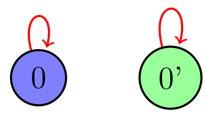
Примерни решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране*

24 януари 2022 г.

*В отделни файлове са условията.

1 Изпълнимост

Тази структура е модел за множеството от формули от 1ви вариант. С малко поправка става и за вариант 2:



$$\mathfrak{A} = \langle \{0, 0'\}; p^{\mathfrak{A}}, q^{\mathfrak{A}}; f^{\mathfrak{A}} \rangle$$
$$p^S \leftrightharpoons \{0\}$$
$$q^S \leftrightharpoons \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0', 0'\rangle\}$$
$$f^{\mathfrak{A}}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & x = 0', \\ 0', & x = 0. \end{cases}$$

Клонираме 0-лата и така имаме 0 и нейно копие $0'$. Ако елемент има свойство $p^{\mathfrak{A}}$ го оцетяваме в синьо, иначе е зелен. Така казваме, че 0 е синя. Правим точките рефлексивни по $r^{\mathfrak{A}}$, а интерпретацията на $f^{\mathfrak{A}}$ да праща оригина в копие и обратно. Лесно е да се верифицират, че всички формули са верни в $\mathfrak{A}$.

2 Определимост

Примерно решение за вариант 1. С малко поправка става и за вариант 2:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\leq 0}(x) \leftrightharpoons \forall y \neg p(y, x). \\
&\varphi_0(x) \leftrightharpoons \varphi_{\leq 0}(x) \,\&\, \forall y(\neg p(x, y) \to \varphi_{\leq 0}(y)). \\
&\varphi_{|a|=|b|}(x, y) \leftrightharpoons \forall z(\neg p(x, z) \leftrightarrow \neg p(y, z)). \\
&\varphi_{a=b}(x, y) \leftrightharpoons (\varphi_{\leq 0}(x) \,\&\, \varphi_{\leq 0}(y) \,\&\, \varphi_{|a|=|b|}(x, y)) \vee (\neg\varphi_{\leq 0}(x) \,\&\, \neg\varphi_{\leq 0}(y) \,\&\, \varphi_{|a|=|b|}(x, y)). \\
&\varphi_{\leq^+}(x, y) \leftrightharpoons \neg\varphi_{\leq 0}(x) \,\&\, \neg\varphi_{\leq 0}(y) \,\&\, \forall z(\neg p(x, z) \to \neg p(y, z)). \\
&\varphi_{<^+}(x, y) \leftrightharpoons (\varphi_{\leq^+}(x, y) \,\&\, \neg\varphi_{a=b}(x, y)). \\
&\varphi_1(x) \leftrightharpoons (\neg\varphi_{\leq 0}(x) \,\&\, \forall y(\varphi_{<^+}(y, x) \to \neg p(y, x))). \\
&\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_1(y) \,\&\, \neg\varphi_{a=b}(x, y) \,\&\, \varphi_{|a|=|b|}(x, y)).
\end{aligned}$$

За $\varphi_{\leq 0}(x)$ се възползваме, че квадрата на кое да е число е неотрицателно и така става $y^2 \geq x$.
За $\varphi_0(x)$ казваме, че не е положително и е най-голямото сред тях.
Идеята на $\varphi_{|a|=|b|}(x, y)$ е, че използваме схема за обемност, но тъй като имаме ^{2}, губим усет за знака.
За $\varphi_{a=b}(x, y)$ се възползваме, че можем да кажем положително число и равенство по модул.
Правим $\varphi_{\leq^+}(x, y)$ да бъде по-малко или равно в за неотрицателни числа, така $\varphi_{<^+}(x, y)$ е строго по-малко или равно само за неотрицателни числа. Ползваме го, за да кажем лесно 1 с формулата $\varphi_1(x)$. Тя казва, че е положително число, такова че всички y под него, ако им вземем квадрата, т.е., y^2, то y^2 продължава да е под него (в смисъл на $<^+$).
За $\varphi_{-1}(x)$ е ясно как стават нещата.
$\{2\}$ е неопределимо. Нека $h(x) \leftrightharpoons x^3$ е биективна функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Остава само проверката, че за $a, b \in \mathbb{R}$, то $p^{\mathfrak{A}}(a, b) \iff p^{\mathfrak{A}}(h(a), h(b))$, т.е., $a^2 < b \iff (h(a))^2 < h(b)$. Тя е оставена на читателя за упражнение.

3 Резолюция

Ще направим резолютивен извод на $\blacksquare$ за вариант 1. Нека с $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ бележим четирите формули от условието. Доказва се, че от φ_3 следва $\forall x \forall y (\exists z (r(x,z) \,\&\, r(z,y)) \to p(x))$, така че с нея ще работим вместо φ_3. След привеждането в нормални форми получаваме:

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 \leftrightharpoons \forall x (r(x,x) \,\&\, r(x, g(x, f(x)))).\\
&\psi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (\neg r(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee r(z,x)).\\
&\psi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (\neg r(x,z) \vee \neg r(z,y) \vee p(x)).\\
&\psi_4 \leftrightharpoons \forall y (p(a) \,\&\, (\neg p(g(y,a)) \vee \neg r(g(a,y),a))).
\end{aligned}
$$

Дизюнктите са:

$$
\begin{aligned}
&D_1 \leftrightharpoons \{r(x_1, x_1)\}.\\
&D_2 \leftrightharpoons \{r(x_2, g(x_2, f(x_2)))\}.\\
&D_3 \leftrightharpoons \{\neg r(x_3, y_3), \neg r(y_3, z_3), r(z_3, x_3)\}.\\
&D_4 \leftrightharpoons \{\neg r(x_4, z_4), \neg r(z_4, y_4), p(x_4)\}.\\
&D_5 \leftrightharpoons \{p(a)\}.\\
&D_6 \leftrightharpoons \{\neg p(g(y_6, a)), \neg r(g(a, y_6), a)\}.
\end{aligned}
$$

Сега един примерен резолютивен извод на $\blacksquare$:

$$
\begin{aligned}
&D_7 \leftrightharpoons Res(D_3\{z_3/g(a, y_6), x_3/a\}, D_6) = \{\neg p(g(y_6, a)), \neg r(a, y_3), \neg r(y_3, g(a, y_6))\}.\\
&D_8 \leftrightharpoons Res(D_7, D_4\{y_4/g(y_6, a)\}) = \{\neg r(a, y_3), \neg r(y_3, g(a, y_6)), \neg r(g(y_6, a), z_4), \neg r(z_4, y_4)\}.\\
&D_9 \leftrightharpoons Collapse(D_8\{y_3/a, y_6/f(a), z_4/g(f(a), a), y_4/g(f(a), a)\})\\
&\qquad = \{\neg r(a,a), \neg r(a, g(a, f(a))), \neg r(g(f(a), a), g(f(a), a))\}.\\
&D_{10} \leftrightharpoons Res(D_2\{x_2/a\}, D_9) = \{\neg r(a,a), \neg r(g(f(a), a), g(f(a), a))\}.\\
&D_{11} \leftrightharpoons Res(D_1\{x_1/a\}, D_{10}) = \{\neg r(g(f(a), a), g(f(a), a))\}.\\
&Res(D_1\{x_1/g(f(a), a)\}, D_{11}) = \blacksquare.
\end{aligned}
$$

4 Пролог: графи и Пролог: разделяния на списъци

В .pl файл са в същата директория с коментари.