高等微积分笔记

mny

2023 年 11 月 23 日

目录

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x,y) | a \le x \le b, \quad 0 \le y \le h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\operatorname{area}(D)$.

特例: $a = 0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\operatorname{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})\, h(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\operatorname{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i)\, h(\xi) \tag{1.1}$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(D) &\simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} h(\xi_i = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 && (1.2)\\ &= \frac{b^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) && (1.3)\\ &= \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) && (1.4)\\ &= \frac{b^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \xlongequal{\text{记为}} x_n && (1.5)\end{aligned}$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x) = x^k, \quad (k \geq 2)$ *相应的*

$$\operatorname{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} i^k \tag{1.6}$$

更接近哪个数 L? 对于更一般 h, 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?

x 流动到 $x+o$,

$$\begin{aligned} S(x+o) - S(x) &\simeq o \cdot h(x) && (1.7)\\ \Longrightarrow\ h(x) &\simeq \frac{S(x+o)-S(x)}{o} \quad (\text{流数法}) && (1.8)\end{aligned}$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a) = a^m, \quad (m \in \mathbb{Z}_+)$

$$\Longrightarrow\ h(x) \simeq \frac{(x+o)^m - x^m}{o} \tag{1.9}$$

使用牛顿二项式公式

$$(x+y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} y + \cdots + C_m^m y^m \tag{1.10}$$

带入, 得到

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} o \cdots + C_m^m o^{m-1} \xlongequal{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \tag{1.11}$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a)=\frac{1}{k+1}a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b)=\int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x)=S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)'=h(x) \tag{1.12}$$

和

$$\int_0^b S'(x)\,\mathrm{d}x=S(b)-S(0) \tag{1.13}$$

2 集合与映射

定义 2.1. *设 X,Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据*

对于 X 中的每一个元素 x, 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f\colon X\to Y \tag{2.1}$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 domain, Y 为 f 的陪域 co-domain.

$$\forall A\subseteq X,\quad f(A)=\{y\in Y|\exists a\in A\text{使}y=f(a)\} \tag{2.2}$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X)=\mathrm{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. *原像集. 对 $V\subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集*

$$f^{-1}(V)=\{x\in X|f(x)\in V\}=\bigcup_{y\in V}F_y \tag{2.3}$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c)=\left(f^{-1}(V)\right)^c \tag{2.4}$$

显然有

$$f^{-1}\left(A\cup B\right)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B) \tag{2.5}$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$, 可定义复合映射 $g \circ f\colon X \to Z$,

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right), \quad \forall x \in X \tag{2.6}$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z,\ h\colon Z \to W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.7}$$

  证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 定义为 $\mathrm{Id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f\colon X \to Y$ 有

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X \tag{2.8}$$

对于两个集合 X, Y, 存在一个集合

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\} \tag{2.9}$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. *所谓一个范畴 (Category) $\mathcal{C}$ 是指如下一个数据:*

- *对象 X, Y, Z[1], 构成 object* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- *对任何 $X, Y \in \mathcal{C}$, 指定一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 称 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 (morphism), 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为*

$$f\colon X \to Y \tag{2.10}$$

- *态射可复合, 即 $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.11}$$

  记为

$$(f,g) \to g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.12}$$

[1]在线性代数里面它们是线性空间

- 态射复合是结合的，即 $\forall X, Y, Z, W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，设

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), \tag{2.13}$$

  有 *(结合律)*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.14}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \tag{2.15}$$

- 态射的复合是有单位元的，对任何对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，指定态射

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \tag{2.16}$$

  满足，对 $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$，有

$$f \circ \mathrm{id}_X = f,\ \mathrm{id}_X \circ g = g \tag{2.17}$$

例 2.1. 范畴 *Set*，其中的对象是集合 X, Y，此时

- 态射 $\longleftrightarrow$ 映射

$$\mathrm{Hom}_{Set}(X,Y) = \{\text{映射} f \colon X \to Y\} \tag{2.18}$$

- 态射复合 $\longleftrightarrow$ 映射复合
- $\mathrm{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 矢量空间 *Vect:* 对象是线性空间，态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 *Top:* 对象是拓扑空间，态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中)**.** 称映射 $f \colon x \to y$ 是

- 单射 $\iff \forall x \neq x'$，有 $f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff \forall y \in Y,\ \exists x \in X \text{使} f(x) = y$.
- 双射 $\iff$ 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f \colon X \to Y$ 是

- 单射

$$\iff \exists \text{映射} g \colon Y \to X, \text{使} g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \textit{(只在集合当中适用)} \tag{2.19}$$

  一般的范畴中:

$$\iff \forall \text{集合} W, \forall \text{映射} g_1, g_2 \colon W \to X, \text{若} f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{则有} g_1 = g_2 \tag{2.20}$$

- 满射

$$\iff \forall \text{集合} Z, \forall \text{映射} h_1, h_2 \colon Y \to Z. \text{若有} h_1 \circ f = h_2 \circ f, \text{则有} h_1 = h_2 \tag{2.21}$$

定理 2.1. 映射 $f \colon X \to Y$ 是双射 $\iff \exists$映射$g \colon Y \to X$使$g \circ f = \mathrm{id}_X$ 且$f \circ g = \mathrm{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

“$\implies$”:

由 f 满知 $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.

于是 $\forall y \in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$, 得到映射 g.

“$\impliedby$”:

设 $\exists g \colon Y \to X$ 使

$$g \circ f = \mathrm{id}_X,\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.22}$$

证 f 单: 若 $f(x) = f(x')$, 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \tag{2.23}$$

即

$$x = x' \tag{2.24}$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y \in Y,\ f[g(y)] = f \circ g(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y \tag{2.25}$$

所以 $y \in \operatorname{Im} f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 称态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \tag{2.26}$$

使得

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \ \text{且}\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.27}$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 $\exists$同构态射$f \colon X \to Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1, g_2 \colon Y \to X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1. \tag{2.28}$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$.

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \tag{3.1}$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s,t) | s \in S, t \in T\} \tag{3.2}$$

引入了乘法.

加法在 $\mathbb{N}$ 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 $\mathbb{Z}$. 但 $\mathbb{Z}$ 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+)$, 将 $\mathbb{Z}$ 扩充为 $\mathbb{Q}$ [2] .

命题 3.1. *$\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2 = 2$ 的正数).*

证明. 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n 无公因子. 则 $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

$m^2 = 2n^2$ 说明 m 是偶数, 代回发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 $\mathbb{Q}$ 需要进一步扩充.

命题 3.2. *x 是有理数 $\iff$ x 是有限或无限循环小数.*[3]

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. *所谓戴德金分隔是指一个有序对 (A, B), 满足:*

- *A, B 是 $\mathbb{Q}$ 的非空子集.*
- *$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{Q}$*
- *$\forall x \in A, \forall y \in B,$ 有 $x < y$*
- *集合 A 无最大元素.*

[2]这些 “逆” 都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\text{所有} F(x) | F' = f\}. \tag{3.3}$$

[3]小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

称两个戴德金分割 $(A,B)=(A',B') \iff A=A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数，就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D=\{\text{所有戴德金分割}\} \tag{3.4}$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a,B_a),\ \text{其中}A_a=\{x\in\mathbb{Q}|x\le a\} \tag{3.5}$$

- 序.

  定义 $(A,B)\le(A',B') \iff A\subseteq A'$

- 和.

$$(A,B)+(A',B')=(A+A',\mathbb{Q}/(A+A')) \tag{3.6}$$

- 称一个戴德金实数 (A,B) 为一个戴德金有理数 $\iff$ A 有最大元素.

以上定义好实数集 $\mathbb{R}$, 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

3.2 确界定理

定义 3.3. 设非空集合 $E\in\mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素，如果 $\forall x\in E, x\le a$, 记为 $a=\max E$

最小元素: $a=\min E \iff a\in E\text{且}\forall x\in E\text{有}x\ge a$

定义 3.4. 上界和下界.

称 c 为 E 的一个上界，如果 $\forall x\in E\text{有}x\le c$.

称 d 为 E 的一个下界，如果 $\forall x\in E\text{有}x\ge d$.

定义 3.5. 确界.

称 c 是 E 的上确界 *(supremum)*, 记作 $c=\sup E$, 如果 c 是 E 的最小的上界.

$\iff c=\min\{E\text{ 的上界}\}$

称 d 是 E 的下确界 *(infimum)*, 记作 $d=\inf E$, 如果 d 是 E 的最大的下界.

$\iff d=\max\{E\text{ 的下界}\}$

命题 3.3. 任意非空实数集 F, $\min F,\max F$ 非必存在.

例 3.1. $F=(0,1)$, 则 $\min F,\max F$ 皆不存在.

证明. 因为

$$\forall a \in F \implies \frac{a}{2} \in F \implies a\text{不是最小元素}, \tag{3.7}$$

$$\forall b \in F \implies \frac{b+1}{2} \in F \implies b\text{不是最大元素}. \tag{3.8}$$

□

这样, 从字面上有

- 若 E 无上界, 则 E 无上确界.
- 若 E 有上界, $\{E$ 上界$\}$ 非空, **是否有最小元素需要证明**.

定理 3.1 (确界定理)**.** 有上界的非空实数集一定有上确界, 有下界的非空实数集一定有下确界.

证明. 只证明上确界. 对于实数采用戴德金实数的定义.

设

$$E = \{x_\alpha = \text{戴德金分割 } (A_\alpha, B_\alpha) | \alpha \in \text{指标集 } \Lambda\} \tag{3.9}$$

已知 E 有上界 $\tilde{c} = (\tilde{A}, \tilde{B})$, $(\tilde{A} \subsetneqq \mathbb{Q})$.

由 $\forall \alpha,\ \tilde{c} \geq x_\alpha$, 根据定义有

$$\forall \alpha,\ \tilde{A} \supseteq A_\alpha \implies \tilde{A} \supseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \xlongequal{\text{定义为}} \{y | \exists \alpha \in \Lambda \text{使} y \in A_\alpha\} \tag{3.10}$$

令 $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ (A 必是 $\mathbb{Q}$ 的非空真子集).

考虑 $(A, B = \mathbb{Q}/A)$, 可以直接验证它是一个戴德金分割.

- 定义中的第三条:

  $$\forall x \in A,\ \exists \alpha \text{使} x \in A_\alpha \tag{3.11}$$

  而且

  $$B = \left(\bigcup A_\alpha\right)^C = \bigcap A_\alpha^C = \bigcap_\alpha B_\alpha \implies \forall y \in B, \forall \alpha,\ y \in B_\alpha \tag{3.12}$$

  即我们可以找到一个 α,

  $$x \in A_\alpha, y \in B_\alpha \implies x < y. \tag{3.13}$$

- 定义中的第四条: 要证 A 中无最大元, 采用反证法.

  若 A 中有最大元, 记为 z, 则

  $$z \in A = \bigcup_\alpha A_\alpha \implies \exists \alpha \text{使} z \in A_\alpha. \tag{3.14}$$

  由于 z 是 A 最大元, 并且 $A_\alpha \subseteq A$, z 也是 A_α 最大元, 矛盾.

这样 $y=(A,B)=(\bigcup_\alpha A,\bigcup_\alpha B)$ 是一个戴德金实数, **我们可以断言** $y=\sup E$, 分为两部分内容:

- y 是 E 上界 $\iff y\geq x_\alpha \iff A\supseteq A_\alpha,\ \forall\alpha$ 显然成立.
- $y\leq E$ 的任何上界 $z \xlongequal{\text{记为}} (A_0,B_0)$, 由 z 是上界可知,

$$\forall\alpha,\ A_0\supseteq A_\alpha \implies A\supseteq\bigcup_\alpha A_\alpha=A \implies z>y. \tag{3.15}$$

□

命题 3.4 (判断上确界)**.** *$C=\sup E$ 等价于下列两点同时成立:*

1. *$\forall x\in E$ 有 $x\leq c$.*
2. *$\forall\varepsilon>0\ \exists x\in E$ 使 $x\geq c-\varepsilon$.*

定义 3.6. *称 E 是有界的, 如果 E 既有上界又有下界.* $\iff \exists k>0$使$\forall x\in E$有$|x|\leq k$

例 3.2. *设 E 是有界的非空实数集, 则*

$$\sup\{x-y|x,y\in E\}=\sup E-\inf E. \tag{3.16}$$

证明. 记 $F=\{x-y|x,y\in E\}$, 可知 F 非空有界.

