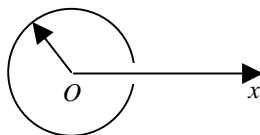


## 习题一

## 一、选择题

1. 如图所示, 半径为  $R$  的圆环开有一小空隙而形成一圆弧, 弧长为  $L$ , 电荷  $-Q$  均匀分布其上。空隙长为  $\Delta L (\Delta L \ll R)$ , 则圆弧中心  $O$  点的电场强度和电势分别为 [ ]

- (A)  $\frac{-Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{i}, \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ; (B)  $\frac{-Q\Delta L}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2 L} \vec{i}, \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ;  
(C)  $\frac{Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{i}, \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ; (D)  $\frac{-Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{i}, \frac{-Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 RL}$ 。



答案: A

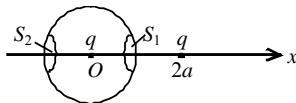
解: 闭合圆环中心场强为 0, 则圆弧产生的场强与空隙在圆心处产生的场强之和为 0。由于空隙  $\Delta L$  非常小, 可视为点电荷, 设它与圆弧电荷密度相同, 则所带电荷为  $-Q\Delta L/L$ ,

产生的场强为  $\frac{Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{i}$ , 所以圆弧产生的场强为  $\vec{E}_O = \frac{-Q\Delta L}{4\pi\epsilon_0 R^2 L} \vec{i}$ ; 又根据电势叠加原理

$$\text{可得 } U_O = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

2. 有两个电荷都是  $+q$  的点电荷, 相距为  $2a$ 。今以左边的点电荷所在处为球心, 以  $a$  为半径作一球形高斯面。在球面上取两块相等的小面积  $S_1$  和  $S_2$ , 其位置如图所示。设通过  $S_1$  和  $S_2$  的电场强度通量分别为  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ , 通过整个球面的电场强度通量为  $\Phi_S$ , 则 [ ]

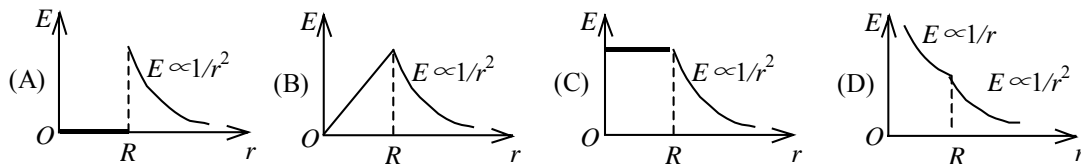
- (A)  $\Phi_1 > \Phi_2, \Phi_S = q/\epsilon_0$ ; (B)  $\Phi_1 < \Phi_2, \Phi_S = 2q/\epsilon_0$ ;  
(C)  $\Phi_1 = \Phi_2, \Phi_S = q/\epsilon_0$ ; (D)  $\Phi_1 < \Phi_2, \Phi_S = q/\epsilon_0$ 。



答案: D

解: 由高斯定理知  $\Phi_S = q/\epsilon_0$ 。由于面积  $S_1$  和  $S_2$  相等且很小, 场强可视为均匀。根据场强叠加原理,  $E_1 = 0, E_2 < 0$ , 所以  $\Phi_1 = 0, \Phi_2 > 0$ 。

3. 半径为  $R$  的均匀带电球体的静电场中各点的电场强度的大小  $E$  与距球心的距离  $r$  的关系曲线为 [ ]



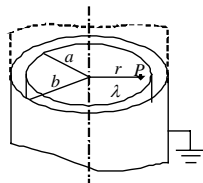
答案: B

解：由高斯定理知均匀带电球体的场强分布为  $E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r & (r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & (r > R) \end{cases}$ ，所以选 (B)。

4. 如图所示，一半径为  $a$  的“无限长”圆柱面上均匀带电，其电荷线密度为  $\lambda$ 。在它外面同轴地套一半径为  $b$  的薄金属圆筒，圆筒原先不带电，但与地连接。设地的电势为零，则在内圆柱面里面、距离轴线为  $r$  的  $P$  点的场强大小和电势分别为 [ ]

(A)  $E=0, U=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}$ ; (B)  $E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, U=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{r}$ ;

(C)  $E=0, U=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$ ; (D)  $E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, U=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$ 。



答案：C

解：由高斯定理知内圆柱面里面各点  $E=0$ ，两圆柱面之间  $E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ，则  $P$  点的电势为

$$U = \int_r^b E dr = \int_r^a 0 dr + \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

5. 在边长为  $a$  的正方体中心处放置一点电荷  $Q$ ，设无穷远处为电势零点，则在正方体顶角处的电势为

(A)  $\frac{Q}{4\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a}$ ; (B)  $\frac{Q}{2\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a}$ ; (C)  $\frac{Q}{6\pi\epsilon_0 a}$ ; (D)  $\frac{Q}{12\pi\epsilon_0 a}$ 。

答案：B

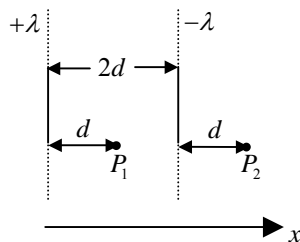
解：正方体中心到顶角处的距离  $r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ，由点电荷的电势公式得

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{2\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a}$$

## 二、填空题

1. 真空中两平行的无限长均匀带电直线，电荷线密度分别为  $-\lambda$  和  $\lambda$ ，点  $P_1$  和  $P_2$  与两带电线共面，位置如图，取向右为坐标正方向，则  $P_1$  和  $P_2$  两点的场强分别

为 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_。



答案：  $E_1 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 d} \vec{i}$ ;  $E_2 = -\frac{\lambda}{3\pi\epsilon_0 d} \vec{i}$ 。

解：无限长均匀带电直线，在空间某点产生的场强  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$ ，方向垂直于带电直线沿径

向向外（ $\lambda > 0$ ）。式中  $a$  为该点到带电直线的距离。

由场强叠加原理， $P_1$ 、 $P_2$  点的场强为两直线产生的场强的矢量和。在  $P_1$  点，两场强方向相同，均沿  $x$  轴正向；在  $P_2$  点，两场强方向相反，所以

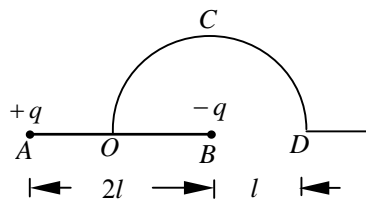
$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{i} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{i} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 d} \vec{i}; \quad E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \times 3d} \vec{i} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{i} = -\frac{\lambda}{3\pi\epsilon_0 d} \vec{i}$$

2. 一半径为  $R$ ，长为  $L$  的均匀带电圆柱面，其单位长度带有  $\lambda$ 。在带电圆柱的中垂面上有一点  $P$ ，它到轴线距离为  $r$  ( $r > R$ )，则  $P$  点的电场强度的大小：当  $r \ll L$  时，  
 $E =$  \_\_\_\_\_；当  $r \gg L$  时， $E =$  \_\_\_\_\_。

答案：  $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ；  $\frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

解：当  $r \ll L$  时，带电体可视为无限长均匀带电圆柱面；当  $r \gg L$  时，带电体可视为点电荷。

3. 如图， $A$  点与  $B$  点间距离为  $2l$ ， $OCD$  是以  $B$  为中心，以  $l$  为半径的半圆路径。 $A$ 、 $B$  两处各放有一点电荷，电量分别为  $+q$  和  $-q$ 。若把单位正电荷从  $O$  点沿  $OCD$  移到  $D$  点，则电场力所做的功为 \_\_\_\_\_；把单位负电荷从  $D$  点沿  $AB$  延长线移到无穷远，电场力所做的功为 \_\_\_\_\_。



答案：  $\frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$ ；  $\frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$ 。

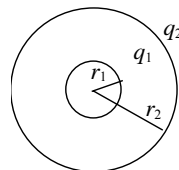
解：电场力做功与路径无关。

$$(1) U_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 3l} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{-q}{6\pi\epsilon_0 l}, \quad U_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l} = 0,$$

$$A = Q(U_O - U_D) = 1 \times \left( 0 - \frac{-q}{6\pi\epsilon_0 l} \right) = \frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

$$(2) A' = Q'(U_D - U_\infty) = -1 \times \left( \frac{-q}{6\pi\epsilon_0 l} - 0 \right) = \frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

4. 如图所示，两同心带电球面，内球面半径为  $r_1 = 5\text{cm}$ ，带电荷  $q_1 = 3 \times 10^{-8}\text{C}$ ；外球面半径为  $r_2 = 20\text{cm}$ ，带电荷  $q_2 = -6 \times 10^{-8}\text{C}$ 。



设无穷远处电势为零, 则在两球面间另一电势为零的球面半径  $r =$  \_\_\_\_\_。

答案: 10cm

解: 半径为  $R$  的均匀带电球面的电势分布为  $U_p = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & (r < R) \end{cases}$ 。所以, 当  $r_1 < r < r_2$

时,  $U_r = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$ 。令  $U_r = 0$ , 得  $r = 10\text{cm}$ 。

5. 已知某静电场的电势分布为  $U = 8x + 12x^2y - 20y^2$ , 则场强分布

$\vec{E} =$  \_\_\_\_\_。

答案:  $\vec{E} = (-8 - 24xy)\vec{i} + (-12x^2 + 40y)\vec{j}$

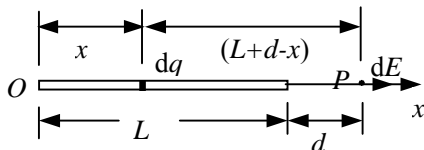
解: 电场强度与电势梯度的关系为  $\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ 。由此可求得

$$\vec{E} = (-8 - 24xy)\vec{i} + (-12x^2 + 40y)\vec{j}$$

### 三、计算题

1. 如图所示, 真空中一长为  $L$  的均匀带电细直杆, 总电荷为  $q$ , 试求在直杆延长线上距杆的一端为  $d$  的  $P$  点的电场强度。

答案:  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d(L+d)}$



解: 带电直杆的电荷线密度为  $\lambda = q/L$ 。设坐标原点

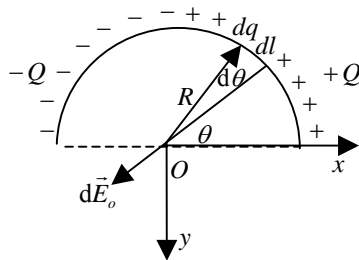
$O$  在杆的左端, 在  $x$  处取一电荷元  $dq = \lambda dx = qdx/L$ , 它在  $P$  点的场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (L+d-x)^2} = \frac{q dx}{4\pi\epsilon_0 L (L+d-x)^2}$$

$$\text{总场强} \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \int_0^L \frac{dx}{(L+d-x)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d(L+d)}$$

方向沿  $x$  轴, 即杆的延长线方向。

2. 如图所示, 一半径为  $R$  的半圆环, 右半部均匀带电  $+Q$ , 左半部均匀带电  $-Q$ 。问半圆环中心  $O$  点的电场强度大小为多少? 方向如何?



答案:  $\frac{Q}{\pi^2 \varepsilon_0 R^2}$ , 方向水平向左。

解: 本题运用点电荷公式对电荷连续分布的带电体在空间产生的电场进行计算。

如图所示, 取电荷元  $dq = \frac{2Q}{\pi R} R d\theta$ , 则电荷元在中心  $O$  点产生的场强为

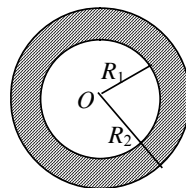
$$dE_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{2Q}{\pi R} R d\theta}{R^2}$$

由对称性可知  $\int dE_{Oy} = 0$ 。所以

$$E_0 = \int dE_{Ox} = \int dE_0 \cos\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{Q}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \cos\theta d\theta = \frac{Q}{\pi^2 \varepsilon_0 R^2} (\sin\theta) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{Q}{\pi^2 \varepsilon_0 R^2}$$

方向沿  $-x$  方向, 即水平向左。

3. 图示为一个均匀带电的球层, 其电荷体密度为  $\rho$ , 球层内表面半径为  $R_1$ , 外表面半径为  $R_2$ 。设无穷远处为电势零点, 求该带电系统的场强分布和空腔内任一点的电势。



答案:

$$(1) E_1 = 0 \quad (r < R_1), \quad E_2 = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2), \quad E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R_2);$$

$$(2) U = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2).$$

解: (1) 根据电场分布的球对称性, 可以选以  $O$  为球心、半径为  $r$  的球面作高斯面, 根据高斯定理即可求出:  $E \cdot 4\pi r^2 = q_{\text{int}} / \varepsilon_0$ 。

在空腔内 ( $r < R_1$ ):  $q_{\text{int}} = 0$ , 所以  $E_1 = 0$

$$\text{在带电球层内 } (R_1 < r < R_2): q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - R_1^3), \quad E_2 = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\text{在带电球层外 } (r > R_2): q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3), \quad E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 空腔内任一点的电势为

$$U = \int_r^\infty E dr = \int_r^{R_1} 0 dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^\infty \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

还可用电势叠加法求空腔内任一点的电势。在球层内取半径为  $r \rightarrow r + dr$  的薄球层, 其电量为  $dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$

$dq$  在球心处产生的电势为 
$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r dr}{\epsilon_0}$$

整个带电球层在球心处产生的电势为

$$U_0 = \int dU_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} r dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

因为空腔内为等势区 ( $E=0$ ), 所以空腔内任一点的电势  $U$  为

$$U = U_0 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

4. 两个带等量异号电荷的均匀带电同心球面, 半径分别为  $R_1 = 0.03 \text{ m}$  和  $R_2 = 0.10 \text{ m}$ 。

已知两者的电势差为  $450 \text{ V}$ , 求内球面上所带的电荷。

答案:  $2.14 \times 10^{-9} \text{ C}$

解: 设内球上所带电荷为  $Q$ , 则两球间的电场强度的大小为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

两球的电势差 
$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

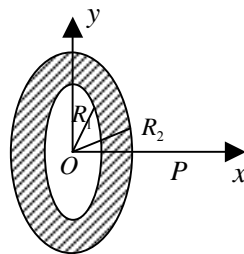
所以 
$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 U_{12}}{R_2 - R_1} = 2.14 \times 10^{-9} \text{ C}$$

5. 一平面圆环, 内外半径分别为  $R_1, R_2$ , 均匀带电且电荷面密度为  $+\sigma$ 。(1) 求圆环轴线上离环心  $O$  为  $x$  处的  $P$  点的电势; (2) 再应用场强和电势梯度的关系求  $P$  点的场强; (3) 若令  $R_2 \rightarrow \infty$ , 则  $P$  点的场强又为多少?

