Ст. 1

Зад. 1 $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}; p^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$ за $\mathcal{L}(p, f)$ без ф.р.,

т.ч. $\langle a, b \rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}$ и $a < b$

$f^{\mathcal{A}}(a, b) = a.b$

за $a, b \in \mathbb{R}$.

Да се докаже, че:

(1.) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ е опр. в $\mathcal{A}$?

$\varphi_{\mathbb{N}}(x) \leftrightharpoons \exists y\, p(x, y)$.

(2.) Числото 2 е опр. в $\mathcal{A}$?

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y(\varphi_{\mathbb{N}}(y) \Rightarrow \neg p(y, x)) \& \varphi_{\mathbb{N}}(x)$.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y(\varphi_{\mathbb{N}}(y) \Rightarrow \varphi_0(y) \vee \neg p(y, x)) \&$
$\varphi_{\mathbb{N}}(x) \& \neg \varphi_0(x)$.

$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \forall y((\varphi_{\mathbb{N}}(y) \Rightarrow \varphi_0(y) \vee \varphi_1(y) \vee \neg p(y, x)) \&$
$\varphi_{\mathbb{N}}(x) \& \neg \varphi_0(x) \& \neg \varphi_1(x)$.

и така всеки синглетон от ест. число е опр. в $\mathcal{A}$.

(3) М-вото от простите числа е опр. в $\mathcal{A}$.

$\varphi_{=\mathbb{N}}(x, y) \leftrightharpoons \varphi_{\mathbb{N}}(x) \& \varphi_{\mathbb{N}}(y) \&$
$\forall z(\varphi_{\mathbb{N}}(z) \Rightarrow (p(z, x) \Leftrightarrow p(z, y)))$.

$\varphi_{Prime}(x) \leftrightharpoons \varphi_{N}(x) \,\&\, \neg\varphi_1(x) \,\&\, \neg\varphi_0(x) \,\&$
$\forall y \forall z\, (\varphi_N(y) \Rightarrow \varphi_N(z) \Rightarrow \varphi_{=N}(f(y,z),x) \Rightarrow$
$\varphi_1(y) \vee \varphi_1(z)).$

(4) Числото -1 и -2 са опр. в A.

$\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists y\, (\varphi_1(y) \,\&\, \varphi_{=N}(f(x,x),y)) \,\&\, \neg\varphi_1(x).$

$\varphi_{-2}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z\, (\varphi_{-1}(y) \,\&\, \varphi_2(z) \,\&\, \varphi_{=N}(f(y,x),z)).$

(5) Мн-вото от нечетните числа е опр. в A.

$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \varphi_N(x) \,\&\, \forall y \forall z\, (\varphi_N(y) \Rightarrow \varphi_N(z) \Rightarrow$
$\varphi_{=N}(f(y,z),x) \Rightarrow \neg\varphi_2(y) \,\&\, \neg\varphi_2(z)).$

(6) Съществува реално число, което не е опр. в A?

Т.к. имаме изброим език, то имаме изброимо много терми и ф-ли. Знаем, че мощността на $\mathbb{R}$ е неизброима. Значи такива реални числа съществуват в изобилие.
На другата група става въпрос

за подмножества на $\mathbb{Q}$.

Знаем, че $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{Q}}}$. Оттук $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{Q})}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ е с неизброима мощност. Значи има много подмн-ва на $\mathbb{Q}$, които са неопр. в $\mathcal{A}$.

Зад 2) φ_1 - $r^{\mathcal{A}}$ е транзитивна

φ_2 - Ако $x \in p^{\mathcal{A}}$, то $r^{\mathcal{A}}$ е сериална нагясно относно x и за вс. z, т.ч. $\langle x, z \rangle \in r^{\mathcal{A}}$, то $\langle z, y \rangle \notin r^{\mathcal{A}}$, където y е свидетел за сериалността нагясно отн. x на $r^{\mathcal{A}}$.

Преработваме я: $\forall z (r(x,z) \Rightarrow \neg r(z,y)) \models\!\mid$
$\models\!\mid \forall z (\neg r(x,z) \vee \neg r(z,y)) \models\!\mid$
$\models\!\mid \neg \exists z (r(x,z) \& r(z,y))$.

Като в φ_3 ф-лата, т.е. м/у x и y няма гостата.

