Решения на задачите от контролно 1 по Логическо програмиране

08 ноември 2019

1 Определелимост

Вариант 1

Структурата $\mathcal{S}$ е с носител множеството $\mathbb{E}_2$ от всички точки в евклидовата равнина и е за език без равенство и с единствен нелогически символ — триместния предикатен символ $\perp\!\!\!\perp$, който се интерпретира така:

$$\perp\!\!\!\perp^{\mathcal{S}}(A,B,C) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} A \neq B \text{ и } A \neq C \text{ и } \angle BAC = 90^\circ$$

Да се докаже, че в структурата $\mathcal{S}$ са определими:

1. $\mathrm{Eq} = \{\langle A, A\rangle \mid A \in \mathbb{E}_2\}$.
2. $\mathrm{Col} = \{\langle A, B, C\rangle \mid A, B, C \in \mathbb{E}_2$ лежат на една права$\}$.
3. $\mathrm{Circ} = \{\langle A, B, C\rangle \mid C$ лежи на окръжност с диаметър $AB\}$.

Вярно ли е, че в $\mathcal{S}$ са определими множествата и защо:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mid} &= \{\langle A,B,C\rangle \mid C \text{ е среда на отсечката } AB\} \text{ и} \\ \mathrm{Seg} &= \{\langle A,B,C\rangle \mid C \text{ лежи на отсечката } AB\}? \end{aligned}$$

Намерете два различни автоморфизъма в $\mathcal{S}$.

Вариант 2

Структурата $\mathcal{S}$ е с носител множеството $\mathbb{E}_2$ от всички точки в евклидовата равнина и е за език без равенство и с единствен нелогически символ — триместния предикатен символ $\perp\!\!\!\perp$, който се интерпретира така:

$$\perp\!\!\!\perp^{\mathcal{S}}(A,B,C) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} A \neq C \text{ и } B \neq C \text{ и } \angle ACB = 90^\circ$$

Да се докаже, че в структурата $\mathcal{S}$ са определими:

1. $\mathrm{Eq} = \{\langle A, A\rangle \mid A \in \mathbb{E}_2\}$.
2. $\mathrm{Col} = \{\langle A, B, C\rangle \mid A, B, C \in \mathbb{E}_2$ не лежат на една права$\}$.
3. $\mathrm{Circ} = \{\langle A, B, C\rangle \mid A$ лежи на окръжност с диаметър $BC\}$.

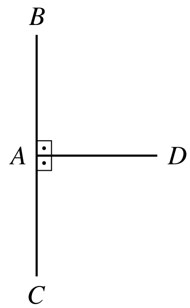
Вярно ли е, че в $\mathcal{S}$ са определими множествата и защо:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mid} &= \{\langle A,B,C\rangle \mid A \text{ е среда на отсечката } BC\} \text{ и} \\ \mathrm{Seg} &= \{\langle A,B,C\rangle \mid A \text{ лежи на отсечката } BC\} \end{aligned}$$

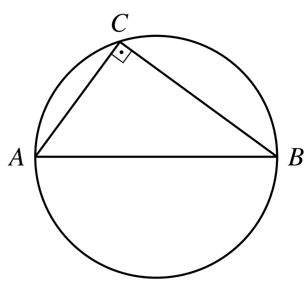
Намерете два различни автоморфизъма в $\mathcal{S}$.

Примерно решение на вариант 1

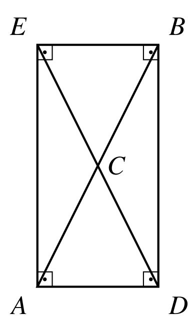
На вариант 2 решението е аналогично.
$\mathrm{Eq}(A,B) \rightleftharpoons \forall C \forall D (\perp\!\!\!\perp(C,A,D) \iff \perp\!\!\!\perp(C,B,D))$. /* Използваме схема за обемност. */
$\mathrm{Eq}^*(A,B) \rightleftharpoons \neg \exists C \perp\!\!\!\perp(C,A,B)$. /* Друг вариант. */
$\mathrm{Col}(A,B,C) \rightleftharpoons \exists D (\perp\!\!\!\perp(A,B,D) \,\&\, \perp\!\!\!\perp(A,C,D))$.