答案: (1) 
$$U_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R_2^2} - \sqrt{x^2 + R_1^2});$$

(2) 
$$E_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right);$$

(3) 当  $R_2 \rightarrow \infty$ , 
$$E_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_1^2}}.$$



解: (1) 把圆环分成许多小圆环。对半径为  $y$ , 宽为  $dy$  的小圆环, 其电量为  $dq = \sigma ds = \sigma 2\pi y dy$ , 该带电小圆环在  $P$  点产生的电势为

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

整个圆环上的电荷在  $P$  点产生的电势

$$U_p = \int_{R_1}^{R_2} dU = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{x^2 + R_2^2} - \sqrt{x^2 + R_1^2})$$

$$(2) \quad E_p = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right), \text{ 方向沿 } x \text{ 正向};$$

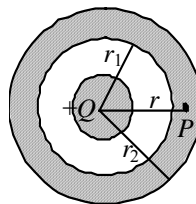
$$(3) \quad \text{当 } R_2 \rightarrow \infty, \quad E_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_1^2}}$$

## 习题二

## 一、选择题

1. 如图所示, 一均匀带电球体, 总电量为 $+Q$ , 其外部同心地罩一内、外半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的金属球壳。设无穷远处为电势零点, 则球壳内半径为 $r$ 的 $P$ 点处的场强和电势为[ ]

- (A)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ,  $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ; (B)  $E = 0$ ,  $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$ ;  
 (C)  $E = 0$ ,  $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ; (D)  $E = 0$ ,  $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$ 。



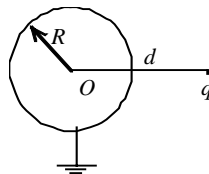
答案: D

解: 由静电平衡条件得金属壳内 $E = 0$ ; 外球壳内、外表面分别带电为 $-Q$ 和 $+Q$ , 根据电势叠加原理得

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

2. 半径为 $R$ 的金属球与地连接, 在与球心 $O$ 相距 $d = 2R$ 处有一电量为 $q$ 的点电荷, 如图所示。设地的电势为零, 则球上的感应电荷 $q'$ 为[ ]

- (A) 0; (B)  $\frac{q}{2}$ ; (C)  $-\frac{q}{2}$ ; (D)  $-q$ 。



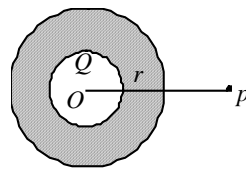
答案: C

解: 导体球接地, 球心处电势为零, 即 $U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} = 0$  (球面上所有感应电荷到

球心的距离相等, 均为 $R$ ), 由此解得 $q' = -\frac{R}{d}q = -\frac{q}{2}$ 。

3. 如图, 在一带电量为 $Q$ 的导体球外, 同心地包有一各向同性均匀电介质球壳, 其相对电容率为 $\epsilon_r$ , 壳外是真空, 则在壳外 $P$ 点处( $\overline{OP} = r$ )的场强和电位移的大小分别为[ ]

- (A)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$ ,  $D = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ; (B)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r r^2}$ ,  $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ ;  
 (C)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ,  $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ ; (D)  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ,  $D = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。



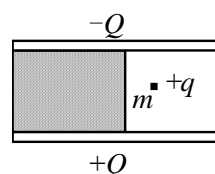
答案: C

解: 由高斯定理得电位移 $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ , 而 $E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

4. 一大平行板电容器水平放置, 两极板间的一半空间充有各向同性均匀电介质, 另一半



为空气，如图所示。当两极板带上恒定的等量异号电荷时，有一个质量为  $m$ 、带电量为  $+q$  的质点，在极板间的空气区域中处于平衡。此后，若把电介质抽去，则该质点 [ ]

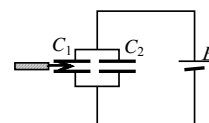


- (A) 保持不动； (B) 向上运动；  
(C) 向下运动； (D) 是否运动不能确定。

答案：B

解：由  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$  知，把电介质抽去则电容  $C$  减少。因极板上电荷  $Q$  恒定，由  $C = \frac{Q}{U}$  知电压  $U$  增大，场强  $E = U/d$  增大，质点受到的电场力  $F = qE$  增大，且方向向上，故质点向上运动。

5.  $C_1$  和  $C_2$  两空气电容器并联以后接电源充电，在电源保持联接的情况下，在  $C_1$  中插入一电介质板，如图所示，则 [ ]



- (A)  $C_1$  极板上电荷增加， $C_2$  极板上电荷减少；  
(B)  $C_1$  极板上电荷减少， $C_2$  极板上电荷增加；  
(C)  $C_1$  极板上电荷增加， $C_2$  极板上电荷不变；  
(D)  $C_1$  极板上电荷减少， $C_2$  极板上电荷不变。

答案：C

解：在  $C_1$  中插入电介质板，则电容  $C_1$  增大，而电压保持不变，由  $q = CU$  知  $C_1$  极板上电荷增加， $C_2$  极板上电荷不变。

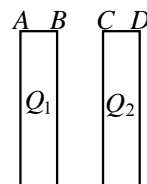
## 二、填空题

1. 一空心导体球壳带电  $q$ ，当在球壳内偏离球心某处再放一电量为  $q$  的点电荷时，则导体球壳内表面上所带的电量为\_\_\_\_\_；电荷\_\_\_\_\_ 均匀分布（填“是”或“不是”）；外表面上的电量为\_\_\_\_\_；电荷\_\_\_\_\_ 均匀分布（填“是”或“不是”）。

答案：  $-q$ ；不是；  $2q$ ；是。

解：由高斯定理及导体静电平衡条件，导体球壳内表面带有非均匀分布的电量  $-q$ ；由电荷守恒定律，球壳外表面带电量为  $2q$ ，且根据静电屏蔽原理知，外表面电荷均匀分布。

2. 如图所示，两块很大的导体平板平行放置，面积都是  $S$ ，有一定厚度，带电荷分别为  $Q_1$  和  $Q_2$ 。如不计边缘效应，则  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四个表面上的电荷面密度分别为\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_。



答案:  $\frac{Q_1+Q_2}{2S}$ ;  $\frac{Q_1-Q_2}{2S}$ ;  $\frac{Q_2-Q_1}{2S}$ ;  $\frac{Q_1+Q_2}{2S}$ 。

解: 作高斯面, 用高斯定理可得 (或参考教材例题),  $\sigma_2 = -\sigma_3$ ,  $\sigma_1 = \sigma_4$ 。依题意得,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q_1}{S}, \quad \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{Q_2}{S}, \quad \text{四式联立求解出上面结果。}$$

3. 一空气平行板电容器, 电容为  $C$ , 两极板间距离为  $d$ 。充电后, 两极板间相互作用力为  $F$ , 则两极板间的电势差为\_\_\_\_\_, 极板上的电量为\_\_\_\_\_。

答案:  $\sqrt{2Fd/C}$ ;  $\sqrt{2FdC}$ 。

解:  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ ,  $F = qE_1 = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{q^2}{2Cd}$ , 故,  $q = \sqrt{2FdC}$ ,  $U = \frac{q}{C} = \sqrt{\frac{2Fd}{C}}$ 。

4. 一电容为  $C$  的空气平行板电容器, 接上电源充电至端电压为  $V$  后与电源断开。若把电容器的两个极板的间距增大至原来的 3 倍, 则外力所做的功为\_\_\_\_\_。

答案:  $CV^2$

解: 因  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , 所以当  $d' = 3d$ , 则  $C' = \frac{C}{3}$ 。电容器充电后与电源断开, 极板上的电荷

不变, 由  $W = \frac{Q^2}{2C}$  知,  $W' = 3W$ 。外力所做的功为  $A = W' - W = 2W = 2(\frac{1}{2}CV^2) = CV^2$

5. 两个电容器的电容关系为  $C_1 = 2C_2$ , 若将它们串联后接入电路, 则电容器 1 储存的电场能量是电容器 2 储能的\_\_\_\_\_倍; 若将它们并联后接入电路, 则电容器 1 储存的电场能量是电容器 2 储能的\_\_\_\_\_倍。

答案:  $\frac{1}{2}$ ; 2。

解: 串联电容器的电量相等, 所以  $\frac{W_1}{W_2} = \frac{Q^2}{2C_1} / \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2}$ ; 并联电容器的电压相等,

所以  $\frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{2}C_1V^2 / \frac{1}{2}C_2V^2 = 2$ 。

### 三、计算题

1. 半径为  $R_1 = 1.0\text{cm}$  的导体球, 带有电荷  $q = 1.0 \times 10^{-10}\text{C}$ , 球外有一个内外半径分别为  $R_2 = 3.0\text{cm}$  和  $R_3 = 4.0\text{cm}$  的同心导体球壳, 壳上带有电荷  $Q = 11 \times 10^{-10}\text{C}$ , 试计算:

- (1) 两球的电势  $U_1$  和  $U_2$  ;  
 (2) 用导线把球和球壳接在一起后,  $U_1$  和  $U_2$  分别是多少?  
 (3) 若外球接地,  $U_1$  和  $U_2$  为多少?  
 (4) 若内球接地,  $U_1$  和  $U_2$  为多少?

答案: (1) 330V, 270V; (2) 270V, 270V; (3) 60V, 0V; (4) 0V, 180V。

解: 本题可用电势叠加法求解, 即根据均匀带电球面内任一点电势等于球面上电势, 均匀带电球面外任一点电势等于将电荷集中于球心的点电荷在该点产生的电势。首先求出导体球表面和同心导体球壳内外表面的电荷分布。然后根据电荷分布和上述结论由电势叠加原理求得两球的电势。若两球用导线连接, 则电荷将全部分布于外球壳的外表面, 再求得其电势。

(1) 据题意, 静电平衡时导体球带电  $q = 1.0 \times 10^{-10} \text{C}$ , 则

导体球壳内表面带电为  $-q = -1.0 \times 10^{-10} \text{C}$ ;

导体球壳外表面带电为  $q + Q = 12 \times 10^{-10} \text{C}$ ,

所以, 导体球电势  $U_1$  和导体球壳电势  $U_2$  分别为

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_3} \right) = 330\text{V}$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R_3} - \frac{q}{R_3} + \frac{q+Q}{R_3} \right) = 270\text{V}$$

(2) 两球用导线相连后, 导体球表面和同心导体球壳内表面的电荷中和, 电荷全部分布于球壳外表面, 两球成等势体, 其电势为

$$U' = U_1 = U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{R_3} = 270\text{V}$$

(3) 若外球接地, 则球壳外表面的电荷消失, 且  $U_2 = 0$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right) = 60\text{V}$$

(4) 若内球接地, 设其表面电荷为  $q'$ , 而球壳内表面将出现  $-q'$ , 球壳外表面的电荷为  $Q + q'$ . 这些电荷在球心处产生的电势应等于零, 即

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{R_1} - \frac{q'}{R_2} + \frac{q'+Q}{R_3} \right) = 0$$

解得  $q' = -3 \times 10^{-10} \text{C}$ , 则

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{R_3} - \frac{q'}{R_3} + \frac{q'+Q}{R_3} \right) = 180\text{V}$$

2. 两个同心的薄金属球壳, 内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ 。球壳之间充满两层均匀电介质, 其相对电容率分别为  $\varepsilon_{r1}$  和  $\varepsilon_{r2}$ , 两层电介质的分界面半径为  $R$ 。设内球壳带有电荷  $Q$ , 求电位移、场强分布和两球壳之间的电势差。

$$\text{答案: (1) } D = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & (r > R_1) \end{cases}; \quad (2) E = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} & (R_1 < r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2} & (R < r < R_2) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2} & (r > R_2) \end{cases};$$

$$(3) U_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}R} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}R} - \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_2} \right)。$$

解: 由高斯定理  $D4\pi r^2 = q_{\text{int}}$  及  $D = \varepsilon_0\varepsilon_r E$  得:

$$\text{当 } r < R_1 \text{ 时, } D_1 = 0, E_1 = 0$$

$$\text{当 } R_1 < r < R \text{ 时, } D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}$$

$$\text{当 } R < r < R_2 \text{ 时, } D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2}$$

$$\text{当 } r > R_2 \text{ 时, } D_4 = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

两球壳之间的电势差为

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^R E_2 dr + \int_R^{R_2} E_3 dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}R} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}R} - \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_2} \right)$$

3. 在极板间距为  $d$  的空气平行板电容器中, 平行于极板插入一块厚度为  $d/2$ 、面积与极板相同的金属板后, 其电容为原来电容的多少倍? 如果平行插入的是相对电容率为  $\varepsilon_r$  的与金属板厚度、面积均相同的介质板则又如何?

$$\text{答案: (1) 2 倍; (2) } \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \text{ 倍。}$$

解: (1) 平行插入  $d/2$  厚的金属板, 相当于原来电容器极板间距由  $d$  减小为  $d/2$ , 则

$$C' = \varepsilon_0 \frac{S}{d/2} = 2\varepsilon_0 \frac{S}{d} = 2C_0$$

(2) 插入同样厚度的介质板, 则相当于一个极板间距为  $d/2$  的空气平行板电容器与另一个极板间距为  $d/2$ 、充满电容率为  $\varepsilon_0\varepsilon_r$  的电介质的电容器的串联, 则

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{\varepsilon_r C'} = \frac{1}{2C_0} + \frac{1}{2\varepsilon_r C_0} = \frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r C_0}, \text{ 解得 } C'' = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} C_0$$

4. 一半径为  $R$  的球体, 均匀带电, 总电荷量为  $Q$ , 求其静电能。

答案:  $\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$ 。

解: 由高斯定理易得球体内外场强为

$$E_{\text{in}} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \quad E_{\text{out}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

把空间看成由许多与带电球体同心的球壳组成, 任取一个内径为  $r$ , 外径为  $r + dr$  的球壳, 其体积为  $dV = 4\pi r^2 dr$ , 球壳中的电场能量为

$$dW = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$$

则整个空间的电场能量为

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV = \int_{V_{\text{in}}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{\text{in}}^2 dV + \int_{V_{\text{out}}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{\text{out}}^2 dV \\ &= \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

5. 一圆柱形电容器内外两极板的半径分别为  $a$  和  $b$ , 试证其带电后所储存的电场能量的一半是在半径为  $r = \sqrt{ab}$  的圆柱面内部。

证: 圆柱状电容器中的场强  $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ , 其中,  $\lambda = q/l$ 。取体积元  $dV = 2\pi r l dr$ , 能量

$$\text{为 } dW = w dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot 2\pi r l dr = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right)^2 \cdot 2\pi r l dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \frac{dr}{r}$$

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}$$

设总能量的一半是储藏在半径为  $r$  的圆柱内部, 则有

$$\frac{W}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \int_a^r \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{r}{a}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{b}{a} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{r}{a}$$

解得  $r = \sqrt{ab}$

## 习题三

## 一、选择题

1. 如图 3-1 所示, 两根长直载流导线垂直纸面放置, 电流  $I_1=1A$ , 方向垂直纸面向外; 电流  $I_2=2A$ , 方向垂直纸面向内, 则  $P$  点的磁感应强度  $\vec{B}$  的方向与  $x$  轴的夹角为 [ ]

- (A)  $30^\circ$ ; (B)  $60^\circ$ ; (C)  $120^\circ$ ; (D)  $210^\circ$ 。

答案: A

解: 如图, 电流  $I_1, I_2$  在  $P$  点产生的磁场大小分别为

$$B_1 = \frac{I_1}{2\pi d}, B_2 = \frac{I_2}{2\pi 2d}, \text{ 又由题意知 } B_1 = B_2;$$

再由图中几何关系容易得出,  $B$  与  $x$  轴的夹角为  $30^\circ$ 。

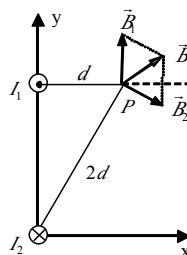


图 3-1

2. 如图 3-2 所示, 一半径为  $R$  的载流圆柱体, 电流  $I$  均匀流过截面。设柱体内 ( $r < R$ ) 的磁感应强度为  $B_1$ , 柱体外 ( $r > R$ ) 的磁感应强度为  $B_2$ , 则 [ ]

- (A)  $B_1, B_2$  都与  $r$  成正比;  
(B)  $B_1, B_2$  都与  $r$  成反比;  
(C)  $B_1$  与  $r$  成反比,  $B_2$  与  $r$  成正比;  
(D)  $B_1$  与  $r$  成正比,  $B_2$  与  $r$  成反比。

答案: D

解: 无限长均匀载流圆柱体, 其内部磁场与截面半径成正比, 而外部场等效于电流集中于其轴线上的直线电流磁场, 所以外部磁场与半径成反比。

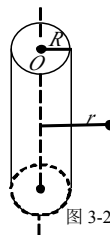


图 3-2

3. 关于稳恒电流磁场的磁场强度  $\vec{H}$ , 下列几种说法中正确的是 [ ]

- (A)  $\vec{H}$  仅与传导电流有关。  
(B) 若闭合曲线内没有包围传导电流, 则曲线上各点的  $\vec{H}$  必为零。  
(C) 若闭合曲线上各点  $\vec{H}$  均为零, 则该曲线所包围传导电流的代数和为零。  
(D) 以闭合曲线  $L$  为边缘的任意曲面的  $\vec{H}$  通量均相等。

答案: C

解: 若闭合曲线上各点  $\vec{H}$  均为零, 则沿着闭合曲线  $\vec{H}$  环流也为零, 根据安培环路定理, 则该曲线所包围传导电流的代数和为零。

4. 一无限长直圆筒, 半径为  $R$ , 表面带有一层均匀电荷, 面密度为  $\sigma$ , 在外力矩的作用下, 这圆筒从  $t=0$  时刻开始以匀角加速度  $\alpha$  绕轴转动, 在  $t$  时刻圆筒内离轴为  $r$  处的磁感应强度  $\vec{B}$  的大小为 [ ]

- (A) 0; (B)  $\mu_0 \sigma R \alpha t$ ; (C)  $\mu_0 \sigma \frac{R}{r} \alpha t$ ; (D)  $\mu_0 \sigma \frac{r}{R} \alpha t$ 。

