

Първо тренировъчно контролно по ЛП

10 април 2021

Задача 1 (Определимост) Нека \mathcal{F} е множеството на (навсякъде дефинираните) функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. \mathcal{S} е структура с носител \mathcal{F} за език с един двуместен предикатен символ d и един двуместен функционален символ p , в която:

$$\begin{aligned} p^{\mathcal{S}}(f, g) = h & \stackrel{def}{\iff} \forall x \in \mathbb{R} (f(x)g(x) = h(x)) \\ d^{\mathcal{S}}(f, g) & \stackrel{def}{\iff} \forall x \in \mathbb{R} (f \text{ е диференцируема в } x \text{ и } g(x) = f'(x)). \end{aligned}$$

Да се докаже, че в \mathcal{S} са определими:

1. $\{0\}$, където $0(x) = 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.
2. множеството от константни функции \mathcal{C} .
3. $P_n = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ е полином от степен } n\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
4. $Exp = \{f \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (f(x) = c.e^x)\}$.

Кои от следните две множества са определими и кои не и защо:

$$\begin{aligned} SinCos &= \{f \in \mathcal{F} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (f(x) = a \sin x + b \cos x)\} \\ Sin &= \{f \in \mathcal{F} \mid \exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (f(x) = a \sin x)\} \end{aligned}$$

Задача 2 (Изпълнимост) Нека p и q са двуместни предикатни символи. Да означим с Γ_0 множеството от следните четири формули:

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (p(x, y) \vee p(y, x)), \\ & \forall x \forall y (\exists z (p(x, z) \& p(z, y) \Rightarrow p(x, y))), \\ & \forall x \forall y (q(x, y) \Leftrightarrow p(x, y) \& \neg p(y, x)), \\ & \exists x (\forall y p(y, x) \& \exists y q(y, x)). \end{aligned}$$

Нека $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\exists x \forall y (q(y, x) \Rightarrow \exists z (q(y, z) \& q(z, x)))\}$,

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\forall x \exists y (\neg q(x, y) \& \neg q(y, x))\} \text{ и}$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{\exists x \exists y (q(x, y) \& \neg \exists z (q(x, z) \& q(z, y)))\}.$$

Кои от множествата $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ са изпълними и кои са неизпълними?