由确界定理知, $\sup F,\sup E,\inf E$ 皆存在, 有

- $\sup E-\inf E$ 是 F 的上界, 因为 $\forall x,y\in E$, 有 $x\leq\sup E, y\geq\inf E$, 所以

$$x-y\leq\sup E-\inf E. \tag{3.17}$$

  说明 $\sup E-\inf E$ 不小于 F 的任何成员, 是上界.

- 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\sup E-\frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 上界, $\inf E+\frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 下界.

$$\exists x,y\in E,\ x-y>\sup E-\inf E-\varepsilon \tag{3.18}$$

  说明 $\forall\varepsilon>0,\ \sup E-\inf E-\varepsilon$ 不是 F 上界.

所以 $\sup E-\inf E=\sup F$. □

3.3 确界定理应用: 证明阿基米德定理 (命题3.5)

命题 3.5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z}$使$x < n$.

证明. 反证法. 假设结论不对, 则 $x \geq n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, 即 x 是 $\mathbb{Z}$ 的一个上界. 这说明 $\mathbb{Z}$ 非空且有上界.

由确界定理知, $\sup \mathbb{Z}$ 存在, 记 $M \equiv \sup \mathbb{Z}$, 那么

$$n+1 \in \mathbb{Z} \implies n+1 \leq M \implies n \leq M-1. \tag{3.19}$$

这与 $M = \sup \mathbb{Z}$ 矛盾. □

命题 3.6. 任何两个实数 $a < b$ 之间必有有理数.

证明. 寻找一个有理数 $\frac{m}{n} \in (a, b)$

对于 $x = \frac{1}{b-a}$, 由命题3.5结论可知,

$$\exists n \in \mathbb{Z},\ n > \frac{1}{b-a}. \tag{3.20}$$

对于 $y = nb$, 由命题3.5的结论可知, $m_1 \in \mathbb{Z},\ m_1 > y$, 即有

$$\frac{m_1}{n} > b \quad (m_1 \in \mathbb{Z}) \tag{3.21}$$

对于 $z = -na$, 由命题3.5的结论可知, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m > -na$, 记 $m_0 = -m \in \mathbb{Z}$, 从而有

$$-m_0 > -na \iff \frac{m_0}{n} < a. \tag{3.22}$$

这样总能找到整数 m_0, m_1 使 $\frac{m_0}{n} < a < b < \frac{m_1}{n}$. 于是在 m_0 和 m_1 之间总有一个 m 满足 $a < \frac{m}{n} < b$. □

4 数列极限

之前的阿基米德时代的问题 (例1.2) 中, 我们需要考虑 n 越来越大的时候, x_n 是否趋近于某个值 L. 我们需要定义越来越接近这个概念.

定义 4.1. 所谓一个无穷序列, 是指一个映射 $x\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, 记为

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \tag{4.1}$$

称 x_n 为其第 n 项.

定义 4.2. 称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 L 为极限 *(limit)*, (记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$) 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\forall n > N$ 总有 $|x_n - L| < \varepsilon$.

也称当 $n \to \infty$ 时, x_n 趋于 L.

这种定义称为 $\varepsilon - N$ 语言.

"$\{x_n\}$ 以 L 为极限" 可以表示为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{使得} \forall n \geq N \text{有} |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

"$\{x_n\}$ 不以 L 为极限" 可以表示为

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{使} |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.3}$$

定义 4.3. 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的, 如果 $\exists$ 实数 L, 使 $\{x_n\}$ 以 L 为极限. 否则, 称 $\{x_n\}$ 发散.

"$\{x_n\}$ 收敛" 可以表示为

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N, \text{有} |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

"$\{x_n\}$ 发散" 可以表示为

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{使} |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.5}$$

例 4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 取正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \tag{4.6}$$

□

例 4.2. 设 $a > 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$.

解 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. 为此, $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \dfrac{a-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则对 $\forall n \geq N$ 都有

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + N\varepsilon > a. \tag{4.7}$$

从而

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}. \tag{4.8}$$

可以得到

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \varepsilon, \tag{4.9}$$

验证了

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{4.10}$$

总结 $\forall a>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

例 4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明. $\forall\varepsilon>0$ 取 N 使 $\dfrac{N-1}{2}\varepsilon^2>1$, 则对于 $\forall n\geq N$ 有

$$(1+\varepsilon)^n=1+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2+\cdots\geq C_n^2\varepsilon^2. \tag{4.11}$$

$$\geq\frac{(n+1)n}{2}\varepsilon^2 \tag{4.12}$$

$$\geq\frac{N+1}{2}\varepsilon^2 n>1\cdot n \tag{4.13}$$

从而 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, 得到

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon. \tag{4.14}$$

□

4.1 极限的性质

命题 4.1 (充分大指标的项保持极限不等式)**.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 则 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n\geq N$ 有 $a_n<b_n$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A<B=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 取 $\varepsilon=\frac{B-A}{2}>0$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 定义知

$$\exists N_1\in\mathbb{Z}_+\forall n\geq N_1\text{有}|a_n-A|<\varepsilon. \tag{4.15}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 定义知

$$\exists N_2\in\mathbb{Z}_+\forall n\geq N_2\text{有}|b_n-B|<\varepsilon. \tag{4.16}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n\geq N$ 有

$$a_n<A+\varepsilon=B-\varepsilon<b_n. \tag{4.17}$$

□

推论 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明. 取 $q<r<1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<\lim_{n\to\infty}r. \tag{4.18}$$

由命题4.1可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$.

从而, $\forall n > N$, 有

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < r^{n-N}. \tag{4.19}$$

即有

$$a_n < a_N r^{n-N}, \forall n > N. \tag{4.20}$$

由于 $\frac{1}{r} > 1$, 记 $\frac{1}{r} = 1 + c, (c > 0)$. 这样, 取 $N_0 > N + \frac{a_N}{c\varepsilon}$, 对于 $\forall n \geq N_0$, 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N} = (1+c)^{n-N} \geq (n-N)c \tag{4.21}$$

$$\geq (N_0 - N)c > \frac{a_N}{\varepsilon}. \tag{4.22}$$

可得

$$a_n < a_N r^{n-N} < a_N \frac{\varepsilon}{a_N} = \varepsilon. \tag{4.23}$$

□

上面最后部分是在算等比级数的极限.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \text{不存在}, & |r| > 1\text{或}r = -1 \\ 1, & r = 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

推论 数列极限是唯一的.

证明. 反证法. 设 $\{a_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限, 且 $a < B$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A < B = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{4.25}$$

由命题4.1可知,

$$\exists N \in Z_+, \forall n \geq N\text{满足}a_n > a_n, \tag{4.26}$$

矛盾! □

推论 收敛的数列一定有界.

定义 4.4. 称数列有上界, 若 $\exists M$使$\forall n, a_n \leq M$. 称数列有下界, 若 $\exists K$使$\forall n, a_n \geq K$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L < L+1 = \lim\limits_{n\to\infty} L+1$, 由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{有} x_n < L+1. \tag{4.27}$$

所以

$$x_n \leq \max\{x_1, \cdots, x_N, L+1\}. \tag{4.28}$$

故有上界, 下界同理. □

推论（极限不等式） 设 $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq N_0$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明. 反证法. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 由命题4.1可知, $\exists n \geq N$ 有 $a_n > b_n$, 矛盾! □

注意! $\leq$ 可过渡给极限式, 但 $<$ 不一定能.

例 4.4. $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4.2 极限的计算方法

4.2.1 从定义直接计算

例 4.5. 多项式增长远小于指数增长,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \text{当} q > 1 \text{时}. \tag{4.29}$$

证法一

证明. 记 $x_n = \frac{n^k}{q^n}$, 注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k q^n}{q^{n+1} n^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{k\text{个}} \cdot \frac{1}{q} \right) \\
&= \frac{1}{q} < 1
\end{aligned} \tag{4.30}$$

由命题4.1知 $\lim x_n = 0$. □

证法二 (从定义验证)

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq \max\left\{2k, \frac{(k+1)!2^k}{a^{k-1}\varepsilon}\right\}$. $\forall n \geq N$ 有 (记 $q = 1+a,\ a > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{n^k}{q^n} &= \frac{n^k}{(1+a)^n} \leq \frac{n^k}{C_n^{k+1}a^{k+1}} \\ &= \frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)a^{k+1}} \\ &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{n-k} \\ &< \frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}2\cdot 2\cdots 2 \\ &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{n} \leq \frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{N} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.31}$$

□

4.2.2 极限的四则运算

定理 4.1. 设 $\lim a_n = A,\ \lim b_n = B$, 则

$$\lim(a_n + b_n) = A + B \tag{4.32}$$

$$\lim(a_n - b_n) = A - B \tag{4.33}$$

$$\lim a_n b_n = AB \tag{4.34}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad \textit{(分母不为零)} \tag{4.35}$$

证明中用到三角不等式 (绝对值不等式).

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{4.36}$$

证明. 我们只证极限的乘积和商的性质.

乘积 对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A|\cdot|b_n| + |A|\cdot|b_n - B| \tag{4.37}$$

- 由 $\{b_n\}$ 收敛知其有界, 即 $\exists M$ 使 $|b_n| \leq M, \forall n$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 知 $\exists N_1 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_1$ 有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ 知 $\exists N_2 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_2$ 有 $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$.

从而, 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 对 $n\ge N$, 代回(4.37)得

$$|a_nb_n-AB|\le\frac{\varepsilon}{2M}M+|A|\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.38}$$

这证明了 $\lim a_nb_n=AB$.

商

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{a_nB-b_nA}{b_nB}\right|=\left|\frac{(a_n-A)B+A(B-b_n)}{b_nB}\right| \tag{4.39}$$

$$\le\frac{|a_n-A|}{|b_n|}+\frac{|A|\cdot|B-b_n|}{|b_n||B|}. \tag{4.40}$$

- 由 $B\neq 0$, 不妨设 $B>0$. 由命题4.1知 $\exists M\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n\ge M$ 有 $b_n>\frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ 知 $\exists N_2,\forall n\ge N_2$ 有 $|a_n-A|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n\to\infty}b_n=B$ 知 $\exists N_3,\forall n\ge N_3$ 有 $|b_n-B|<\varepsilon''=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, 对 $\forall n\ge N$ 有 (代回(4.39))

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|\le\frac{\frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}}{\frac{B}{2}}+\frac{|A|\frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}}{\frac{B}{2}B}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{4.41}$$

□

推论 有限次四则运算和极限可交换.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_{i,k}=\sum_{i=1}^{n}\lim_{k\to\infty}x_{i,k} \tag{4.42}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i,k}\right)=\prod_{i[=1]}^{n}\left(\lim_{k\to\infty}x_{i,k}\right) \tag{4.43}$$

证明. 只需 $k-1$ 次使用前述定理. □

注意 无限和/无限积与极限未必可交换.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}x_{i,k}\neq\sum_{i=1}^{\infty}\left(\lim_{k\to\infty}x_{i,k}\right) \tag{4.44}$$

例 4.6. 对于一个下表这样一个数列 $x_{i,k}$,

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$\cdots$
$i=1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=3$	0	0	$\frac{1}{3}$	
$\vdots$				

纵向求和, 值是 1, 但先取极限 $k\to\infty$ 每一项都变为零, 再纵向求和, 值是 0.

类似地, 有例子表明无限乘积与极限未必可交换.

4.2.3 夹逼定理

定理 4.2. 设 $a_n \le b_n \le c_n$ $(\forall n \ge N_0)$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \tag{4.45}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在且等于 L.