答案: B

解: 圆筒转动时形成电流, 单位长度圆筒的电流强度为  $I = \sigma \cdot 2\pi R \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \sigma R \omega$

在  $t$  时刻圆筒转动的角速度为  $\omega = \alpha t$

所以,  $t$  时刻单位长度圆筒的电流强度为  $I = \sigma R \alpha t$

则, 圆筒转动形成圆电流在内部的磁感应强度为 (类似于无限长直螺线管)  $B = \mu_0 I = \mu_0 \sigma R \alpha t$

5. 能否用安培环路定律, 直接求出下列各种截面的长直载流导线各自所产生的磁感应强度  $\vec{B}$ 。(1) 圆形截面; (2) 半圆形截面; (3) 正方形截面 [ ]
- (A) 第(1)种可以, 第(2)(3)种不行;  
 (B) 第(1)(2)种可以, 第(3)种不行;  
 (C) 第(1)(3)种可以, 第(2)种不行;  
 (D) 第(1)(2)(3)种都可以。

答案: A

解: 利用安培环路定理时, 必须要求所选环路上磁感应强度具有对称性,  $B$  可作为常数提出积分号外, 否则就无法利用该定律来计算  $B$ 。

## 二、填空题

1. 如图 3-3 所示, 一无限长扁平铜片, 宽度为  $a$ , 厚度不计, 电流  $I$  在铜片上均匀分布。求铜片外与铜片共面、离铜片右边缘为  $b$  处的  $P$  点的磁感应强度  $\vec{B}$  的大小\_\_\_\_\_。

答案:  $\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b}$ 。

解: 如图所示, 建立水平的坐标  $x$  轴, 平片电流分割成无限个宽度为  $dx$ , 电流强度为  $\frac{I}{a} dx$  的无限长直线电

流, 在  $P$  点处的磁感应强度为 
$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi a(a+b-x)} dx$$

所以, 平片电流在  $P$  点的磁感应强度为

$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi a(a+b-x)} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b}$$

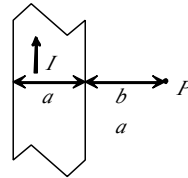


图 3-3

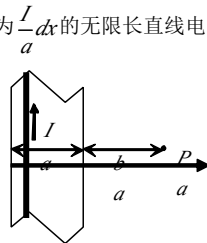


图 3-3

2. 在真空中, 电流  $I$  由长直导线 1 沿垂直  $bc$  边方向经  $a$  点流入一电阻均匀分布的正三角形线框, 再由  $b$  点沿平行  $ac$  边方向流出, 经长直导线 2 返回电源, 如图 3-4 所示。三角形框每边长为  $l$ , 则在该正三角框中心  $O$  点处磁感应强度的大小  $B =$ \_\_\_\_\_。

答案:  $B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi}$ 。

解: 长直线电流 1a 在  $O$  点的磁感应强度为 0;

长直线电流 b2 在  $O$  点的磁感应强度为  $B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi Ob} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi}$  方向垂直平

面向里;

电流  $ab$  边和  $ac$  边的电流强度分别为  $\frac{2}{3}I$  和  $\frac{1}{3}I$ ;

电流  $ab$  边在  $O$  点的磁感应强度为 ( $\beta_1 = -60^\circ$ ,  $\beta_2 = 60^\circ$ )

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_{ab}}{4\pi d} (\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{6\pi d} \quad \text{方向垂直平面向里};$$

电流  $ac$  边在  $O$  点的磁感应强度为

$$B_3 = 2 \cdot \frac{\mu_0 I_{ac}}{4\pi d} (\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{6\pi d} \quad \text{方向垂直平面向外}。$$

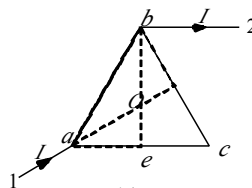
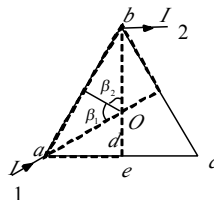


图 3-4



所以, 三角形线框在中心  $O$  点的合磁感应强度为 0。

则, 总电流在  $O$  点的磁感应强度为  $B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi}$ , 方向垂直平面向里。

3. 在一根通有电流  $I$  的长直导线旁, 与之共面地放着一个长、宽各为  $a$  和  $b$  的矩形线框, 线框的长边与载流长直导线平行, 且二者相距为  $b$ , 如图 3-5 所示。在此情形中, 线框内的磁通量  $\Phi =$  \_\_\_\_\_。

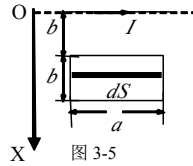


图 3-5

答案:  $\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$ 。

解: 如图所示, 建立竖直向下的坐标轴  $OX$ , 在矩形线框内取平行于长直导线的微元面积  $dS$ , 磁通量为  $d\Phi$ , 则

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot a dx$$

所以, 线框内总的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_b^{2b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

4. 电子在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中沿半径为  $R$  的圆周运动, 电子运动所形成的等效圆电流  $I =$  \_\_\_\_\_; 等效圆电流的磁矩  $P_m =$  \_\_\_\_\_。(已知电子电量的大小为  $e$ , 电子的质量为  $m$ )。

答案:  $I = \frac{e^2 B}{2\pi m}$ ;  $P_m = \frac{e^2 B R^2}{2m}$ 。

解: 电子在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中沿半径为  $R$  的圆周运动, 电子所受的磁场力为电子做圆周运动的向心力, 即

$$\frac{mv^2}{R} = evB, \text{ 所以 } v = \frac{eBR}{m}$$

电子运动所形成的等效圆电流为  $I = e \cdot f = e \cdot \frac{v}{2\pi R} = \frac{e^2 B}{2\pi m}$

等效圆电流的磁矩为  $P_m = IS = \frac{e^2 B}{2\pi m} \cdot \pi R^2 = \frac{e^2 B R^2}{2m}$

5. 如图 3-6 所示, 无限长直导线在  $P$  处弯成半径为  $R$  的圆, 当通以电流  $I$  时, 则在圆心  $O$  点的磁感强度大小等于 \_\_\_\_\_; 方向 \_\_\_\_\_。

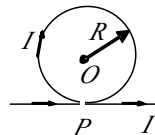


图 3-6

答案:  $\frac{\mu_0 I}{2R} (1 - \frac{1}{\pi})$ ; 方向垂直纸面向内。

解: 圆心  $O$  处的磁场是圆电流在圆心处产生的磁场  $\vec{B}_1$  与场无限长直线电流的磁场  $\vec{B}_2$  的矢量和。由图中电流方向可知, 圆电流的磁场向内, 而直线电流的磁场向外, 所以,  $O$  点的总磁感应强度大小为

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R} (1 - \frac{1}{\pi}), \text{ 方向垂直纸面向内。}$$

### 三、计算题



1. 如图 3-7 所示, 载流圆线圈通有电流为  $I$ , 求载流圆线圈轴线上某点  $P$  的磁感应强度。

答案:  $B = \frac{\mu}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$ , 方向沿轴线。

解: 电流元  $I d\vec{l}$  与对应处  $\vec{r}$  的夹角均为  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , 则

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

由对称性分析, 各  $d\vec{B}$  的垂直轴线的分量全部抵消, 只剩下平行于轴线的分量:

$$dB_{\parallel} = dB \sin \theta = dB \frac{R}{r}$$

所以  $B = \int dB_{\parallel} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu}{4\pi} \frac{IdlR}{r^3} = \frac{\mu}{2} \frac{R^2 I}{r^3} = \frac{\mu}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$ , 方向沿轴线。

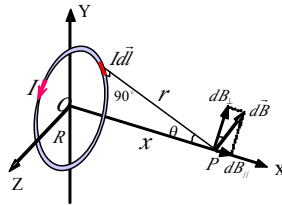


图 3-7

2. 一个塑料圆盘, 半径为  $R$ , 电荷  $q$  均匀分布于表面, 圆盘绕通过圆心垂直盘面的轴转动, 角速度为  $\omega$ 。求圆盘中心处的磁感应强度。

答案:  $B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$ , 方向沿轴线与电流成右手螺旋关系。

解: 如图所示, 在圆盘上取半径为  $r$ 、宽为  $dr$  的细圆环, 环上所带电荷量为

$$dq = \sigma 2\pi r dr \quad (\text{其中 } \sigma = \frac{q}{\pi R^2})$$

电流为  $dI = f dq = f \sigma 2\pi r dr$  (其中  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ )

在盘心所产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \mu_0 n \pi \sigma dr$$

每一载流圆环在盘心处的  $dB$  方向相同, 故盘心处的合磁感应强度的大小为

$$B = \int dB = \int_0^R \mu_0 f \pi \sigma dr = \mu_0 f \pi \sigma R = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

方向沿轴线与电流成右手螺旋关系。

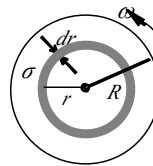


图 3-8

3. 如图 3-9 所示, 真空中一无限长圆柱形铜导体, 磁导率为  $\mu_0$ , 半径为  $R$ ,  $I$  均匀分布, 求通过  $S$  (阴影区) 的磁通量。

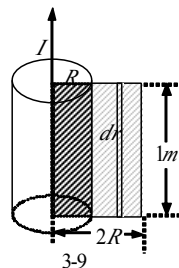
答案:  $\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$ 。

解: 取平行于无限长圆柱形铜导体轴线的面元  $dS = l dr$ ,

无限长圆柱形铜导体周围空间磁场强度分布为

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r \geq R \end{cases}$$

在导体内阴影部分的磁通量为



3-9

$$\Phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int B_1 dS = \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

在导体外阴影部分的磁通量为

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \int B_2 dS = \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$

所以, 通过  $S$  (阴影区) 的总磁通量为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$

4. 如图 3-10 所示, 一半径  $R$  的非导体球面均匀带电, 面密度为  $\sigma$ , 若该球以通过球心的直径为轴用角速度  $\omega$  旋转, 求球心处的磁感应强度的大小和方向。

答案:  $B = \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3}$ ; 方向沿轴向上。

解: 利用圆形电流在轴线上产生的磁场公式  $dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dl}{R^3}$  (见计算题 1)

如图所示  $dI = \sigma dSf$ , 而  $dS = 2\pi r dl = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta$

又  $r = R \sin \theta$ ,  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , 所以

$$dI = \sigma dSf = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi dB = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\pi \frac{r^2 \sigma \omega R^2 \sin \theta d\theta}{R^3} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \left[ -\frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{3} \right]_0^\pi + \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \frac{2}{3} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3} \end{aligned}$$

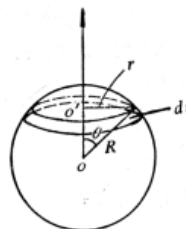


图 3-10

## 习题四

1. 如图 4-1 所示,  $abc$  是弯成直角的导线,  $ab=40\text{cm}$ ,  $bc=30\text{cm}$ , 通以电流  $I$ , 并放在和均匀磁场  $B$  垂直的平面内, 则导线所受到磁场力为 [ ]

- (A)  $0.3IB$ ; (B)  $0.4IB$ ; (C)  $0.5IB$ ; (D)  $0.7IB$ 。

答案: C

解: 由  $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$  得  $F_{ab} = I\vec{ab} \cdot \vec{B}$ , 方向垂直于  $\vec{ab}$ ;  $F_{bc} = I\vec{bc} \cdot \vec{B}$ , 方向垂直于  $\vec{bc}$ 。

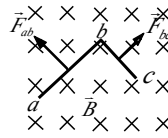


图 4-1

又由图中几何关系知  $\vec{F}_{ab} \perp \vec{F}_{bc}$ , 所以整个导线受力为  $F = \sqrt{F_{ab}^2 + F_{bc}^2} = IB\sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5IB$

2. 两个在同一平面内的同心圆线圈, 大圆半径为  $R$ , 通有电流  $I_1$ , 小圆半径为  $r$ , 通有电流  $I_2$ , 电流方向如图 4-2 所示, 且  $r \ll R$ , 那么, 在小线圈从图示位置转到两线圈平面相互垂直位置的过程中, 磁力矩所作的功  $A$  为 [ ]

- (A)  $-I_2 \frac{\mu_0 I_1}{R} \pi r^2$ ; (B)  $-I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2R} \pi r^2$ ; (C)  $I_2 \frac{\mu_0 I_1}{R} \pi r^2$ ; (D)  $I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2R} \pi r^2$ 。

答案: B

解: 因  $r \ll R$ , 所以大圆电流在小圆范围产生的磁场可看作是均匀的, 且近似等于大圆电流在其圆心  $O$  处产生的磁场, 即  $B_{iO} = \frac{\mu_0 I_1}{2R}$ ; 小圆由平行位置转过  $90^\circ$  时

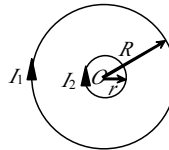


图 4-2

磁力矩做功为

$$A = I_2 \Delta\Phi = I_2 (0 - \pi r^2 B_{iO}) = -I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2R} \pi r^2$$

3. 如图 4-3 所示, 平行放置在同一平面内的载流长直导线, 要使  $AB$  导线受的安培力等于零, 则  $x$  的值为 [ ]

- (A)  $\frac{1}{3}a$ ; (B)  $\frac{2}{3}a$ ; (C)  $\frac{1}{2}a$ ; (D)  $\frac{3}{4}a$ 。

答案: A

解: 导线  $AB$  上长度为  $l$  的一段受其左、右两导线的安培力分别为

$$F_1 = IIB_1 = Il \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = Il \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad F_2 = IIB_2 = Il \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(a-x)} = Il \frac{\mu_0 2I}{2\pi(a-x)}.$$

令  $F_1 = F_2$ , 得  $\frac{1}{x} = \frac{2}{(a-x)}$ , 由此解得  $x = \frac{1}{3}a$ 。

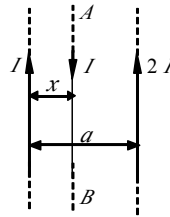


图 4-3

4. 如图 4-4, 匀强磁场中有一矩形通电线圈, 它的平面与磁场平行, 在磁场作用下, 线圈发生转动, 其方向是 [ ]

- (A)  $ab$  边转入纸内,  $cd$  边转出纸外;  
(B)  $ab$  边转出纸外,  $cd$  边转入纸内;  
(C)  $ad$  边转入纸内,  $bc$  边转出纸外;  
(D)  $ad$  边转出纸外,  $bc$  边转入纸内。

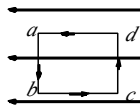


图 4-4

答案: A

解: 载流直导线在均匀磁场中受力为  $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ , 由此可判断  $ab$  边受力指向纸内,  $cd$  边受力指向纸外。

## 二、填空题

1. 电流为  $I$ , 磁矩为  $\vec{P}_m$  的线圈置于磁感应强度  $\vec{B}$  的均匀磁场中,  $\vec{P}_m$  与  $\vec{B}$  方向相同, 求通过线圈的磁通量  $\Phi =$  \_\_\_\_\_; 线圈所受的磁力矩  $\vec{M}$  的大小  $M =$  \_\_\_\_\_。

答案:  $\Phi = BP_m/I$ ;  $M = 0$ 。

解: 通过线圈的磁通量  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = B \frac{P_m}{I}$ , 磁力矩的大小  $M = BP_m \sin \varphi$ 。

因  $\varphi = 0$ , 所以  $M = 0$ 。

2. 如图 4-5 所示, 某瞬间  $a$  点有一质子  $A$  以  $v_a = 10^7 \text{ m/s}$  沿图所示方向运动。相距  $r = 10^{-4} \text{ cm}$  远处的  $b$  点, 有另一质子  $B$  以  $v_b = 2 \times 10^3 \text{ m/s}$  沿图所示方向运动。  $v_a$ 、 $v_b$  与  $r$  在同一平面内, 求: (1) 质子  $A$  经过  $a$  点的瞬间在  $b$  点所产生的磁感应强度的大小 \_\_\_\_\_;

(2)  $b$  点的质子所受洛伦兹力的大小 \_\_\_\_\_。

答案: (1)  $B = 1.13 \times 10^{-7} \text{ T}$ ; (2)  $F = 3.6 \times 10^{-23} \text{ N}$ 。

