Вариант 1

зад 1

φ_1 – $f(x)$ е в релация q с x и няма нищо между тях

φ_2 – q е транзитивна и иррефлексивна

За $\Gamma_1 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ пример модел е:

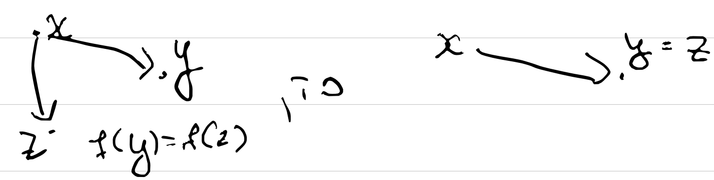
$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; q^{\mathcal{A}}; f^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$f^{\mathcal{A}}(n) \rightleftharpoons n+1$

$q^{\mathcal{A}}(n, m)$ тск $n > m$

φ_3 – връзване q и f с r

φ_4 –



φ_5 – r е сериална наляво.

За $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$:

$\mathcal{B} \rightleftharpoons \langle \mathbb{N}; q^{\mathcal{B}}, r^{\mathcal{B}}; f^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$f^{\mathcal{A}}(n) \rightleftharpoons n+1$

$p^{\mathcal{A}}(n,m)$ тстк $n > m$

$r^{\mathcal{A}}(n,m)$ тстк $n > m$.

Защо $\mathcal{B} \models \Gamma_2$?

за φ_1: тривиално $x+1 > x$ за все де е ест. число x и т.к. $\mathbb{N}$ числа е дискретни, то няма ест. число между $x+1$ и x.

за φ_2: $>$ е транзит. и иррефл.

за φ_3: като се опроси става

$x+1 > y$ тстк има z, т.е. $x > z$ и $z+1 = y$

$\Updownarrow$

$x+1 > z+1$ тстк $x > z$.

за φ_4: $f^{\mathcal{B}}$ е инективно.

за φ_5: в $\mathbb{N}$ няма най-голям елемент.

точки в евкл. равнина

382(2) $\mathcal{M} = \langle X; p^{\mathcal{M}}, r^{\mathcal{M}} \rangle$.

$\mathcal{L} = \langle p, r \rangle$

за $A \neq B$:

$p^{\mathcal{M}}(A, B, C) \Leftrightarrow C \in \overline{AB}$

за $A \neq B$, $C \neq D$:

$r^{\mathcal{M}}(A, B, C, D) \Leftrightarrow |\overline{AB}| = |\overline{CD}|$

а) $\varphi_=(x, y) \leftrightharpoons \forall z \forall t (p(z, t, x) \Leftrightarrow p(z, t, y))$

Използваме схема за обемност и третираме отсечките като м-ва от точки.

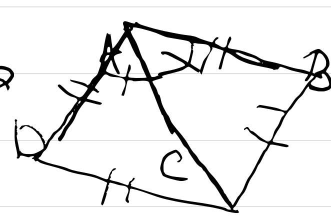
б) $B \neq C$ и $A \in \overline{BC}$ и $|\overline{BA}| = |\overline{AC}|$.

$\varphi_б(x, y, z) \leftrightharpoons \neg \varphi_=(y, z) \& p(y, z, x) \& r(y, x, x, z)$.

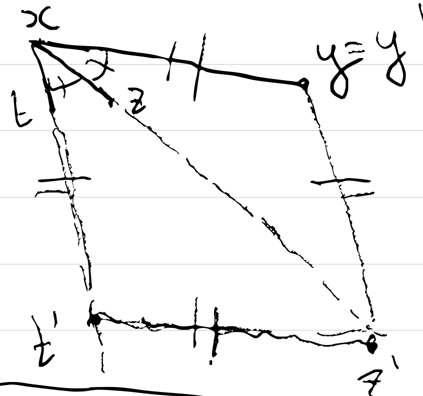
Буквално е написано условието отгоре но в $\mathcal{L}$.

в) $A \neq B$ и $A \neq C$ и $A \neq D$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$

ом. диагонал на ромб



$\varphi_{C)}(x,y,z,t) \leftrightharpoons \neg\varphi_{=}(x,y) \& \neg\varphi_{=}(x,z) \&$
$\neg\varphi_{=}(x,t) \&$
$\exists y' \exists z' \exists t' \big(p(x,y',y) \& p(x,z',z) \&$
$p(x,t',t) \& r(x,y',t',z') \&$
$r(x,t',y',z') \&$
$r(x,y',x,t')\big).$



могат да се продължат до страни на ромб.

Зад. 5

$\varphi_1 \& \varphi_2 \models \psi_1 \& \psi_2$ тстк. $\varphi_1 \& \varphi_2 \models \psi_1$ и $\varphi_1 \& \varphi_2 \models \psi_2$ тстк. $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi_1\}$ е неизп. и $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi_2\}$ е неизп.