φ_3 - Ако $x \notin p^{\mathcal{A}}$, то $r^{\mathcal{A}}$ е сериална нагясно отн. x със свидетел y и м/у тях няма никой, т.е. няма гостота м/у тях.

$\varphi_4 - \forall x \forall y (p(x) \& \neg p(y) \Rightarrow r(x,y))$
Точките със свойство p^A са "преди" тези нямащи свойство p^A отн. r^A.
$\varphi_5 - p^A \neq \emptyset \Leftrightarrow A \setminus p^A \neq \emptyset$.

$\Gamma_0 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
$A_0 = \langle \mathbb{Z}^-, r^A, p^A \rangle$ като
$p^A \leftrightharpoons \emptyset$ и $r^A \leftrightharpoons <_{\mathbb{Z}}$
$\varphi_1 - \checkmark$
$\varphi_2 -$ т.к. $p^A = \emptyset$, то тя е тривиално вярна
$\varphi_3 -$ по всяко цяло отриц. число няколо под него, като м/у тях няма други цели отр. за $\underline{y = x - 1}$.

$\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_4\}$
A_0 върши работа, т.к. за φ_4, то няма $p^A = \emptyset$, а предпоставката е конюнкция на $\neg p$ и p и винаги е лъжа.

$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_5\}$

Вече ще приемим модела.

$A_2 = \langle \mathbb{Z}; p^{A_2}, r^{A_2} \rangle$, като

$p^{A_2} \leftrightharpoons \mathbb{Z}^-$, $r^{A_2} \leftrightharpoons >_{\mathbb{Z}}$

φ_1 - ✓

φ_2 - $x \in p^{A_2} \iff x \in \mathbb{Z}^-$

За вс. цяло отр. число същ. по-голямо от него и м/у тях няма други цели отр. числа. За $y = x-1$.

φ_3 - $x \notin p^{A_2} \iff x \in \mathbb{N}$

За вс. ест. число същ. по-голямо от него и м/у тях няма други ест. За $y = x+1$.

φ_4 - $\mathbb{Z}^-$ са "преди" $\mathbb{N}$ спрямо r^{A_2}

φ_5 - $p^{A_2} \neq \emptyset$ и $A_2 \setminus p^{A_2} \neq \emptyset$.

$\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \{\neg\varphi_5\}$

$\neg\varphi_5 \mathrel{\vDash\!\dashv} \neg(\exists x\, p(x) \iff \exists x \neg p(x)) \mathrel{\vDash\!\dashv}$

$\neg((\exists x\, p(x) \Rightarrow \exists x \neg p(x)) \,\&\, (\exists x \neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)))$

$\mathrel{\vDash\!\dashv} ((\exists x\, p(x) \,\&\, \forall x\, p(x)) \vee (\exists x \neg p(x) \,\&\, \forall x \neg p(x)))$

$\iff p^A = A$ или $p^A = \emptyset$

Моделът за Γ_0 и Γ_1: A_0 върши работа. $A_0 \models \neg\varphi_5$ т.к. $p^{A_0} = \emptyset$.

(зад. 3)

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y ((q(x,y) \Rightarrow p(x,y)) \& \forall z (p(z,y) \Rightarrow r(x,z)))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x (\exists y\, p(y,x) \Rightarrow \exists y (p(y,x) \& \neg \exists z (p(z,y) \& p(z,x))))$,

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall z (\exists x \exists y (\neg q(x,y) \& \neg p(x,y)) \Rightarrow \forall x\, q(x,z))$,

$\varphi_4 \leftrightharpoons \neg \exists x \exists y \exists z ((p(x,y) \& r(y,z)) \& \neg p(x,z))$

$\varphi_5 \leftrightharpoons \exists y \forall x \exists z ((p(x,x) \vee r(y,z)) \Rightarrow (\neg p(x,x) \& r(y,z)))$.

С метода на резолюцията докажете, че $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_5$.

Т.е. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \neg\varphi_5\}$ е неизпълнимо.

$\psi \leftrightharpoons \neg\varphi_5 \models\!\!\dashv \forall y \exists x \forall z (p(x,x) \vee r(y,z) \vee p(x,x) \vee \neg r(y,z)) \models\!\!\dashv \exists x\, p(x,x)$.