解: (1) 质子  $A$  经过  $a$  点的瞬间在  $b$  点所产生的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 e v_a}{4\pi r^2} \sin 45^\circ = 0.8\sqrt{2} \times 10^{-7} \text{ T} = 1.13 \times 10^{-7} \text{ T} \quad \text{方向垂直}$$

于纸面向外。

(2) 质子  $B$  在  $b$  点所受到的洛伦兹力

$$F = e v_b B = e v_b \frac{\mu_0 e v_a}{4\pi r^2} \sin 45^\circ = 2.56\sqrt{2} \times 10^{-23} \text{ N} = 3.6 \times 10^{-23} \text{ N}。$$

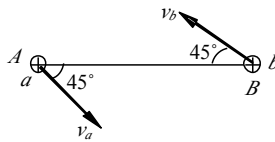
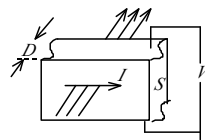


图 4-5

3. 一个通有电流  $I$  的导体, 厚度为  $D$ , 放置在磁感强度为  $B$  的匀强磁场中, 磁场方向垂直于导体的侧表面, 如图所示, 则导体上下两面的电势差为  $V = AIB/D$  (其中  $A$  为一常数)。则上式中  $A$  定义为 \_\_\_\_\_ 系数, 且  $A$  与导体中的载流子数密度  $n$  及电荷  $q$  之间的关系为 \_\_\_\_\_。



答案: (1) 霍尔; (2)  $A = \frac{1}{nq}$ 。

4. 一电子在  $B = 20 \times 10^{-4} \text{ T}$  的磁场中沿半径为  $R = 2.0 \text{ cm}$  的螺旋线运动, 螺距为  $h = 5.0 \text{ cm}$ , 如图 4-7 所示。(1) 这电子速度的大小 \_\_\_\_\_; (2) 方向  $\alpha =$  \_\_\_\_\_。

答案:  $v = 7.57 \times 10^6 \text{ m/s}$ ;  $\alpha = \cos^{-1} 0.37 = 68^\circ 17'$ 。

解: 依题意, 有  $h = v_{\parallel} \cdot T = v \cos \alpha \cdot T$ , 式中,  $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}$ 。

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{eB}{m} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = 7.57 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\bar{v} \text{ 与轴夹角 } \cos \alpha = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}} = \frac{h}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}},$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{16\pi^2 + 25}} = \cos^{-1} 0.37 = 68^\circ 17'$$

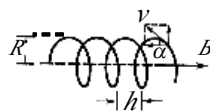


图 4-7

5. 一个速度  $\vec{v} = (4.0 \times 10^5 \vec{i} + 7.2 \times 10^5 \vec{j}) \text{ m/s}$  的电子, 在均匀磁场中受到的力为

$\vec{F} = (-2.7 \times 10^{-13} \vec{i} + 1.5 \times 10^{-13} \vec{j}) \text{ N}$ 。如果  $B_x = 0$ ，则  $\vec{B} =$  \_\_\_\_\_。

答案:  $\vec{B} = 2.3\vec{k}(\text{T})$ 。

解:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = e(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \times (B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = e[(v_y B_z - v_z B_y) \vec{i} - v_x B_z \vec{j} + v_x B_y \vec{k}]$ ,

而  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = (-2.7 \times 10^{-13} \vec{i} + 1.5 \times 10^{-13} \vec{j}) \text{ N}$ ，两式相等得:  $B_y = 0$ ;

$B_z = \frac{-2.7 \times 10^{-13}}{e \cdot v_y} = \frac{-1.5 \times 10^{-13}}{e \cdot v_x}$ 。将  $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，及题给  $v_x$  或  $v_y$  代入，得  $\vec{B} = 2.3\vec{k}(\text{T})$ 。

### 三、计算题

1. 如图 4-8 所示，一长直导线通有电流  $I_1 = 20 \text{ A}$ ，其旁置一导线  $ab$ ，通以电流  $I_2 = 10 \text{ A}$ ，求导线  $ab$  所受的作用力的大小和方向。

答案:  $F = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N}$ ，方向：垂直于  $ab$  向上。

解：长直载流导线在周围空间产生的是非均匀磁场，方向：垂直纸面向里。在  $ab$  上取一电流元  $I_2 d\vec{l}$ ，其受安培力为

$$d\vec{f} = BI_2 d\vec{l} \sin(I_2 d\vec{l}, \vec{B}) = BI_2 d\vec{l}，\text{方向：垂直于 } ab \text{ 向上。}$$

$ab$  导线上每一电流元所受力的方向都相同，整条导线受力为：

$$\begin{aligned} F &= \int d\vec{f} = \int BI_2 d\vec{l} = \int \frac{\mu_0 I_1}{2\pi l} I_2 d\vec{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{0.01}^{0.1} \frac{d\vec{l}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 10 \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 10}{2\pi} \cdot \ln 10 = 4 \ln 10 \times 10^{-5} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

方向：垂直于  $ab$  向上。

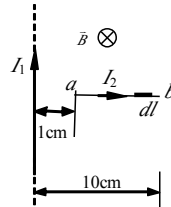


图 4-8

2. 有一圆线圈直径 8 厘米，共 12 匝，通电流 5 安培，将此线圈置于磁感应强度为 0.6 特斯拉的均匀磁场中。试求：(1) 作用在线圈上的最大转矩是多少？(2) 线圈平面在什么位置时转矩是 (1) 中的一半？

答案：(1)  $M_{\max} = 0.181 \text{ N/m}$ ；(2) 线圈法线与  $\vec{B}$  成  $30^\circ$  或  $150^\circ$  角时。

解：(1) 线圈在磁场中受力矩公式为:  $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$

$$M_{\max} = p_m B = nISB = 12 \times 5 \times \pi (4 \times 10^{-2})^2 \times 0.6 = 0.181 \text{ N/m}$$

$$(2) M = \frac{1}{2} M_{\max} = p_m B \sin \alpha, \text{ 即 } \frac{1}{2} p_m B = p_m B \sin \alpha, \text{ 所以 } \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

得  $\alpha = 30^\circ$ ，或  $\alpha = 150^\circ$

即线圈法线与  $\vec{B}$  成  $30^\circ$  或  $150^\circ$  角时  $M$  为  $M_{\max}$  的一半。

3. 如图 4-9 所示，盘面与均匀磁场  $B$  成  $\varphi$  角的带电圆盘，半径为  $R$ ，电量  $Q$  均匀分布在表面上，当圆盘以角速度  $\omega$  绕通过圆盘中心与盘面垂直的轴线转动，求圆盘在磁场中所受的磁力矩。

答案:  $M = \frac{1}{4} \omega Q R^2 B \cos \varphi$ 。

解：圆盘的电荷面密度为  $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

取距圆盘中心  $r$  处，宽度为  $dr$  的圆环，则此圆环上的电量为

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

由于圆盘以角速度  $\omega$  绕轴线转动，故圆环的等效电流为

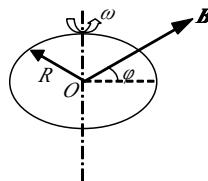


图 4-9

$$dI = fdq = \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr = \sigma \omega r dr$$

电流  $dI$  所围的面积  $S = \pi r^2$

$$\text{对应磁矩 } dP_m = SdI = \sigma \pi \omega r^3 dr$$

$$\text{总磁矩 } P_m = \int dP_m = \sigma \pi \omega \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} \sigma \pi \omega R^4 = \frac{1}{4} \omega Q R^2$$

矢量式  $\vec{P}_m = \frac{1}{4} \omega Q R^2 \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  的方向即为圆盘面积的法线方向。

$$\text{磁力矩 } \vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

$$\text{其数值 } M = \frac{1}{4} \sigma \pi \omega R^2 B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{4} \omega Q R^2 B \cos \varphi$$

4. 截面积为  $S$ 、密度为  $\rho$  的铜导线被弯成正方形的三边, 可以绕水平轴  $OO'$  转动, 如图 4-10 所示。导线放在方向竖直向上的匀强磁场中, 当导线中的电流为  $I$  时, 导线离开原来的竖直位置偏转一个角度  $\theta$  而平衡。求磁感应强度。若  $S = 2\text{mm}^2$ ,  $\rho = 8.9\text{g/cm}^3$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $I = 10\text{A}$ , 问磁感应强度大小为多少?

答案:  $B = 9.35 \times 10^{-3}\text{T}$ 。

解: 磁场力的力矩为

$$M_F = F l_2 \cos \theta = B I l_1 l_2 \cos \theta = B I l^2 \cos \theta$$

重力的力矩为

$$M_{mg} = \rho g S l_1 \cdot l_2 \sin \theta + 2 \rho g S l_2 \cdot \frac{1}{2} l_2 \sin \theta = 2 \rho g S l^2 \sin \theta$$

由平衡条件  $M_F = M_{mg}$ , 得

$$B I l^2 \cos \theta = 2 \rho g S l^2 \sin \theta$$

$$B = \frac{2 \rho g S}{I} \tan \theta = \frac{2 \times 8.9 \times 10^3 \times 9.8 \times 2 \times 10^{-6}}{10} \times \tan 15^\circ$$

$$= 3.84 \times 10^{-2} \times \tan 15^\circ = 3.84 \times 10^{-2} \times 0.268 = 9.35 \times 10^{-3}\text{T}$$

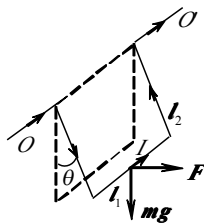


图 4-10

5. 一半径为  $R = 0.1\text{m}$  的半圆形闭合线圈, 载有电流  $I = 10\text{A}$ , 放在均匀磁场中, 磁场方向与线圈面平行, 如图 4-11 所示。已知  $B = 0.5\text{T}$ 。求

(1) 线圈所受力矩的大小和方向 (以直径为转轴);

(2) 若线圈受力矩的作用转到线圈平面与磁场垂直的位置, 则力矩做功多少?

答案: (1)  $M = 7.85 \times 10^{-2}\text{N} \cdot \text{m}$ ;

(2)  $A = 7.85 \times 10^{-2}\text{J}$ 。

解: (1)  $\vec{p}_m$  垂直纸面向外, 故根据  $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$  可知,  $\vec{M}$  沿转轴向上, 大小为

$$\vec{M} = p_m B \sin \frac{\pi}{2} = I S B = \frac{1}{2} I B \pi R^2 = 7.85 \times 10^{-2}\text{N} \cdot \text{m}$$

$$(2) \text{磁力矩做功 } A = I \Delta \Phi = I (B S - 0) = I B \frac{\pi R^2}{2} = 7.85 \times 10^{-2}\text{J}$$

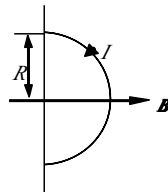


图 4-11

## 习题五

## 一、选择题

1. 一闭合圆形线圈在均匀磁场中运动, 在下列几种情况中那种会产生感应电流 [ ]

- (A) 线圈沿磁场方向平移;  
 (B) 线圈沿垂直磁场方向平移;  
 (C) 线圈以自身的直径为轴转动, 轴与磁场方向平行;  
 (D) 线圈以自身的直径为轴转动, 轴与磁场方向垂直。

答案: D

解: (A)、(B)、(C) 问中当闭合圆形线圈运动时, 穿过线圈的磁通量不发生变化, 线圈中的感应电动势为零, 所以不产生感应电流。(D) 问中当闭合圆形线圈运动时, 穿过线圈的磁通量发生了变化, 线圈中产生了感应电动势, 所以产生了感应电流。

2. 如图 5-1 所示,  $M$  为一闭合金属轻环, 当右侧线圈通以如下所说哪种情况的电流时, 将在环内产生图示方向的感生电流, 同时环向线圈方向移动 [ ]。

- (A) 电流由  $b$  点流入,  $a$  点流出, 并逐渐减少;  
 (B) 电流由  $a$  点流入,  $b$  点流出, 并逐渐减少;  
 (C) 电流由  $b$  点流入,  $a$  点流出, 并逐渐增大;  
 (D) 电流由  $a$  点流入,  $b$  点流出, 并逐渐增大。

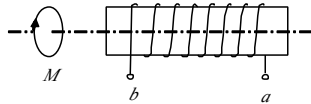


图 5-1

答案: A

解: 环  $M$  向右移动, 可判断线圈内磁力线的方向由右向左, 即电流由  $b$  点流入,  $a$  点流出; 根据环内感应电流的方向, 应用楞次定律可判断线圈内的磁通量在减少。

3. 如图 5-2 所示, 一矩形线圈以一定的速度  $v$  穿过一均匀磁场, 若规定线圈中感应电动势  $\mathcal{E}$  沿顺时针方向为正值, 则下面哪个曲线图正确表示了线圈中的  $\mathcal{E}$  和  $x$  的关系 [ ]

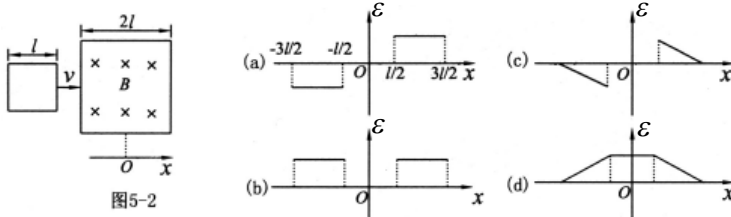


图 5-2

答案: a

解: 依题意, 回路中的感应电动势由导线切割磁力线的情况确定。当线圈右边进入磁场, 右边导线切割磁力线, 动生电动势的方向由右手定则判断, 方向逆时针; 整个线圈进入磁场, 磁通量无变化, 感应电动势为零; 当线圈右边从磁场中穿出, 左边导线切割磁力线, 动生电动势的方向由右手定则判断, 方向顺时针。

4. 在圆柱形空间内有一磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场, 如图 5-3 所示,  $\vec{B}$  的大小以速率  $dB/dt$  变化。有一长度为  $l_0$  的金属棒先后放在磁场的两个不同位置 1 ( $ab$ ) 和 2 ( $a'b'$ ), 则金属棒在这两个位置时棒内的感应电动势的大小关系为 [ ]

- (A)  $\mathcal{E}_{a'b'} > \mathcal{E}_{ab}$ ; (B)  $\mathcal{E}_{a'b'} < \mathcal{E}_{ab}$ ; (C)  $\mathcal{E}_{a'b'} = \mathcal{E}_{ab} \neq 0$ ; (D)  $\mathcal{E}_{a'b'} = \mathcal{E}_{ab} = 0$ 。

答案: A

解: 感应电动势  $\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$ 。

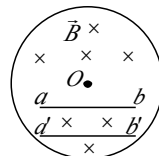


图 5-3

连接  $Oa$ 、 $Ob$ 、 $Od'$ 、 $Ob'$ , 依题意有  $\mathcal{E}_{OabO} = \mathcal{E}_{Oa} + \mathcal{E}_{ab} + \mathcal{E}_{bO} = \mathcal{E}_{Oa} + \mathcal{E}_{ab} - \mathcal{E}_{Ob}$ 。由对称性可知, 在圆形截面

上,  $\vec{E}_{\text{感}}$  场线为以  $O$  为中心的一族同心圆, 所以沿着半径方向上的积分为 0, 即  $\varepsilon_{Oa} = \varepsilon_{Ob} = 0$ 。所以

$\varepsilon_{OabO} = \varepsilon_{ab}$ 。同理,  $\varepsilon_{Oa'b'O} = \varepsilon_{a'b'}$ 。而  $\varepsilon_{ab} = S_{\Delta Oab} \frac{dB}{dt}$ ,  $\varepsilon_{a'b'} = S_{\Delta Oa'b'} \frac{dB}{dt}$ 。根据题意可知, 两个三角形等底不等高,  $S_{\Delta Oa'b'} > S_{\Delta Oab}$ , 所以  $\varepsilon_{a'b'} > \varepsilon_{ab}$ 。

5. 有一细长螺线管其自感系数  $L = \mu n^2 V$ , 若将此螺线管平分成两个, 每一个螺线管的自感系数为  $L_1$  及  $L_2$ , 它们的互感系数为  $M$ , 以下答案哪一个正确 [ ]

