ЛП
20.II

Prolog

- Факт
  man(ivan). //предикат man с аргумент ivan
  woman(elena).
  parent(todor, ivan).

- числа
- списъци

- правило
  father(X, Y) :- man(X), parent(X, Y).
  (X е баща на Y, ако X е мъж и x е родител на Y)

- Заявки
  ?- man(ivan).
  true
  ?- woman(ivan).
  false.

  ?- man(X)
  X = ivan //enter -> finish, space -> new answer
  X = todor
  false.

  ?- father(X, ivan)
  X = todor

  father(X, ivan) $\xrightarrow{\text{заменя се с}}$ man(x), parent(X, ivan)
  ↓
  ivan, parent(ivan, ivan) -> false
  ↓
  todor, parent(todor, ivan) -> true.

- Списъци

  [X | T] → X: head, T: tail
  [1, 2, 3, 4]
  X = 1 T = [2, 3, 4]

  [X, Y | T]
  X = 1
  Y = 2 T = [3, 4]

[1] = [1|[]]

- Предикат

(1) member (X, [X|_])
(2) member (X, [_|Xs]) :- member(X, Xs)

?- member (X, [a, 1, b, w])

(1) X = a

(2) member (X, [1, b, w])

(1) X = 1

(2) member (X, [b, w])

(1) X = b

(2) member (X, [w])

(1) X = w

(2) member (X, [])
false

?- member (1, [1, 1, 1])
true
true
true
false

?- member (2, [1, 1, 1])
false

- p(L) :- member(X, L), X > 20

L = [1, 6, 21, 4] true

?- p([1, 6, 21, 4], X)
X = 21

- Слепяне на списъци

?- append ([1, 2, 3], [4, 5, 6], X)
X = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

append ([], Ys, Ys)
append ([X|Xs], Ys, [X|Res]) :- append (Xs, Ys, Res)

?- append (X, Y, [a, b, c, d])
X = [] Y = [a, b, c, d]
X = [a] Y = [b, c, d]
X = [a, b] Y = [c, d]
X = [a, b, c] Y = [d]
X = [a, b, c, d] Y = []

?- append(L, R, [a, b, 1])

1) L = []
R = [a, b, 1]

2) L = [a | L1], append(L1, R, [b, 1])

L1 = []
R = [b, 1]
⇓
L = [a]
R = [b, 1]

L1 = [b | L2], append(L2, R, [1])

L2 = []
R = [1]
⇓
L = [a, b]
R = [1]

Дърво на извод

---

insert(X, L, Res)
?- insert(1, [10, 20, 30], X)
X = [1, 10, 20, 30]
X = [10, 1, 20, 30]
X = [10, 20, 1, 30]
X = [10, 20, 30, 1]

insert(X, L, Res) :- append(A, B, L), append(A, [X|B], Res)

?- insert(a, [1, 2, 3], X)

append(A, B, L) , append(A [a|B], X)

1) A = [] , B = [1, 2, 3] — append([], [a|1, 2, 3], X), X = [a, 1, 2, 3]

2) A = [1] , B = [2, 3] — append([1], [a|2, 3], X), X = [1, a, 2, 3]

3) A = [1, 2] , B = [3] — append([1, 2], [a|3], X), X = [1, 2, a, 3]

4) A = [1, 2, 3] , B = [] — append([1, 2, 3], [a|[]], X), X = [1, 2, 3, a]

- perm([X|Xs], Res) :- perm(Xs, R), insert(X, R, Res)

?- perm([1, 2, 3], X)
X = [1, 2, 3]
X = [1, 3, 2]
X = [2, 1, 3]
X = [3, 1, 2]
X = [3, 2, 1]
X = [2, 3, 1]

- сортиране на списък

usort(L, Res) :- perm(L, Res), not(append(_, [X, Y|_], Res), X>Y)

?- append(_, [X, Y|_], [a, 1, b, 2, c, 3])
X = a   Y = 1
X = 1   Y = b
....
X = c   Y = 3

- part - partition
part(Y, [X|Xs], L, R)

?- part(3, [1, 6, 7, 2, 3, 8], L, R)
L = [1, 2]
R = [6, 7, 9, 8]

part(_, [], [], [])
part(Y, [X|Xs], [X|L], R) :- X<Y, part(Y, Xs, L, R)
part(Y, [X|Xs], L, [X|R]) :- X>=Y, part(Y, Xs, L, R)

- qsort([X|Xs], Res) :- part(X, Xs, L, R), qsort(L, SL),
qsort(R, SR), append(SL, [X|SR], Res)

quicksort с partition относно първия елемент

I.П
упр. 24.II

```
member (X, [X|_]).
member (X, [_|Xs]) :- member(X, Xs).

append ([], Xs, Xs).
append ([X|Xs], Ys, [X, Res]) :- append(Xs, Ys, Res).

?- member (X, [1,2,3]).
   X=1 ?;
   X=2 ?;
   X=3
   false

?- member (1, [a,b,c]).
   false.

?- append (X, Y, [a,b,c]).      //всички възможни разпадения
                                 на списъка
```

///

Търсим всички подсписъци с коректно наредени елементи, i.e
[2,4] ✓   [4,2] X
L = [1,2,3,4]

```
sub([], []).
sub ([X|Xs], Res) :- sub(Xs, R).
sub ([X|Xs], [X|R]) :- sub(Xs, R).

?- sub ([w, f, 2, 1], X).
   X = [],
   X = [1]
   X = [2]
   X = [2, 1]
   X = [f]
     ... etc.
```

//

[2,4] ✓
[4,2] ✓

```
psub(L, R) :- sub(L, T), perm(T, R)
```

• Дължина на списък

Грешно! 1)

```
length ([], 0)
length ([_|Xs], 1+N) :- length(Xs, N).
```

```
length([], 0)
length([_|Xs], N) :- length(Xs, M), N is M+1.
```

length([a,b,c,d], X)

1) X = 1+1+1+1+0 2) X = 4

//

```
?- nth([a,b,c,d,e], 3, X)
   X = d,

?- nth([a,b,c,d,e], N, X)
   N = 0   X = a
   N = 1   X = b
   ...
   N = 4   X = e

nth(L, N, X) :- append(A, [X|_], L), length(A, N).

?- nth([2,2,2,6,2], N, 2)
   N = 0;
   N = 1;
   N = 2;
   N = 4;

nth([X|_], 0, X).
nth([_|Xs], N, X) :- nth(Xs, M, X), N is M+1.
```

//

```
rev([], B, B)
rev([X, Xs], B, R) :- rev(Xs, [X|B], R)

rev(L, R) :- rev(L, [], R).
```

Задачи от контролни

Задачи

p(L)?

L - списък от списъци

- всеки 2 различни елемента на L имат общ елемент и го няма в някой от другите списъци

L = [[1,2,3], [1,2,4], [2,3,4], [1,3,4]]

$L = [[1,2], [1,4], [1,6]]$ некоректен списък

1-то има навсякъде

$\forall x \forall y\, (x \neq y \Rightarrow \exists w \exists z\, (w \in x \,\&\, w \in y \,\&\, w \notin z))$

$\forall x \in L\, \forall y \in L\, (x \neq y \Rightarrow \exists w \in x\, \exists z \in L\, (w \in y \,\&\, w \notin z))$

$\forall x \varphi \Leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$
$\exists x \varphi \Leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$

$\neg \exists x \in L\, \exists y \in L\, (x \neq y \,\&\, \neg \exists w \in x\, \exists z \in L\, (w \in y \,\&\, w \notin z))$?

```
p(L):-not(member(X,L), member(Y,L), X\=Y,
        not(member(W,X), member(Z,L),
        member(W,Y), not(member(W,Z)))).
```

Задача X мажорира Y, ако всеки елемент на X е елемент на Y.
Да се дефинира предикат p(L,M):
M - пермутация на L, в която никой елемент не се мажорира от елемент след него.

```
maj(X,Y):-not(member(W,X), not(member(W,Y))).
```

$\forall x \in X\, (x \in Y) \Leftrightarrow \neg \exists x \in X\, (x \notin Y)$
$\forall x\, (x \in X) \Rightarrow x \in Y)$

$\exists x \in w\, \varphi \Leftrightarrow \exists x\, (x \in w \,\&\, \varphi)$
$\neg\neg \forall x\, (x \in X \Rightarrow x \in Y)$
$\neg \exists x\, (x \in X \,\&\, x \notin Y)$
$\neg \exists x \in X\ x \notin Y$

```
p(L,M):-perm(L,M), not(append(_,[X|Ys],M),
        member(Y,Ys), maj(Y,X))).
```

Задача p(X,Y) - по списък X генерира в Y всички списъци, чиито елементи са елементи на X и броят на ~~срещания~~ на най-често срещания елемент в Y е число, което не е елемент на X

$X = [2,2,2,1,3,a,a,a,a]$
$Y = [a,a,a,1]$ ✗ $\qquad Y = [a,a,a,a]$ ✓
$a\ \ 3 \in X \qquad a - 4 \notin X$

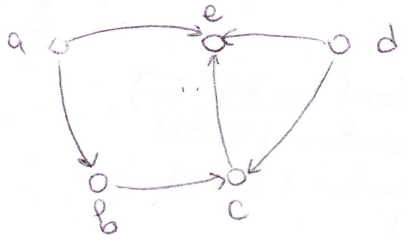
```
count(_, [], 0)
count(X, [X, Xs], N):- count(X, Xs, M) , N is M+1.
count (X, [Y, Xs], N):- X\=Y, count (X, Xs, N).


count_max (L, X, N):- member(X, L), count (L, X, N),
                      not(member (Y, L), count(Y, M), M>N).
```

```
?- count_max ([1, 2, 3, 4], X, Y)
       X=1      Y=1
       X=2      Y=1 .....
?- count_max ([1, 2, 2, 2, 3], X, Y)
     X=2 , Y=3
```

```
p(X, Y):- psub(X, Y), count_max(Y, _, N),
          not (member(N, X)).
```