Стъпка 1:

$\varphi_1' \leftrightharpoons \forall x \exists y ((\neg q(x,y) \vee p(x,y)) \& \forall z (\neg p(z,y) \vee r(x,z)))$.

от тк за вариците

$$\varphi_2' \leftrightharpoons \forall x\,(\forall \underset{t}{y}\,\neg p(\underset{t}{y},x) \vee \exists y\,(p(y,x)\ \&\ \forall z\,(\neg p(z,y) \vee \neg p(z,x))))$$

$$\varphi_3' \leftrightharpoons \forall z\,(\forall x \forall y\,(q(x,y) \vee p(x,y)) \vee \forall \underset{v}{x}\, q(\underset{v}{x},z))$$

$$\varphi_4' \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z\,(\neg p(x,y) \vee \neg r(y,z) \vee p(x,z)).$$

Стъпка 2:

$$\varphi_1'' \leftrightharpoons \forall x \exists y \forall z\,((\neg q(x,y) \vee p(x,y))\ \&\ (\neg p(z,y) \vee r(x,z))).$$

$$\varphi_2'' \leftrightharpoons \forall x \exists y \forall t \forall z\,(\neg p(t,x) \vee (p(y,x)\ \&\ (\neg p(z,y) \vee \neg p(z,x))))$$

$$\varphi_3'' \leftrightharpoons \forall z \forall x \forall y \forall v\,(q(x,y) \vee p(x,y) \vee q(v,z)).$$

Стъпка 3:

$$\varphi_1^S \leftrightharpoons \forall x \forall z\,((\neg q(x,f(x)) \vee p(x,f(x)))\ \&\ (\neg p(z,f(x)) \vee r(x,z))).$$

$$\varphi_2^S \leftrightharpoons \forall x \forall t \forall z\,(\neg p(t,x) \vee (p(g(x),x)\ \&\ (\neg p(z,g(x)) \vee \neg p(z,x)))).$$

$$\psi^S \leftrightharpoons p(a,a).$$

Стъпка 4:

$$\varphi_2^{fin} \rightleftharpoons \forall x \forall t \forall z ((\neg p(t,x) \vee p(g(x),x)) \,\&\, (\neg p(t,x) \vee \neg p(z,g(x)) \vee \neg p(z,x))).$$

Дизюнкти:

$D_1 = \{\neg q(x_1, f(x_1)), p(x_1, f(x_1))\}$

$D_2 = \{\neg p(z_2, f(x_2)), r(x_2, z_2)\}$

$D_3 = \{\neg p(t_3, x_3), p(g(x_3), x_3)\}$

$D_4 = \{\neg p(t_4, x_4), \neg p(z_4, g(x_4)), \neg p(z_4, x_4)\}$

$D_5 = \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5), q(v_5, z_5)\}$

$D_6 = \{\neg p(x_6, y_6), \neg r(y_6, z_6), p(x_6, z_6)\}$

$D_7 = \{p(a,a)\}$

$D_8 = Res(D_2\{x_2/y_6, z_2/z_6\}, D_6) =$
$= \{\neg p(z_6, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, z_6)\}$

$D_9 = Collapse(D_5\{v_5/x_5, z_5/y_5\}) = \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5)\}$

$D_{10} = Res(D_1, D_9\{x_5/x_1, y_5/f(x_1)\}) = \{p(x_1, f(x_1))\}$

$D_{11} = Res(D_3\{x_3/f(y_6)\}, D_8\{z_6/g(f(y_6))\}) =$
$= \{\neg p(t_3, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, g(f(y_6)))\}$

$$D_{12} = Res(D_4\{z_4/x_6,\ x_4/f(y_6)\},\ D_{11}) =$$
$$= \{\neg p(t_4, f(y_6)),\ \neg p(x_6, f(y_6)),$$
$$\neg p(t_3, f(y_6)),\ \neg p(x_6, y_6)\}$$

$$D_{13} = Collapse(D_{12}\{t_4/a,\ y_6/a,\ x_6/a,\ t_3/a\}) =$$
$$= \{\neg p(a, f(a)),\ \neg p(a,a)\}$$

$$D_{14} = Res(D_{13},\ D_{10}\{x_1/a\}) = \{\neg p(a,a)\}$$
$$= Res(D_{14},\ D_7).$$