- (A) 由  $L = \mu n^2 V$  可以看出, 细长螺线管其自感系数与螺线管的体积成正比, 把螺线管平分成两个, 则每一个螺线管的体积为原来的一半, 所以  $L = L_1 + L_2$ ;  
 (B) 由两个线圈串联时的自感系数  $L = L_1 + L_2 + 2M > 2L_1$ ;  
 (C) 由两个线圈串联时的自感系数  $L = L_1 + L_2 + M > 2L_1$ ;  
 (D) 由两个线圈串联时的自感系数  $L = L_1 + L_2 - 2M > 2L_1$ 。

答案: B

解: 因为当把细长螺线管平分成两个螺线管时, 原螺线管的自感系数应包括两个螺线管的自感系数  $L_1$ 、 $L_2$  及它们之间的互感系数  $M$ 。

至于螺线管的自感系数与螺线管的体积成正比的公式, 利用了无限长螺线管内磁场的结论。对有限体积的实际螺线管来说, 它只是一个近似的关系。如果该螺线管足够长,  $L_1$  远远大于  $M$  时, 以上四个答案趋向一致。

## 二、填空题

1. 如图 5-4 所示, 一个矩形线圈在均匀磁场中以角速度  $\omega$  旋转, 当它转到图 a 和图 b 位置时感应电动势的大小分别为  $\varepsilon_a =$  \_\_\_\_\_;  $\varepsilon_b =$  \_\_\_\_\_。

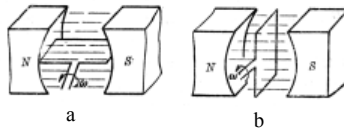


图 5-4

答案:  $\varepsilon_a = \omega BS$ ;  $\varepsilon_b = 0$ 。

解: 回路中感应电动势的大小由穿过回路的磁通量的变化率决定。矩形线圈转到图中位置  $a$  时, 感应电动势最大; 转到位置  $b$  时, 感应电动势为零。

初始时刻 ( $t=0$ ) 矩形线圈平面的法线  $\vec{n}$  与均匀磁场的磁感应强度  $\vec{B}$  平行, 则穿过线圈的磁通量为  $\Phi = BS$ , 经过  $t$  后,  $\vec{n}$  与  $\vec{B}$  的夹角为  $\varphi = \omega t$ , 此时通过矩形线圈磁通量为:

$$\Phi = BS \cos \varphi = BS \cos \omega t$$

$$\text{故感应电动势 } \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega BS \sin \omega t$$

在位置  $a$ ,  $\omega t = 90^\circ$ , 电动势最大,  $\varepsilon_a = \omega BS$ ;

在位置  $b$ ,  $\omega t = 0$ , 电动势最小,  $\varepsilon_b = 0$ 。

2. 半径为  $R$  的无限长圆柱导体电流 (图 5-5), 电流强度为  $I$ 。横截面上各点的电流密度相等, 求每单位长度导体内所储存的磁能 \_\_\_\_\_。

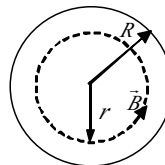


图 5-5

答案:  $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$ 。

解: 设导体电流方向由下向上, 则磁感应强度的方向如俯视图 (图 5-5) 所示, 根据安培环路定理, 无限



长载流圆柱导体内部离轴线距离为  $r$  处的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

磁场能量体密度为

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

取半径为  $r$ , 厚为  $dr$ , 长为  $l$  的体积元  $dV = 2\pi r l dr$ , 则磁场能量为

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_0^R \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot 2\pi r l dr$$

各单位长度所储存的磁能为

$$\frac{W_m}{l} = \int_0^R \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot 2\pi r dr = \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{rI}{2\pi R^2} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

3. 如图 5-6, 一矩形导体回路  $ABCD$  放在均匀外磁场中, 磁场的磁感应强度  $\vec{B}$  的大小为  $B = 6.0 \times 10^3$  高斯,  $\vec{B}$  与矩形平面的法线  $\vec{n}$  夹角  $\alpha = 60^\circ$ ; 回路的  $CD$  段长为  $l = 1.0\text{m}$ , 以速度  $v = 5.0\text{m/s}$  平行于两边向外滑动, 如图所示。则求回路中的感应电动势的大小和方向分别为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_; 感应电流方向\_\_\_\_\_。

答案:  $\varepsilon_i = 1.5\text{V}$ , 方向  $D \rightarrow C$ ; 感应电流方向  $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D$ 。

解: 回路中的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS \cos \alpha)}{dt} = -B \frac{dS}{dt} \cos \alpha = -Blv \cos \alpha$$

$$= -6.0 \times 10^3 \times 10^{-4} \times 1.0 \times 5.0 \times \cos 60^\circ = -1.5\text{V}$$

负号表示  $\varepsilon_i$  的方向(非静电力的方向)为

$D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D$ , 这个方向就是感应电流的方向。

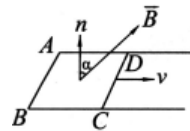


图5-6

4. 如图 5-7 所示, 两根平行长直导线置于空气中, 横截面半径都是  $a$ , 两导线中心相距为  $d$ , 属于同一回路。设两导线内部的磁通量可忽略不计。求这一对导线单位长度的自感系数\_\_\_\_\_。

答案:  $L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$ 。

解: 自感一般用  $\Phi = LI$  进行计算。设电流为  $I$ , 算出电流  $I$  的磁场分布, 进而算出自感磁通量  $\Phi$ , 即可求出结果。

设电流和坐标的方向如图 5-7 所示, 则在离  $o$  为  $x$  处的总磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-x)}$$

通过图中阴影部分面元的磁通量  $d\Phi = B l dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx$

通过整个中心平面的磁通量

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{d-a} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

所以, 平行导线单位长度的自感系数  $L = \frac{\Phi}{I l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$

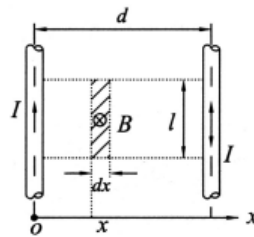


图5-7

5. 真空中一均匀磁场的能量密度  $w_m$  与一均匀电场的能量密度  $w_e$  相等, 已知  $B=0.5\text{T}$ , 则电场强度为\_\_\_\_\_。

答案:  $1.5 \times 10^8 \text{ V/m}$ 。

解: 依题意, 有

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} B = cB = 3 \times 10^8 \times 0.5 = 1.5 \times 10^8 \text{ V/m}$$

### 三、计算题

1. 长为  $L$  的金属细杆  $ab$  与载有电流的无限长直导线共面, 且绕端点  $a$  以角速度  $\omega$  在公共平面内转动, 如图 5-8 所示。当细杆转到与水平线夹角为  $\theta$  时, 求  $ab$  两点的电势差  $U_{ab}$ 。

答案:  $U_{ab} = \frac{\omega \mu_0 I}{2\pi \cos^2 \theta} \left( L \cos \theta - r_0 \ln \frac{r_0 + L \cos \theta}{r_0} \right)$ 。

解: 积分路径选为  $b \rightarrow a$ , 则  $r = r_0 + l \cos \theta$ , 且  $v = \omega l$ ,  $dl = \frac{dr}{\cos \theta}$

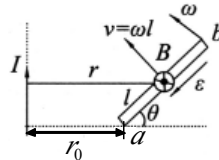


图5-8

$$d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -vBdl = -\omega l \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl$$

$$d\varepsilon_i = -\frac{\omega \mu_0 I}{2\pi} \frac{l}{r} dl = -\frac{\omega \mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{r - r_0}{r \cos \theta} \cdot \frac{dr}{\cos \theta} = -\frac{\omega \mu_0 I}{2\pi \cos^2 \theta} \cdot \frac{r - r_0}{r} dr$$

$$\varepsilon_i = \int d\varepsilon_i = -\frac{\omega \mu_0 I}{2\pi \cos^2 \theta} \int_{r_0}^{r_0 + L \cos \theta} \frac{r - r_0}{r} dr = -\frac{\omega \mu_0 I}{2\pi \cos^2 \theta} \left( L \cos \theta - r_0 \ln \frac{r_0 + L \cos \theta}{r_0} \right)$$

$$U_{ab} = U_a - U_b = -\varepsilon_i = \frac{\omega \mu_0 I}{2\pi \cos^2 \theta} \left( L \cos \theta - r_0 \ln \frac{r_0 + L \cos \theta}{r_0} \right)$$

2. 如图 5-9 所示直角三角形金属  $PQS$  框放在均匀磁场  $\vec{B}$  中,  $\vec{B}$  平行于边  $PQ$ ,  $PQ$  边长为  $b$ ,  $PQ$  边与  $QS$  边夹角为  $\alpha$ , 当金属框绕  $PQ$  边以角速度  $\omega$  转动时, 求 (1) 回路的总感应电动势; (2) 各边的感应电动势。

答案: (1)  $\varepsilon = 0$ ; (2)  $PQ$  边:  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $PS$  边:  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \omega B b^2 \tan^2 \alpha$ ,  $QS$  边:  $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \omega B b^2 \tan^2 \alpha$ 。

解: 本题先求回路的总感应电动势, 再求各边的感应电动势较为方便。

(1) 在线圈旋转过程中, 磁力线总与线圈平面平行, 通过线圈的磁通量恒为零, 其感应电动势

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

(2) 求各边的动生电动势  $\varepsilon_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

$PQ$  边:  $v = 0$ , 所以其动生电动势  $\varepsilon_1 = 0$ 。

$PS$  边:  $d\varepsilon_2 = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBdl$

即  $\varepsilon_2 = \int_0^{b \tan \alpha} \omega l B dl = \frac{1}{2} \omega B b^2 \tan^2 \alpha$  (其中  $\overline{PS} = b \tan \alpha$ )

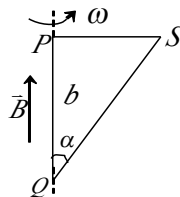


图 5-9

$$QS \text{ 边: } \varepsilon_3 = \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \text{ 所以 } \varepsilon_3 = -\varepsilon_2 = -\frac{1}{2}\omega Bb^2 \tan^2 \alpha。$$

3. 限制在圆柱形体积内的均匀磁场, 磁感应强度为  $\vec{B}$ , 方向如图 5-10 所示。圆柱的半径为  $R$ ,  $\vec{B}$  的数值以  $10^{-6} \text{ T/s}$  的恒定速率减小。当电子分别位于磁场中  $a$  点、 $b$  点与  $c$  点时, 假定  $r=0.5\text{m}$ , 求电子获得的瞬时加速度的大小和方向。

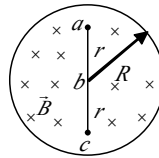


图 5-10

答案: (1)  $a_a = 4.4 \times 10^4 (\text{ms}^{-2})$ , 方向水平向左; (2)  $a_b = 0$ ;

(3)  $a_c = 4.4 \times 10^4 (\text{ms}^{-2})$ , 方向水平向右。

解: 本题先用  $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  求出涡旋电场  $\vec{E}_i$  的分布, 再由  $\vec{F} = -e\vec{E}_i = m_e \vec{a}$  求出电子的加速度。

$\vec{E}_i$  线是围绕轴线  $b$  的同心圆,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  为常量, 面积元  $d\vec{S}$  的方向取与  $\vec{B}$  的方向一致, 于是由

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \text{ 得}$$

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \pi r^2, \quad E_i = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

电子位于  $b$  点时, 因  $r=0$ ,  $E_i=0$ , 其加速度  $a_b=0$ ; 电子位于  $a$  点时, 其加速度

$$a_a = -\frac{eE_i}{m_e} = -\frac{e}{m_e} \left( -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}} \cdot \frac{0.5}{2} \times 10^{-6} = -4.4 \times 10^4 (\text{ms}^{-2}), \text{ 方向水平向左;}$$

电子位于  $c$  点时的加速度  $a_c = 4.4 \times 10^4 (\text{ms}^{-2})$ , 方向水平向右。

因  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -10^{-6} \text{ Ts}^{-1}$ , 所以  $E_i$  线的方向是顺时针的。电子带负电, 其加速度方向与  $E_i$  相反, 故有以上结果。

4. 在垂直于半径为  $a$ , 厚为  $b$  的金属圆盘面方向上, 加一均匀磁场, 如图 5-11 所示, 今使磁场随时间变化,  $\frac{dB}{dt} = k$ ,  $k$  为一常量, 已知金属圆盘的电导率为  $\sigma$ , 求属圆盘内总的涡流。

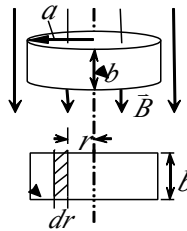


图 5-11

$$\text{答案: } i = \frac{1}{4} k \sigma b a^2。$$

解: 在半径为  $r$  的导体回路中产生的感生电动势为

$$d\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 k$$

内半径为  $r$ , 外半径  $r+dr$ , 长为  $b$  的圆柱体的电阻为

$$dR = \rho \frac{2\pi r}{b dr}$$

在这体元中的涡流为 (忽略自感的影响)

$$di = \frac{d\varepsilon_i}{dR} = \pi r^2 k \cdot \frac{b dr}{\rho 2\pi r} = \frac{1}{2} k \sigma b r dr$$

故金属圆盘中的总涡流为

$$i = \int di = \frac{1}{2} k \sigma b \int_0^a r dr = \frac{1}{4} k \sigma b a^2$$

5. 一个  $n$  匝圆形细线圈, 半径为  $b$ , 电阻为  $R$ , 以匀角速绕其某一直径为轴而转动, 该转轴与均匀磁场  $\vec{B}$

垂直。假定有一个面积为  $A$  (很小) 的小铜环固定在该转动线圈的圆心上, 环面与磁场垂直, 如图 5-12 所示, 求在小铜环内产生的感应电动势 (忽略小铜环对圆形线圈的感应)。

答案:  $\varepsilon_i = -\frac{\mu_0 n \pi b \omega^2 B A}{2R} \cos 2\omega t$ 。

解: 设大圆形线圈的法线与磁场夹角为  $\theta$ , 线圈由  $\theta = 0$  的初位置开始转动, 任一时刻  $\theta = \omega t$ , 则线圈在磁场中转动时所产生的感应电动势和电流为

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{S}) = -\frac{d}{dt}(n \cdot \pi b^2 B \cos \omega t) = n\pi b^2 \omega B \sin \omega t \\ i &= \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{n\pi b^2 \omega B}{R} \sin \omega t \quad (1)\end{aligned}$$

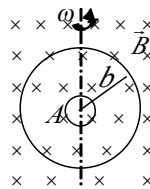


图 5-12

感应电流在小铜环处产生的磁场  $\vec{B}'$ , 在环面范围内视为均匀 (因  $A$  很小)。考虑到式 (1), 有

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 (ni)}{2b} = \frac{\mu_0 n^2 \pi b \omega B}{2R} \sin \omega t$$

(每匝线圈中的电流为  $i$ , 所以通过小线圈的应是  $n$  个线圈电流在圆心处的磁场之和)

所以在铜环中的感应电动势为

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= -\frac{d\Phi'}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B}' \cdot \vec{A}) = -\frac{d}{dt}(B' A \cos \omega t) \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 n^2 \pi b \omega B A}{2R} \sin \omega t \cos \omega t\right) = -\frac{\mu_0 n^2 \pi b \omega^2 B A}{2R} \cos 2\omega t\end{aligned}$$

## 习题六

## 一、选择题

1. 如图 6-1 所示, 平板电容器 (忽略边缘效应) 充电时, 沿环路  $L_1$ 、 $L_2$  磁场强度  $\vec{H}$  的环流满足 [ ]

- (A)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} > \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ ; (B)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ ;  
(C)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ ; (D)  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ 。

答案: C

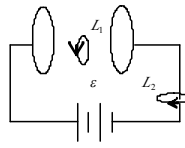


图6-1

解: 平板电容器间的位移电流为  $I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d(\vec{D} \cdot \vec{S})}{dt} = \frac{d(\sigma S)}{dt} = \frac{dq}{dt}$ , 电路中的传

导电流  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $I_d$  与  $I$  大小相等且同向。

根据安培环路定律  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$ , 对  $L_2$  所包围的回路有  $\oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ , 对  $L_1$  所包围的回路有  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I'_d$ , 而  $I'_d = \frac{I_d}{S} \Delta S$ , 式中  $S$  为平板电容器的面积,  $\Delta S$  为  $L_1$  所围的面积。显然  $\Delta S$  小于  $S$ , 如图 6-1 所示, 故  $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I'_d < \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ 。

