Решения на задачи контролно 1*

13 ноември 2021 г.

1 Изпълнимост

$\mathfrak{L} = \langle p, q \rangle$ е език с формално равенство и с два двуместни предикатни символа p и q.
Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(p(x,x) \,\&\, q(x,x))$.
$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y((p(x,y) \to p(y,x)) \,\&\, (q(x,y) \to q(y,x)))$.
$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \,\&\, p(y,z) \to p(x,z)) \,\&\, (q(x,y) \,\&\, q(y,z) \to q(x,z)))$.
$\varphi_P(x,y) \leftrightharpoons \neg(x \doteq y) \,\&\, p(x,y)$.
$\varphi_Q(x,y) \leftrightharpoons \neg(x \doteq y) \,\&\, q(x,y)$.
$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \exists y(\varphi_P(x,y) \,\&\, \forall z(\varphi_P(x,z) \to z \doteq y))$.
$\varphi_5 \leftrightharpoons \exists t(\forall x(\neg(t \doteq x) \to \neg q(x,t)) \,\&\, \forall y(\neg(y \doteq t) \to \exists z(\varphi_Q(y,z) \,\&$
$\forall e(\varphi_Q(y,e) \to z \doteq e))))))$.

2 Определимост

Нека $\mathcal{S}$ е множеството от всички изброими редици от естествени числа, тоест:

$$\mathcal{S} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \,|\, x_i \in \mathbb{N}\}.$$

Разглеждаме структура $\mathcal{A}$ с носител $\mathcal{S} \cup \mathbb{N}$ за език с един триместен предикатен символ $dilate$ с интерпретация:

$$dilate^{\mathcal{S}}(x,d,y) \xleftrightarrow{def} x, y \in \mathcal{S} \,\&\, d \in \mathbb{N} \,\&\, \forall k \in \mathbb{N}(y_k = x_{kd}).$$

Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{A}$:

1. $\{1\}$ и $\{0\}$
2. $Const \leftrightharpoons \{x \in \mathcal{S} \,|$ всички елементи на x са равни$\}$,
3. $\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \,|\, ab = c\}$

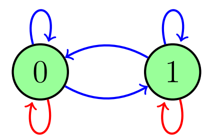
Определими ли са в $\mathcal{A}$:

1. $\{2\}$?

*Условията на задачите са в оригинал преди размножаването и решенията им ще ви послуждат и за разновидностите им паднали се на контролното.

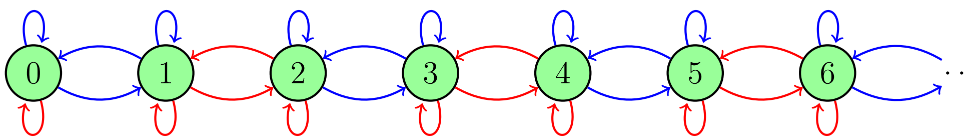
3 Примерно решение на задачата за изпълнимост

И за двата варианта за множеството Γ_1 върши работа структура $\mathfrak{A}$ с две точки $|\mathfrak{A}| = \{0, 1\}$, два класа на еквивалентност по релацията $r^{\mathfrak{A}}$ и един по релацията $p^{\mathfrak{A}}$ като константата във вариант 2 е интерпретирана примерно с 0 $c^{\mathfrak{A}} \leftrightharpoons 0$:



$$\mathfrak{A} = \langle \{0, 1\}; p^{\mathfrak{A}}, q^{\mathfrak{A}}; c^{\mathfrak{A}} \rangle$$
$$p^S \leftrightharpoons \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$$
$$q^S \leftrightharpoons \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$$
$$c^{\mathfrak{A}} \leftrightharpoons 0$$

За $Gamma_2$ следната структура е модел и за двета варианта:



$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; p^{\mathfrak{A}}, q^{\mathfrak{A}}; c^{\mathfrak{A}} \rangle$$
$$p^S \leftrightharpoons \{\langle 2n, 2n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 2n+1, 2n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$q^S \leftrightharpoons \{\langle 2n+1, 2n+2\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 2n+2, 2n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$c^{\mathfrak{A}} \leftrightharpoons 0$$

4 Примерно решение на задачата за определимост

$\varphi_{\mathbb{N}}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z dilate(y, x, z)$.