$\varphi_1 \models\!\!\mid \forall x \forall y \forall z (\neg r(x,z) \vee \neg r(z,y) \vee r(x,y))$

φ_1 транзитивност

$\varphi_2 \models\!\!\mid \forall x \forall y \big((\neg p(x,y) \vee r(x,y)) \&$
$(\neg p(x,y) \vee r(y,x)) \&$
$(\neg r(x,y) \vee \neg r(y,x) \vee p(x,y))\big)$

φ_2 симетрично затваряне

$\neg\psi_1 \mathrel{\models\!\!\!\mid} \forall x \exists y\, p(x,y) \,\&\, \exists x \neg r(x,x)$

$\chi_1^S \leftrightharpoons \forall x\, p(x, f(x)) \,\&\, \neg r(a,a)$

ψ_1 – Ако няма изолирани точки по p^A, то r^A е рефл.

$\neg\psi_2 \mathrel{\models\!\!\!\mid} \exists x \exists y (\exists z (p(x,z) \,\&\, p(y,z) \,\&$
$\exists z ((\neg p(x,z) \vee \neg p(y,z)) \,\&$
$(p(x,z) \vee p(y,z))))$

$\chi_2^S \leftrightharpoons p(b,d) \,\&\, p(c,d) \,\&\, (\neg p(b,e) \vee \neg p(c,e)) \,\&$
$(p(b,e) \vee p(c,e))$

ψ_2 – $neigh(x) \cap neigh(y) \neq \emptyset \to$
$neigh(x) = neigh(y)$

Първо да се убедим, че има смисъл задачата т.е. съответно ще изсл.:

a) $\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \models \psi_1$

b) $\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \models \psi_2$

a) Нека $A \models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2$. Нека $A \models \forall x \exists y\, p(x,y)$.
Нека a е произ. и изберем свидетел b_a т.ч. $p^A(a, b_a)$. По φ_2 ще имаме $r^A(a, b_a)$ и $r^A(b_a, a)$. Така из φ_1 ще имаме $r^A(a,a)$. a беше произволно, т.ч. $A \models \forall x\, r(x,x)$.

b) Нека $\mathcal{A} \models \varphi_1 \& \varphi_2$. Нека a и b са произв.

Нека $\mathcal{A} \models \exists z(p(x,z) \& p(y,z))[x/a, y/b]$.

Нека c_0 е свидетел, т.е.

$p^{\mathcal{A}}(a,c_0)$ и $p^{\mathcal{A}}(b,c_0)$. По φ_2 имаме

$r^{\mathcal{A}}(a,c_0)$ и $r^{\mathcal{A}}(c_0,a)$, и

$r^{\mathcal{A}}(b,c_0)$ и $r^{\mathcal{A}}(c_0,b)$.

Нека d е произволно.

Нека $p^{\mathcal{A}}(a,d)$. Тогава

по φ_2 $r^{\mathcal{A}}(a,d)$ и $r^{\mathcal{A}}(d,a)$.

От φ_1 и $r^{\mathcal{A}}(b,c_0)$ и $r^{\mathcal{A}}(c_0,a)$, и $r^{\mathcal{A}}(a,d)$,

имаме $r^{\mathcal{A}}(b,d)$.

От φ_1 и $r^{\mathcal{A}}(d,a)$ и $r^{\mathcal{A}}(a,c_0)$ и $r^{\mathcal{A}}(c_0,b)$,

имаме $r^{\mathcal{A}}(d,b)$.

По φ_2 и последните две имаме $p^{\mathcal{A}}(b,d)$.

Аналогично, ако $p^{\mathcal{A}}(b,d)$ то

$p^{\mathcal{A}}(a,d)$.

d е произволно, т.е.

$$\mathcal{A} \models \forall z(p(x,z) \& p(y,z))[x/a, y/b]$$

a и b са произв.

Тогава $\mathcal{A} \models \varphi_2$.

Сега ще док-ме:

a) $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi_1\}$ е неизп.

b) $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi_2\}$ е неизп.

a) $D_1 \leftrightharpoons \{\neg r(x_1, z_1), \neg r(z_1, y_1), r(x_1, y_1)\}$

$D_2 \leftrightharpoons \{p(x_2, y_2), \neg r(x_2, y_2), \neg r(y_2, x_2)\}$

$D_3 \leftrightharpoons \{\neg p(x_3, y_3), r(x_3, y_3)\}$

$D_4 \leftrightharpoons \{\neg p(x_4, y_4), r(y_4, x_4)\}$

$D_5 \leftrightharpoons \{p(x_5, f(x_5))\}$

$D_6 \leftrightharpoons \{\neg r(a, a)\}$

План:

1. D_5 и D_3 $\rightsquigarrow r(x_5, f(x_5))^{D_7}$
2. D_5 и D_4 $\rightsquigarrow r(f(x_5), x_5)^{D_8}$
3. D_7 и D_1 $\rightsquigarrow \neg r(f(x_5), y_1), r(x_1, y_1)^{D_9}$
4. D_9 и D_1 $\rightsquigarrow r(x_1, x_5)^{D_{10}}$
5. D_6 и D_{10} $\rightsquigarrow \blacksquare$

Точно като двото ни.