2. 一个电容器在振荡电路中, 在其两极间放入一矩形线圈, 线圈的面积与电容器极板面积相等, 并且位于两极板的中央与之平行, 如图 6-2a 所示。则下列说法正确的是 [ ]

- (A) 在线圈的下缘放一小磁针, 使磁针与线圈平面垂直, 磁针不会转动;  
(B) 线圈中没有感应电流;  
(C) 线圈中有感应电流;  
(D) 如果把线圈平面转过 90 度, 使其平面与纸面平行, 并位于两极板的中央, 如图 6-2b 所示, 此时有感应电流。

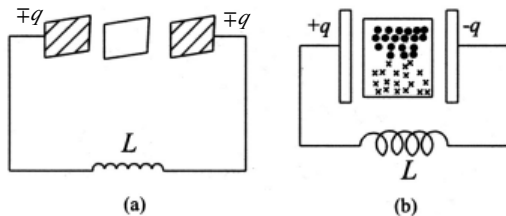


图 6-2

答案: B

解: 在图 6-2a 中磁场方向与线圈平面的法线垂

直, 磁通量为零, 线圈中没有感应电流。(A) 中, 在振荡过程中, 极板上的电荷周期性的变化, 极板间的电场又周期性的改变。变化的电场要产生感应磁场, 感应磁场的方向与线圈平面平行, 在该磁场的作用下, 磁针将会转动; (D) 中把线圈平面转过 90 度 (图 6-2b), 感应磁场的力线将穿过它, 然而它位于两极板的中央, 穿过它的总磁通量仍然为零, 没有感应电流。

3. 下面的说法哪个是正确的 [ ]

- (A) 铁钉没有磁化时不是铁磁质; (B) 顺磁质、抗磁质都有抗磁性;  
(C) 顺磁质没有抗磁性; (D) 抗磁质和铁磁材料磁化过程都有磁滞回线。

答案: B

解: 顺磁质有抗磁性, 因为顺磁质在外磁场  $\vec{B}_0$  的作用下, 电子进动存在, 附加磁矩  $\Delta \vec{P}_m$  总与  $\vec{B}_0$  的方向相反, 即存在抗磁性, 只不过附加磁矩  $\Delta \vec{P}_m$  比分子固有磁矩  $\vec{P}_e$  小得多。铁钉是典型的铁磁质, 内部存在磁畴。抗磁质没有磁滞回线,  $\vec{B}$  与  $\vec{H}$  是线性关系。

4. 一个单位长度上密绕有  $n$  匝线圈长直螺线管, 每匝线圈中的电流强度为  $I$ , 管内充满相对磁导率为  $\mu_r$  的

磁介质，则管内中部附近磁感应强度  $\vec{B}$  和  $\vec{H}$  的大小分别为 [ ]。

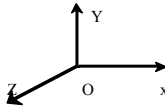
- (A)  $\mu_0\mu_r nI$ ,  $\mu_0 nI$ ; (B)  $\mu_0 nI$ ,  $nI$ ;  
(C)  $\mu_0\mu_r nI$ ,  $\mu_r nI$ ; (D)  $\mu_0\mu_r nI$ ,  $nI$ 。

答案: D

解: 长直螺线管内部的磁场是均匀磁场, 根据安培环路定律  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$  可以计算得到管内  $\vec{H}$  的大小为  $nI$ , 而  $B = \mu H$ ,  $\mu = \mu_0\mu_r$ , 故  $B = \mu H = \mu_0\mu_r nI$ 。

5. 磁波的电场强度  $\vec{E}$ 、磁场强度  $\vec{H}$  和传播速度  $\vec{u}$  的关系是 [ ]

- (A) 三者互相垂直, 而且  $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{u}$  构成右旋直角坐标系;  
(B) 三者互相垂直, 而  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  相位相差  $\pi/2$ ;  
(C) 三者中  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  是同方向, 但都与  $\vec{u}$  垂直;  
(D) 三者中  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  可以是任意方向, 但都与  $\vec{u}$  垂直。



答案: A

解: 根据电磁场性质判断,  $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{u}$  三者互相垂直, 而且构成右旋直角坐标系,  $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$  同相变化。

## 二、填空题

1. 对各向同性的非铁磁质, 无论抗磁质与顺磁质,  $\vec{B}$  总与  $\vec{H}$  相同;  $\frac{B}{H} = \mu$ , 式中  $\mu$  是 量;

对于铁磁质,  $\frac{B}{H} = \mu$ , 式中  $\mu$  是 量。(后两空填“常”或“变”)。

答案: 方向; 常; 变。

解: 对各向同性的非铁磁质, 无论抗磁质与顺磁质, 有  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , 因  $\mu$  为大于零的常数, 所以  $\vec{B}$  总与  $\vec{H}$  同向。

对于铁磁质, 存在磁滞回线,  $B$  与  $H$  为非线性关系, 所以  $\frac{B}{H} = \mu$  中  $\mu$  为变量。

2. 图 6-3 是三种铁磁质的磁滞回线, 根据图的序号填空, 是软磁质; 是硬磁质; 矩磁质; 宜做计算机的记忆元件; 宜做永磁体; 宜做变压器等电感元件中的铁心。

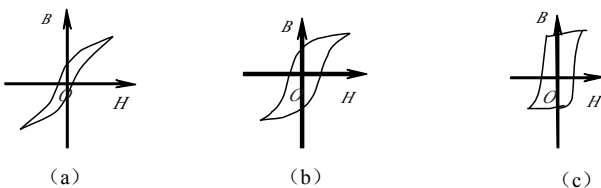


图 6-3

答案: a; b; c; c; b; a。

解: 从磁滞回线形状上看, 软磁质的矫顽力和剩磁都较小, 磁滞回线细长, 容易被磁化, 也容易被去磁, 宜做变压器等电感元件中的铁心。硬磁质的矫顽力和剩磁都较大, 磁滞回线所包围的面积也较大, 磁滞特性显著, 宜做永磁体。矩磁质磁滞回线接近矩形, 剩磁接近饱和和磁感应强度, 保留剩磁能力特别强, 宜做计算机的记忆元件。

3. 两个圆形板组成的平行板电容器, 电容为  $1.0 \times 10^{-12}$  法拉, 加上频率为 50 周/秒、峰值为  $1.74 \times 10^5$  伏特

的正弦交流电压, 极板间位移电流的最大值为\_\_\_\_\_。

答案:  $I_{d\max} = 1.74\pi \times 10^{-5} = 5.5 \times 10^{-5} \text{ A}$ 。

解: 设电容器形板面积为  $S$ , 板间距离为  $d$ , 则  $\Phi_D = \vec{D} \cdot \vec{S}$ ;  $D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d}$

根据位移电流的定义  $I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{dU}{dt}$

因  $U = U_0 \sin \omega t$ ,  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , 所以

$$I_d = C \frac{dU}{dt} = \omega C U_0 \cos \omega t$$

故位移电流的最大值为

$$I_{d\max} = C U_0 \omega = 1.74\pi \times 10^{-5} = 5.5 \times 10^{-5} \text{ A}$$

4. 设  $C$  是电容器的电容,  $U$  是两极板的电势差, 则电容器的位移电流为\_\_\_\_\_。

答案:  $I_d = C \frac{dU}{dt}$ 。

解: 因电容器极板上的电量  $q = CU$ , 所以电容器的位移电流为

$$I_d = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

5. 麦克斯韦方程组的积分形式:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q \quad ①; \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad ②$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad ③; \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + \frac{d\Phi_D}{dt} \quad ④$$

试判断下列结论是包含于或等效于哪一个麦克斯韦方程式, 将你确定的方程式的代号填在相应结论后的空白处: (1) 变化的磁场一定伴随有电场\_\_\_\_\_; (2) 磁感应线无头无尾\_\_\_\_\_; (3) 电荷总是伴随有电场\_\_\_\_\_; (4) 电场的变化可以激发涡旋磁场\_\_\_\_\_。

答案: ②; ③; ①; ④。

解: 麦克斯韦方程①说明静电场是有源场, 电荷总是伴随有电场; ②中磁通量随时间变化激发涡旋电场,

变化的磁场一定伴随有电场; ③表明穿过任意曲面的磁通量为零, 磁感应线无头无尾; ④中  $\frac{d\Phi_D}{dt}$  即为电场变化产生的位移电流, 位移电流可以激发涡旋磁场。

### 三、计算题

1. 铁棒中一个铁原子的磁偶极矩是  $1.8 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , 设长为  $5 \text{ cm}$ , 截面积为  $1 \text{ cm}^2$  的铁棒中所有铁原子的磁偶极矩都整齐排列, 则 (1) 铁棒的磁偶极矩; (2) 如果一个面积为  $30 \text{ cm}^2$  的圆形线圈的磁矩等于铁棒的磁偶极矩, 则圆形线圈应通多大的电流。(设铁的密度为  $\rho = 7.8 \text{ g/cm}^3$ , 铁的原子量是  $55.85$ 。)

答案: (1)  $P_m = 7.56 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ; (2)  $I = 25.2 \text{ A}$ 。

解: (1) 铁棒的体积  $V = 5 \times 1 = 5 \text{ cm}^3$ , 铁棒的  $M = \rho V = 5 \times 7.8 = 39 \text{ g}$ , 一个铁原子的磁偶极矩  $P_m = 1.8 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , 铁原子摩尔质量是  $\mu = 55.85 \text{ g}$ , 阿伏加得罗常数  $N_A = 6.022 \times 10^{23} / \text{mol}$ , 则铁棒的磁偶极矩为

$$P_m = \frac{M}{\mu} N_A P_{ml} = \frac{39}{55.85} \times 6.022 \times 10^{23} \times 1.8 \times 10^{-23} = 7.56 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$(2) \text{ 根据 } P_m = IS \text{ 得 } I = \frac{P_m}{S} = \frac{7.57}{30 \times 10^{-2}} = 25.2 \text{ A}$$

2. 点电荷  $q$  在半径为  $R$  的圆周上以角速度  $\omega$  匀速转动, 如图 6-4 所示, 求圆心处  $O$  的位移电流密度矢量。

$$\text{答案: } \vec{j}_d = \frac{q\omega}{4\pi R^2} (\sin\omega t \vec{i} - \omega \cos\omega t \vec{j}).$$

解: 点电荷  $q$  在圆心  $O$  处产生的电场强度  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ , 矢量式为

$$\vec{E} = -E \cos\omega t \vec{i} - E \sin\omega t \vec{j} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\cos\omega t \vec{i} + \sin\omega t \vec{j})$$

$O$  处的位移电流密度

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\omega \sin\omega t \vec{i} + \omega \cos\omega t \vec{j}) = \frac{q\omega}{4\pi R^2} (\sin\omega t \vec{i} - \omega \cos\omega t \vec{j})$$

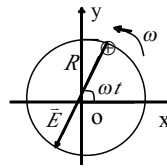


图 6-4

3. 如图 6-5 所示, 半径为  $R$  的两块金属圆板构成平行板电容器, 对电容器匀速充电, 两极板间电场的变化率为  $dE/dt$ 。求: (1) 电容器两极板间的位移电流; (2) 距两极板轴线距离为  $r$  ( $r \leq R$ ) 处的磁感应强度  $B$  (忽略边缘效应)。

$$\text{答案: (1) } I_d = \pi R^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}; \quad (2) \quad B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r}{2} \frac{dE}{dt}.$$

解: (1) 两极板间的位移电流

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = S \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \pi R^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

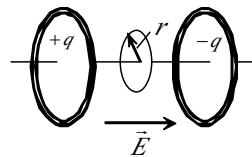


图 6-5

(2) 以轴线为中心取一半径为  $r$  的圆形回路, 通过此回路的位移电流  $I_d = \pi r^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$ ,

由全电流定理  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_D}{dt}$ , 得

$$H \cdot 2\pi r = \pi r^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}, \quad B = \mu_0 H = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r}{2} \frac{dE}{dt}$$

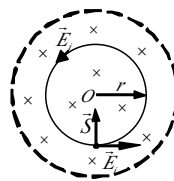
4. 一个长直螺线管, 每单位长度有  $n$  匝, 载有电流  $i$ , 设  $i$  随时间增加,  $\frac{di}{dt} > 0$ 。求: (1) 在螺线管内距轴线为  $r$  处某点的涡旋电场; (2) 该点的坡印廷矢量的大小和方向。

$$\text{答案: (1) } E_i = -\frac{1}{2} \mu_0 n r \frac{di}{dt}, \quad E_i \text{ 线的方向为逆时针方向; (2) } S = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 r i \frac{di}{dt}, \quad \vec{S} \text{ 的方向指向轴心。}$$

解: 由  $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  求出涡旋电场  $\vec{E}_i$  的分布, 再由  $\vec{S} = \vec{E}_i \times \vec{H}$  求出坡印廷矢量的大小和方向。

视螺线管为无限长, 其内部磁场是均匀场:  $H = ni$ ,  $B = \mu_0 ni$

(设其内介质为空气)。涡旋电场  $E_i$  线是围绕轴线  $O$  的同心圆, 如图所示。





由  $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  (设面积矢量  $\vec{S}$  与  $\vec{B}$  同向) 得

$$E_i \cdot 2\pi r = - \frac{\partial B}{\partial t} \cdot S = - \mu_0 n \frac{di}{dt} \cdot \pi r^2, \text{ 所以 } E_i = - \frac{1}{2} \mu_0 n r \frac{di}{dt}. \text{ 因 } \frac{di}{dt} > 0, \text{ 故 } E_i \text{ 线的方向为逆时针方向。}$$

由  $\vec{S} = \vec{E}_i \times \vec{H}$  知坡印廷矢量  $\vec{S}$  的方向指向轴心, 其大小为

$$S = E_i H = \frac{1}{2} \mu_0 n r \frac{di}{dt} \cdot ni = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 r i \frac{di}{dt}$$

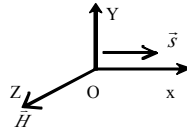
5. 沿 x 方向传播的平面电磁波, E 矢量在 y 方向振动, 振幅已知。求: (1) 磁场强度的振动方向及振幅大小; (2) 平均能流密度。

答案: (1)  $H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$ ; (2)  $\vec{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$ 。

解: (1) 磁场强度  $\vec{H}$  的振动方向沿 Z 轴, 如图所示, 设电场振幅  $E_0$  已知, 则磁场强度的振幅为

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E_0. \text{ 在真空中 } \epsilon_r = \mu_r = 1, \text{ 则 } H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$$

$$(2) \text{ 设 } E = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad H = H_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$



平均能流密度

$$\vec{S} = \frac{1}{T} \int_0^T E H dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 H_0 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$$

## 习题七

## 一、选择题

1. 在狭义相对论中, 下列说法中哪些是正确的? [ ]
- (1) 一切运动物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速。  
 (2) 质量、长度、时间的测量结果都是随物体与观察者的相对运动状态而改变的。  
 (3) 在一惯性系中发生于同一时刻, 不同地点的两个事件在其他一切惯性系中也是同时发生的。  
 (4) 惯性系中的观察者观察一个与他作匀速相对运动的时钟时, 会看到这时钟比与他相对静止的相同的时钟走得慢些。
- (A) (1), (3), (4); (B) (1), (2), (4);  
 (C) (1), (2), (3); (D) (2), (3), (4)。

答案: B

解: 根据公式  $t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

可知说法(3)是不正确的, 而(1), (2), (4)说法是正确的。

2. 两个惯性系  $S$  和  $S'$ , 沿  $x(x')$  轴方向作匀速相对运动, 相对速度为  $u$ 。设在  $S'$  系中某点先后发生两个事件, 用静止于该系的钟测出两事件的时间间隔为  $\tau_0$ , 而用固定在  $S$  系的钟测出这两个事件的时间间隔为  $\tau$ 。又在  $S'$  系  $x'$  轴上放置一静止于该系且长度为  $l_0$  的细杆, 从  $S$  系测得此杆的长度为  $l$ , 则 [ ]

- (A)  $\tau < \tau_0$ ;  $l < l_0$ ; (B)  $\tau < \tau_0$ ;  $l > l_0$ ; (C)  $\tau > \tau_0$ ;  $l > l_0$ ; (D)  $\tau > \tau_0$ ;  $l < l_0$

答案: D

解: 由公式  $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$  和公式  $l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$  可知,  $\tau > \tau_0$ ;  $l < l_0$ 。