证明. 对于左右两边的数列极限,

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_1,\ \forall n \ge N_1, \text{有 } |a_n - L| < \varepsilon \tag{4.46}$$

从而

$$L - \varepsilon < a_n \tag{4.47}$$

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_2,\ \forall n \ge N_2, \text{有 } |c_n - L| < \varepsilon \tag{4.48}$$

从而

$$c_n < L + \varepsilon \tag{4.49}$$

结合起来, $\forall n \ge \max\{N_i\}$, 有 $L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$. □

例 4.7. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{n^k} = a_k \tag{4.50}$$

因为

$$
\begin{aligned}
LHS &= \lim_{n\to\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+\cdots+\frac{a_0}{n^k}\right) && (4.51)\\
&= \lim a_k+\lim\frac{a_{k-1}}{n}+\cdots && (4.52)\\
&= a_k+0+\cdots=a_k. && (4.53)
\end{aligned}
$$

例 4.8.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0}{b_ln^l+b_{l-1}n^{l-1}+\cdots+b_0} && (4.54)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_kn^k+\cdots+a_0}{n^k}\frac{n^l}{b_ln^l+\cdots+b_0}n^{k-l}\right) && (4.55)\\
&=\begin{cases} a_k\cdot\frac{1}{b_l}\cdot 0=0, & k<l\\ a_k\cdot\frac{1}{b_l}\cdot 1=0, & k=l\\ \text{不存在 (由引理)}, & k>l\end{cases} && (4.56)
\end{aligned}
$$

引理 4.1. 设

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}x_n=X\neq 0,\\
&\lim_{n\to\infty}y_n=Y\neq 0, && (4.57)\\
&\lim_{n\to\infty}Z_n\text{不存在},
\end{aligned}
$$

则

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_nz_n)\text{ 不存在}. \tag{4.58}$$

证明. 反证法, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_nz_n)=L$ 存在, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}z_n &= \lim_{n\to\infty}\left[(x_ny_nz_n)\frac{1}{x_n}\frac{1}{y_n}\right] && (4.59)\\
&= \lim_{n\to\infty}(x_ny_nz_n)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} && (4.60)\\
&= L\cdot X\cdot Y. && (4.61)
\end{aligned}
$$

与条件 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$不存在 矛盾! □

例 4.9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是正数, 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n,a_2^n,\cdots,a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.62}$$

解 不妨设 $a_1 = \max\{a_i\}$, 有

$$(a_1^n)^{\frac{1}{n}} \le (a_1^n, a_2^n, \cdots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} \le (ka_1^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.63}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n)^{\frac{1}{n}} = a_1,\ \lim_{n\to\infty}(ka_1^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}a_1 = a_1. \tag{4.64}$$

使用夹逼定理得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n, a_2^n, \cdots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_i\} \tag{4.65}$$

例 4.10. 进一步,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^{-n}, a_2^{-n}, \cdots, a_k^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}} \tag{4.66}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} \tag{4.67}$$

$$=\frac{1}{\max\left\{\frac{1}{a_i}\right\}} = \frac{1}{1/\min\{a_i\}} \tag{4.68}$$

$$=\min\{a_i\}. \tag{4.69}$$

4.2.4 计算极限的一个有用方法: Stolz theorem

定义 4.5. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = +\infty$, 如果对 $\forall k > 0$,

$$\exists n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall n \ge N 有 x_n > k. \tag{4.70}$$

定理 4.3 (Stolz Theorem)**.** 设 $\{b_n\}$ 严格单调递增且无上界 *(或等价地说 $\lim b_n = +\infty$).*

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L. \tag{4.71}$$

证明 *Stolz* 定理. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$ 的定义可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+,\ \forall n \ge N$ 有

$$L-\varepsilon < \frac{a_{i+1}-a_i}{b_{i+1}-b_i} < L+\varepsilon \implies (L-\varepsilon)(b_{i+1}-b_i) < a_{i+1}-a_i < (L+\varepsilon)(b_{i+1}-b_i) \tag{4.72}$$

我们可以对上式对 i 从 N 到 $n-1$ 求和, 得到

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_N) < a_n-a_N < (L+\varepsilon)(b_n-b_N) \tag{4.73}$$

$$\xRightarrow{\text{除以}b_n}(L-\varepsilon)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)+\frac{a_N}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (L+\varepsilon)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)+\frac{a_N}{b_n}. \tag{4.74}$$

同时注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_N}{b_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_N}{b_n}=0 \tag{4.75}$$

由于命题4.1“充分大指标的项保持极限不等式”，可知 $\exists N_0\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $\forall n>N_0$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right|<2\varepsilon. \tag{4.76}$$

□

4.3 单调极限定理 (Weierstrass 定理)(Monotone Converge Theorem)

定理 4.4 (单调极限定理)**.** *有上界且递增的数列一定收敛；有下界且递降的数列一定收敛.*

证明. 设 $\{x_i\}$ 递增且有上界, 考虑单步点集

$$X=\{x_n|n\in\mathbb{Z}_+\}, \tag{4.77}$$

可知 X 非空且有上界, 由确界定理知, $\sup X$ 存在, 记为 L.

由 $\sup X=L$ 的定义知,

$$\forall\varepsilon>0,\ L-\varepsilon\text{不是 } X \text{ 上界}, \tag{4.78}$$

即 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $x_N>L-\varepsilon$, 从而对于 $\forall n\geq N$ 都有

$$L-\varepsilon<x_N\leq x_n\leq L, \tag{4.79}$$

即

$$|x_n-L|<\varepsilon. \tag{4.80}$$

这表明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$. □

定理 4.5 (Euler)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *存在 (记为* e*).*

证明. 记 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

- $\{x_n\}$ 有上界,

$$\begin{aligned} x_n\leq&1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ <&1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}<3 \end{aligned} \tag{4.81}$$

- $\{x_n\}$ 递增,

$$\sqrt[n+1]{x_n}=\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\ \text{个}}\cdot 1}\le\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}. \tag{4.82}$$

所以我们得到了

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{4.83}$$

由单调极限定理可知, 极限存在, 称为自然常熟 e.

□

命题 4.2. 令 $y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\mathrm{e}$

证明. 注意到 $\{y_n\}$ 递增且有上界, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在, 记为 Y.

由上例可知,

$$x_n\le y_n\ \ (\forall n)\implies \mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}x_n\le\lim_{n\to\infty}y_n=Y. \tag{4.84}$$

最后来证 $Y\le e$. 我们固定一个 $k\in\mathbb{Z}_+$, 对于 $\forall n\ge k$, 有

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&\ge 1+C_n^1\frac{1}{n}+\cdots+C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\\&=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{n}{n}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right)\end{aligned} \tag{4.85}$$

利用极限不等式可知,

$$\begin{aligned}e=\lim_{n\to\infty}x_n\ge\lim_{n\to\infty}&\left(1+\frac{1}{1!}\frac{n}{n}+\cdots+\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right)\\&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}=y_k.\end{aligned} \tag{4.86}$$

之后再取极限可知

$$\mathrm{e}\ge\lim_{k\to\infty}y_k=Y. \tag{4.87}$$

□

定理 4.6. e 不是有理数.

证明. 我们需要使用一个引理.

引理 4.2. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$0 < \mathrm{e} - y_n < \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.88}$$

证明. 一方面, $\forall m \geq n+1$, 有

$$y_m \geq y_{n+1}. \tag{4.89}$$

由极限不等式可知 $\lim\limits_{m\to\infty} y_m \geq y_{n+1}$, 从而

$$\mathrm{e} \geq y_{n+1} > y_n \tag{4.90}$$

另一方面, $\forall m > n+3$, 有

$$y_m - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \tag{4.91}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m}\right] \tag{4.92}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \tag{4.93}$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{2}{n+2}\right) \tag{4.94}$$

$$\leq \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.95}$$

所以

$$\mathrm{e} - y_n = \lim_{m\to\infty}(y_m - y_n) < \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.96}$$

□

对于定理4.6的证明, 我们采用反证法.

设 $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{e} = \frac{A}{B}$, 其中 $A, B \in \mathbb{Z}_+$. 由引理,

$$0 < \mathrm{e} - y_2 < \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \tag{4.97}$$

这表明 $\mathrm{e} \notin \mathbb{Z} \implies B \geq 2$.

再次使用引理, 有

$$0 < \mathrm{e} - y_B < \frac{2}{(B+1)!}, \tag{4.98}$$

而

$$\mathrm{e} - y_B = \frac{A}{B} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{B!}\right) \xlongequal{\text{通分}} \frac{\text{整数}C}{B!}. \tag{4.99}$$

代回(4.98)可知

$$0 < \frac{C}{B!} < \frac{2}{(B+1)!} = \frac{1}{B!} - \frac{2}{B+1} < \frac{1}{B!}, \tag{4.100}$$

这表明

$$0 < C < 1. \tag{4.101}$$

与 $C \in \mathbb{Z}$ 矛盾! □

4.4 柯西收敛准则

单调极限定理 (MCT) 的适用范围太小, 只能用于单调数列, 我们需要一般的判据.

要证 $\{x_n\}$ 有极限 L, 我们需要证当 n 无穷大时 $|x_n - L| < \varepsilon$, 但是如果猜不出 L, 往往无用. 我们只能比较大指标的 $|x_n - x_m|$.

定理 4.7 (Cauchy 收敛原理)**.** *实数列 $\{x_n\}$ 收敛, 当且仅当*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{Z}_+,\ \ \forall m, n \text{ 都有} |x_m - x_n| < \varepsilon. \tag{4.102}$$

定义 4.6. *称 $\{x_n\}$ 为一个 Cauchy 列, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

这样, 定理4.7可以表述为 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 序列.

Cauchy 收敛原理的证明. 从充分性和必要性两方面来证明.

先证" $\Longrightarrow$ ":

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得

$$\forall m, n > N \text{有} |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.103}$$

从而由三角不等式可得, $|x_m - x_n| < \varepsilon$

再证" $\Longleftarrow$ ":

首先 $\{x_n\}$ 有界, 因为对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < 1$. 特别地, 有 $|x_n - x_{N+1}| < 1$. 于是我们得到

$$\min\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\}. \tag{4.104}$$

这表明 $\{x_n\}$ 有界.

对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 集合 $\{x_n \colon n \geq k\}$ 非空且有界, 有确界定理可知上确界和下确界都存在, 记

$$a_k = \inf\{x_k \colon k \geq n\} \tag{4.105}$$

$$b_k = \sup\{x_k \colon k \geq n\} \tag{4.106}$$

注意到 $\{a_k\}$ 递增, $\{b_k\}$ 递减 [4] , 特别地,

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le b_k \le b_{k-1} \le \cdots \le b_1. \tag{4.107}$$

这表明 $\{a_k\}$ 递增且有上界 b_1, $\{b_k\}$ 递减且有下界 a_1. 由 MCT 知这两个数列的极限都存在, 记 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = A$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = B$. 并且有 $A \le B$.

由 Cauchy 列的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall m, n \ge k$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

所以, $\forall N \ge k$, ε 是集合 $\{x_m - x_n | \forall m, n \ge N\}$ 的上界, 我们可以得到

$$\varepsilon \ge \sup\{x_m - x_n | \forall m, n \ge N\} = b_N - a_N, \forall N \ge k. \tag{4.108}$$

取极限, 得到极限不等式

$$\varepsilon \ge \lim_{N\to\infty} (b_N - a_N) = B - A. \tag{4.109}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $B - A \le \varepsilon$, 又因为 $B \ge A$, 我们发现 $A = B \equiv L$.

最后由于 $a_k \le x_k \le b_k$, $\forall k$, 由夹逼定理可得 $\{x_n\}$ 极限存在且等于 L. $\square$

从以上证明中可以提炼出上下极限的概念.[5]

定义 4.7. *对于任何实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 考虑 $b_n = \sup\{x_k \colon k \ge n\}$(若 $\{x_k \colon k \ge n\}$ 有上界, 则可定义 $b_n \in \mathbb{R}$, 若无上界, 则形式化定义 $b_n = +\infty$.)*

- *若所有 $b_n = +\infty$, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = +\infty$.*
- *若 $\exists b_n \in \mathbb{R}$, 则所有 $b_n \in \mathbb{R}$, 且 $\{b_n\}$ 递减. 这有两种情况.*

  1. 若 $\{b_n\}$ 有下界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在, 称其值为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记为

  $$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{x_k \colon k \ge n\}\Big) \in \mathbb{R}. \tag{4.110}$$

  2. 若 $\{b_n\}$ 无下界, 约定

  $$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = -\infty. \tag{4.111}$$

总结起来, 上下极限的定义为

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\{x_k \colon k \ge n\}\right), \tag{4.112}$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\left(\{x_k \colon k \ge n\}\right). \tag{4.113}$$

命题 4.3. *$\{x_n\}$ 收敛等价于上下极限存在且相等.*

[4] 因为若 $F \subset E$ 则 $\inf F \ge \inf E$, $\sup F \le \sup E$.