ЛП
06.III

Графи



настоящ връх

L=[[a,b,e], [b,c],[c,e], [d,c,e], [e]]

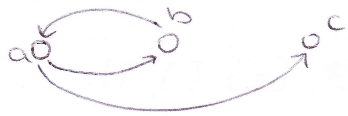
съседи

% path(G,a,e,L) // път в G от a до e
L=(a,e)
L=(a,b,c,e)

Грешно решение

представен чрез списък от ребра

```
path(_,X,X,[X]).
path(G,X,Y,[X|R]):- member([X,Z],G),
                    path(G,Z,Y,R).
```



?- path([[a,b],[a,c],[b,a]],a,c,L)   безкраен цикъл

Вярно

```
path(_,X,X,_,[X]).
path(G,X,Y,F,[X|R]):- X\=Y
                      member([X,Z],G),
                      not(member(Z,F)),
                      path(G,Z,Y,[X|F],R)
```

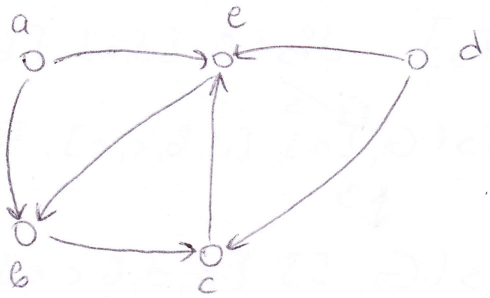
visited

Има ли цикъл в граф?

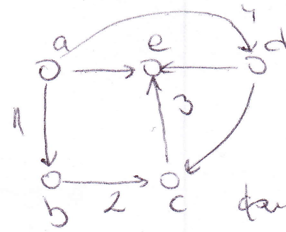
% cycle(G).

visited

```
cycle(G):- member([X,Y],G), path(G,Y,X,[],_).
cycle(G,C):- member([X,Y],G), path(G,Y,X,[],T), C=[X|T].
cycle(G,[X|T]):- member([X,Y],G), path(G,Y,X,[],T).
```



- - -



граф 1.

```
dfs(G, X, T) :- dfs(G, [X], [], T)

next(G, U, S, F, V) :- member([U, V], G),
// v е съсед на u          not(member(V, S)),
// в G и не се             not(member(V, F)).
// среща нито в S, нито в F
```

стек — посетени върхове

```
1) dfs(G, [], _, []).
2) dfs(G, [S|Ss], F, [[S,N]|R]) :-
        next(G, S, [S|Ss], F, N),
        dfs(G, [N, S|Ss], F, R).
3) dfs(G, [S|Ss], F, R) :- not(next(G, S, [S|Ss], F, _)),
        dfs(G, Ss, [S|F], R)
```

на граф 1.

dfs(G, a, T) → dfs(G, [a], [], T).

↓ 2)

dfs(G, [b, a], [], R)

↓ 2

R = [[b, c]|R1]   dfs(G, [c, b, a], [], R1)

↓ 2

R1 = [[c, e]|R2]   dfs(G, [e, c, b, a], [], R2)

↓ 3

dfs(G, [c, b, a], [e], R2)

↓ 3

dfs(G, [b, a], [c, e], R2)

↓ 3)

dfs(G, [a], [b, c, e], R2)

↓ 2

R2 = [[a, d]|R3]   dfs(G, [d, a], [b, c, a], R3)

↓ 3

dfs(G, [a], [d, b, c, e], R3)

↓ 3

dfs(G, [], [a, d, b, c, e], R3)

↓ 1

R3 = []

...

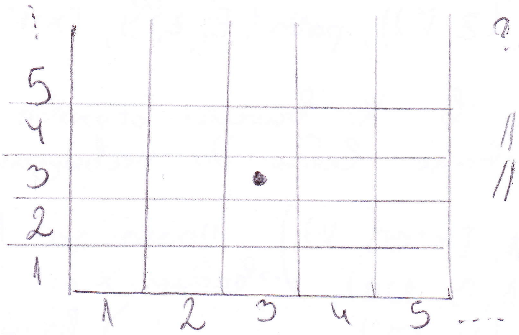
T = [[a, b], [b, c], [c, e], [a, d]]

```
1) bfs(G, [], _, [])
2) bfs(G, [S|Ss], F, [[S,N]|R]) :-
        next(G, S, [S|Ss], F, N),
        append([S|Ss], [N], Q),
        bfs(G, Q,  , R).

3) bfs(G, [S|Ss], F, R) :- not(next(G, S, [S|Ss], F, _)),
        bfs(G, Ss, [S|F], R).
```

Задача

Даден е L = [[a_1,b_1], ... [a_n,b_n]]

а) ? предикат p(X, [A,B]), който е истина, ако шахматен кон може да стъпи с 1 ход от полето [A,B], на поле, което го няма в X.




```
?- p([[2,3], [4,4], [3,1]], [3,3]).
   true.
// Може да стъпи на [1,4], което го
// няма в списъка

?- p([[3,2], [2,3]], [1,1])
   false.
```

Решение

```
p(X, [A,B]) :- valid([A,B], X, _)

valid([A,B], F, [X,Y]) :- member([C,D],
        [[1,2], [1,-2], [-1,2], [-1,-2],
         [2,1], [2,-1], [-2,1], [-2,-1]]),
        X is A+C, Y is B+D, X>0, X<9,
        Y>0, Y<9, not(member([X,Y], F)).
```

забранените

б) ? предикат q(L), който проверява дали има път от [1,1] до [8,8]

start end самия път

Решение

```
q(L) :- kpath([1,1], [8,8], L, _).
kpath(T, T, _, [T]).
kpath(S, T, F, [S|R]) :- S\=T, valid(S,F,N),
        kpath(N, T, [S|F], R).
```

Задача

Нека G е неориентиран граф

а) да се провери дали графът е свързан.

p(V, E)   // V-върхове
// E-ребра

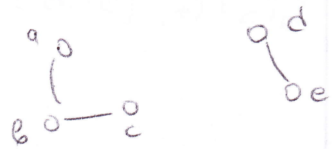
```
connected(V, E):- not(member(X,V),
                  member(Y,V), X\=Y
                  not(path(E, X, Y, [], _))).
```

пътя

от до visited

$\forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow path(x,y))$

$\neg \exists x \exists y (x \neq y \ \& \ \neg path(x,y))$




```
?- path([a,b,c,d,e],
        [a,b], [b,c], [d,e]).
- false
```

или

```
path(_, X, X, _, [X]).
path(E, X, Y, F, [X|R]):- (member([X,Z], E) ; member([Z,X], E)),
             not(member(Z,F)), path(E, Z, Y, [X|F], R).
```

б) crit(V, E, X)   - генерира в X всички върхове, чието отстраняване води до несвързан граф

```
crit1(V, E, X):- append(A, [X|B], V),
                 append(A, B, NV),
                 member(U, NV),
                 member(S, NV),
                 not(path(E, U, S, [X], _)).
```

само за 1 връх
вадим X от V

взимаме 2 върха, между които няма път, не минаващ през X

//в crit ще генерираме всички върхове със с-во crit1//

```
1) crit(V, E, [], []).
2) crit(V, E, [X|Xs], [X|R]):- crit1(V, E, X), crit(V, E, Xs, R).
3) crit(V, E, [X|Xs], R):- not(crit1(V, E, X)), crit(V, E, Xs, R).

crit(V, E, X):- crit(V, E, V, X).
```

ЛПР
упр. 13.III

% between (A,B,X) - X е число м/у A и B

```
between(A,B,A):- A=<B.
between(A,B,X):- A<B, C is A+1, between(C,B,X).
```

```
?- between(0,6,X).
   1                2
X=0          between(1,6,X)
              1              2
           X=1        between(2,6,X)
                       1
                      X=2         ....
                                      between(6,6,X)
                                       X=6        false
```

```
?- between(1,6,8)
   false
?- between(X,5,7)
   false
```

Първите 2 аргумента са задължителни

```
prime(X):- X>1, M is div(X,2),
           not(between(2,M,Y), 0=:=mod(X,Y)).
```

=:= аритметично равно

% f(X,L) - генерира в L всички прости делители на X

а) най-малък прост делител на X.

б) ?- f(300, L)
   L = [2,2,3,5,5]

в) списък от прости делители

```
f(1,_,[]).
f(N,M,[M|R]):- N>1, mod(N,M)=:=0, T is div(N,M), f(T,M,R).
f(N,M,R):- N>1, mod(N,M)=\=0, T is M+1, f(N,T,R).

f(X,L):- f(X,2,L).

to_set([],[]).
to_set([X|Xs],[X|R]):- to_set(Xs,R), not(member(X,R)).
to_set([X|Xs],R):- to_set(Xs,R), member(X,R).

?- to_set([5,5,4,3,5,3,2,1,2], X)
   X = [4,5,3,1,2]
```

← всеки елемент се среща по веднъж

в) → pc(X,L):- f(X,L1), to_set(L1,L).