Взимаме представката на ψ_1, минаваме от φ_2 и следтова φ_1.

Разпишете си го.

b) $D_1 \leftrightharpoons \{\neg r(x_1, z_1), \neg r(z_1, y_1), r(x_1, y_1)\}$

$D_2 \leftrightharpoons \{p(x_2, y_2), \neg r(x_2, y_2), \neg r(y_2, x_2)\}$

$D_3 \leftrightharpoons \{\neg p(x_3, y_3), r(x_3, y_3)\}$

$D_4 \leftrightharpoons \{\neg p(x_4, y_4), r(y_4, x_4)\}$

$D_5 \leftrightharpoons \{p(b, d)\}$

$D_6 \leftrightharpoons \{p(c, d)\}$

$D_7 \leftrightharpoons \{\neg p(b, e), \neg p(c, e)\}$

$D_8 \leftrightharpoons \{p(b, e), p(c, e)\}$

План:

1) D_3 и $D_5 \rightsquigarrow r(b, d)$ D_9
2) D_4 и $D_5 \rightsquigarrow r(d, b)$ D_{10}
3) D_6 и $D_3 \rightsquigarrow r(c, d)$ D_{11}
4) D_6 и $D_4 \rightsquigarrow r(d, c)$ D_{12}
5) D_7 и $D_2 \rightsquigarrow \neg r(b, e), \neg r(e, b), \neg p(c, e)$ D_{13}
6) D_{13} и $D_1 \rightsquigarrow \neg r(b, z_1), \neg r(z_1, e), \neg r(e, b), \neg p(c, e)$ D_{14}
7) D_{14} и $D_9 \rightsquigarrow \neg r(d, e), \neg r(e, b), \neg p(c, e)$ D_{15}
8) D_{15} и $D_1 \rightsquigarrow \neg r(d, e), \neg r(e, z_1), \neg r(z_1, b), \neg p(c, e)$ D_{16}
9) D_{16} и $D_{10} \rightsquigarrow \neg r(d, e), \neg r(e, d), \neg p(c, e)$ D_{17}

(10) D_{17} и $D_1 \rightsquigarrow \neg r(d,z_1), \neg r(z_1,e), \neg r(e,d), \neg p(c,e)$ D_{18}

(11) D_{18} и $D_{12} \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,d), \neg p(c,e)$ D_{19}

(12) D_{19} и $D_1 \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,z_1), \neg r(z_1,d), \neg p(c,e)$ D_{20}

(13) D_{20} и $D_{11} \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,c), \neg p(c,e)$ D_{21}

(14) D_{21} и $D_3 \rightsquigarrow \neg p(c,e), \neg r(e,c)$ D_{22}

(15) D_{22} и $D_4 \rightsquigarrow \neg p(c,e)$ D_{23}

(16) D_{23} и $D_8 \rightsquigarrow p(b,e)$ D_{24}

(17) D_{24} и $D_2 \rightsquigarrow \neg r(b,e), \neg r(e,b)$ D_{25}

(18) D_1 и $D_{25} \rightsquigarrow \neg r(b,z_1), \neg r(z_1,e), \neg r(e,b)$ D_{26}

(19) D_{26} и $D_9 \rightsquigarrow \neg r(d,e), \neg r(e,b)$ D_{27}

(20) D_{27} и $D_1 \rightsquigarrow \neg r(d,z_1), \neg r(z_1,e), \neg r(e,b)$ D_{28}

(21) D_{28} и $D_{12} \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,b)$ D_{29}

(22) D_{29} и $D_1 \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,z_1), \neg r(z_1,b)$ D_{30}

(23) D_{30} и $D_{10} \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,d)$ D_{31}

(24) D_{31} и $D_1 \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,z_1), \neg r(z_1,d)$ D_{32}

(25) D_{32} и $D_{11} \rightsquigarrow \neg r(c,e), \neg r(e,c)$ D_{33}

(26) D_{33} и $D_3 \rightsquigarrow p(c,e), \neg r(e,c)$ D_{34}

(27) D_{34} и $D_4 \rightsquigarrow p(c,e)$ D_{35}

(28) D_{35} и $D_{23} \rightsquigarrow \blacksquare$

Разпишете си го.