3. 一火箭的固有长度为  $L$ , 相对于地面作匀速直线运动的速度为  $v_1$ , 火箭上有一个人从火箭的后端向火箭前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为  $v_2$  的子弹。在火箭上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是 ( $c$  表示真空中光速)。[ ]

- (A)  $\frac{L}{v_1 + v_2}$ ; (B)  $\frac{L}{v_2}$ ; (C)  $\frac{L}{v_1 - v_2}$ ; (D)  $\frac{L}{v_1 \sqrt{1 - (v_1/c)^2}}$ 。

答案: B

解: 根据固有长度的定义, 可知火箭相对观测者长度为  $L$ , 而  $v_2$  是子弹相对于观测者的速度, 因而选项(B)是正确的。

4. 质子在加速器中被加速, 当其动能为静止能量的4倍时, 其质量为静止质量的 [ ]

- (A) 4倍; (B) 5倍; (C) 6倍; (D) 8倍。

答案: B

解: 由  $mc^2 = E_k + m_0c^2 = 4m_0c^2 + m_0c^2 = 5m_0c^2$ , 得  $m = 5m_0$ 。

5. 有一直尺固定在  $K'$  系中, 它与  $Ox'$  轴的夹角  $\theta' = 45^\circ$ , 如果  $K'$  系以匀速度沿  $Ox$  方向相对于  $K$  系运动,  $K$  系中观察者测得该尺与  $Ox$  轴的夹角 [ ]

- (A) 大于  $45^\circ$ ; (B) 小于  $45^\circ$ ; (C) 等于  $45^\circ$ ;

(D) 当  $K'$  系沿  $Ox$  正方向运动时大于  $45^\circ$ , 而当  $K'$  系沿  $Ox$  负方向运动时小于  $45^\circ$

答案: A

解:  $K'$  系以匀速度沿  $Ox$  方向相对于  $K$  系运动, 则  $K$  系测量的水平长度为  $l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$  中,

$l_0 = 1 \times \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$  为固有长度,  $K$  系测量长度显然要缩短, 但在  $K$  系和  $K$  系  $y$  方向测量的长度不变, 因此,  $K$  系中观察者测得该尺与  $Ox$  轴的夹角要大于  $45^\circ$ 。

## 二、填空题

1. 设  $S'$  系以速率  $v = 0.6c$  相对于  $S$  系沿  $xx'$  轴运动, 且在  $t = t' = 0$  时,  $x = x' = 0$ 。

(1) 若有一事件, 在  $S$  系中发生于  $t = 2.0 \times 10^{-7} \text{s}$ ,  $x = 50 \text{m}$  处, 则该事件在  $S'$  系中发生时刻为

\_\_\_\_\_;

(2) 如有另一事件发生于  $S$  系中  $t = 3.0 \times 10^{-7} \text{s}$ ,  $x = 10 \text{m}$  处, 在  $S'$  系中测得这两个事件的时间间隔为\_\_\_\_\_。

答案:  $1.25 \times 10^{-7} \text{s}$ ;  $2.25 \times 10^{-7} \text{s}$ 。

$$\text{解: (1) } t' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1.25 \times 10^{-7} \text{s}; \quad (2) t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3.5 \times 10^{-7} \text{s}$$

所以

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 2.25 \times 10^{-7} \text{s}$$

2. 设有两个参考系  $S$  和  $S'$ , 它们的原点在  $t = t' = 0$  时重合在一起。有一事件, 在  $S'$  系中发生在

$t' = 8.0 \times 10^{-8} \text{s}$ ,  $x' = 60 \text{m}$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$  处。若  $S'$  系相对于  $S$  系以速率  $v = 0.6c$  沿  $xx'$  轴运动, 问该事件在  $S$  系中的时空坐标  $x =$  \_\_\_\_\_;  $y =$  \_\_\_\_\_;  $z =$  \_\_\_\_\_;  $t =$  \_\_\_\_\_。

答案:  $x = 93 \text{m}$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;  $t = 2.5 \times 10^{-7} \text{s}$ 。

$$\text{解: } x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 93 \text{ m}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2.5 \times 10^{-7} \text{s}。$$

3. 一门宽为  $a$ 。今有一固有长度为  $l_0$  ( $l_0 > a$ ) 的水平细杆, 在门外贴近门的平面内沿其长度方向匀速运动,

若站在门外的观察者认为此杆的两端可同时被拉进此门, 则该杆相对于门的运动速率  $u$  至少为

\_\_\_\_\_。

答案:  $c\sqrt{1 - (a/l_0)^2}$ 。

解: 根据运动杆长度收缩公式  $l = l_0 \sqrt{1 - (u/c)^2}$

则  $a \geq l_0 \sqrt{1 - (u/c)^2}$ , 解得  $u \geq c\sqrt{1 - (a/l_0)^2}$

4. 设想有一粒子以  $0.050c$  的速率相对实验室参考系运动, 此粒子衰变时发射一个电子, 电子的速率为  $0.80c$ , 电子速度的方向与粒子运动方向相同。则电子相对实验室参考系的速度为\_\_\_\_\_。

答案:  $u_x = 0.817c$ 。

解: 取实验室为  $S$  系, 运动粒子为  $S'$  系, 则电子相对  $S$  系的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} = 0.817 c$$

5. 已知  $\mu$  子的静止能量为  $105.7 \text{ MeV}$ ，平均寿命为  $2.2 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。试问动能为  $150 \text{ MeV}$  的  $\mu$  子的速度  $v$  是\_\_\_\_\_；平均寿命  $\tau$  是\_\_\_\_\_。

答案： $0.91c$ ； $5.31 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。

解：据相对论动能公式  $E_K = mc^2 - m_0c^2$

$$\text{得 } E_K = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right) \quad \text{即} \quad \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 = \frac{E_K}{m_0c^2} = 1.419$$

$$\text{解得} \quad v = 0.91c$$

$$\text{平均寿命为} \quad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 5.31 \times 10^{-8} \text{ s}$$

### 三、计算题

1. 固定在惯性系  $K'$  中的刚性棒沿  $x'$  轴放置，长度  $L_0 = x'_2 - x'_1$ 。由  $K$  系( $K'$  系相对于  $K$  系沿正  $x$  方向以匀速  $v$  运动)观测者测得棒长是  $L = x_2 - x_1$ ，那么  $L$  和  $L_0$  的关系可由下列式子推得：

$$\text{根据洛伦兹变换} \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \text{得} \quad x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\text{即} \quad L = \frac{L_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

显然这个结果与动尺缩短的相对论结论是矛盾的，请改正。

答案：以上的推导不正确。

解：因为在  $K$  系中棒在运动，必须同时测量棒的两端，以确定其长度，但在  $K'$  系中看来，这将是不同时的，所以在以上推导中  $t'$  不可能相同，应改为

$$t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t'_1 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\text{且} \quad t_1 = t_2$$

$$\text{由以上关系可得} \quad x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \times [(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)]$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{v}{c^2} (x_1 - x_2)$$

$$\text{消去 } t'_2 - t'_1 \text{ 并整理得} \quad x_2 - x_1 = \sqrt{1-(v/c)^2} (x'_2 - x'_1)$$

$$\text{即} \quad L = L_0 \sqrt{1-(v/c)^2}$$

这才是动尺缩短的结论( $L < L_0$ )。

2. 在惯性系  $S$  中，某事件 A 发生在  $x_1$  处， $2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$  后，另一事件 B 发生在  $x_2$  处，已知  $x_2 - x_1 = 300 \text{ m}$ 。

问：

(1) 能否找到一个相对  $S$  系作匀速直线运动的参照系  $S'$ ，使在  $S'$  系中，两事件发生于同一地点？

(2) 在  $S'$  系中，上述两事件之间的时间间隔为多少？

答案：(1) 可以，其运动速率为  $0.50c$ ；(2)  $\Delta t' = 1.73 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。

$$\text{解：(1) 令 } x'_2 - x'_1 = 0, \quad \text{由 } x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - (t_2 - t_1)v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

可得  $S'$  的运动速度为

$$v = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} = 1.50 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.50c$$

$$(2) \quad t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(t_2 - t_1)[1 - \frac{v}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

将  $v$  值代入, 得  $t'_2 - t'_1 = 1.73 \times 10^{-6} \text{ s}$

3. 在  $S$  系中有一长为  $l_0$  的棒沿  $x$  轴放置, 并以速率  $u$  沿  $xx'$  轴运动。若有一  $S'$  系以速率  $v$  相对  $S$  系沿  $x$  轴运动, 试问在  $S'$  系中测得此棒的长度为多少?

答案:  $l = \frac{l_0}{c^2 - uv} [(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)]^{1/2}$ 。

解: 设  $u'$  是棒相对观察者的速度,  $v$  为  $S'$  系相对  $S$  系的速度, 则

$$u' = \frac{(u - v)}{1 - uv/c^2} \quad l = l_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}$$

解上述两式, 可得

$$l = \frac{l_0}{c^2 - uv} [(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)]^{1/2}$$

4. 观测者甲和乙分别静止于两个惯性参照系  $K$  和  $K'$  中, 甲测得在同一地点发生的两个事件的时间间隔为 4 s, 而乙测得这两个事件的时间间隔为 5 s, 求:

- (1)  $K'$  相对于  $K$  的运动速度;
- (2) 乙测得这两个事件发生的地点的距离。

答案: (1)  $v = 1.8 \times 10^8 \text{ m/s}$ ; (2)  $\Delta x' = 9 \times 10^8 \text{ m}$ 。

解: 设  $K'$  相对于  $K$  运动的速度为  $v$  沿  $x(x')$  轴方向

(1) 因两个事件在  $K$  系中同一点发生,  $x_1 = x_2$ , 则

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

解得

$$v = [1 - \frac{(t_2 - t_1)^2}{(t'_2 - t'_1)^2}]^{1/2} c = \frac{3}{5} c = 1.8 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$(2) \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt'_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt'_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

由题

$$x_1 = x_2$$

则

$$x'_1 - x'_2 = \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{3}{4} c(t_2 - t_1) = 9 \times 10^8 \text{ m}$$

或

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad x'_1 - x'_2 = \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = 9 \times 10^8 \text{ m}$$

5. 若一电子的总能量为 5.0 MeV, 求该电子的静能、动能、动量和速率。

答案: (1)  $E_0 = 0.512 \text{ MeV}$ ; (2)  $E_k = 4.488 \text{ MeV}$ ;

(3)  $P = 2.66 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ; (4)  $v = 0.995c$ 。

解：电子的静能为  $E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$

电子的动能为  $E_k = E - E_0 = 4.488 \text{ MeV}$

由  $E^2 = P^2 c^2 + E_0^2$  得电子动量为

$$P = \frac{1}{c} (E^2 - E_0^2)^{1/2} = 2.66 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由  $E = E_0 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}$  可得电子速率为  $v = c (\frac{E^2 - E_0^2}{E^2})^{1/2} = 0.995c$

## 习题八

## 一、选择题

1. 求温度为  $27^{\circ}\text{C}$  时, 对应于方均根速率的氧气分子的德布罗意波长为[ ]。

(A)  $5.58 \times 10^{-2} \text{nm}$ ; (B)  $4.58 \times 10^{-2} \text{nm}$ ; (C)  $3.58 \times 10^{-2} \text{nm}$ ; (D)  $2.58 \times 10^{-2} \text{nm}$ 。

答案: D

解: 理想气体分子的方均根速率  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ 。

对应的氧分子的德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\sqrt{v^2}} = \frac{N_A h}{M\sqrt{v^2}} = \frac{N_A h}{\sqrt{3MRT}} = 2.58 \times 10^{-2} \text{nm}。$$

2. 如果电子显微镜的加速电压为  $40 \text{kV}$ , 则经过这一电压加速的电子的德布罗意波长为[ ]。

(A)  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{4 \times 10^4 me}}$ ; (B)  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{8 \times 10^4 me}}$ ; (C)  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{4 \times 10^2 me}}$ ; (D)  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{4 \times 10^4 me}}$

答案: B

解: 经过电压  $U$  加速后, 电子动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad \text{所以速度 } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

根据德布罗意公式, 此时电子波的波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}} = \frac{h}{\sqrt{8 \times 10^4 me}}$$

3. 氦氖激光器所发红光波长  $\lambda = 632.8 \text{nm}$ , 谱线宽度  $\Delta\lambda = 10^{-9} \text{nm}$ , 利用不确定关系  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}$ , 求当这种光子沿  $x$  方向传播时, 它的  $x$  坐标的不确定量是[ ]。

(A)  $42.56 \text{km}$ ; (B)  $31.87 \text{km}$ ; (C)  $39.65 \text{km}$ ; (D)  $25.37 \text{km}$ 。

答案: B

解: 光子具有二象性, 所以也应满足不确定关系。由  $p_x = h/\lambda$ , 求微分取微元得:  $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda$ 。将此式

代入不确定关系式, 可得

$$\Delta x \geq \frac{h}{2\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = \frac{(632.8 \times 10^{-9})^2}{4\pi \times 10^{-18}} = 31.87 \text{km}$$

4. 动能为  $1.0 \text{eV}$  的电子的德布罗意波的波长为[ ]。

(A)  $2.15 \text{nm}$ ; (B)  $3.26 \text{nm}$ ; (C)  $1.23 \text{nm}$ ; (D)  $2.76 \text{nm}$ 。

答案: C

解: 电子的静能  $E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{MeV}$ , 可见其动能  $E_k \ll E_0$ , 即  $E_k / E_0 \ll 1$ 。

因  $E_k = mc^2 - m_0 c^2 = (\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1)E_0$ , 所以若要  $\frac{E_k}{E_0} = (\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1) \ll 1$ , 则必有  $v \ll c$ , 说明此时

相对论效应可以忽略, 故有  $p = \sqrt{2m_0 E_k}$ , 则其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}} = 1.23 \text{ nm}。$$

5. 已知地球和金星的大小差不多，金星的平均温度约为 773 K，地球的平均温度约为 293 K。若把它们看作是理想黑体，这两个星体向空间辐射的能量之比为[ ]。

(A) 32.6; (B) 52.7; (C) 26.3; (D) 48.4。

答案: D

解: 由斯特藩—玻耳兹曼定律  $M(T) = \sigma T^4$  可知，这两个星体辐射能量之比为

$$\frac{M_{\text{金}}}{M_{\text{地}}} = \left( \frac{T_{\text{金}}}{T_{\text{地}}} \right)^4 = 48.4$$

## 二、填空题

1. 测定核的某一确定状态的能量不确定量为 1eV，则这个状态的最短寿命是\_\_\_\_\_秒。

答案:  $3.3 \times 10^{-16}$

解:  $\Delta E = 1\text{eV}$

根据不确定关系:  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ , 得  $\Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta E} = 3.3 \times 10^{-16} \text{ s}。$

2. 钾的截止频率为  $4.62 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ，今以波长为 435.8 nm 的光照射，则钾放出的光电子的初速度为\_\_\_\_\_  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

答案:  $5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

解: 根据爱因斯坦光电效应方程  $h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$

其中  $A = h\nu_0$ ,  $\nu = c/\lambda$

可得电子的初速度  $\nu = \left[ \frac{2h}{m} \left( \frac{c}{\lambda} - \nu_0 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = 5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(由于逸出金属的电子其速度  $\nu \ll c$ ，故式中  $m$  取电子的静止质量)。

3. 用波长为  $\lambda_1$  的单色光照射某光电管阴极时，测得光电子的最大动能为  $E_{K1}$ ；用波长为  $\lambda_2$  的单色光照射时，测得光电子的最大动能为  $E_{K2}$ 。若  $E_{K1} > E_{K2}$ ，则  $\lambda_1$  \_\_\_\_\_  $\lambda_2$ 。(填 > 或 <)

答案: <

解: 对同一光电管的阴极材料，其逸出功与入射光的频率等无关，是个常数。根据爱因斯坦光电方程，有

$h\nu_1 - E_{K1} = h\nu_2 - E_{K2}$ 。因  $E_{K1} > E_{K2}$ ，故  $\nu_1 > \nu_2$ ，而  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ，所以  $\lambda_1 < \lambda_2$ 。

4. 入射的 X 射线光子的能量为 0.60 MeV，被自由电子散射后波长变化了 20%，则反冲电子的动能为\_\_\_\_\_ MeV。

答案: 0.10 MeV

解: 由题意知,  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 20\%$ ,  $\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda = 1.2\lambda_0$ 。