[5] 以后幂级数收敛半径 Cauchy-Hadamand 公式涉及上极限.

例 4.11 (来自以后极限收敛的例子). 考虑

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k^2}, \tag{4.114}$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证明. 用 Cauchy 收敛原理验证, 只要证 x_n 是一个 Cauchy 列.

为此对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 从而 $\forall m > n \geq N$, 有

$$|x_m - x_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\sin(k\theta)}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \tag{4.115}$$

□

4.5 度量空间

4.5.1 基本概念

定义 4.8. 所谓集合 X 上的一个度量, 是指映射

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d((x,y)) \end{aligned} \tag{4.116}$$

需要满足

- 对称性 $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$
- 正定性 $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$, 且 $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
- 三角不等式 $\forall x, y, z \in X$ 有 $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

称 (X,d) 为一个度量空间.

例 4.12. 对于 $X = \mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}. \tag{4.117}$$

多元微积分中使用此度量.

定义 4.9. 称 $\{x_n\}$ 收敛到某点 $L \in X$(记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$), 若

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}_+\ \forall n > N \text{ 有} d(x_n, L) < \varepsilon, \tag{4.118}$$

这等价于

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, L) = 0. \tag{4.119}$$

定义 4.10. 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个 *Cauchy* 列，若

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}_+\ \forall m, n \geq N \text{ 有} d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{4.120}$$

定义 4.11. 称一个度量空间 (X, d) 是完备的 *(complete)*，如果 X 中的任何 *Cauchy* 列都收敛 *(*到 X 中的某点*)*.

例 4.13. $\left(\mathbb{R}^n, d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}\right)$ 是完备的度量空间.

例 4.14. $(\mathbb{Q}, d(x,y) = |x - y|)$ 是不完备的.
理由 取一个有理数序列 $\{x_n \in \mathbb{Q}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.$\{x_n\}$ 是 *Cauchy* 列，但 $\{x_n\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无极限.

4.5.2 实数的另一种定义

我们用 Cauchy 列可以给出 $\mathbb{R}$ 的另一个定义.

定义 4.12. 一个实数为”有理数 *Cauchy* 列的等价类”.

定义 4.13. 两个 $\mathbb{Q}$ 中的 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$ 于 $\{y_n\}$ 等价，如果

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}_+,\ \forall n \geq N \text{ 有} |x_n - y_n| < \varepsilon. \tag{4.121}$$

定理 4.8 (压缩映射定理)**.** 设 (X, d) 是完备的度量空间，设 $T\colon X \to X$ 是压缩映射 *(*即 $\exists c \in (0,1)$ 使 $\forall x, y \in X$ 有 $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x,y)$*)*，则 T 有唯一的不动点.

证明. 任取 $x_0 \in X$，定义 $x_n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T(x_0)}_{n \text{ 个} T} = T(x_{n-1})$.

- 断言 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 为此，$\forall m > n$,

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) = d(T^n x_0, T^m x_0) &\underset{\text{压缩}}{\leq} c^n d(x_0, x_{m-n}) \\
&\underset{\text{三角不等式}}{\leq} c^n \left(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right) \\
&= c^n \frac{1 - c^{m-n}}{1 - c} d(x_0, x_1) \\
&< \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1) < \frac{c^N}{1-c} d(x_0, x_1) \\
&< \varepsilon \quad (\text{只要 } N \text{ 足够大})
\end{aligned} \tag{4.122}$$

- 由 (X, d) 完备可知，前述 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y_0$，来证 y_0 是 T 的不动点.

证明. 考虑不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(T(y), x_n) = d(T(y), T(x_{n-1})) \\ &\leq c \cdot d(T(y), x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.123}$$

由夹逼定理知,

$$\lim_{n\to\infty} d(T(y), x_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} x_n = T(y). \tag{4.124}$$

结合

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y, \tag{4.125}$$

可得

$$T(y) = y. \tag{4.126}$$

□

- T 的不动点唯一.

证明. 设 $T(y) = y,\ \ T(z) = z$, 则

$$d(y, z) = d(T(y), T(z)) \leq c \cdot d(y, z) \implies y = z. \tag{4.127}$$

□

结合起来, T 有不动点且不动点唯一. □

5 函数极限

定义 5.1. 称当 $x \to x_0$ 时, $f(x) \to L$(记为 $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$), 如果

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall |x - x_0| < \delta \text{ 时有} |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

这个定义并不要求 $f(x_0)$ 的行为, $f(x_0)$ 甚至可以无定义.

我们引入记号: 开球邻域 $B_r(x_0) = \{x | d(x, x_0) < r\}$, 去心开球邻域 $B_r^*(x_0) = B_r(x_0)/\{x_0\}$.

定义 5.2. 如果 f 在 x_0 的某个去心邻域有定义, 称当 $x \to x_0$ 时, f 以 L 为极限 (记为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = L$) 如果

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \text{使得} \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 都有} |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

这个定义使用了 $\varepsilon - \delta$ 语言.

$x \to x_0$ 时, $f(x)$ 以 L 为极限

$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall |x - x_0| < \delta \text{ 有} |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$x \to x_0$ 时, $f(x)$ 不以 L 为极限

$$\iff \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0,\ \exists |x - x_0| < \delta \text{ 有} |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

定义 5.3. *左极限:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall -\delta < x - x_0 < 0 \text{ 有} |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

右极限, 正负无穷极限同理.

命题 5.1. *f 在 x_0 处有极限等价于 f 在 x_0 的左右极限存在且相等.*

证明. 证明是直接的. □

类似地, 引入符号

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = L. \tag{5.4}$$

我们会想问, 函数极限和序列极限有什么关系?

定理 5.1 (Heine)**.** *$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ 的充要条件为, 对于任何的以 x_0 为极限且项项不等于 x_0 的序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.*

证明. 必要性是显然的, 下面证明充分性.

为此用反证法, 假设 f 不以 L 为极限但试探数列的极限为 L, 即

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0,\ \exists 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 使} |f(x) - L| >= \varepsilon. \tag{5.5}$$

(这包含无穷个断言, 因为每一个 δ 给出一个 x.) 这样 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x$(记为 x_n) 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$.

但是 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$, 与 $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ 矛盾! □

上述的定理常常用于判断极限的存在性, 如果能找到两个序列 $\{x_n\} \to x_0$ 和 $\{y_n\} \to x_0$, 但 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$, 则 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

例 5.1. *当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x^\alpha}$. 来证这个极限不存在.*

证明. 反证法, 设 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^{\alpha}}=L$, 考虑

$$\left\{x_n=\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{1}{2}\pi}\right)^{\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.6}$$

我们有

$$x_n\neq 0\ \forall n,\ \lim_{n\to\infty}x_n=0. \tag{5.7}$$

取另一个序列

$$\left\{y_n=\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{3}{2}\pi}\right)^{\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.8}$$

我们发现, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=1,\ \lim_{n\to\infty}f(y_n)=-1$, 由 Heine 定理可知, 极限不存在. □

5.1 函数极限的性质与计算方法

命题 5.2 (保持极限不等式[6])**.** 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, 则

$$\exists\delta>0\ \forall 0<|x-x_0|<\delta\ 有 f(x)<g(x). \tag{5.9}$$

命题 5.3. 设 $f(x)\le g(x)\ \ \forall 0<|x-x_0|<r$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}g(x). \tag{5.10}$$

命题 5.4. 若 $f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域中有界.

证明. 由于 $L-1<\lim_{x\to x_0}f(x)<L+1$ 由命题5.2可知 $\exists\delta>0, \forall 0<|x-x_0|<\delta$ 有,

$$L-1<f(x)<L+1\ \ \forall x\in B_{\delta}(x_0) \tag{5.11}$$

说明 $f(X)$ 在 $B_{\delta}(x)$ 中有界. □

定理 5.2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B, \tag{5.12}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB \tag{5.13}$$

$$当\ B\neq 0\ 时\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B} \tag{5.14}$$

[6]这和数列极限中的充分大指标的项保持极限不等式 (命题4.1) 是一致的

定理 5.3 (单调收敛定理)**.** *设 f 在 $[x_0 - r, x_0)$ 时递增且有上界的 (或递减且有下界), 则*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \tag{5.15}$$

存在.(右极限同理)

定理 5.4 (Cauchy 收敛准则)**.** *设 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, 使得*

$$\forall x, y \in B_\delta (x_0)^* \tag{5.16}$$

都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{5.17}$$

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在.

证明.

- 先证 f 在 x_0 的某去心邻域中有界. 由条件, 对 $\varepsilon = 1$, $\exists r > 0$, $\forall x, y \in B_{2r}(x_0)^*$ 有 $|f(x) - f(y)| < 1$.

  取 $y = x + \frac{r}{2}$, 可知 $\left|f(x) - f\left(x_0 + \frac{r}{2}\right)\right| < 1$, $\forall x \in B_{2r}(x_0)^*$, 说明 f 在 $B_{2r}(x_0)^*$ 中有界.

-

□

5.2 函数极限的计算方法

从定义/夹逼定理/四则运算/复合极限定理

定理 5.5. *设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$, 则*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0. \tag{5.18}$$

但这个定理是错的. 有两种修正办法:

1. *在 x_0 的某个去心邻域 $B_\delta(x_0)$ 中, 有 $f(x) \neq y_0$.*
2. *若 $g(y_0) = z_0$, 上述定理没有问题.*

5.3 极限的计算

例 5.2.

$$\lim_{x \to a^+} (x - a)^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \text{不存在}, & \alpha < 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

证明. • 当 $\alpha > 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, 取 δ, 对于任意 $0 < x - a < \delta$, 有

$$|(x-a)^{\alpha} - 0| = (x-a)^{\alpha} < \varepsilon \tag{5.20}$$

表明

$$\lim_{x \to a^{+}} (x-a)^{\alpha} = 0 \tag{5.21}$$

• 当 $\alpha < 0$ 时, 来证 $(x-a)^{\alpha}$ 无上界, 由此知不存在右极限.

来证 当 $\alpha < 0$ 时, $(x-a)^{\alpha}$ 无上界, 即对于任意 $k > 0$, $\exists x > a$, 使得 $(x-a)^{\alpha} > k$.

为此, 对于 $\forall k$, 取 $a < x < a + \frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}}$, 则有

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} > \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha} = k \tag{5.22}$$

□

例 5.3.

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \text{不存在}, & \alpha > 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

证明. **方法一**

采用复合极限定理, 令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 令

$$g(f(x)) = x^{\alpha}. \tag{5.24}$$

于是自动满足修正条件一.

$$\lim_{x \to +\infty} g(f(x)) = \lim_{y \to 0^{+}} g(y) = \lim_{y \to 0^{+}} y^{-\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \text{不存在}, & \alpha > 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

方法二

直接计算, 当 $\alpha < 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, 则对 $\forall x > M$ 有

$$|x^{\alpha} - 0| = x^{\alpha} < M^{\alpha} = \varepsilon \tag{5.26}$$

□

例 5.4.

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a,\quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a \tag{5.27}$$

证明.

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \tag{5.28}$$

由于 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x<x<\tan x$, 可得

$$\forall\,|x|<\frac{\pi}{2},\quad |\sin x|\leq|x|\,. \tag{5.29}$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\pi,\varepsilon\}$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有

$$|\sin x-\sin a|\leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right|<\delta\leq\varepsilon \tag{5.30}$$

从而

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a \tag{5.31}$$

同理可证 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$. □

命题 5.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证明. 我们只证明 $x\to 0^+$ 时的情况, $x\to 0^-$ 时的情况类似.