% помощен предикат
```
deli_dvete(A,B,X):- mod(A,X)=:=0, mod(B,X)=:=0.
```

% най-голям общ делител
```
nod(A,B,X):- between(1,A,X), deli_dvete(A,B,X),
        not(between(1,A,Y), deli_dvete(A,B,Y), Y>X).
```

% по-ефективно ↓
```
nod(A,0,A).                                         // Евклид
nod(A,B,C):- B>0, T is mod(A,B), nod(B,T,C).
```

% приемаме, че A>B, ако не - switch

nod(10, 25, X) <=> nod(25, 10, X)

$A = B.X + T$

$\alpha = nod(B,T)$

$\beta = nod(A,B)$

$\alpha = \beta$

Д-во:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha \mid B.X\\ \alpha \mid T\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha \mid BX+T\\ \alpha \mid A\end{array}\\ \qquad\qquad\qquad \alpha \mid B\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \mid \beta \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta \mid A\\ \beta \mid BX\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\beta \mid A - BX\\ \beta \mid T\\ \beta \mid B\end{array}\right\} \Rightarrow \beta \mid \alpha \quad (**)$$

от $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow \alpha = \beta$

Задача Да се дефинира p(L,N), L-списък от положителни числа, $N \in \mathbb{N}$, и в L има N елемента, такива, че $\forall N-1$ елемента $b_1, \dots, b_{N-1}$ $nod(a_1, \dots, a_N) \neq nod(b_1, \dots, b_{N-1})$

Ex.: L=[15,10,6]
N=3
↓
true
каквито и 2 елемента да вземем, НОД-ът им няма да е 1.

L=[15, 10, 6]
N=3
↓
false   nod(10,7)=nod(10,15,7)

Решение:
```
nod_all([X],X].
nod_all([X|Xs],R):- nod_all(Xs,T), nod(X,T,R).

p(L,N):- sub(L,S), length(S,N), nod_all(S,U),
      not(sub(L,K), length(K,Q), Q is N-1, nod_all(K,U)).
```

- - -

% take_N(L,N,R) - вземи N елемента от L и ги сложи в R.

```
take_N(_, 0, []).
take_N(L, N, [X|Res]):- N>0, append(A, [X|B], L),
                        append(A,B,T), K is N-1,
                        take_N(T,K,Res).
```

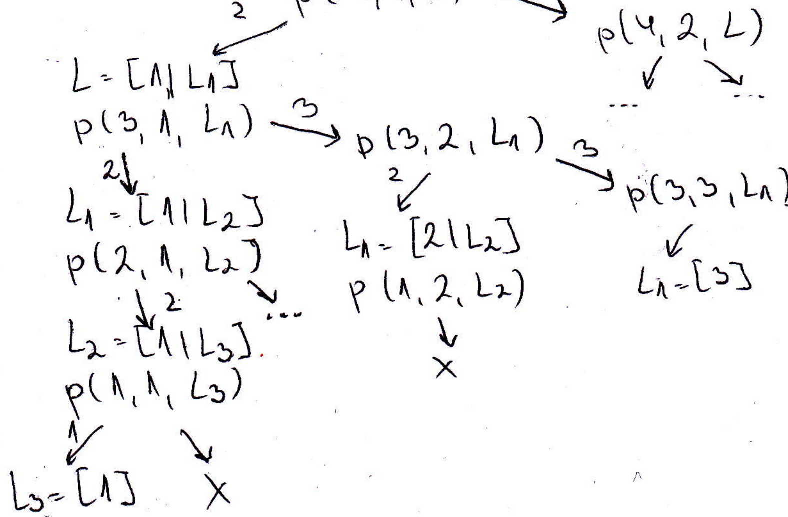
```
comb(_,_,0,[]).
comb([X|Xs], N, K, [X|R]):- K =< N, K>0, N1 is N-1, K1 is K-1,
                            comb(Xs, N1, K1, R).
comb([_|Xs], N, K, R):- K =< N, K>0, N1 is N-1,
                        comb(Xs, N1, K, R).

comb(L,K,R):- length(L,N), comb(L,N,K,R).

?- comb([a,b,c,d,e],4,R) → comb([a,b,c,d,e],5,4,R)

?- comb([d,e],2,3,R)
      false (3>2).
```

%p(N,X) генерира в X всички partition-и на N

Ex: N=5
?- p(5,X).

X = [1,1,1,1,1]
X = [1,1,1,2]
X = [1,1,3]
X = [1,2,2]
X = [1,4]
X = [2,3]
X = [5]

```
p(N,L):- p(N,1,L).
p(N,N,[N]).
p(N,M,[M|R]):- M<N, N1 is N-M, p(N1,M,R).
p(N,M,R):- M<N, M1 is M+1, p(N,M1,R).
```



Резултат
L=[1,1,1,1]
L=[1,1,2]
L=[1,3]
etc...

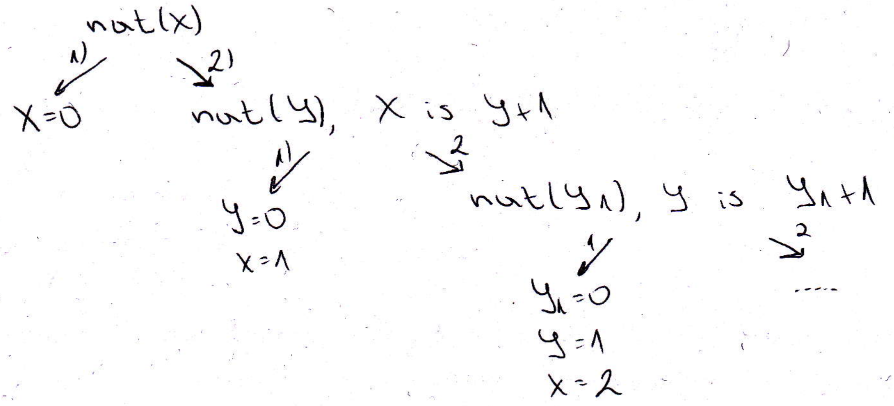
ЛМР 20.III

Генератори

/предикат с безброй много изводи/

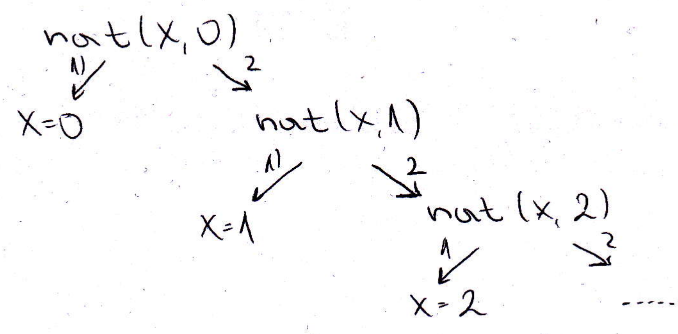
I Естествени числа ...

```
1) nat(0).
2) nat(X) :- nat(Y), X is Y+1
```



-

```
nat(X,X)
nat(X,Y) :- Y1 is Y+1, nat(X,Y1).
nat(X) :- nat(X,0).
```



- не се ползва като разпознавател

% pair(X,Y) - двойки естествени числа

× `pair(X,Y) :- nat(X), nat(Y)` ← Грешно решение

Ще генерира неща само от вида X=0, Y=i

✓ `pair(X,Y) :- nat(N), between(0,N,X), Y is N-X`

% genKS(K,S,R) - генерира K числа със сума S

```
genKS(1,S,[S]).
genKS(K,S,[X|Xs]) :- K>1, between(0,S,X), K1 is K-1,
                     S1 is S-X, genKS(K1,S1,Xs).
```

?- genKS(3,2,X)
X=[0,0,2]
X=[0,1,1]
...
X=[2,0,0] ..

Брой решения $= \binom{K+S-1}{K-1}$

% gen4(X) - всички четворки от естествени числа

```
gen4(X):-nat(N), genKS(4,N,X).
```

Алтернативно решение

```
pair(X,Y):-nat(N), genKS(2,N,[X,Y]).
```

% $\bigcup_{0}^{\infty} \mathbb{N}^n$

$\mathbb{N}^{\infty}$ - всички редици от естествени числа, неизброимо м-во

%gen_all(X) -генерира в X при преудовлетворяване всички крайни редици от естествени числа.

```
gen_all([]).
gen_all(X):-nat(N), between(1,N,K), S is N-K, genKS(K,S,X).
```

[10, 20, 30, 20, 10, 1]   S=91   K=6
N=97

Друго решение

```
pair(X,Y):-nat(N), between(0,N,X), between(0,N,Y)
```

Но ще генерира всяка двойка много пъти

Задача

$\{a_n\}_0^{\infty}$ $a_0=1$
$a_n=2a_{n-1}+n$

$\{b_n\}_0^{\infty}$ $b_0=1$
$b_n=3b_{n-1}+n^2-1$

Да се напише предикат p(N), който генерира в N всички числа от вида a_i+b_j

Решение

```
a(0,1)
a(N,X):- N>0, N1 is N-1, a(N1,Y), X is 2*Y+N.
b(0,1)
b(N,X):- N>0, N1 is N-1, b(N1,Y), X is 3*Y+N^2-1.

p(N):-nat(X), between(0,X,I), J is X-I, a(I,A), b(J,B),
    N is A+B.
```

