Вариант 1

Зад. 1

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x\, p(x,x)$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(f(x), f(y)) \Rightarrow p(x,y))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists y \forall x (p(f(f(f(f(x)))), y) \Leftrightarrow p(x,y))$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \neg p(f(c), c) \,\&\, \neg p(f(f(c)), c) \,\&$
$\neg p(f(f(f(c))), c) \,\&$
$\neg p(f(f(f(f(c)))), c).$

φ_1 - рефлексивност p^{A}

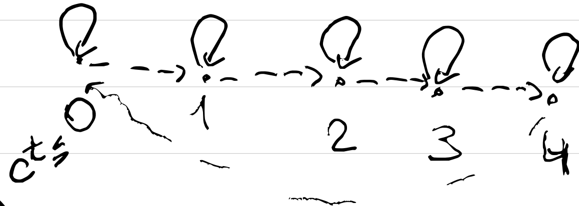
φ_2 - $\{ \langle f^{A}(a), f^{A}(b) \rangle \mid \langle a, b \rangle \in p^{A} \} \subseteq p^{A}$

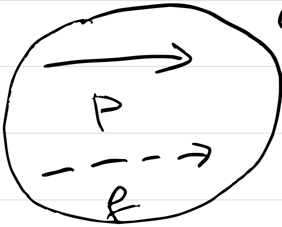
φ_3 - има обект a, т.ч. за кой да е друг обект x, то
$\langle f^{A(5)}(x), a \rangle \in p^{A}$ тстк $\langle x, a \rangle \in p^{A}$

φ_4 - $f^{A} \neq id_A$, $f^{A} \circ f^{A} \neq id_A$, $f^{A} \circ f^{A} \circ f^{A} \neq id_A$,
$f^{A} \circ f^{A} \circ f^{A} \circ f^{A} \neq id_A$

за един и същ свидетел

Нека $\mathcal{A}$:





$\mathcal{A} = \langle \{0, \dots, 4\}, f^A, p^A, c^A \rangle$

$p^A = \{\langle 0,0\rangle, \dots \langle 4,4\rangle\}$

$c^A = 0$; $f^A(x) = x+1 \mod 5$

φ_1 е изпълнена.

φ_2:

Нека $\langle f^A(a), f^A(b)\rangle \in p^A$.

Тогава $f^A(a) = f^A(b)$, защото в p^A има само рефлексивни точки. Т.к. f^A е ф-я значи $a = b$ и значи $\langle a, a\rangle \in p^A$. ✓

φ_3: Нека $y = 0$.

Тогава Нека x е произволно

Нека $\langle f^A(f^A(f^A(f^A(f^A(x))))), y\rangle \in p^A$

Тогава $f^A(f^A(f^A(f^A(f^A(x))))) = y = 0$. по деф. на p^A. Значи $x = 0$ по деф. на f^A.

Тоест $\langle x, y\rangle \in p^A$.

Нека $\langle x, y\rangle \in p^A$. Тогава $x = 0 = y$ и по деф. на f^A, то $f^A(f^A(f^A(f^A(f^A(x))))) = 0$ и значи $\langle f^A(f^A(f^A(f^A(f^A(x))))), y\rangle \in p^A$

φ_4: $c^A = 0$.

$$< \underbrace{f^A(0)}_{1}, 0 > \notin p^A$$

$$< \underbrace{f^A(f^A(0))}_{2}, 0 > \notin p^A$$

$$< \underbrace{f^A(f^A(f^A(0)))}_{3}, 0 > \notin p^A$$

$$< \underbrace{f^A(f^A(f^A(f^A(0))))}_{4}, 0 > \notin p^A$$

Зад. 2

$\mathcal{U} = \langle \mathbb{N} ; f^{\mathcal{U}} \rangle$, $\#(f) = 2$, ф.с.

имаме $\doteq$

$f^{\mathcal{U}}(n, m) \leftrightharpoons НОД(n, k)$

Да се определят $\{0\}$, $\{1\}$,

$\{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \mid m \}$

$\{ n \in \mathbb{N} \mid n$ е просто $\}$

Док., че $\{2\}$ е неопр.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y (\neg(x \doteq y) \Rightarrow f(x, y) \doteq y)$

// за кое и е число $y \neq 0$, то

$gcd(0, y) = y$

// $gcd(0,0)$ не е дефинирано.

затова казваме с предпоставка.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y (f(x, y) \doteq x)$

// $gcd(1,$ нещо$) = 1$

$\varphi_1(x, y) \leftrightharpoons f(x, y) \doteq x \;\&\; (\neg \varphi_0(x) \vee \neg \varphi_0(y))$

$НОД(n, m) = n$ тогава $n \mid m$ тогава

$\exists k : m = k.n$

Изкл. и двете да са нули, защото $НОД(0,0)$ в общия случай не е дефинирано

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \neg\varphi_1(x) \,\&$
$\forall y(\varphi_1(y,x) \Rightarrow \varphi_1(y) \vee y \doteq x)$

$\{2\}$ е неопределимо с канонични автоморфизми

Нека имаме подредба на простите числа (стандартната: $\underset{1}{2}, \underset{2}{3}, \underset{3}{5}, \underset{4}{7}, \underset{5}{11}, \dots$)

Нека $h: Prime \to Prime$ ← м-во на простите числа

$$h(x) = \begin{cases} 2, & x = 3 \\ 3, & x = 2 \\ x, & else \end{cases}$$

$h^{-1} = h$ е биекция

Нека $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \dots$ за краен брой $\alpha_i \neq 0$.

(каноничен запис на n)

$H: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$H(n) \leftrightharpoons \begin{cases} n, & n \leq 1 \\ \prod h(p_i)^{\alpha_i}, & n > 1 \end{cases}$$

за $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$

$H^{-1} = H$ е биекция.

$H(f^t(n, m)) = f^t(H(n), H(m))$?

с малко разписване се верифицира