注意到, $\forall 0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\sin x<x<\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\implies \cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \tag{5.32}$$

于是使用夹逼定理, 可得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{5.33}$$

□

例 5.5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{x^n}\frac{x^m}{b_mx^m+\cdots+b_0}x^{n-m} \tag{5.34}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^m}}x^{n-m} \tag{5.35}$$

$$=\begin{cases}0, & n<m\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ \text{不存在}, & n>m\end{cases} \tag{5.36}$$

命题 5.6 (多项式增长远小于指数增长)**.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{q^x}=0,\quad q>1,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

证明. 记 $q=1+a$, $(a>0)$,

$$\begin{aligned}q^x=(1+a)^x\geq(1+a)^{[x]}&=\sum_{k=0}^{[x]}C_{[x]}^k a^k\\&\geq C_{[x]}^{k+1}a^{k+1}\\&=\frac{[x]([x]-1)\cdots([x]-k)}{(k+1)!}a^{k+1}\\&>\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{(k+1)!}a^{k+1}\end{aligned}\tag{5.37}$$

于是可得

$$0<\frac{x^k}{q^x}<\frac{x^k(k+1)!}{(x-1)\cdots(x-k+1)a^{k-1}}\tag{5.38}$$

由前例可得, 右侧极限为零, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{q^x}=0$. □

例 5.6.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\tag{5.39}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\tag{5.40}$$

命题 5.7 (Euler)**.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

证明. 做放缩

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\tag{5.41}$$

对于上界,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot1=\mathrm{e}.\tag{5.42}$$

对于下界,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e}\cdot1=\mathrm{e}.\tag{5.43}$$

由夹逼定理可得,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.\tag{5.44}$$

□

命题 5.8. 设 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{Z}_+$, $g\colon \mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)=A$, 则

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=A. \tag{5.45}$$

证明. 只需把条件的定义拼起来. □

推论: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$

证明. 令 $f(x)=-x$, $g(y)=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$, (这自动满足修正方案一) 则

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}&=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}\\&=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}.\end{aligned}\tag{5.46}$$

□

做换元 $t=\frac{1}{x}$ 也有类似结论, 总结起来

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\\ \lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}\end{cases}\tag{5.47}$$

命题 5.9. 设 $\lim\limits_{x\to a} u(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=B$, 则

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)}=A^B. \tag{5.48}$$

证明.

$$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} \tag{5.49}$$

于是证明分为两步

1. 先证 $\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)=\ln A$.
2. 再证: 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^C$.

证明第一步 令 $g(y)=\ln y$, 这满足修正二. 由于 $\forall A>0$, 有 $\lim\limits_{y\to A}\ln y=A$(引理5.1, 下证). 由此, 结合复合函数极限定理, 可得

$$\lim_{x\to a} g\circ u(x)=\lim_{x\to a}\ln u(x)=\ln A. \tag{5.50}$$

证明第二步 令 $h(y)=\mathrm{e}^y$, 这满足修正二. 由于 $\lim\limits_{y\to C}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^C$.(引理5.1, 下证) 由此, 结合复合函数极限定理, 可得

$$\lim_{x\to a}h\circ f(x)=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^C. \tag{5.51}$$

□

引理 5.1.
- $\forall A>0,\ \lim\limits_{y\to A}\ln y=A.$
- $\forall C\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{y\to C}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^C.$

证明引理第一条. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{A-A\mathrm{e}^{-1},A\mathrm{e}^{\varepsilon}-A\}$, 则 $0<|y-A|<\delta$, 有 $A\mathrm{e}^{-\varepsilon}<y<A\mathrm{e}^{\varepsilon}$, 进而

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}<\frac{y}{A}<\mathrm{e}^{\varepsilon} \tag{5.52}$$

即

$$|\ln y-\ln A|=\left|\ln\frac{y}{A}\right|<\varepsilon \tag{5.53}$$

□

证明引理第二条. 我们只证 $\lim\limits_{y\to C^+}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^C$. $\lim\limits_{y\to C^-}\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^C$ 的证明类似, 或者可以通过这个结论换元得到.

为此, $\forall\varepsilon>0$, 取一个正整数 $n>\frac{\mathrm{e}^{1+C}}{\varepsilon}$, 令 $\delta=\frac{1}{n}$, 则 $0<y-C<\delta$ 时, 有

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^C}\right)^n\geq n\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^C}>\mathrm{e}, \tag{5.54}$$

进而,

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^C}. \tag{5.55}$$

由此知,

$$C<\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^C=\mathrm{e}^C\left(\mathrm{e}^{y-C}-1\right)<\mathrm{e}^C\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)<\mathrm{e}^C\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^C}=\varepsilon. \tag{5.56}$$

□

命题 5.10. 设 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0,\ \lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=k$, 则

$$\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^k. \tag{5.57}$$

证明. 只需证

$$\lim_{x\to x_0}[g(x)\ln(1+f(x))]=k. \tag{5.58}$$

常 & 史. 书上提供如下方法:

考虑

$$q(y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+y)}{y}, & y\neq 0\\ 1, & y=0.\end{cases} \tag{5.59}$$

对 $f\&q$ 使用复合极限, 满足修正二, 可得

$$\lim q(f(x))=1 \tag{5.60}$$

□

复合极限定理中的修正二给出了 $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, 这可以给出一个定义.

定义 5.4. 设 f 在 x_0 的某开球邻域中有定义, 称 f 在 x_0 处连续, 如果以下条件之一成立:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
- 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
- 对与 $f(x_0)$ 的任何开球邻域 $B_\varepsilon(f(x_0))$, 都存在 x_0 的开球邻域, 使得

$$f(B_\delta(x_0)\subseteq B_\varepsilon(f(x_0))). \tag{5.61}$$

- 对于 $f(x_0)$ 的任何一个邻域 V, 都存在 x_0 的一个邻域 U, 使得 $f(U)\subseteq V$.

对于上面的定义, 我们可以通过不连续的例子来理解, f 在 x_0 处不连续 $\iff$
$\exists\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$, $\exists|x-x_0|<\delta$, 使得 $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$. 这可以说成 f 在 x_0 处撕开了定义域 D.

例 5.7. 判断连续性

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x^\alpha}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{5.62}$$

解

当 $\alpha>0$ 时, $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在, 故不连续.
当 $\alpha=0$ 时, $\lim_{x\to 0} f(x)=\sin 1\neq f(0)$. 故 f 在 0 处不连续.
当 $\alpha<0$ 时, 令 $\alpha=-\beta$, $(\beta>0)$, 则 $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, 故 f 在 0 处连续.

定义 5.5. 称 x 为 f 的连续点, 如果 f 在 x 处连续, 称 x 为 f 的间断点, 如果 f 在 x 处不连续.

间断点也可以分为几类:

- 本性间断点, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.
- 可去间断点, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但不等于 $f(x_0)$

对于可去间断点, 我们可以通过定义 $\tilde{f}(x_0)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x), & x=x_0 \end{cases}$ 使得 x_0 变为 $\tilde{f}$ 的连续点.

命题 5.11 (用序列极限刻画函数连续)**.** $f(x)$ 连续当且仅当对于所有以 x_0 为极限的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 总有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

证明. 从充分性和必要性分别证明.

“ $\Longrightarrow$ ”:

设 f 在 x_0 处连续, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 来证 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

这可以用复合极限定理来证明, 令 $h(n)\equiv x_n$, $\forall n\in\mathbb{Z}_+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} h(n)=x_0$, 由于 f 在 x_0 处连续, 故

$$\lim_{n\to\infty} f(h(n))=f(x_0), \tag{5.63}$$

这满足复合极限定理的修正二, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

“ $\Longleftarrow$ ”:

设序列极限等于 $f(x_0)$ 成立, 来证 f 在 x_0 处连续, 即证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

反证法. 设 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 不以 $f(x_0)$ 为极限, 即 $\exists\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$, $\exists 0<|x-x_0|<\delta$, 使 $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$ 成立.

特别的, 对 $\delta=\frac{1}{n}$, 则 $\exists 0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, 使得 $|f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon$.

由于

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0), \tag{5.64}$$

矛盾! □

定义 5.6. 设 $f\colon D\to\mathbb{R}$, D 满足 D 中每一点都有一个开球邻域包含在 D 中, 称 f 是 D 上的连续函数/映射, 记为 $f\in C(D;\mathbb{R})$, 如果 f 在 D 的每一点处都连续.

定义 5.7. 称 D 是 $\mathbb{R}$ 的一个开集 *(open set)*, 如果 $\forall x_0\in D$, 都存在 $B_r(x_0)\subseteq D$.

下面我们可以考虑如何定义一般的映射的连续性.

定义 5.8. 对于一般的 X,Y, 称 $f\colon X\to Y$ 在 x_0 处连续, 如果对于 Y 中任意开集 V, $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集.

5.4 拓扑空间

5.4.1 拓扑公理

定义 5.9. 设 X 是一个集合, 所谓 X 上的一个拓扑结构, 是指 X 的一个子集族 $\mathscr{T}$, 称 $\mathscr{T}$ 的成员此拓扑的开集, 满足以下三条公理

1. $\varnothing, X \in \mathscr{T}$.

2. $\mathscr{T}$ 中两个 (有限个) 集合之交仍属于 $\mathscr{T}$.

3. $\mathscr{T}$ 中任意多个 (可以是无穷个) 集合之并仍属于 $\mathscr{T}$.

称 $(X, \mathscr{T})$ 为一个拓扑空间. 在上下文可以得出 $\mathscr{T}$ 的时候, 也简称 X 为一个拓扑空间.

例 5.8. $\mathscr{T}_{\text{平凡}} \equiv \{\varnothing, X\}$ 称为平凡拓扑. $\mathscr{T}_{\text{离散}} \equiv \{X \text{ 的所有子集}\}$ 称为离散拓扑.

在度量空间中, 我们可以有一些非平凡的拓扑. 令 (X, d) 为一个度量空间, 定义开球为 $B_r(x) = \{y \in X | d(y, x) < r\}$. 令

$$\mathscr{T} = \{U \subseteq X | U\text{可以表示为开球之并}\} \tag{5.65}$$

我们断言, $\mathscr{T}_d$ 满足拓扑公理, 称之为度量 d 诱导的拓扑.

证明. 公理三是显然的. 公理一也是显然的, 构造如下

$$\varnothing = 0 \text{ 个开球之并}, \quad X = \bigcup_{x \in X} B_1(x) \tag{5.66}$$

公理二需要证明.

设 $U, V \in \mathscr{T}_d$, $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $V = \bigcup_\beta V_\beta$.

$$U \cap V = \bigcup_{\alpha, \beta} U_\alpha \cap V_\beta \tag{5.67}$$

我们只需证 $U_\alpha \cap V_\beta$ 是开球之并即可. 设 $U_\alpha = B_r(x)$, $V_\beta = B_s(y)$, 则对于

$$\forall z \in B_r(x) \cap B_s(y) \tag{5.68}$$

取

$$0 < t < \min\{r - d(x, z), s - d(y, z)\}. \tag{5.69}$$

从而

$$B_t(z) \subseteq B_r(x), \quad B_t(z) \subseteq B_s(y) \tag{5.70}$$

所以有

$$B_t(z) \subseteq U_\alpha \cap V_\beta \tag{5.71}$$

于是

$$U_\alpha \cap V_\beta = \bigcup_z B_t(z). \tag{5.72}$$

我们就证明了开集之交仍是开集. □

定义 5.10. *称 X 的子集 B 为上述拓扑 $(X, \mathscr{T})$ 的闭集 (close set), 若 $X/B = B^C$ 是开集.*

前面我们已经知道, 一个度量 d 可以诱导出一个度量拓扑 $\mathscr{T}_d$, **在微积分中, 我们都是用此拓扑.**

- 一元微积分中 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. $\mathbb{R}$ 上赋予欧式拓扑, 开集可以表示为一族开区间之并.
- 多元微积分中 $X = \mathbb{R}^n$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$. $\mathbb{R}^n$ 上赋予欧式拓扑, 开集可以表示为一族不带边球体之并.

定义 5.11. *设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间, 给定 $Y \subseteq X$, 令*

$$\mathscr{T}_Y = \{U \cap Y | U \in \mathscr{T}\}. \tag{5.73}$$

易验证 $\mathscr{T}_Y$ 是 Y 上的一个拓扑, Y(从 X 获得的) 子空间拓扑.