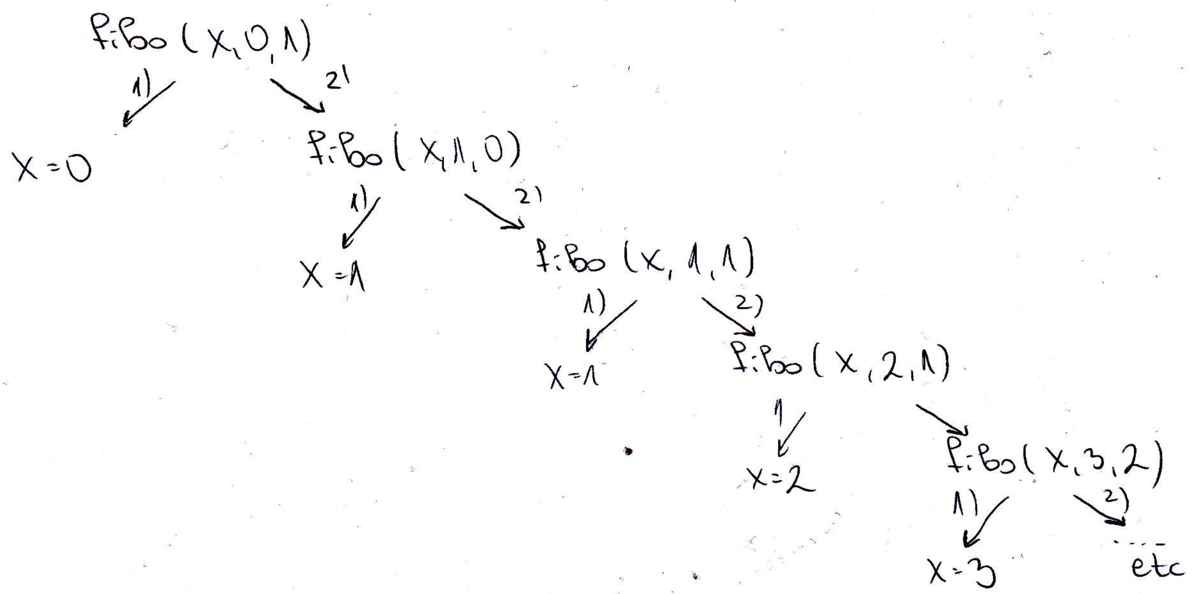
- По-ефективно решение

```
s(_, [A|As], [B|Bs], Res) :- (member(X, Bs), Res is A+X);
                              (member(X, [A|As]), Res is B+X).

s(N, [A|As], [B|Bs], R) :- NA is 2*A+N,
                           NB is 3*B+N*N-1, N1 is N+1
                           s(N1, [NA,A|As], [NB,B|Bs], R).

p(N) :- s(1, [1], [1], N).
```

- Фибоначи

```
fibo(0,1).
fibo(A,B) :- fibo(B,C), A is B+C.
fibo(X) :- fibo(X,_).
```

-
```
fibo(X,X,_).
fibo(X,A,B) :- C is A+B, fibo(X,C,A).
fibo(X) :- fibo(X,0,1).
```



Задача α-списък:
[] е α-списък
Ако A и B са α-списъци, то [A, [A,B]] също е α-списък
Да се напише предикат p(L), който генерира в L всички α-списъци

Пример за α-списък

$$\left[\underbrace{[\,]}_{A}, \left[\underbrace{[\,]}_{A}, \underbrace{\left[[\,], \left[[\,], [\,]\right]\right]}_{B}\right]\right]$$

Решение

X

```
alpha([]).
alpha([A,[A,B]]) :- alpha(A), alpha(B)
```

Грешно решение.

Винаги ще е празният списък

$r([])=1$

$r([A,[A,B]])=r(A)+r(B)$

[[],[[],[]]] r=2

[]   []

r=1   r=1

```
r([],1).
r([A,[A,B]],N) :- N>1, M is N-1, between(1,M,RA),
                  RB is N-RA, r(A,RA), r(B,RB).

alpha(X) :- nat(N), r(X,N).
```

ЛПР

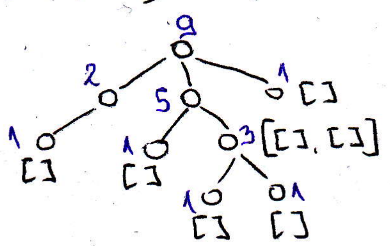
упр-24.III

Задача

def: Дърво:

- [] е дърво
- Ако $A_1, \dots, A_n$ са дървета, то $[A_1, \dots, A_n]$ е дърво.

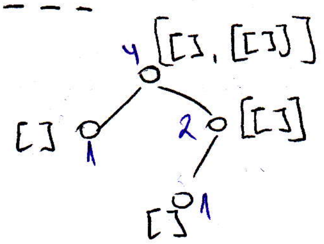
Да се напише предикат t(X), генериращ всички дървета

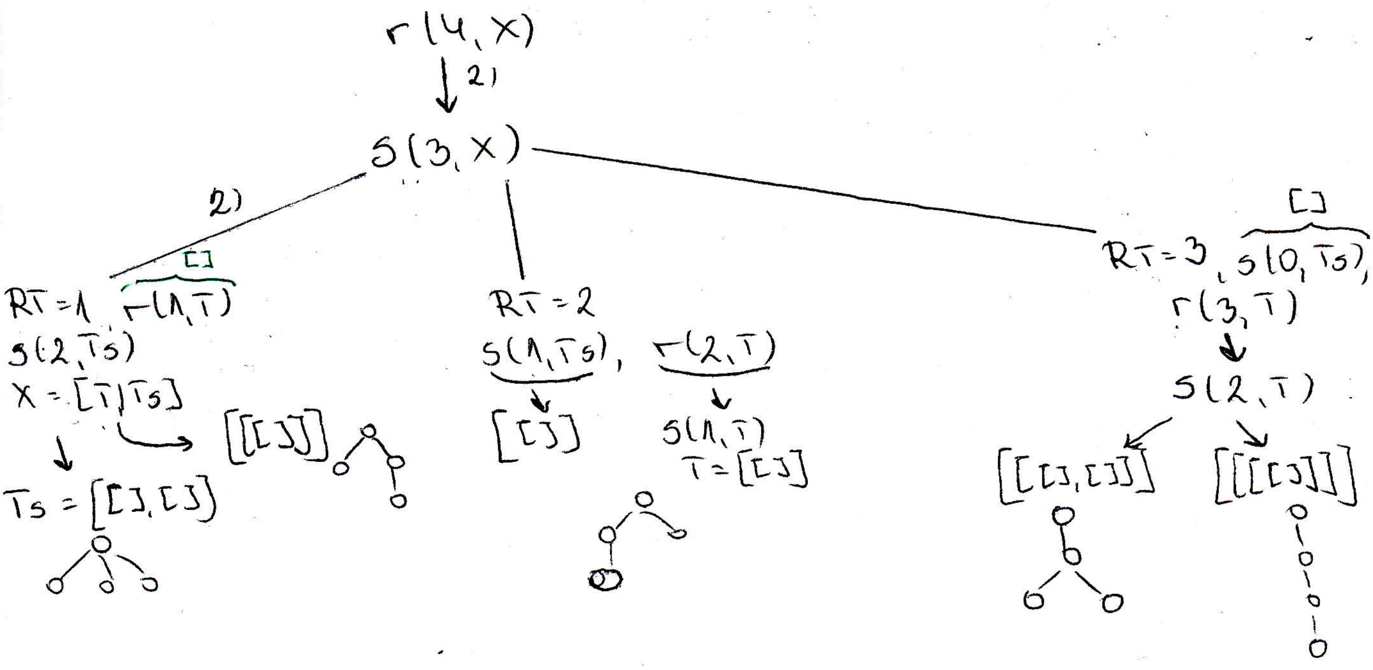


генериращ дърво по ранг

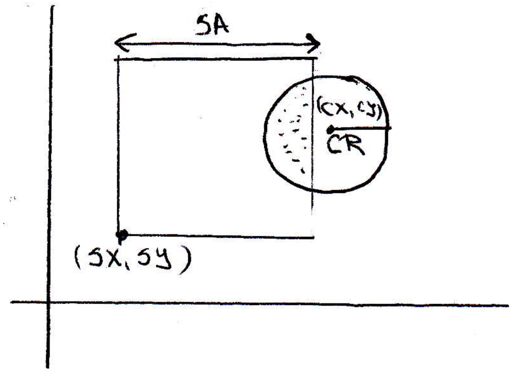
```
s(0, []).
s(N, [T|Ts]) :- N>0, between(1, N, RT), M is N-RT,
                r(RT, T), s(M, Ts).

r(1, []).                          // дърво с ранг 1 е []
r(R, T) :- R>0, R1 is R-1, s(R1, T).

t(X) :- nat(N), r(N, X).
```

```
s(N, [RT|Ts]) :- N>0, between(1, N, RT), M is N-RT, s(M, Ts).
?- s(4, X).
   X = [1, 1, 1, 1]
   X = [1, 1, 2]
   X = [1, 2, 1]
   ...
   X = [4].
```





Задача Да се напише предикат, който по даден квадрат и окръжност генерира всички общи точки.




```
p(SX, SY, A, CX, CY, CR, X, Y) :-
    LX is SX + SA, LY is SY + SA,
    between(SX, LX, X), between(SY, LY, Y),
    (CX-X)^2 + (CY-Y)^2 =< CR^2.
```

Задача Да се напише предикат squares($\underbrace{X, Y, A}_{S1}$, $\underbrace{Z, T, P}_{S2}$) и S1 съдържа S2.

квадрати

```
in_sq([X1, Y1, A1], [X2, Y2, A2]) :- X2 =< X1, Y2 =< Y1, X2+A2 => X1+A1,
    ...
```

// Връща истина, ако единият квадрат съдържа другият

```
h(0,0).
h(X,T) :- X>0, (T is X ; T is -X).

g1(1, S, [S]).
g1(K, S, [X|Xs]) :- K>1, between(0, S, Y), h(Y, X),
                    S1 is S - X, K1 is K-1,
                    g1(K1, S1, Xs).
```

// K числа, чиято сума от модулите е S

```
?- g1(2, 3, X).
   X = [0, 3]
   X = [0, -3],
   X = [1, -2],
   ...
   etc
```

squares (X, Y, A, Z, T, P) :- nat(N), g1(3, N, [Z, T, P]), P>0,
in-sq([X, Y, A], [Z, T, P]).

---

squares (X, Y, A, Z, T, P) :- nat(N), M is -N,
between (M, N, X), between (M, N, Y), between (1, N, P),
in-sq([X, Y, A], [Z, T, P]).
// коректно решение, но горното е по-ефективно.

