \exists y(p(x,x) \Longrightarrow (q(y,x) \ \& \ \neg q(y,x)))$.
* Тъй като $(q(y,x) \& \neg q(y,x))$ е винаги лъжа, то последната формула е еквивалентна на:
$\neg\forall x \exists y(\neg p(x,x)) \equiv \exists x p(x,x)$.

II.2
$\forall x \exists y(q(y,x) \ \& \ \forall z(q(y,z) \Longrightarrow r(z,x)))$,
$\forall x(\exists y q(x,y) \Longrightarrow \exists y(q(x,y) \ \& \ \neg\exists z(q(y,z) \ \& \ q(x,z))))$,
$\forall x \forall y \forall z((q(y,x) \ \& \ r(z,y)) \Longrightarrow q(z,x)))$,
$\neg\forall x \forall z(q(x,x) \Longrightarrow (r(x,z) \ \& \ \neg r(x,z)))$.
* Тъй като $(r(x,z) \& \neg r(x,z))$ е винаги лъжа, то последната формула е еквивалентна на:
$\neg\forall x \forall z(\neg q(x,x)) \equiv \exists x q(x,x)$.

5.1 Примерно решение

II.1
Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:
$\varphi_1^S \rightleftharpoons \forall x \forall z(p(x,f(x)) \& (\neg p(z,f(x)) \vee r(x,z)))$.
$\varphi_2^S \rightleftharpoons \forall x \forall t \forall z((p(g(x),x) \vee \neg p(t,x)) \& (\neg p(z,g(x)) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(t,x))$.
$\varphi_3^S \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z(\neg r(y,z) \vee \neg p(x,y) \vee p(x,z))$.
$\psi^S \rightleftharpoons p(a,a)$.
Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):
$D_1 = \{p(x_1, f(x_1))\}$;

$D_2 = \{\neg p(z_2, f(x_2)), r(x_2, z_2)\}$;
$D_3 = \{p(g(x_3), x_3), \neg p(t_3, x_3)\}$;
$D_4 = \{\neg p(z_4, g(x_4)), \neg p(z_4, x_4), \neg p(t_4, x_4)\}$;
$D_5 = \{\neg r(y_5, z_5), \neg p(x_5, y_5), p(x_5, z_5)\}$;
$D_6 = \{p(a, a)\}$.

II.2

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:
$\varphi_1^S \rightleftharpoons \forall x \forall z (q(f(x), x) \& (\neg q(f(x), z) \vee r(z, x)))$.
$\varphi_2^S \rightleftharpoons \forall x \forall z \forall t ((q(x, g(x)) \vee \neg q(x, t)) \& (\neg q(g(x), z) \vee \neg q(x, z) \vee \neg q(x, t))$.
$\varphi_3^S \rightleftharpoons \forall z \forall y \forall x (\neg r(z, y) \vee \neg q(y, x) \vee q(z, x))$.
$\psi^S \rightleftharpoons q(a, a)$.
Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):
$D_1 = \{q(f(x_1), x_1)\}$;
$D_2 = \{\neg q(f(x_2), z_2), r(z_2, x_2)\}$;
$D_3 = \{q(x_3, g(x_3)), \neg q(x_3, t_3)\}$;
$D_4 = \{\neg q(g(x_4), z_4), \neg q(x_4, z_4), \neg q(x_4, t_4)\}$;
$D_5 = \{\neg r(z_5, y_5), \neg q(y_5, x_5), q(z_5, x_5)\}$;
$D_6 = \{q(a, a)\}$.

И за двата варианта един примерен резолютивен извод на $\blacksquare$ е:
$D_7 = Res(D_2\{x_2/y_5, z_2/z_5\}, D_5) =$
$\{\neg q(f(y_5), z_5), \neg q(y_5, x_5), q(z_5, x_5)\}$;
$D_8 = Res(D_3\{x_3/f(y_5)\}, D_7\{z_5/g(f(y_5))\}) =$
$\{\neg q(f(y_5), t_3), \neg q(y_5, x_5), q(g(f(y_5)), x_5)\}$;
$D_9 = Res(D_4\{x_4/f(y_5), z_4/x_5\}, D_8) =$
$\{\neg q(f(y_5), t_4), \neg q(f(y_5), x_5), \neg q(f(y_5), t_3), \neg q(y_5, x_5)\}$;
$D_{10} = Collapse(D_9\{t_3/x_5, t_4/x_5\}) =$
$\{\neg q(f(y_5), x_5), \neg q(y_5, x_5)\}$;
$D_{11} = Res(D_1, D_{10}\{y_5/x_1, x_5/x_1\}) =$
$\{\neg q(x_1, x_1)\}$;
$Res(D_{11}\{x_1/a\}, D_6) = \blacksquare$.