我们以后对于 $D \subseteq RT^n$, 都赋予从 $\mathbb{R}^n$ 获得的子空间拓扑.

例 5.9. *对于 $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, 它当中的开集可以为 $[a, p) \cup (c, d) \cup (q, b]$*

5.4.2 基本概念

定义 5.12. *设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, 设 $A \subseteq X, a \in A$.*

称 a 是 A 的内点 (同时称 A 是 a 的邻域), 如果存在开集 U, 使得 $a \in U \subseteq A$.

命题 5.12. *A 是 X 的开集, 当且仅当 A 中每一点都是 A 的内点.*

证明. 从充分性和必要性两方面.

“$\Longrightarrow$:” 显然. $\forall a \in A$, 取开集 $U = A$, 则 $a \in U \subseteq A$.

“$\Longleftarrow$:” 设 A 中每一点都是 A 的内点, 则 $\forall a \in A$, $\exists U_a \in A$, $a \in U_a \subseteq A$. 则

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a \subseteq A. \tag{5.74}$$

因而 A 是开集之并, 由拓扑公理三, A 是开集. □

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑, A 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集 $\iff \forall a \in A, \exists B_r(a) \subseteq A$.

B 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集 $\iff$ B^C 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集 $\iff \forall y \notin B, \exists B_r(y) \subseteq B^C$.

5.4.3 连续性

定义 5.13. 设 $(X, \mathscr{T}_X)$, $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 是两个拓扑空间. 设 $f\colon X \to Y$ 是一个映射, $x_0 \in X$.

称 f 在 x_0 处连续, 如果对于 Y 中任意开集 $V \ni f(x_0)$ 都存在 X 的开集 $U \ni x_0$, 使 $f(U) \subseteq V$.

定义 5.14. 称 $f\colon X \to Y$ 为连续映射 (记为 $f \in C(X, Y)$), 如果 f 在 X 的每一点处都连续.

定理 5.6. $f\colon X \to Y$ 连续

$\iff$ f 下开集的原像集是开集 (即对 Y 的任何开集 V 有 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集). [7]

$\iff$ f 下闭集的原像集是闭集 (对 Y 的任何闭集 B 有 $f^{-1}(B)$ 是 X 的闭集).

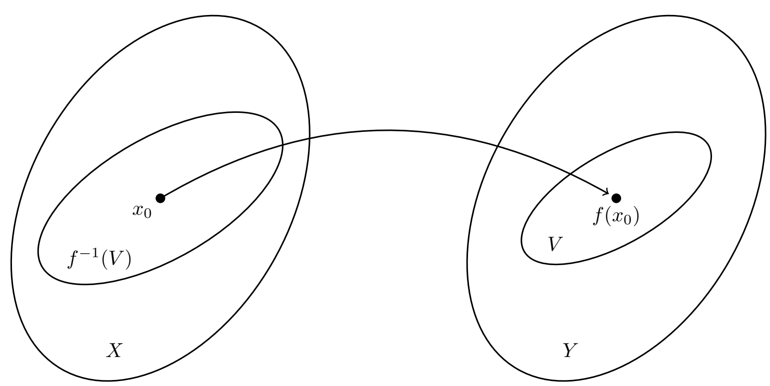


图 1:

第一条推第二条:

第一条推出第二条. 设 $f \in C(X, Y)$ ，设 V 是 Y 中的开集，来证: $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集。
这等价于证明，$f^{-1}(V)$ 中的每点 x_0 是 $f^{-1}(V)$ 的内点。
由 $x_0 \in f^{-1}(V)$，知 $f(x_0) \in V$，由 f 在 x_0 处连续，知存在 X 中的开集 U，使 $x_0 \in U$，且

[7] 注意这里面的 f^{-1} 并不是逆映射, 而是原像集

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}. \tag{5.75}$$

$f(U) \subseteq V$。
即 $U \subseteq f^{-1}(V)$，这样，$x_0 \in U_{(开)} \subseteq f^{-1}(V)$，说明 x_0 是 $f^{-1}(V)$ 的内点。
又因为 x_0 是 $f^{-1}(V)$ 中任意点，所以 $f^{-1}(V)$ 是开集。 □

第二条推出第一条. 设 f 下开集的原像集都为开集, 来证 $f \in C(X,Y)$, 即证 f 在每一点 x_0 处连续.

为此, 对任何开集 $V \ni f(x_0)$, 由于第二条成立可知 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集, 取 $U = f^{-1}(V)$ 显然 $x_0 \in f^{-1}(V) = U$. □

证明第二条等价于第三条. 假设 B 是一个闭集, 则 B^C 是一个开集, 由第二条可知 $f^{-1}\left(B^C\right)$ 是一个开集. 注意到

$$X = f^{-1}(B) \sqcup f^{-1}\left(B^C\right). \tag{5.76}$$

即 $f^{-1}\left(B^C\right) = \left(f^{-1}(B)\right)^C$, 所以 $f^{-1}(B)$ 是一个闭集. □

定理 5.7 (连续映射的复合是连续的)**.** 设 $f\colon X \to Y$ 在 x_0 处连续, $g\colon Y \to Z$ 在 $f(x_0)$ 处连续.

则 $g \circ f\colon X \to Z$ 在 x_0 处连续.

证明. 对任何包含 $g \circ f(x_0)$ 的任何开集 W, 由 g 在 $f(x_0)$ 处连续的定义, 存在含 $f(x_0)$ 的开集 V 是 $g(V) \subseteq W$.

又由于 f 在 x_0 处连续的定义知, 存在含 x_0 的开集 U 使得 $f(U) \subseteq V$.

这样, $g \circ f(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$. 从而 $g \circ f$ 在 x_0 处连续. □

定理 5.8 (映射复合保持连续性)**.** 设 $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,Z)$ 则 $g \circ f \in C(X,Z)$.

证法一. 用定理的逐点版本来证. □

证法二. □

前述定理是连续映射的局部性质, 下面我们讨论连续函数的局部性质.

定理 5.9. 设 $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ 都在 x_0 处连续, 则 $f+g$, $f \cdot g$ 在 x_0 处连续.

定理 5.10. 一种投机取巧的证法

$$\begin{gathered} X \xrightarrow{F} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{加法}} \mathbb{R} \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x) \end{gathered} \tag{5.77}$$

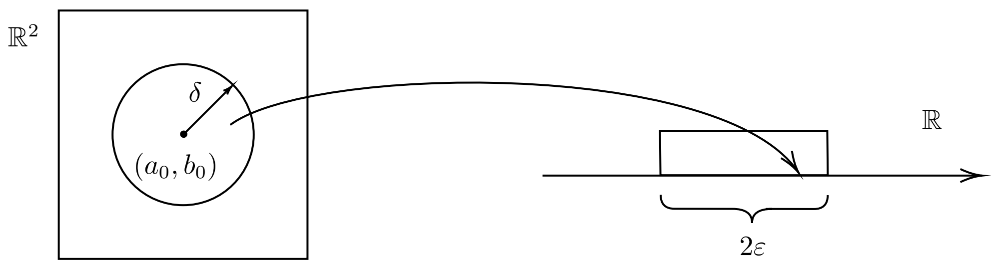
由于 F 和加法都是连续的, 所以 $f+g$ 也是连续的.

类似可以证明乘除法.

引理 5.2. $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto a+b$ 是连续的.

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, 则 $\forall d\left((a,b),(a_0,b_0)\right) < \delta$, 有

$$\begin{aligned}\left|h(a,b) - h(a_0,b_0)\right| &= \left|(a-a_0)+(b-b_0)\right| \\ &\le \sqrt{2\left[(a-a_0)^2+(b-b_0)^2\right]} \\ &= \sqrt{2}d\left((a,b),(a_0,b_0)\right) < \sqrt{2}\delta \\ &= \varepsilon.\end{aligned} \tag{5.78}$$



□

命题 5.13. 设 $f,g\colon X \to \mathbb{R}$, 定义 $F \equiv (f(x), g(x))$.

则 F 在 x_0 处连续, 当且仅当 f 和 g 在 x_0 处连续.

证明. "$\Longleftarrow$" 设 f,g 在 x_0 处连续, 来证 F 在 x_0 处连续.

为此 $\forall B_\varepsilon\left(f(x_0), g(x_0)\right)$, $\exists \varepsilon' = \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$ 使

$$B_{\varepsilon'}\left(f(x_0)\right) \times B_{\varepsilon'}\left(g(x_0)\right) \subseteq B_\varepsilon\left(F(x_0)\right). \tag{5.79}$$

由 f 在 x_0 处连续, $\exists$ x_0 的开邻域 U_1, 使 $f(U_1) \subseteq B_{\varepsilon'}\left(f(x_0)\right)$.

由 g 在 x_0 处连续, $\exists$ x_0 的开邻域 U_2 使 $g(U_2) \subseteq B_{\varepsilon'}\left(g(x_0)\right)$.

取 $U = U_1 \cap U_2$, 则 U 是 x_0 的开邻域, 且

$$F(U) \subseteq f(U) \times g(U) \subseteq f(U_1) \times g(U_2) \subseteq B_{\varepsilon'}\left(f(x_0)\right) \times B_{\varepsilon'}\left(g(x_0)\right) \subseteq B_\varepsilon\left(F(x_0)\right). \tag{5.80}$$

□

推论: 设 $f,g \in C(X,\mathbb{R})$ 则 $f+g,\ f-g,\ fg\ \in C(X,\mathbb{R})$.

下面来考虑 $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. 商函数的定义域为 $X/g^{-1}(\{0\})$.

命题 5.14 (连续函数的等高面皆为闭集)**.** 设 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 连续, $\forall C \in \mathbb{R}$, 定义

$$X_c \equiv \{x \in X | f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\}). \tag{5.81}$$

则 X_c 是闭集.

证明. 由于单点集 $\{c\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭集[8], 显然. □

命题 5.15. $\forall f\in C(X,\mathbb{R}^n)$, $\forall\vec{c}\in\mathbb{R}^n$, 有 $f^{-1}\left(\{\vec{C}\}\right)$ 是 X 的闭集.

定理 5.11. 设 $f,g\in C(X,\mathbb{R})$ 连续, 则 $\frac{f}{g}$ 是 $X/g^{-1}(\{0\})$ 上的连续映射 *(即连续函数的商在分母的零点之外连续)*.

证明. 令 $Y=X/g^{-1}(\{0\})$,

$$Y\xrightarrow{F}\mathbb{R}\times(\mathbb{R}/\{0\})\xrightarrow{q}\mathbb{R},\quad x\mapsto(f(x),g(x)),\quad q=\frac{f(x)}{g(x)}. \tag{5.82}$$

□

例 5.10. 多项式函数都是连续的.

证明. 乘方 x^n 是恒同映射的乘法, 是连续的. 加法是连续的. □

例 5.11. 有理函数在分母的零点之外是连续的.

证明. 有理函数是多项式的商函数. □

命题 5.16. 设 $u(x)$, $v(x)$ 在 x_0 处是连续的, 则 $u(x)^{v(x)}$ 在 x_0 处连续.

证法一. 结论等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\right)}$ □

证法二. $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$.

$u(x)$ 与 $\ln(\square)$ 复合, 再与乘法复合, 再与 $\mathrm{e}^{(\square)}$ 复合 □

5.5 连续函数的整体性质

5.5.1 介值定理

定理 5.12 (区间套原理)**.** 设有一簇闭区间 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_i,b_i]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则

- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且相等 *(记为 c)*.
- $\bigcap_{n=1}[a_n,b_n]=\{c\}$.

[8] 只要证 $\forall y\neq c$, $\exists B_r(y)\subseteq\{c\}^C$. 取 $r=\frac{1}{2}d(y,c)>0$ 即可.
同理, $\mathbb{R}^n$ 中单点集也是闭集

证明. 注意到, $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \cdots \le b_1$. 这说明 a_n 序列单调递增, 且有一个上界是 b_1, b_n 序列单调递减, 且有一个下界是 a_1.

由单调收敛定理, 它们都有极限, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. 由四则运算, $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = B - A$.