Задача p(X) - всички крайни растящи геометрични прогресии с повече от 3 члена.
X = [1, 2, 3],
X = [100, 201, 302, 403]
---

ar(0, _, _, [])
ar(K, A, D, [A|As]) :- K>0, K1 is K-1, A1 is A+D,
ar(K1, A1, D, As)
// K числа с начално A и разлика D

p(X) :- nat(N), genKS(3, N, [K, A, D]), K>3, D>0,
ar(K, A, D, X).
да е растяща

Задача p(L, N) - (L - списък от естествени числа, N - естествено число).
Връща true, ако N може да се представи като сума на няколко елемента от L (не непременно различни).

p([4, 4, 4], 20) - true
p([4, 100, 100], 20) - true
p([2, 4, 6, 8, 10], 11) - false

p(_, 0).
p(L, N) :- N>0, member(X, L), X>0, M is N-X, p(L, M).

? p1([3, 3, 3, 3], 12) true
p1([3, 3, 3, 3], 27) false

1) p1(L, N) :- sub(L, T), sum(T, N).

2) p1(L, N) :- N>0, append(A, [X|B], L), X>0, M is N-X,
append(A, B, R), p1(R, M).

При същата задача с умножение:
X>1 вместо X>0 и
M is N\\X.

ЛПР
упр. 7
03.IV

Задача.

X= [[1,2,3], [100, 200, 300], [4,5,6,7]]

p(X,Y) - генерира в Y елемент на X, който не съдържа по-голем елемент от най-големите елементи на елементите на X. и никой елемент на X, притежаващ това с-во, да не е по-дълъг

% max (L,X) - генерира в X най-големия елемент на L.

I н-н: max (L,X):- member(X,L), not(member(Y,L), Y>X). //неефективен

II н-н: max ([X],X).
max ([X|Xs],X):- max(Xs,Y), X>Y.
max([X|Xs],Y):- max(Xs,Y), X=<Y.

lmax([],[])
lmax ([L|Ls], [X|Xs]):- max(L,X), lmax(Ls,Xs).

cond(X,Y):- member(Y,X), lmax(X,M),
not(member(Z,Y), not(member(W,M), not(Z>W))).

p(X,Y):- cond(X,Y), length(Y,N),
not(cond(X,Z), length(Z,M), M>N).

$\neg(\exists y \in Y\ \forall x \in lmax(x)\ \ y>x)$.

$\neg(\exists y \in Y \neg(\exists x\, lmax(x)\ \neg(y>x)))$

$\neg(\exists y \in Y \neg(\exists x\, lmax(x)\ \ y=<x))$

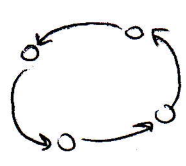
Задача

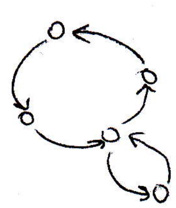
% d(X,Y):- X - списък от списъци.
В Y се генерират елементи на Декартово произведение на елементи на X.

Ex.: ?-d([[a,b,c], [1,2], [4,6]], Y).
Y= [a,1,4]
Y= [a,1,6]
....

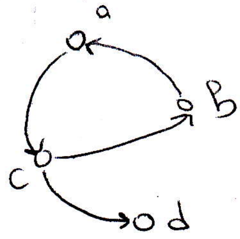
Р-ие: d([],[]).
d ([X|Xs], [R|Rs]):- member(R,X), d(Xs,Rs)

Задача





:-



[[a,c], [b,a], [c,b], [c,d]]

% p(E) - проверява дали графът е цикличен
E - списък от двуелементни списъци

p(E):- p1(E,_).

Търсим пермутация, която започва и завършва в 1 връх и няма връх, от който излизат 2 ребра, т.е. нямa вътрешни цикли.

```
p1(E,Y):- perm(E,P), P = [[Y,_]|_],
          append(_, [[_,Y]], P),
          not(append(_,[[X,_]|R], P), member([X,_],R)),
          not(append(_,[[_,W],[Z,_]|_], P), W \= Z).
```

% q(E) - проверява дали графът е осморка

% split(X,L,R) - разделя ребрата на 2 части

```
split([],[],[]).
split([X|Xs], [X|L], R):- split(Xs,L,R).
split([X|Xs], L, [X|R]):- split(Xs,L,R).
```

```
q(E):- split(E,L,R), p1(L,Y), p1(R,Y).
```

Задача
R = [[1,2], [1,6], [1,8], [10,15], [a,7]]

а) symm(R) - проверява дали релация е симетрична
$\forall x \forall y \quad xRy \Rightarrow yRx$

б) trans(R)
$\forall x \forall y \forall z \ (xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz)$

в) comp(R1,R2,R3) - генерира композиция на релации
$\forall x \forall y \forall z \ (xR_1y \ \& \ yR_2z \Rightarrow xR_3z)$

Р-ие:

```
symm(R):- not(member([X,Y],R), not(member([Y,X],R))).

trans(R):- not(member([X,Y],R), member([Y,Z],R),
           not(member([X,Z],R))).
```

```
tr(_, [], []).
tr([X,Y], [[Y,P]|Rs], [[X,P]|Qs]) :- tr([X,Y], Rs, Qs).
tr([X,Y], [[Z,_]|Rs], Qs) :- Y \= Z, tr([X,Y], Rs, Qs).

comp([], _, []).
comp([R1|Rs], R2, R3) :- tr(R1, R2, T),
                         comp(Rs, R2, Q),
                         append(T, Q, R3).
```

Задача

%p(L) :- Всеки два различни елемента на L имат общ елемент, който принадлежи на друг елемент на L.

$\forall x \in L\ \forall y \in L (x \neq y \Rightarrow \exists w \in x (w \in y \,\&\, \exists z \in L\ w \notin z)).$

$\neg(\exists x \in L\ \exists y \in L\ x \neq y \,\&\, \neg \exists w \in x\ w \in y \,\&\, \exists z \in L\ w \notin z).$

```
p(L) :- not(member(X,L), member(Y,L), X\=Y,
        not(member(W,X), member(W,Y), member(Z,L),
            not(member(W,Z))))).
```

Задача

p2(L) - проверява дали в L има 2 различни X и Y, които имат общ елемент и той не принадлежи на друг елемент на L.
L - списък от списъци.

$\exists x \in L\ \exists y \in L\ x \neq y \,\&\, \exists w \in x (w \in y \,\&\, \neg \exists z \in L\ z \neq x \,\&\, z \neq y \,\&\, w \in z).$

```
p2(L) :- member(X,L), member(Y,L), X\=Y, member(W,X),
         member(W,Y), not(member(Z,L), Z\=X, Z\=Y, member(W,Z)).
```

Задача

%pr([X1,Y1], [X2,Y2], [X3,Y3]) - генерира всички координати на правоъгълен △ с прав ъгъл в [X1,Y1].

```
pr([X1,Y1], [X2,Y2], [X3,Y3]) :-
        S1 is sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2),   S1>0,
        S2 is sqrt((X3-X1)^2 + (Y3-Y1)^2), S2>0,
        S3 is sqrt((X2-X3)^2 + (Y2-Y3)^2), S3>0,
        S1^2 + S2^2 = S3^2.

gen([X1,Y1], [X2,Y2], [X3,Y3]) :- nat(N),
        genKS(6, N, [X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3]),
        pr([X1,Y1], [X2,Y2], [X3,Y3]).
```

```
m(0,0).
m(X,Y):- X>0, (Y is X; Y is -X).

genKS(1,S,[T]):- m(S,T).
genKS(K,S,[T|Ts]):- K>1, between(0,K,X), m(X,T), K1 is K-1,
                    S1 is S-X, genKS(K1,S1,Ts).
```

ЛПР
10.IV
ф.

Езици за предикатно смятане от $I^{ви}$ ред

I Символи (език, азбука)

1 Логически
- променливи $x, y, z, \dots$ Var
- съюзителни връзки $\neg, \vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- квантори $\forall, \exists$
- равенство $(=)$ - не е задължително

2 Нелогически (различни за всеки език)
- константи $a, b, c \dots$ Const
- функционални символи $f, g, h \dots$ Func
- предикатни символи $p, q, r \dots$ Pred

II Термове (думи)

- x, където $x \in Var$
- c, където $c \in Const$
- ако $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ са термове, то $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ е терм
$f \in Func$, $|f| = n$.

III Формула
1. Атомарна
- ако σ_1, σ_2 са термове, то $\sigma_1 = \sigma_2$ е атомарна ф-ла
- ако $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ са термове, $p \in Pred$, $|p| = n$, то $p(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ е атомарна ф-ла.

2. Неатомарна

- ако φ е ф-ла, то $\neg\varphi$ е ф-ла
- ако φ и ψ са ф-ли, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ са ф-ли
- ако φ е ф-ла, а x - променлива, то $\exists x \varphi$ и $\forall x \varphi$ са формули

IV Структура $\mathcal{A}$ за езика $\mathcal{L}$ е $\langle A, I \rangle$

$A \neq \emptyset$ - универсум (носител)
$I(c) = c^{\mathcal{A}} = a \in A$ $c \in Const$
$I(f) = f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ $f \in Func$ $|f| = n$
$I(p) = p^{\mathcal{A}} = p \subseteq A^n$ $p \in Pred$ $|p| = n$

V Оценки
Нека $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$
Оценка в $\mathcal{A}$ е $v : Var \to A$

1 Оценка на терм
- $\tau = x$, то $\tau_v^{\mathcal{A}} = \|\tau\|^{\mathcal{A}}[v] = v(x)$
- $\tau = c$, то $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[v] = c^{\mathcal{A}}$
- $\tau = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, то $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[v] = f^{\mathcal{A}}(\|\sigma_1\|^{\mathcal{A}}[v], \dots, \|\sigma_n\|^{\mathcal{A}}[v])$

(f е тотална ф-ия!)

