Примерни решения на КР1 : 10.4.2021

зад D

$\varphi_=(f,g) \leftrightharpoons \forall h(d(h,f) \Leftrightarrow d(h,g))$.

* Не можем да разменим аргументите, т.к., ако към f и g е много различна константа добавена, която ги различава, то след диференциране я губим.

$\varphi_0(f) \leftrightharpoons \forall h\, \varphi_=(p(f,h), f)$.

$\varphi_1(f) \leftrightharpoons \forall h\, \varphi_=(p(f,h), h)$.

$\varphi_{-1}(f) \leftrightharpoons \exists h\, (\varphi_1(h) \,\&\, \varphi_=(p(f,f),h) \,\&\, \neg\varphi_=(f,h))$.

$\varphi_{Const}(f) \leftrightharpoons \exists g(\varphi_0(g) \,\&\, d(f,g))$.

Това ни е и базата за индукцията, за да покажем, че P_n е опр. за $n \in \mathbb{N}$.

(i.h) Имаме, че P_n е опр. с φ_n.

$\varphi_{P_{n+1}}(f) \leftrightharpoons \exists g(\varphi_{P_n}(g) \,\&\, d(f,g))$.

$\varphi_{exp}(f) \leftrightharpoons d(f,f).$

SinCos е определимо:

$(a.\sin x + b.\cos x)'_x = a.\cos x - b.\sin x$

$(a.\sin x + b.\cos x)''_x = -a.\sin x - b.\cos x =$

$= -(a.\sin x + b.\cos x).$

Така

$\varphi_{sinCos}(f) \leftrightharpoons \exists g \exists h(\varphi_{-1}(g) \& d(f,h) \&$
$d(h, p(f,g)))$.

Има нужда от още по-солидна аргументация, но излиза извън рамките на този курс.

Но Sin не е определимо.

Да разгледаме произволна транслация за $c \in \mathbb{R}$: $H^c(f) = f(\cdot + c)$.

Показва се лесно, че е Хим отн. с-вата и операциите в свата:

i) $f(\cdot + c).g(\cdot + c) = (f.g)(\cdot + c)$

ii) $f'_x(\cdot + c) = (f(\cdot + c))'_x$

i) $H(p^s(f,g)) = H(f.g) = (f.g)(.+c)$

$p^s(H(f),H(g)) = H(f).H(g) = f(.+c).g(.+c)$ $\overset{\shortparallel}{}$

ii) $\langle f,g\rangle \in d^s \iff (\forall x \in \mathbb{R})[\overset{\text{дефин.е.}}{f'(x)\downarrow}$ и $f'(x)=g(x)]$

$\iff (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x=y+c \Rightarrow (f'(x)\downarrow$ и $f'(x)=g(x))] \iff (\forall y \in \mathbb{R})[H(f)'(x)\downarrow$ и $H(f)'(x) = H(g)(x)] \iff$

$\langle H(f),H(g)\rangle \in d^s$.

Обратното на H е $H^{-1}(f) = f(.-c)$.

$H \in Aut(S)$.

Нека $c = \pi/2$.

Тогава $H(\sin) = \sin(.+\pi/2) = \cos$

Тогава $\cos x \neq a.\sin x$ за всяка a,

защото за $x=0$, то $\cos 0 = 1$, а

$a.\sin 0 = 0$. Така $H(\sin) \notin Sin$.

Sin не е определимо мн-во.

зад ②

за Γ_0:

$A = < \mathbb{N}; p^A, q^A >$

$p^A(n,m) \longleftrightarrow n \geq m$

$q^A(n,m) \longleftrightarrow n > m$

за Γ_3: рационален инт.

$B = < \mathbb{N} \cup (0,1); p^B, q^B >$

$p^B(n,m) \longleftrightarrow n \geq m$

$q^B(n,m) \longleftrightarrow n > m$

Всяка точка не е сравнима със себе си по q^B.

за Γ_3:

$D = < \mathbb{N} \cup \{T\}; p^D, q^D >$

$<n,m> \in p^D \leftrightarrow (n,m \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n \geq m)$ или $n = T$

$<n,m> \in q^D \leftrightarrow (n,m \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n > m)$ или $(n = T$ и $m \neq T)$

* Щом е модел за Γ_3, то е модел и за всички подмн-ва на Γ_3.