再证 $\bigcap_{n=1}[a_n, b_n] = \{c\}$.

先证 $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 由于 $a_{n+1} \le a_n$, 所以 $a_n \le c \le b_n$, $\forall n$, 说明 $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n$, 从而 $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

对于 $\forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, 有 $a_n \le x \le b_n$, $\forall n$, 由夹逼定理, $x = c$.

从而 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$. □

定理 5.13 (介值定理)**.** *设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 1$, 则存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f(c) = 0$.*

证明. 用反证法, 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处非零, 不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$(不满足就用 $-f$ 代替 f).

令 $I_1 = [a,b] = [a_1, b_1]$, 构造闭区间的下降列 $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots$, 满足 $|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|$.

在构造好 I_n 的基础上, I_{n+1} 为 I_n 左半, 若 $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$, 反之右半. 由 $\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0$.

由区间套原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \equiv c$. 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, 所以

$$0 \ge \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0 \tag{5.83}$$

从而 $f(c) = 0$, 矛盾. □

推论 设 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续, 设 V 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间, 则 $\exists c \in [a,b]$ 使 $f(c) = V$.

证明. 若 $V = f(a)$ 或 $V = f(b)$, 结论自动成立. 除此之外对 f 做平移 $g(x) = f(x) - V$ 即可. □

5.5.2 最值/有界性定理

定义 5.15. *称子集族 $\mathscr{U} = \{u_\alpha \colon \alpha \in 指标集A\}$ 为 D 的一个覆盖 (covering), 如果*

$$\bigcup_{\alpha\in A} u_\alpha \supseteq D. \tag{5.84}$$

如果 $\mathscr{U}$ 的个成员都是 $(X, \mathscr{T})$ 的开集, 则称 $\mathscr{U}$ 是 D 的一个开覆盖 (open covering).

称 $\mathscr{U}$ 的一个子集 $\mathscr{V}$ 为一个子覆盖 (subcovering), 如果 $\mathscr{V}$ 也是 D 的一个覆盖. 进一步, 如果 $\mathscr{V}$ 中只有有限个元素, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个有限子覆盖.

定理 5.14 (有限覆盖定理, Borel)**.** *设 $\mathscr{U}$ 是一族开区间构成的族, 且是 $D=[a,b]$ 的一个覆盖, 则 $\mathscr{U}$ 有一个有限子族 $\mathscr{V}$ 也是 D 的覆盖.*

证明. 假设 $\mathscr{U}$ 的任何有限子族都不是 D 的覆盖 (简称 D 无有限子覆盖). .

令 $I_1=[a,b]$, 它无有限子覆盖, 构造闭区间的下降列 $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$, 满足 $|I_n|=\frac{1}{2}|I_{n-1}|$, 且 I_n 皆无 $\mathscr{U}$ 的有限子覆盖. 在构造好 I_n 之后, 它的左右两半不可能都有有限子覆盖, 我们取没有有限子覆盖的一半为 I_{n+1}.

由区间套原理可知, $\lim a_n=\lim b_n=c$, $c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 特别的, $c\in[a,b]$.

记 $\mathscr{U}=\{u_\alpha=(x_\alpha,y_\alpha)\}_{\alpha\in A}$. 从而 $\exists u_\alpha\ni c$, 即 $x_\alpha<c<y_\alpha$. 由 $x_\alpha<c=\lim a_n$, $c=\lim b_n<y_\alpha$, 则 $\exists N$, $\forall n>N$ 有 $x_\alpha<a_n$, $b_n<y_\alpha$ 即 I_n 有有限子覆盖 (x_α,y_α), 矛盾! □

定理 5.15. *有界闭区间上的连续函数一定有界.*

待补充

定义 5.16. *称 I 是区间, 如果 I 是 $\mathbb{R}^1$ 的凸集. 即 $\forall P,A\in I$ 则线段 $PQ\subseteq I$.*

命题 5.17. *考虑 $\inf I=m$(约定, 若无下界令 m 为符号 $-\infty$), $\sup I=M$(同, 无上界: $+\infty$).*

$\forall m<x<M$, 有 $x\in I$. 由 $\frac{m+x}{2}>m=\inf I$, 知 $\exists x_1\in I$ 使 $\frac{m+x}{2}>x_1$. 同理 $\exists x_2\in I$ 使 $\frac{x+M}{2}<x_2$. 于是 $x_1<x<x_2$, 由 I 的凸性知 $[x_1,x_2]\in I$. 特别的, $x\in I$.

这样

$$(m.M)\subseteq I\subseteq[m,M]\implies I=(m,M)\cup(\text{端点集的集合}) \tag{5.85}$$

定理 5.16 (反函数定理)**.** *设 I 是区间, 设 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是连续单射, 则*

- *$f(I)$ 是区间.*
- *$f^{-1}\colon f(I)\to I$ 是连续的.*

证明第一条. $\forall f(x_1),f(x_2)\in f(I)$, 对 $f(x_1),f(x_2)$, 使用介值定理, 线段 $f(x_1)f(x_2)$ 包含在 $f(I)$ 中 $\implies f(I)$ 是 $\mathbb{R}$ 的区间. □

证明第二条. 由 f 连续单射可知 f 严格单调, 不妨设 f 严格递增

1. 当 y_0 是 $f(I)$ 的内点时, 设 $f(x_0)=y_0$, 则 x_0 是 I 的内点, 则 $\forall\varepsilon>0$ 取 $0<\varepsilon^1<\varepsilon$ 使 $x\pm\varepsilon^1\in I$.

   令 $\delta=\min\{y_0-f(x_0-\varepsilon^1),f(x_0+\varepsilon^1)-y_0\}$, 这使得 y 介于 $f(x_0+\varepsilon^1),f(x_0-\varepsilon^1)$ 之间.

   由介值定理可知, $\exists x\in(x_0-\varepsilon^1,x_0+\varepsilon^1)$ 使得 $f(x)=y$. 于是 $|x-x_0|<\varepsilon^1\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 即 f 在 x_0 处连续.

2. 当 y_0 是 $f(I)$ 的端点, 不妨设是左端点. 类似令 $f(x_0)=y_0$, 则 x_0 也是 I 的左端点. 令 $\delta = f(x_0+\varepsilon^1)-y_0$, 则 $\forall y\in(y_0,y_0+\delta)$, 由介值定理可知, $\exists x\in(x_0,x_0+\varepsilon^1)$ 使得 $f(x)=y$. 于是 $|x-x_0|<\varepsilon^1 \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 即 f 在 x_0 处连续.

□

例 5.12 (幂函数)**.** 分情况三种:

- $f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}_+,\ [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 显然 f 连续且严格递增[9].

  由反函数定理可知, f 有连续的反函数 $f^{-1}\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 记为 $f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{n}}\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$
- 定义 $x^{\frac{m}{n}}\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 为 $x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$.
- $\forall\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, 取有理数序列 $\{\alpha_n\}\to\alpha$, 定义 $x^\alpha=\lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n}$.

例 5.13 (对数函数)**.** $f(x)=\mathrm{e}^x$ 有连续反函数 $f^{-1}(y)\xlongequal{\text{记为}}\ln y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$.

例 5.14 (反三角函数)**.** $f(x)=\sin x\colon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ 严格递增且连续, f 有连续的反函数 $f^{-1}(y)\xlongequal{\text{记为}}\arcsin y\colon[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

类似地, $\arccos x\colon[-1,1]\to[0,\pi]$, $\arctan x\colon(-\infty,+\infty)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

5.6 无穷小量与无穷大量[10]

定义 5.17. 称 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 是无穷小量 $\iff \lim_{x\to x_0}f(x)=0$, 正/负无穷大量同理.

例 5.15. $x\to 0$ 时, $x,\sin x,x^n\ (n\geq 1)$ 是无穷小量, $\ln|x|,\frac{1}{x}$ 是无穷大量.

引入无穷小量/无穷大量的比较,

- f 是比 g 更高阶的无穷小量 $\iff \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.
- f 是与 g 同阶的无穷小量 $\iff \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R}/\{0\}$.
- f 是与 g 等价的无穷小量 $\iff \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

---

[9]这可以用二项式展开

$$(x+h)^n=\sum C_n^l x^{n-l}h^l>x^n \tag{5.86}$$

[10]这描述的是某些函数具有特定的极限行为, 并不是某一个数是无穷小/无穷大

无穷大量的比较同理.

在计算极限时, 可以把某乘积因子替换为与之等价的无穷大/无穷小量, 不改变极限值. 因为

$$\lim\left(f\left(x\right)h\left(x\right)\right)=\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}g(x)h(x)\right) \tag{5.87}$$

6 微分与导数

定义 6.1. f 在某点处的导数定义为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x\right)}{h}\xlongequal{\text{极限换元}}\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}. \tag{6.1}$$

记为 $f'\left(x\right)$

命题 6.1. f 在 x_0 处是可导的, 当且仅当 $f\left(x_0\pm\right)$ 存在且相等.

例 6.1. $f\left(x\right)=\left|x\right|$ 在 $x=0$ 处是不可导的.

命题 6.2. 对于一元函数, 可导函数都连续.

证明. 设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续. 只需证 $\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, 实际上有

$$\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\left(x-x_0\right)\right)=f'\left(x_0\right)\cdot 0=0. \tag{6.2}$$

□

定义 6.2. 称 f 在 D 上可导, 如果 f 在 D 中每点处都可导, 也称 f 是 D 上的可导函数. 这样得到的映射 $D\to\mathbb{R},x_0\mapsto f'\left(x_0\right)$.

Leibniz 引入了符号, $f'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, 他想把导数解释为 $\mathrm{d}f$ 与 $\mathrm{d}x$ 之商.

6.1 计算导数

6.1.1 从定义直接计算

例 6.2. $f\left(x\right)=x^n$, $(n\geq 0)$, 当 $n=0$ 时, f 为常函数, $f'=0$. 我们之考虑 $n\neq 0$ 的情况.

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^{n-i}h^{i-1}=C_n^ix^{n-1}=nx^{n-1}. \tag{6.3}$$

例 6.3.

$$\begin{aligned}\sin x' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot\cos x.\end{aligned}\tag{6.4}$$

类似地, $\cos x' = -\sin x$

例 6.4. $f(x) = \mathrm{e}^x$.

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} \xlongequal{\text{换元}t\equiv \mathrm{e}^h-1} \mathrm{e}^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \mathrm{e}^x.\tag{6.5}$$

例 6.5.

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \xlongequal{\text{换元}t\equiv\frac{h}{x}} \lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{xt}} = \ln\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.\tag{6.6}$$

6.1.2 用导数的四则运算性质

定理 6.1. 设 f, g 在 x_0 处可导, 则

$$\begin{aligned}(f\pm g)' &= f'\pm g'\\ (f\cdot g)' &= f'\cdot g + f\cdot g'\\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}\end{aligned}\tag{6.7}$$

定义 6.3. 称 $D\colon \{C^\infty(E)\}\to\{C^\infty(E)\}$ 为一个导子, 如果它满足

- $D(f+g) = D(f) + D(g)$;
- $D(f\cdot g) = D(f)\cdot g + f\cdot D(g)$;

证明 *Leibniz* 法则.

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}\tag{6.8}$$

□

推论:

$$(f_1f_2f_3)' = f_1'f_2f_3 + f_1f_2'f_3 + f_1f_2f_3'.\tag{6.9}$$

这对于任意多个函数相乘也适用.

例 6.6.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{6.10}$$

类似地,

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{6.11}$$

6.1.3 复合函数求导

形式化地,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).\end{aligned} \tag{6.12}$$

但上式中标红的步骤是非法的, 因为 $f(x) - f(x_0)$ 可能为 0. 有两种修正方案:

1. 把除法用乘法和不等式改写.
2. 用微分重写 (这也适用于高维).

定理 6.2 (Chain Rule 链式法则)**.** *设 f 在 x_0 处可导, g 在 $f(x_0)$ 处可导, 则 $g \circ f$ 在 x_0 处可导, 且*

$$(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{6.13}$$

例 6.7.

$$(x^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1). \tag{6.14}$$

例 6.8.