2 Оценка на ф-ла
$v : \mathbb{F}or \to \{T, F\}$

- Ако φ е атомарна ф-ла:

- $\varphi = \tau_1 = \tau_2$, то $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И \iff \|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\tau_2\|^{\mathcal{A}}[v]$

- $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И \iff \langle \|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v], \dots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[v] \rangle \in p^{\mathcal{A}}$

- $\varphi = \neg\psi$, то $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И \iff \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = Л$

- $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И \iff \|\psi_1\|^{\mathcal{A}}[v] = И$ или $\|\psi_2\|^{\mathcal{A}}[v] = И$

x	y	$H_\vee(x,y)$	$H_\&(x,y)$	$H_\Rightarrow(x,y)$	$H_\Leftrightarrow(x,y)$
Л	Л	Л	Л	И	И
Л	И	И	Л	И	Л
И	Л	И	Л	Л	Л
И	И	И	И	И	И

- $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2$, за $\circ \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, то
$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И \iff H_\circ(\|\psi_1\|^{\mathcal{A}}[v], \|\psi_2\|^{\mathcal{A}}[v]) = И$

- $\varphi = \exists x \psi$
$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И \iff$ има обект $a \in A$, такъв че $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v, x \to a] = И$

$$(v, x \to a) = \begin{cases} v(y), & \text{ако } y \neq x \\ a, & \text{ако } y = x \end{cases}$$

- $\varphi = \forall x \psi$
$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И \iff \forall a \in A \; \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v, x \to a] = И$

def: $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$ $\quad \mathcal{A} \models_v \varphi$

def Ако $\mathcal{A} \models_v \varphi$ за произволно v, то $\mathcal{A} \models \varphi$ - $\mathcal{A}$ е модел за φ

def Γ - множество от ф-ли
$\mathcal{A} \models \Gamma$, ако $\mathcal{A} \models \varphi \quad \forall \varphi \in \Gamma$

- Задача за изпълнимост

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - затворени ф-ли
Докажете, че м-вото $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ е изпълнимо
$\Updownarrow$
Докажете, че $\exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

(1) $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$
$\varphi_1 : \forall x \forall y \, (p(x,y) \Rightarrow \exists z \, (p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$
$\varphi_2 : \forall x \, \neg p(x,x)$ // нерефлексивност
$\varphi_3 : \forall x \exists y \exists z \, (p(x,y) \,\&\, p(z,x))$
$\varphi_4 : \forall x \forall y \, (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$ // силна антисиметричност

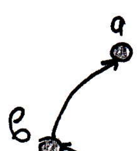
Докажете, че Γ е изпълнимо

$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, \langle x,y \rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow x < y)$

(2) $\forall x \, (p(x) \Rightarrow \forall y \, p(y))$ φ_1

$\forall x \forall y \, (q(y,y) \vee \neg q(x,y))$ φ_2
$\exists x \, \neg q(x,x)$ φ_3
$\exists x \forall y \, q(y,x)$ φ_4
$\forall x \forall y \forall z \, ((p(x) \leftrightarrow r(x,y,z)) \Leftrightarrow q(y,z))$ φ_5

от φ_3 - елемент, който не е в релация със себе си



от φ_4 - елемент, който е в релация с всички

$q(x,y)$ - $(x,y) \in E$
$p(x)$ - x е черен
$r(x,y,z)$ - $(z,y) \in E$

едноместен предикат (p) се интерпретира като цвят на връх на графа $\Rightarrow \varphi_1$ е вярна

φ_5 е винаги истина.

$\mathcal{A} = (\{a,b\}, \; q^{\mathcal{A}} = \{(a,b), (b,b)\}, \; p^{\mathcal{A}} = \{a,b\}, \; r^{\mathcal{A}} = \{(a,a,b), (b,a,b), (a,b,b), (b,b,b)\})$

Контролно №1

Задача 1

I в-нт

```
s([], _, []).
s([X|Xs], M, [X|Rs]):-length(X,N), N>M, s(Xs,N,Rs).
s([X|Xs], M, Rs):-length(X,N), N=<M, s(Xs,M,Rs).

p([X|Xs], [X|Rs]):-length(X,N), s(Xs,N,Rs).
```

II в-нт

```
s([], _, []).
s([X|Xs], M, [X|Rs]):-length(X,N), N<M, s(Xs,M,Rs).
s([X|Xs], M, Rs):-length(X,N), N≥M, s(Xs,N,Rs).

p([X|Xs], Rs):-length(X,N), s(Xs,N,Rs).
```

Задача 2.

I в-нт

• ако L не съдържа []

```
s(_, [], 0).
s(L, X, N):- member(Y,L), append(Y, X1, X), s(L, X1, M), N is M+1.

p(L,X):- member([], L), member(X, L).
p(L,X):- not((member([], L))), member(X,L), s(L,X,N), N>1.
```

• ако [] ∈ L, то търсеният предикат е еквивалентен на member.

II в-нт

аналогично на I-ви (вместо [] - 0).

Ф упр

ЛПР

04.V

Задача: Да се докаже, че даденото м-во от формули е изпълнимо (да се намери краен модел).

I.

$\varphi_1: \neg\exists x\, p(x,x)$

$\varphi_2: \forall x\forall y\, (p(x,y) \Rightarrow \exists z(p(x,z)\ \&\ p(z,y)))$

$\varphi_3: \forall x\exists y\, (p(x,y) \vee p(y,x))$

$\varphi_4: \exists x\forall y\, (x\neq y \Rightarrow p(x,y))$

$\mathcal{A}_1 = (\{0,1\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \mid x<y\})$

$\mathcal{A}_2 = (\{a,b,c\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\})$

II.

$\varphi_1: \exists u\forall x\, (f(x,u)=x\ \&\ f(u,x)=x)$ // ∃ неутрален елемент.

$\varphi_2: \forall x\forall y\forall z\, (f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z)))$ // асоциативност

$\varphi_3: \exists x\exists y\, (\neg(f(x,y) = f(y,x)))$ // не е комутативно

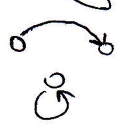
$\mathcal{A} = (\underbrace{M_{2\times 2}}_{\text{матрици}} \text{ над } \mathbb{R},\ f^{\mathcal{A}}(A,B) = A.B)$

III.

$\varphi_1: \exists x\exists y\, (p(x,y)\ \&\ \neg p(y,x))$

$\varphi_2: \forall x\exists y\, (\neg p(x,y)\ \&\ \neg p(y,x))$

$\varphi_3: \exists x\exists y\, (p(x,y)\ \&\ p(y,x))$



$\mathcal{A} = (\{a,b,c\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(c,c)\})$

IV.

$\varphi_1: \forall x\exists y\, p(x,y)$

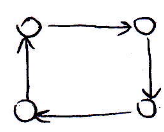
$\varphi_2: \neg\exists y\forall x\, p(x,y)$

$\varphi_3: \neg\exists x\forall y\, \neg p(x,y)$

$\varphi_4: \exists x\exists y\, (\neg p(x,y)\ \&\ \neg p(y,x))$

$\varphi_2 \Leftrightarrow \forall y\exists x\, \neg p(x,y)$

$\varphi_3 \Leftrightarrow \forall x\exists y\, p(x,y) \Leftrightarrow \varphi_1$



$\mathcal{A}_1 = (\{a,b,c,d\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\})$

$\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}/\{0\};\ p^{\mathcal{A}}(x,y) \Leftrightarrow x$ дели $y)$

V.

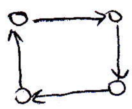
$\varphi_1: \forall x\forall y\forall z\, (p(x,y) \Rightarrow \neg p(x,z) \vee \neg p(z,y))$

$\varphi_2: \forall x\forall y\forall z\forall t\, (p(x,y)\ \&\ p(y,z)\ \&\ p(z,t) \Rightarrow p(x,t))$

$\varphi_3: \forall x\exists y\, \neg p(x,y)$

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi \Rightarrow \psi \\ \equiv \\ \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi\end{array}}$$

$\varphi_1 \Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z\, (p(x,z) \wedge p(z,y) \Rightarrow \neg p(x,y))$



$\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\})$

VI

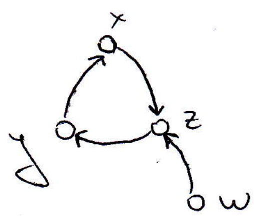
φ_1: $\neg\exists x\, p(x,x)$
φ_2: $\forall x \exists y (p(x,y) \,\&\, \neg \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$
φ_3: $\exists x\, \neg \exists y\, p(y,x)$
φ_4: $\exists x (\exists y\, p(y,x) \,\&\, \neg\exists y (p(y,x) \,\&\, \neg\exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y))))$

$$\equiv$$

$$\exists x (\exists y\, p(y,x) \,\&\, \forall y (\neg p(y,x) \vee \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y))))$$

$$\equiv \qquad \neg\alpha \vee \beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta$$

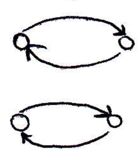
$$\exists x (\exists y\, p(y,x) \,\&\, \forall y (p(y,x) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y))))$$



$\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(c,d),(b,c),(d,b)\})$

VII

φ_1: $\forall y\, \neg p(y,y,y)$
φ_2: $\forall y \exists x\, p(y,x,y)$
φ_3: $\forall x\, \neg \forall y\, p(x,y,x) \equiv \forall x \exists y\, \neg p(x,y,x)$



$\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\},$
$p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\} \times \{a,b,c,d\})$

