Вар 1

Зад 1 <u>инекция</u>

$p^{S_A}(X,Y) \Leftrightarrow$ има инекция от X в $Y \Leftrightarrow$
има $f: X \rightarrowtail Y \Leftrightarrow$
има $f: X \to Y$ и $\forall x \forall y\, (f(x)=f(y) \to x=y)$
$\Leftrightarrow |X| \leq |Y| \; (\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}})$

$\varphi_\emptyset(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x,y).$
тривиално

$\varphi_{bij}(x,y) \leftrightharpoons p(x,y) \,\&\, p(y,x).$
Cantor-Schroeder-Bernstein Th.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_\emptyset(x) \,\&\, \forall y\, (\neg\varphi_\emptyset(y) \Rightarrow p(x,y)).$
мощност 1
почти най-малката мощност

С инд. по n (пълна) док. за $n+1$.
$\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_\emptyset(x) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg\varphi_n(x) \,\&$
$\forall y\, (\neg\varphi_\emptyset(y) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg\varphi_n(y) \Rightarrow p(x,y)).$

Да се намерят всички м-ва A от ест. числа, за които $\{\{0\}\}$ е опр. в S_A.
Това е в сила само за $A = \{0\}$.

За $|A|=1$ и $A \neq \{0\}$, т.е. за $A=\{a\}$

$a \neq 0$, няма как да кажем какъв елемент е a.

За $|A| \geq 2$, то автоморфизми разменят 0 с друг елемент от универсума едно опр. на $\{\{0\}\}$.

Да се намерят всички м-ва A от ест. числа, за които $\{A\}$ е опр. в S_A.

Това е в сила само за A крайно.

Тогава $\overline{\overline{A}} = n$ за $n \in N$ и форм. $\varphi_n(x)$ го определя.

За $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{N}}$, т.е. за A изброимо безкрайно, същ. биекция м/у A и N, така че не са различими с ф-ла.

Вар 2 Зад 1 сторекция

Само за $\{\emptyset\}$. Останалото се припокрива

За $|A|=1$, то не можем с ф-ла да различим $\emptyset$ и A (грешка при съставяне на задачата)

За $|A| \geq 2$

$\varphi_\emptyset(x) \leftrightharpoons \exists y (y \neq x \,\&\, \forall z (z \neq x \Rightarrow p(z,y)))$.

т.е. $x = \emptyset$ тстк има синглетон y, който е различен от $\emptyset$ и за всяко м-во $z \in P(A) / \{\emptyset\}$, има сюрекция в y.

($\Rightarrow$) ясно.

($\Leftarrow$) Нека $S \models \varphi_\emptyset(x)$ и $x \in P(A)$.

Нека $y \in P(A)$ е свидетел за $y \neq x$.

Сл. 1 За $y = \emptyset$, тогава т.к. в $P(A)$ има поне 3 елемента, то за $z \in P(A) \setminus \{x, y\}$ ще има сюрекция от z в $y = \emptyset$ ↯.

Сл. 2 За $y \neq \emptyset$, тогава за $z = \emptyset$ получаваме сюрекция от $z = \emptyset$ в y ↯.

Вар ② Вар ①.

Първите две формули казват, че p^A е ф-я. Нека въведем функ. с-л f с деф. $f^A(x,y) \doteq z$ тстк $p^A(x,y,z)$.
Тогава третата и четвъртата ф-ла имат вид:

$$\forall x \forall y \forall t (f(f(x,y),y) \doteq t \Rightarrow \neg f(x,y) \doteq t)$$

$$\forall x \exists y (f(u,y) \doteq f(f(u,x),x))$$

Т.е. ако много не изродиме първата координата, всичко ще е окей

Примерни модели:

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}\setminus\{0\}, p^A\rangle$$

$$p^A(a,b,c) \Leftrightarrow a+b=c$$

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, p^B\rangle$$

$$p^B(a,b,c) \Leftrightarrow a\cdot b=c.$$

Вар ② е аналогичен.