$\varphi_{\mathcal{S}}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z dilate(x, y, z)$.

$\varphi_{=_\mathbb{N}}(x, y) \leftrightharpoons \varphi_{\mathbb{N}}(x) \,\&\, \varphi_{\mathbb{N}}(y) \,\&\, \forall z \forall t(\varphi_{\mathcal{S}}(z) \,\&\, \varphi_{\mathcal{S}}(t) \to (dilate(z, x, t) \leftrightarrow dilate(z, y, t)))$.

$\varphi_{Const}(x) \leftrightharpoons \varphi_{\mathcal{S}}(x) \,\&\, \forall y(\varphi_{\mathbb{N}}(y) \to dilate(x, t, x))$.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \varphi_{\mathbb{N}}(x) \,\&\, \forall y(\varphi_{\mathcal{S}}(y) \to \exists z(dilate(y, x, z) \,\&\, \varphi_{Const}(z)))$.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \varphi_{\mathbb{N}}(x) \,\&\, \forall y(\varphi_{\mathcal{S}}(y) \to dilate(y, x, y))$.

$\varphi_*(x, y, z) \leftrightharpoons \varphi_{\mathbb{N}}(x) \,\&\, \varphi_{\mathbb{N}}(y) \,\&\, \varphi_{\mathbb{N}}(z) \,\&\, \forall u \forall v \forall w(dilate(v, x, u) \,\&\, dilate(v, y, w) \leftrightarrow dilate(w, z, u))$.

За $\varphi_{=_\mathbb{N}}(x, y)$ използваме позната аксиома за обемност.
За $\varphi_{Const}(x)$ разчитаме на каквото и число да вземем $\forall n(x_n = x_{tn})$ (включително за 0 става $\forall n(x_n = x_0)$).
Идеята на $\varphi_0(x)$ е, че каквито и редица y има редица z, такива че $\forall n(z_n = y_{xn})$, то z ще е константна редица точно тогава, когато x е 0.
За $\varphi_1(x)$ става дума, че каквато и редица y да вземем $\forall n(y_n = y_{xn})$ ще държи винаги точно когато x е 1.
Умножението е следното: ако $u_n = v_{nx}$, $v_m = w_{my}$, то $u_k = w_{kz}$ от $w_{kxy} = v_{kx} = u_k = w_{kz}$ и обратно.

$\{2\}$ е неопределимо. Нека $h(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 2, & x = 3 \\ 3, & x = 2 \\ x, & else \end{cases}$ е биективна функция $h : Prime \to Prime$ за $Prime$ множеството от простите числа. От Основна теорема на аритметиката всяко естествено число $n > 1$ има запис като произведение на прости чсила повдигнати на някаква степен естествено число, т.е. $n = p_0^{a_0} p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \dots$ като само краен брой от степените $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ са ненулеви за $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ някакво изброяване на простите числа. БОО нека $p_0 = 2$ и $p_1 = 3$. Нека за $n \in \mathbb{N}$ дефинираме биекцията $h_{\mathbb{N}}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ h(p_0)^{a_0} h(p_1)^{a_1} \dots h(p_k)^{a_k} \dots, & x > 1 \text{ и } n = p_0^{a_0} p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \dots \end{cases}$ за $h_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Сега остава да дефинираме и най-сложната биекция върху редиците и след това ще простъпим към конструкцията на автоморфизма и идея за доказателството.

Нека $h_{\mathcal{S}}(x) \leftrightharpoons \{x_{h_{\mathbb{N}}(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$, за $h_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ е поредната биекция, но този път върху редиците. Сега нека $H \leftrightharpoons h_{\mathbb{N}} \cup h_{\mathcal{S}}$ е биекция от $|\mathfrak{A}|$ в $|\mathfrak{A}|$ (обединение на биекции с непресичащи се домейни и рейнджове е пак биекция). Остава само проверката, че за $\alpha, \beta \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$, то $dilate^{\mathcal{S}}(\alpha, n, \beta) \iff dilate^{\mathcal{S}}(H(\alpha), H(n), H(\beta))$. Тя е оставена на читателя за упражнение.