VIII

φ_1: $\forall x \forall y (p(x, f(f(y))) \Rightarrow \neg p(y, f(x)))$
φ_2: $\forall x \forall y (x = y \vee p(x, f(y)) \vee p(y, f(f(x))))$
φ_3: $\forall x (x \neq f(f(x)))$

$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z},\ f^{\mathcal{A}}(a) = a,\ p^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \mid x < y\})$

$\mathcal{A}_2 = (\{a\},\ p^{\mathcal{A}} = \emptyset,\ f^{\mathcal{A}}(a) = a)$

$\mathcal{A}_3 = (\{a,b\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(b,a)\},\ f^{\mathcal{A}}(a) = b,\ f^{\mathcal{A}}(b) = a)$ 

IX

φ_1: $\forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow q(y,x))$
φ_2: $\forall x \exists y (p(x,y) \Leftrightarrow q(x,y))$
φ_3: $\forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$
φ_4: $\exists x \exists y (\neg q(x,y) \,\&\, \neg q(y,x))$

& & $\quad \mathcal{A} = (\{a,b\},\ p^{\mathcal{A}} = q^{\mathcal{A}} = \{(a,a),(b,b)\})$

X

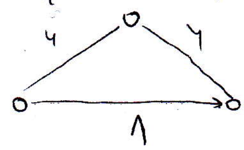
φ_1: $\forall x \forall y\, (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$ //антисиметричност + антирефлексивност

φ_2: $\forall x \exists y \exists z\, (p(x,z) \,\&\, p(y,x))$ //всеки има предишен и следващ

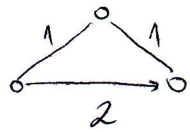
φ_3: $\forall x \forall y\, (p(x,y) \Rightarrow \exists z\, (p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_7,\ p^{\mathcal{A}}(x,y) \Leftrightarrow y-x = 1, 2$ или $4)$ // $\mathbb{Z}_7$ - остатъци mod 7

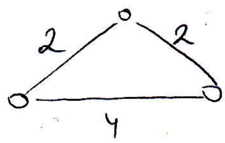
φ_3: ако $y-x=1$



ако $y-x=2$



ако $y-x=4$



ЛПР
11.V

Определимост

Задача. Дадено: $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \langle a,b,c\rangle \in p^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow c = a\cap b)$

Да се докаже, че в $\mathcal{A}$ са определими: $\{\emptyset\}$, $\{\mathbb{N}\}$, $\{\langle a,b\rangle \mid a \subseteq b\}$, $\{\langle a,b,c\rangle \mid c = a\cup b\}$

$\langle \{1,2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}\rangle \overset{?}{\in} p^{\mathcal{A}}$ ✓

- $\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x,y,x)$ // $\forall x\ \emptyset \cap\ = \emptyset$
- $\varphi_{\mathbb{N}}(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x,y,y)$ // $\forall x\ \mathbb{N}\cap X = X$
- $\varphi_{\subseteq}(x,y) \leftrightharpoons p(x,y,x)$ // $A\cap B = A \leftrightarrow A\subseteq B$
- $\varphi_{\cup}(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_{\subseteq}(x,z) \wedge \varphi_{\subseteq}(y,z) \wedge \forall w(\varphi_{\subseteq}(x,w)\wedge \varphi_{\subseteq}(y,w) \Rightarrow \varphi_{\subseteq}(z,w))$
- $\varphi_{\setminus}(x,y) \leftrightharpoons \exists w_1 \exists w_2 (\varphi_{\emptyset}(w_1) \wedge \varphi_{\mathbb{N}}(w_2) \wedge p(x,y,w_1) \wedge \varphi_{\cup}(x,y,w_2))$
  //Допълнение

Задача. Да се определят $\{0\}$, $\{1\}$, $\{\langle n,n\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$ в $\mathcal{A} = (\mathbb{N},\ \langle n,k,m\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow n^2 = km+1)$

- $\varphi_0(x) \leftrightharpoons \neg(\exists y \exists z\, p(x,y,z))$

  $\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y \forall z\, p(y,x,z)$
- $\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_0(y) \wedge p(x,y,y))$
- $\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \forall w_1 \forall w_2 (p(x,w_1,w_2) \Leftrightarrow p(y,w_2,w_2)) \vee (\varphi_0(x)\wedge\varphi_0(y))$

Задача. $\mathcal{A} = (\mathbb{N},\ \langle n,k,m\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow n = k+m^2)$

Да се определят $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{-2\}$

- $\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x,x,x)$ // $x = x+x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_0(y) \wedge p(x,y,x) \wedge \neg\varphi_0(x))$

  $p(x,y,x)$
  $\downarrow$
  $x = x^2$
  $\downarrow$
  $x=0 \vee x=1$
- $\varphi_2(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_1(y) \wedge p(x,y,y))$
- $\varphi_{-2}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists w \exists z(\varphi_0(y) \wedge \varphi_2(z) \wedge p(w,y,z) \wedge p(w,y,x) \wedge \neg\varphi_2(x))$

Задача | $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \langle n,k\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow n+k \geq 3)$. Да се определят: $\{0,1\}$, $\{2\}$, $\{0\}$, $\{1\}$.

- $\varphi_{0,1}(x) \leftrightharpoons \neg p(x,x)$
- $\varphi_2(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_{0,1}(x) \wedge \exists y(\varphi_{0,1}(y) \wedge \neg p(x,y))$
- $\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_2(y) \wedge \neg p(x,y))$
- $\varphi_1(x) \leftrightharpoons \varphi_{0,1}(x) \wedge \neg\varphi_0(x)$

Задача | $\mathcal{A} = (\mathbb{N}\setminus\{0\}, f^{\mathcal{A}}(m,n) = m^n, =)$
Да се докаже, че всеки елемент от универсума е определим.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y\, f(y,x) = y$

$\varphi_*(x,y,z) \leftrightharpoons \forall w\, (f(f(w,x),y) = f(w,z))$ // $(w^x)^y = w^{xy}$ $\quad x.y = z$

$\varphi_+(x,y,z) \leftrightharpoons \forall w\, \exists x_1 \exists y_1 \exists z_1 (x_1 = f(w,x) \wedge y_1 = f(w,y) \wedge z_1 = f(w,z) \wedge \varphi_*(x_1,y_1,z_1))$

$\varphi_{+1}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_1(z) \wedge \varphi_+(x,y,z))$

$\varphi_k(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{k-1}(y) \wedge \varphi_{+1}(y,x))$

Упр. 115.V

Задача

$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, f^{\mathcal{A}}(a) = a^3, =, +, c^{\mathcal{A}} = 1)$

$\{ \sqrt[100]{1100} \}$?

$\varphi_{1100}(x) \leftrightharpoons x = \underbrace{(((\dots(c+c)+c)+c)\dots+c)}_{1100}$

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$(x+1)^3 = x^3+3y+3x+1$
$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

$\varphi_{\wedge 2}(x,y) \leftrightharpoons f(x+c) = f(x)+x+x+x+y+y+y+c$
$y = x^2$

$\varphi_m(x,y,z) \leftrightharpoons \exists t_1 \exists t_2 \exists x_1 \exists y_1 (t_1 = x+y \,\&\, \varphi_{\wedge 2}(t_1,t_2) \,\&$
multiplication
$\varphi_{\wedge 2}(x,x_1) \,\&\, \varphi_{\wedge 2}(y,y_1) \,\&\, t_2 = x_1+z+z+y_1)$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons x+c=c$
$(\leftrightharpoons \forall z\ \varphi_m(x,z,x))$

Рекурсивно дефиниране:

$\varphi_{\wedge 1}(x,y) \leftrightharpoons x=y$

$\varphi_{\wedge m}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_{\wedge m-1}(x,z) \,\&\, \varphi_m(z,x,y))$

$\varphi_{\geq 0}(x) \leftrightharpoons \exists y\ \varphi_{\wedge 2}(y,x)$

$\varphi_{\sqrt[100]{1100}}(x) \leftrightharpoons \exists z(z = c+c+\dots+c \,\&\, \varphi_{\wedge 100}(x,z) \,\&\, \varphi_{\geq 0}(x))$

$z = x^{100}$
$1100 = x^{100}$
$x = \sqrt[100]{1100}$

Задача 2 $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, \langle a,b,c\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow 5a+3b=c)$
Да се определят: $\{0\}$, $\{\langle a,b\rangle \mid 5a = b\}$, $\{\langle a,b\rangle \mid 5b = -3a\}$
$\{\langle a,b\rangle \mid a = -b\}$, $\{\langle a,b\rangle \mid 2a = b\}$

- $\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x,x,x)$
- $\varphi_{*5}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_0(z) \,\&\, p(x,z,y))$
- $\varphi_{*3}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_0(z) \,\&\, p(z,x,y))$
- $\varphi_6(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_0(z) \,\&\, p(y,x,z))$ // $5y+3x=0 \iff 5y=-3x$
- $\varphi_-(x,y) \leftrightharpoons \exists x_1 \exists y_1(\varphi_{*3}(x_1,x) \,\&\, \varphi_{*5}(y_1,y) \,\&\, \varphi_6(x_1,y_1))$

// $x_1 = \frac{x}{3}$, $y_1 = \frac{y}{5}$, $5y_1 = -3x_1 \Rightarrow y = -x$

• $\varphi_{*2}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_-(x,z) \,\&\, p(x,z,y))$

Задача $\mathcal{A} = (I = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a<b\},\ p^{\mathcal{A}})$

$\langle i,j\rangle \in p^{\mathcal{A}}$ десният край на i съвпада с левия край на j
Пример: $\langle\langle 1,6\rangle, \langle 6,22\rangle\rangle$