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x). \tag{6.15}$$

特别地, 当 $f(x) = |x|$, 有

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{1}{x}. \quad (x \neq 0) \tag{6.16}$$

例 6.9. $f(x) = u(x)^{v(x)}$, 有

$$f'(x) = (u^v)' = \left(\mathrm{e}^{v \ln u}\right)' = \mathrm{e}^{v \ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right). \tag{6.17}$$

6.1.4 微分

f 在 x_0 处可导, 则 $\exists A \in \mathbb{R}$[11], 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h}=0. \tag{6.18}$$

令 $\alpha(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-Ah$, 有 $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0$

于是我们发现, $f(x)$ 在 x_0 附近可以近似为一个线性函数加上小的误差 $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\alpha(h)$.

$$f(x_0+h)\sim f(x_0)+Ah \tag{6.19}$$

我们可以通过研究线性近似来了解 f.

定义 6.4 (可微/微分)**.** *称 f 在 x_0 处可微, 如果存在线性映射 $L\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得*

$$f(x_0+h)=f(x_0)+L(h)+\alpha(h), \tag{6.20}$$

且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{h}=0$. 进而称满足上述条件的唯一的 L 为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $\mathrm{d}f_{x_0}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

命题 6.3. *对于一元函数, 可导与可微等价.*

若 f 在 x_0 处可微, 则其微分为

$$\mathrm{d}f_{x_0}(h)=f'(x_0)\,h,\ \forall h \tag{6.21}$$

.

定义 6.5 (整体微分)**.** *称 f 是 D 上的可微函数, 如果 f 在 D 中每一点 x_0 处皆可微, 这样得到一族线性映射.*

$$\{\mathrm{d}f_{x_0}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}_{x_0\in D} \tag{6.22}$$

称此族线性映射为 f 的微分, 记为 $\mathrm{d}f$ 或 Df.

上述的 $\mathrm{d}f_{x_0}$ 是一个 $T(D)\to\mathbb{R}$ 的映射, 称为 *1-form*. 这时候我们会发现链式法则几乎是显然的.

定理 6.3 (微分保持映射符合关系)**.** *设 f 在 x_0 处连续, g 在 $f(x_0)$ 处连续, 则 $g\circ f$ 在 x_0 处连续且*

$$\mathrm{d}(g\circ f)_{x_0}=\mathrm{d}g_{f(x_0)}\circ\mathrm{d}f_{x_0} \tag{6.23}$$

[11] 可导 $\implies$ 极限存在 $\implies$ 存在实数 A 等于极限值.

证明. 设 $\mathrm{d}f_{x_0}(h)=Ah$, $\mathrm{d}g_{f(x_0)}(v)=Bv$, 由微分的定义

$$f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\alpha(h), \quad \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0 \tag{6.24}$$

$$g(f(x_0)+v)=g(f(x_0))+Bv+\beta(v), \quad \lim_{v\to 0}\frac{\beta(v)}{v}=0 \tag{6.25}$$

复合知,

$$\begin{aligned} g\circ f(x_0+h)&=g(f(x_0)+Ah+\alpha(h))\\ &=g(f(x_0))+BAh+B\alpha(h)+\beta(Ah+\alpha(h)) \end{aligned} \tag{6.26}$$

只需证 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{B\alpha(h)+\beta(Ah+\alpha(h))}{h}=0$, 第一项是已知的, 只需证 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\beta(Ah+\alpha(h))}{h}=0$.

令 $q(v)=\begin{cases}\frac{\beta(v)}{v}, & v\neq 0\\ \lim_{v\to 0}\frac{\beta(v)}{v}=0 & v=0.\end{cases}$

注意到

$$\lim_{h\to 0}p(h)=\lim_{h\to 0}\left(Ah+\frac{\alpha(h)}{h}h\right)=0. \tag{6.27}$$

由复合极限定理知, $\lim\limits_{h\to 0}q(p(h))=0$, 进而,

$$\lim_{h\to 0}\left(q(p(h))\cdot\frac{Ah+\alpha(h)}{h}\right)=0. \tag{6.28}$$

注意

$$\begin{aligned} q(p(h))\frac{Ah+\alpha(h)}{h}&=\begin{cases}\frac{\beta(p(h))}{h}\frac{p(h)}{h}, & p(h)\neq 0\\ 0, & p(h)=0\end{cases}\\ &=\frac{\beta(Ah+\alpha(h))}{h} \end{aligned} \tag{6.29}$$

□

命题 6.4 (Leibniz 法则)**.**

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} \tag{6.30}$$

用归纳法易证.

6.2 反函数求导

若 f 是连续单射 $f\colon D\to\mathbb{R}$, 则 f 有反函数 f^{-1}, **问:**f^{-1} 是否可导? 如何求导?

命题 6.5. 若 f 与 f^{-1} 皆可导, 则有

$$\left(\mathrm{d}f^{-1}\right)_{f(x_0)} = \left(\mathrm{d}f_{x_0}\right)^{-1}, \quad \left(f^{-1}\right)'\left(f\left(x_0\right)\right) f'\left(x_0\right) = 1 \tag{6.31}$$

证明. 由于

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_D, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{f(D)} \tag{6.32}$$

用链式法则, 有

$$\begin{cases} \left(\mathrm{d}f^{-1}\right)_{f(x_0)} \circ \mathrm{d}f_{x_0} = \mathrm{Id}, \\ \mathrm{d}f_{x_0} \circ \left(\mathrm{d}f^{-1}\right)_{f(x_0)} = \mathrm{Id} \end{cases} \tag{6.33}$$

可知

$$\left(\mathrm{d}f^{-1}\right)_{f(x_0)} = \left(\mathrm{d}f_{x_0}\right)^{-1}. \tag{6.34}$$

□

例 6.10. $f(x) = x^3$, 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调, 但 f^{-1} 在 $y = 0$ 处不可导.

严格单调可导函数的反函数未必可导, 因为若 f^{-1} 在 $f(x_0)$ 处可导 $\implies f'(x_0) \neq 0$.

定理 6.4. 设 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 是连续单射, 且 D 是区间, 若 f 在 x_0 处可导且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 f^{-1} 在 $f(x_0)$ 处可导. 且有

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(x_0\right)\right) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}. \tag{6.35}$$

证明. 由导数的定义计算

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(x_0\right)\right) = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)}{y - f\left(x_0\right)}. \tag{6.36}$$

用复合极限定理, 定义 $g\colon D/\{x_0\} \to \mathbb{R}, u \mapsto g(u) = \frac{u - x_0}{f(u) - f(x_0)}$, 复合为

$$h(y) = g\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f\left(x_0\right)} \tag{6.37}$$

注意到

$$\lim_{y \to f(x_0)} f^{-1}(y) \xlongequal{\text{已证 } f^{-1} \text{ 连续}} f^{-1}\left(\lim_{y \to f(x_0)} y\right) = x_0. \tag{6.38}$$

故有

$$\lim_{u \to x_0} g(u) = \lim_{u \to x_0} \frac{u - x_0}{f(u) - f\left(x_0\right)} \xlongequal{\text{四则运算}} \frac{1}{f'\left(x_0\right)}. \tag{6.39}$$

修正方案 I 自动成立, 由 f 单知 $\forall y \neq f(x_0)$ 有 $f^{-1}(y) \neq x_0$. 这样由复合极限定理得到

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(x_0\right)\right) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}. \tag{6.40}$$

□

推论: 设 f^{-1} 是 f 的反函数, 且 f 是可导函数, 则

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)},\quad (\forall f'(x_0)\neq 0). \tag{6.41}$$

例 6.11.

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sin'\arcsin x}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.42}$$

例 6.12.

$$(\arccos x)'=\frac{1}{\cos'\arccos x}=\frac{1}{-\sin\arccos x}=\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \tag{6.43}$$

例 6.13.

$$(\arctan x)'=\frac{1}{\tan'\arctan x}=\cos^2\arctan x=\frac{1}{1+x^2} \tag{6.44}$$

6.3 复合函数的高阶导

$$\begin{aligned} h^{(1)}&=g'(f(x))f'(x)\\ h^{(2)}&=g''(f(x))f'(x)+g'(f(x))f''(x)\\ h^{(3)}&=g'''f'f'f'+g''f''f'+g''f'f''+g'f''' \end{aligned} \tag{6.45}$$

定义 6.6. 所谓 $1,2,\ldots,n$ 的一个分组方式 $P=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$, 其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的无交的非空子集, 且满足

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{1,2,\cdots,n\} \tag{6.46}$$

.

求导就是把求导算子分配到每一项的因式上.

定理 6.5.

$$(g\circ f)^n(x)=\sum_{\text{所有分组方案 } P=\{A_1,\cdots,A_k\}} g^{(\text{组数})}f^{(|A_1|)}\cdots f^{(|A_k|)} \tag{6.47}$$

证明. 采用归纳法, 几乎是显然的. □

例 6.14. $h(x)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}x^2}$, 求 $h^{(n)}(0)$.

令

$$g(y)=\mathrm{e}^y,\quad f(x)=\frac{\alpha}{2}x^2, h(x)=(g\circ f)(x). \tag{6.48}$$

经过计算可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=0}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}x^2}=\begin{cases}0, & n\ \text{为奇数},\\ \alpha^{\frac{n}{2}}\cdot(n-1)!!, & n\ \text{为偶数}\end{cases} \tag{6.49}$$

定义 6.7. 称 x_0 是 f 的极大值点, 如果 $\exists x_0$ 的开邻域使 f 在 U 中处处有定义且

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in U, \tag{6.50}$$

极小值同理.

定理 6.6 (Fermat)**.** 设 x_0 是 f 的极大值点, 且 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

证明. 不妨设 x_0 是极大值点, 则

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \tag{6.51}$$

且

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{6.52}$$

可知 $f'(x_0) = 0$. □

定义 6.8. 称 x_0 是 f 的 Critical Point 如果 $f'(x_0) = 0$.

对多元函数则全部偏导数为零 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0$ 称为临界点.

$$\mathrm{Crit}(f) = \{f \text{ 的临界点}\}. \tag{6.53}$$

定理 6.7 (罗尔定理)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上处处可导, 若 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists c \in (a,b)$ 使 $f'(c) = 0$.

证明. 又最值定理, f 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

- 若 f 有一个最大/小值点 $x_0 \in (a,b)$, 则由定理6.6可知, $f'(x_0) = 0$.
- 若 f 的最大最小值都属于 $\{a,b\}$, 结合 $f(a) = f(b)$ 可知, f 为常值函数.

□

例 6.15. 设 f 是 n 次多项式, 且 f 有 n 个不同的根 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) \tag{6.54}$$

对于每个 $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \cdots$ 使用罗尔定理

$$\implies \exists b_i \in [a_i, a_{i+1}] \text{ 使} f'(b_i) = 0. \tag{6.55}$$

于是 f' 有唯一的因式分解

$$f'(x) = n(x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_n). \tag{6.56}$$

展开后有

$$\begin{cases} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\dfrac{b_1+b_2+\cdots b_n}{n-1} \\ \displaystyle\sum_{i<j} a_i a_j / C_n^2=\sum_{i<j} b_i b_j / C_{n-1}^2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_{n-1}} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{n-1}} / C_n^{n-1}=b_1 b_2 \cdots b_{n-1} / C_{n-1}^{n-1}. \end{cases} \tag{6.57}$$

定理 6.8 (Lagrange 中值定理)**.** 设 $f \in C^1(a, b)$, 则 $\exists c \in(a, b)$, 使

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{6.58}$$

证明. 令

$$g(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right), \tag{6.59}$$

则对于 $g(x)$ 使用罗尔定理可得. □

由拉格朗日中值定理可以得到单调性与导数正负号的关系.

例 6.16. $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 令 $f(x)=\ln(1+x)$, 有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi} \in\left(\frac{1}{1+x}, 1\right) \tag{6.60}$$

故

$$\ln(1+x) \in\left(\frac{x}{1+x}, x\right) \tag{6.61}$$

定理 6.9 (柯西中值定理)**.** 对于 $h=f \circ g^{-1}$ 使用 *Lagrange* 中值定理, 可得

$$\exists \xi \in(a, b),\ 使 \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{6.62}$$