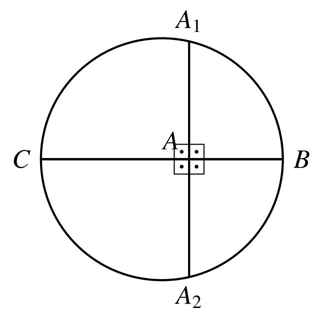
$\mathrm{Circ}(A,B,C) \rightleftharpoons \perp\!\!\!\perp(C,A,B) \vee \mathrm{Eq}(C,A) \vee \mathrm{Eq}(B,C)$.



$\mathrm{Mid}(A,B,C) \rightleftharpoons (\mathrm{Eq}(A,B) \,\&\, \mathrm{Eq}(A,C)) \vee (\exists D \exists E (\neg \mathrm{Eq}(D,E) \,\&\, \perp\!\!\!\perp(A,E,D) \,\&\, \perp\!\!\!\perp(B,D,E) \,\&\, \mathrm{Col}(A,C,B) \,\&\, \mathrm{Col}(E,C,D)))$.



$\mathrm{Seg}(A,B,C) \rightleftharpoons (\mathrm{Col}(A,B,C) \,\&\, \exists A_1 \exists A_2 (\neg \mathrm{Eq}(A_1,A_2) \,\&\, \mathrm{Circ}(A_1,B,C) \,\&\, \mathrm{Circ}(A_2,B,C) \,\&\, \mathrm{Col}(A,A_1,A_2) \,\&\, \perp\!\!\!\perp(A,A_1,C)))$.



Един примерен автоморфизъм на $\mathcal{S}$ е $Id_{\mathbb{E}_2}$.
Други автоморфизми са подобия (пазещи ъглите като при подобие на триъгълници) като транслация, хомотетия, ротация и тн.

2 Изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

Вариант 1

Да се докаже, че са изпълними множествата от формули $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, където

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\rightleftharpoons \exists x \exists y (g(x) = y \& f(x) = y),\\
\varphi_2 &\rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z (f(x) = y \& f(y) = z \Longrightarrow g(z) = x),\\
\varphi_3 &\rightleftharpoons \exists x \exists y \exists z (\neg x = y \& \neg y = z \& \neg z = x),\\
\varphi_4 &\rightleftharpoons \forall x \neg f(x) = x.
\end{aligned}$$

Вариант 2

Да се докаже, че са изпълними множествата от формули $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, където

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\rightleftharpoons \exists x \exists y (h(x) = y \& g(x) = y),\\
\varphi_2 &\rightleftharpoons \exists x \exists y \exists z (\neg x = y \& \neg y = z \& \neg z = x),\\
\varphi_3 &\rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z (g(x) = y \& g(y) = z \Longrightarrow h(z) = x),\\
\varphi_4 &\rightleftharpoons \neg \exists x g(x) = x.
\end{aligned}$$

Примерни решения на $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

*Всички модели за $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ са модели и за $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

$$\begin{gathered}
S = (\{0,1,2\}, f^S, g^S)\\
f^S(x) \rightleftharpoons x\\
g^S(x) \rightleftharpoons x
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
S = (\mathbb{N}, f^S, g^S)\\
f^S(x) \rightleftharpoons x + 1\\
g^S(x) \rightleftharpoons \begin{cases} x+1, & \text{if } x < 2\\ x-2, & \text{иначе} \end{cases}
\end{gathered}$$

Примерни решения на $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$

$$\begin{gathered}
S = (\{0,1,2\}, f^S, g^S)\\
f^S(x) \rightleftharpoons x \,\%\, 3\\
g^S(x) \rightleftharpoons x \,\%\, 3
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
S = (\mathbb{N}, f^S, g^S)\\
f^S(x) \rightleftharpoons x + 1\\
g^S(x) \rightleftharpoons \begin{cases} x+1, & \text{if } x < 2\\ x-2, & \text{иначе} \end{cases}
\end{gathered}$$