Да се определят:
а) $\{\langle i,j\rangle \mid$ i и j имат общ ляв край$\}$

б) $\{\langle i,j\rangle \mid i=j\}$

в) $\{\langle i,j\rangle \mid$ левият край на i е по-малък от левия на $j\}$

г) $\{\langle i,j\rangle \mid i\cap j \neq \emptyset,\ i\setminus j \neq \emptyset,\ j\setminus i \neq \emptyset\}$

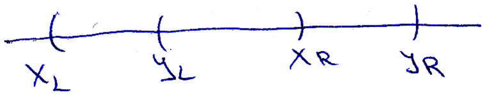
• $\varphi_{=L}(x,y) \leftrightharpoons \forall z(p(z,x) \Leftrightarrow p(z,y))$

• $\varphi_{=R}(x,y) \leftrightharpoons \forall z(p(x,z) \Leftrightarrow p(y,z))$

• $\varphi_{=}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{=L}(x,y) \,\&\, \varphi_{=R}(x,y)$

• $\varphi_{<L}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_{=L}(x,z) \,\&\, p(z,y))$

• $\varphi_{<R}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_{=R}(y,z) \,\&\, p(x,z))$

• 

$\varphi_1(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{<L}(x,y) \,\&\, \varphi_{<R}(x,y) \,\&\, \exists z(\varphi_{=L}(z,y) \,\&\, \varphi_{=R}(z,x))$

$\varphi_2(x,y) \leftrightharpoons \varphi_1(x,y) \vee \varphi_1(y,x)$

Задача. Σ - крайна азбука
$\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\Sigma^*),\ star(x,y),\ subset(x,y,z),\ diff(x,y,z) \leftrightharpoons z = x\setminus y)$
power set — звезда на Клини

Да се определят:
а) $\{\emptyset\}$
б) $\{\{\varepsilon\}\}$
в) позитивна обвивка $U(x)$
$U(x) = \{w \mid \exists$ редица $z_1,\dots,z_n: z_1,\dots,z_n \in X$ и $z_1\dots z_n = w$ и $n>0\}$

$\varphi_\emptyset(x) \leftrightharpoons \forall y\ subset(x,y)$

$\varphi_{\{\varepsilon\}}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_\emptyset(y)\ \&\ star(y,x))$ // $\emptyset^* = \varepsilon$

$$\Sigma^+ = \begin{cases} \Sigma^* / \{\varepsilon\} & \varepsilon \notin \Sigma \\ \Sigma^* & \text{иначе} \end{cases}$$

$\varphi_u(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_{\{\varepsilon\}}(z)\ \&\ (subset(z,x)\ \&\ star(x,y)) \vee$
$(\neg subset(z,x)\ \&\ \exists w\ (star(x,w)\ \&\ diff(w,x,y)))$

$\varphi_\emptyset(x) \leftrightharpoons diff(x,x,x)$

eps(x) :- diff(y,y,y), star(y,x) ε

n(X,Y) :- eps(z), (subset(z,x), star(x,y));
(not(subset(z,x)),(star(x,w), diff(w,z,y))).

ІІІ
22.V

Задача 1. $A = (\mathbb{N}, \mathcal{b})$ $\quad \mathcal{b}(x,y,z) \leftrightharpoons x \le z \le y$
Да се определи $=, 0, <, \ \varphi(x,y) \leftrightharpoons y = x+1$

- $\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \mathcal{b}(x,x,y)$.
- $\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall w \ \mathcal{b}(x,w,x)$
- $\varphi_<(x,y) \leftrightharpoons \underbrace{\exists z \ \mathcal{b}(x,y,z)}_{x \le y} \ \& \ \underbrace{\neg \varphi_=(x,y)}_{x \ne y}$
- $\varphi_\le(x,y) \leftrightharpoons \exists z \ \mathcal{b}(x,y,z)$
- $\varphi_{+1}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_<(x,y) \ \& \ \forall w \ (\varphi_<(x,w) \Rightarrow \varphi_\le(y,w))$

или

$\varphi_{+1}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_<(x,y) \ \& \ \neg \exists z \ (\mathcal{b}(x,y,z) \ \& \ \neg \varphi_=(x,y) \ \& \ \neg \varphi_=(y,z))$

На Пролог:

```
eq(x,y):-b(x,x,y)
less(x,y):-b(x,y,z), not(eq(x,y)).
plus1(x,y):-less(x,y), not(b(x,y,z), not(eq(x,z)), not(eq(y,z))).
```

Задача 2 $\quad A = (\{0,1\}, \ \langle x,y,z\rangle \in p^{A} \Leftrightarrow z = 1 - \min(x,y))$

Да се определе: $\{0\}$, $\{1\}$, min, max.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall z \ \varphi_{min}(x,z,x)$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall z \ \varphi_{max}(x,z,x)$

$\varphi_{max}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists x_1 \exists y_1 (p(x,x,x_1) \ \& \ p(y,y,y_1) \ \& \ p(x_1,y_1,z_1))$

x	y	p
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Това е операция NAND (not and)

$\neg x = x|x$

$x \vee y = (x|x)|(y|y)$

$x \& y = (x|y)|(x|y)$

$\varphi_\neg(x,y) \leftrightharpoons p(x,z,x)$

$\varphi_{min}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists x_1 \exists y_1 \exists z_1 (\varphi_\neg(x,x_1) \ \& \ \varphi_\neg(y,y_1) \ \& \ \varphi_{max}(x_1,y_1,z_1) \ \& \ \varphi_\neg(z_1,z))$

Задача 3 Да се докаже, че е изпълнимо:

$\forall x \forall y \forall z (p(x,y) \Rightarrow p(x,z) \& y \neq z)$

$\neg p(c,d)$ – няма ребра м/у c и d

$\exists x \exists y \exists z \forall w (x=w \vee y=w \vee z=w)$ – има макс 3 елемента

$A_1 = (\{0,1,2\}, p^A = \{(0,1),(0,2)\}, c^A=1, d^A=2)$

$A_2 = (\{0\}, p^A = \emptyset, c^A = d^A = 0)$

$A_3 = (\{0,1\}, p^A = \emptyset, c^A=0, d^A=1)$

Задача 4 $A \neq \emptyset$

а) $\mathcal{A} = (P(A), p^A(x,y,z) \leftrightarrow z = x \cap y)$, $P(A)$ - степенно м-во на A

Да се определят $\subseteq, \neq, \cup$.

- $\varphi_\subseteq(x,y) \leftrightharpoons p(x,y,x)$
- $\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \varphi_\subseteq(x,y) \& \varphi_\subseteq(y,x)$
- $\varphi_\neq(x,y) \leftrightharpoons \neg\varphi_=(x,y)$
- $\varphi_\cup(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_\subseteq(x,z) \& \varphi_\subseteq(y,z) \& \forall w(\varphi_\subseteq(x,w) \& \varphi_\subseteq(y,w) \Rightarrow \varphi_\subseteq(z,w))$

б) $\mathcal{A} = (P(A), q^A(x,y,z) \leftrightharpoons z = x \cup y)$

- $\varphi_\subseteq(x,y) \leftrightharpoons q(x,y,y)$
- $\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \varphi_\subseteq(x,y) \& \varphi_\subseteq(y,x)$
- $\varphi_\neq(x,y) \leftrightharpoons \neg\varphi_=(x,y)$
- $\varphi_\cap(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_\subseteq(z,x) \& \varphi_\subseteq(z,y) \& \forall w(\varphi_\subseteq(w,x) \& \varphi_\subseteq(w,y) \Rightarrow \varphi_\subseteq(w,z))$
- $\varphi_*(x,y) \leftrightharpoons \exists w_1 \exists w_2 (\varphi_\emptyset(w_1) \& \varphi_A(w_2) \& p(x,y,w_1) \& \varphi_\cup(x,y,w_2))$

допълнение

Задача 5 Изпълнимо ли е м-вото:

$\forall x \neg p(x,x)$

$\forall x \exists y \exists z (p(y,x) \& p(x,z))$

$\forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z\, p(x,z) \& p(z,y))$

$\forall x \exists y (x \neq y \& \neg p(x,y) \& \neg p(y,x))$

$\mathcal{A} = (\{a,b,c,d,e,f\},\ p^{\mathcal{A}} = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),$
$(d,e),(e,d),(e,f),(f,e),(d,f),(f,d)\}$

$\mathcal{A} = (\mathbb{R}\times\{0\} \cup \mathbb{R}\times\{1\},$
$\langle\langle a,x\rangle, \langle b,y\rangle\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow a<b \;\&\; x=y$

Задача 6 $\mathcal{A} = (\mathbb{Z},\ p^{\mathcal{A}}(a,b,c) \longleftrightarrow c = 3-ab)$
Да се определят: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y\, \forall w\; p(x,w,y)$ // $y=3$

$\varphi_3(x) \leftrightharpoons \exists y\,(\varphi_0(y) \;\&\; p(y,y,x))$ // $x = 3-0.0$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y\, \exists z\,(\varphi_0(y) \;\&\; \varphi_3(z) \;\&\; p(x,z,y))$ // $0 = 3-3.1$

$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \exists y\,(\varphi_1(y) \;\&\; p(y,y,x))$ // $x = 3-1.1$

$\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists y\,(\varphi_2(y) \;\&\; p(x,x,y) \;\&\; \neg\varphi_1(x))$ // $2 = 3-x^2,\ x\neq 1$

$\varphi_4(x) \leftrightharpoons \exists y\, \exists z\,(\varphi_1(y) \;\&\; \varphi_{-1}(z) \;\&\; p(y,z,x))$

$\varphi_{+3}(x,y) \leftrightharpoons \exists w\,(\varphi_{-1}(w) \;\&\; p(w,x,y))$

$\varphi_{-3}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{+3}(y,x)$