入射光子能量  $E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = 0.60 \text{ MeV}$ ；散射光子能量  $E' = \frac{hc}{\lambda'}$ 。

设反冲电子动能为  $E_K$ ，根据能量守恒得

$$E_K = E_0 - E' = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc(\lambda' - \lambda_0)}{\lambda_0 \lambda'} = E_0 \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{6} E_0 = 0.10 \text{ MeV}$$

5. 在康普顿效应中，入射光子的波长为  $3.0 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ，反冲电子的速度为光速的 60%，求散射光子的波长  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}} \text{ nm}$ ；散射角  $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：(1)  $4.35 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ；(2)  $\varphi = 63^\circ 36' = 63.6^\circ$ 。

解：根据能量守恒，相对论质速关系以及康普顿散射公式有

$$h \frac{c}{\lambda_0} + m_0 c^2 = h \frac{c}{\lambda} + m c^2 \quad (1)$$

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (2)$$

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

由式 (1) 和式 (2) 可得散射光子的波长  $\lambda = \frac{4h\lambda_0}{4h - \lambda_0 m_0 c} = 4.35 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ；

将  $\lambda$  值代入式 (3)，得散射角

$$\varphi = \arccos \left[ 1 - \frac{\lambda - \lambda_0}{h} m_0 c \right] = \arccos 0.444 = 63^\circ 36' = 63.6^\circ$$

### 三、计算题

1. 一质量为  $40 \text{ g}$  的子弹以  $1.0 \times 10^3 \text{ m/s}$  的速率飞行，求：(1) 其德布罗意波的波长；(2) 若子弹位置的不确定量为  $0.10 \mu\text{m}$ ，利用关系  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ，求其速率的不确定量。

答案：(1)  $1.66 \times 10^{-35} \text{ m}$ ；(2)  $1.31 \times 10^{-26} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

解：(1) 子弹的德布罗意波长为  $\lambda = \frac{h}{m v} = 1.66 \times 10^{-35} \text{ m}$ ；

(2) 由不确定关系式以及  $\Delta p_x = m \Delta v_x$  可得子弹速率的不确定量为

$$\Delta v = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{\hbar}{2 m \Delta x} = 1.31 \times 10^{-26} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. 图为某种金属的光电效应实验曲线。试根据图中所给资料求出普朗克常数和该金属材料的逸出功。

答案：(1)  $h = 6.4 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ；

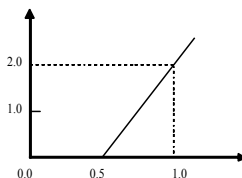
(2)  $A = 3.2 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV}$ 。

解：(1) 由爱因斯坦光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2} m v_m^2 + A$$

和  $\frac{1}{2} m v_m^2 = e U_a$ ，得：  $U_a = \frac{h}{e} \nu - \frac{A}{e}$

对照实验曲线，普朗克常数为：



$$h = \frac{eU_a}{\nu - \nu_0} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.0}{(1.0 - 0.5) \times 10^{15}} = 6.4 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

(2) 该金属材料的逸出功为:

$$A = h\nu_0 = 6.4 \times 10^{-34} \times 0.5 \times 10^{15} = 3.2 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV}$$

3. 金属钾的逸出功为 2.00eV, 求:

(1) 光电效应的红限频率和红限波长; (2) 如果入射光波长为 300nm, 求遏止电压。

答案: (1)  $\nu_0 = 4.84 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $\lambda_0 = 6.20 \times 10^{-7} \text{ m} = 620 \text{ nm}$ ; (2)  $U_a = 2.14 \text{ V}$ 。

解: (1) 已知逸出功为  $A = 2.00 \text{ eV}$ , 则红限频率和波长分别为

$$\nu_0 = \frac{A}{h} = \frac{2.00 \times 1.602 \times 10^{-19}}{6.626 \times 10^{-34}} = 4.84 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 6.20 \times 10^{-7} \text{ m} = 620 \text{ nm}$$

$$(2) \text{ 入射光频率为 } \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8}{300 \times 10^{-9}} = 1.00 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

由遏止电压的定义知, 遏止电压满足关系式  $eU_a = \frac{1}{2} m v_m^2$

再结合光电效应方程  $h\nu = \frac{1}{2} m v_m^2 + A$ , 比较两式, 可得

$$U_a = \frac{h\nu - A}{e} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 1.00 \times 10^{15} - 2.00 \times 1.602 \times 10^{-19}}{1.602 \times 10^{-19}} = 2.14 \text{ V}$$

4. 波长  $\lambda_0 = 0.01 \text{ nm}$  的 X 射线与静止的自由电子碰撞。在与入射方向成  $90^\circ$  角的方向上观察时, 散射 X 射线的波长多大? 反冲电子的动能和动量 (并算出方向  $\theta$ )?

答案: (1)  $\lambda = 0.0124 \text{ nm}$ ; (2)  $E_K = 2.4 \times 10^4 \text{ eV}$ ; (3)  $P_e = 8.5 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ,  $\theta = 38^\circ 44' \approx 38.7^\circ$ 。

解: 将  $\varphi = 90^\circ$  代入康普顿散射公式得

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\varphi) = \lambda_c (1 - \cos 90^\circ) = \lambda_c = \frac{h}{m_0 c},$$

由此得康普顿散射波长为

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_c = 0.01 + 0.0024 = 0.0124 \text{ nm}$$

对于反冲电子, 根据能量守恒, 它所获得的动能  $E_K$  就等于入射光子损失的能量, 即

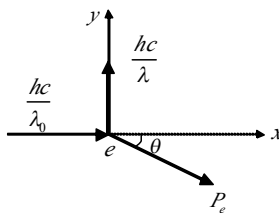
$$E_K = h\nu_0 - h\nu = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda} = 3.8 \times 10^{-15} \text{ J} = 2.4 \times 10^4 \text{ eV}$$

计算电子的动量, 可参看图, 其中  $P_e$  为电子碰撞后的动量。根据动量守恒, 有

$$P_e \cos\theta = \frac{h}{\lambda_0}, \quad P_e \sin\theta = \frac{h}{\lambda}$$

两式平方相加并开方, 得

$$P_e = \frac{(\lambda_0^2 + \lambda^2)^{1/2}}{\lambda_0\lambda} h = 8.5 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}; \quad \cos\theta = \frac{h}{P_e\lambda_0} = 0.78, \quad \theta = 38^\circ 44' \approx 38.7^\circ.$$



5. 康普顿实验中, 当能量为  $0.5\text{MeV}$  的 X 射线射中一个电子时, 该电子获得  $0.10\text{MeV}$  的动能。假设原电子是静止的, 求

(1) 散射光的波长  $\lambda_1$ ; (2) 散射光与入射方向的夹角  $\varphi$  ( $1\text{MeV}=10^6\text{eV}$ )。

答案: (1)  $\lambda_1=3.10\times 10^{-3}\text{nm}$ ; (2)  $\varphi=41^\circ 48'=41.8^\circ$ 。

解: (1) 已知反冲电子的能量  $E_e=0.10\text{MeV}$ , 入射 X 射线光子的能量  $E_0=0.50\text{MeV}$ 。

设散射光能量为  $E_1$ , 依题意有  $E_1=h\frac{c}{\lambda_1}$ ,

根据能量守恒:  $\frac{hc}{\lambda_1}=E_0-E_e$ , 得

$$\lambda_1=\frac{hc}{E_0-E_e}=\frac{6.63\times 10^{-34}\times 3\times 10^8}{(0.05-0.10)\times 10^6\times 1.60\times 10^{-19}}\text{m}=3.10\times 10^{-3}\text{nm}$$

(2) 由  $E_0=h\frac{c}{\lambda_0}$  得

$$\lambda_0=\frac{hc}{E_0}=\frac{6.63\times 10^{-34}\times 3\times 10^8}{0.05\times 10^6\times 1.60\times 10^{-19}}=2.48\times 10^{-12}\text{m}=2.48\times 10^{-3}\text{nm}$$

又由  $\lambda_1-\lambda_0=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ , 得

$$\varphi=2\arcsin\left[\frac{m_0c(\lambda_1-\lambda_0)}{2h}\right]^{\frac{1}{2}}=2\arcsin 0.3545=41^\circ 48'$$

## 习题九

## 一、选择题

1. 要使处于基态的氢原子受激发后能发射赖曼系（由各激发态向基态跃迁所构成的谱线系）的最长波长的谱线，至少应向基态氢原子提供的能量是[ ]

- (A) 1.5eV; (B) 3.4 eV; (C) 10.2 eV; (D) 13.6 eV。

答案: C

解: 赖曼系的谱线满足公式  $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$   $n=2,3,4,\dots$ 。可见, 取  $n=2$  时波长最长而提供的能量也最低, 即

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = hcR(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) = 10.2\text{eV}$$

2. 根据玻尔的理论, 氢原子在  $n=5$  轨道上的角动量与在第一激发态的轨道角动量之比为

- (A) 5/2; (B) 5/3; (C) 5/4; (D) 5。 [ ]

答案: A

解: 玻尔理论中角动量满足公式  $L = n\frac{h}{2\pi}$ , 第一激发态,  $n=2$ 。由此可得答案 (A)。

3. 下列四组量子数:

- (1)  $n=3, l=2, m_l=0, m_s=1/2$ ; (2)  $n=3, l=3, m_l=1, m_s=1/2$ ;  
(3)  $n=3, l=1, m_l=-1, m_s=-1/2$ ; (4)  $n=3, l=0, m_l=0, m_s=-1/2$ 。

其中可以描述原子中电子状态的 [ ]

- (A) 只有 (1) 和 (3); (B) 只有 (2) 和 (4);  
(C) 只有 (1)、(3) 和 (4); (D) 只有 (2)、(3) 和 (4)。

答案: C

解: 根据氢原子的量子理论和四个量子数 ( $n, l, m_l, m_s$ ) 的取值关系, 当  $n=3$  时,  $l$  的可能取值为 0, 1, 2;  $m_l$  的可能取值是 0,  $\pm 1, \pm 2$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , 因而 (1) (3) 和 (4) 可以描述原子中电子状态, 故选项 (C) 对。

4. 将波函数在空间各点的振幅同时增大  $D$  倍, 则粒子在空间的分布概率将[ ]

- (A) 增大  $D^2$  倍; (B) 增大  $2D$  倍; (C) 增大  $D$  倍; (D) 不变。

答案: D

解: 不变。波函数是概率函数, 其模的平方描述粒子  $t$  时刻在空间某点出现的概率。而概率是相对值, 任

意两点 1 和 2 之间的概率比值为:  $\frac{|D\psi_1|^2}{|D\psi_2|^2} = \frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2}$

可见, 各点振幅同时增大  $D$  倍时概率分布不变。

5. 直接证实了电子自旋存在的最早的实验之一是[ ]

- (A) 康普顿实验; (B) 斯特恩-格拉赫实验;  
(C) 戴维逊-革末实验; (D) 卢瑟福实验。

答案: B

解：1922年，斯特恩和格拉赫在德国汉堡大学做了一个实验，发现处于S态的银原子射线在非均匀磁场中分裂为两束，该现象用电子绕核运动无法解释，必须引进电子具有自旋的假设。

## 二、填空题

1. 在玻尔氢原子理论中，当电子由量子数  $n=5$  的轨道跃迁到  $n=2$  的轨道上时，对外辐射光的波长为 \_\_\_\_\_ nm；若再将该电子从  $n=2$  的轨道跃迁到游离状态，外界需要提供的能量为 \_\_\_\_\_ eV。

答案： $\lambda = 434\text{nm}$ ； $\Delta E = 3.4\text{eV}$ 。

解：根据玻尔频率跃迁条件得  $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)$ ，即

$$\lambda = \frac{2^2 \cdot 5^2}{(5^2 - 2^2)R} = \frac{100}{21 \times 1.097 \times 10^7} = 4.34 \times 10^{-7} \text{m} = 434\text{nm}$$

当电子从  $n=2$  跃迁到游离态，即  $n \rightarrow \infty$ ，则所需的能量为

$$\Delta E = E_{\infty} - E_2 = -E_2 = \frac{13.6}{2^2} = 3.4\text{eV}$$

2. 处于基态的氢原子被能量为  $12.09\text{eV}$  的光子激发时，其电子的轨道半径为基态轨道半径的 \_\_\_\_\_ 倍。

答案：9

解：基态氢原子能量  $E_1 = -13.6\text{eV}$ 。根据玻尔理论  $h\nu = E_n - E_1$  得  $E_n = h\nu + E_1$ ，即

$$E_n = 12.09 - 13.6 = -1.51\text{eV}$$

此外，氢原子第  $n$  能级的能量  $E_n = \frac{-13.6}{n^2} \text{eV}$

由此得  $-1.51 = \frac{-13.6}{n^2}$ ，故  $n^2 = 9$ ， $n = 3$ 。

再由氢原子的半径公式  $r_n = n^2 a_1 = 9a_1$  知，此时氢原子的半径增加到基态时的 9 倍。

3. 在描述原子内电子状态的量子数  $n, l, m_l$  中，

- (1) 当  $n=5$  时， $l$  的可能值有 \_\_\_\_\_ 个，它们是 \_\_\_\_\_；
- (2) 当  $n=5$  时， $m_l$  的可能值有 \_\_\_\_\_ 个，它们是 \_\_\_\_\_；
- (3) 当  $l=4$  时， $n$  的最小可能值是 \_\_\_\_\_；
- (4) 当  $n=3$  时，电子可能状态数为 \_\_\_\_\_ 个。

答案：(1) 5 个； $l=0, 1, 2, 3, 4$ ；(2) 9 个， $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ ；(3) 5；(4) 18。

解：(1)  $l$  取 0 到  $n-1$  共  $n$  个值。故  $n=5$  时， $l$  可能取 5 个值，即  $l=0, 1, 2, 3, 4$ ；

(2)  $n=5$ ，则  $l=0, 1, 2, 3, 4$ ， $m_l$  取 0 到  $\pm l$  共  $2l+1$  个值。所以， $m_l$  的可能取值为 9 个，它们是  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ ；

(3) 因为  $l$  的最大可能值为  $(n-1)$ ，所以  $l=4$  时， $n$  的最小可能值是 5；

(4) 电子的可能状态数为  $2n^2$ 。所以当  $n=3$  时，电子的可能状态数为  $2n^2 = 18$ 。

4. 能够占据一个  $d$  支壳层的最多电子数为 \_\_\_\_\_ 个；这些电子的磁量子数  $m_l$  的值为 \_\_\_\_\_；自旋量子数  $m_s$  的值为 \_\_\_\_\_。

答案：10； $0, \pm 1, \pm 2$ ； $\pm \frac{1}{2}$ 。

解： $d$  支壳层就是  $l=2$  的支壳层，最多能容纳的电子数为：

$$Z_e = 2(2l+1) = 2(2 \times 2 + 1) = 10$$

磁量子数取值为 0 到  $\pm l$ ，即  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$ 。

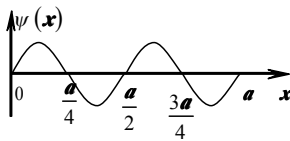
自旋量子数： $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 。

5. 在一维无限深势阱  $0 \rightarrow a$  范围内波函数

如图，则发现粒子概率最大的位置

是\_\_\_\_\_。

答案： $\frac{a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{5a}{8}, \frac{7a}{8}$



解：概率最大处即波函数模的平方最大。由图可知波峰与波谷处波函数平方有最大值。

### 三、计算题

1. 以能量为 12.5 eV 的电子通过碰撞使氢原子激发时，最高能激发到哪一能级？当回到基态时能产生哪些谱线？画出谱线的能级跃迁图。

答案：(1)  $n = 3$ ；(2)  $\lambda_{31} = 102.6 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{21} = 121.6 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{32} = 656.3 \text{ nm}$ ；

(3) 能级跃迁图如图所示。

解：(1) 已知  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ 。设氢原子全部吸收 12.5 eV 能量后，最高能激发到第  $n$  能级，则

$$\Delta E = E_n - E_1 = \frac{E_1}{n^2} - \frac{E_1}{1^2}, \quad \text{即} \quad 12.5 = 13.6 \left[ 1 - \frac{1}{n^2} \right]$$

解得  $n = 3.5$ 。取整数，得最高激发能级  $n = 3$ 。

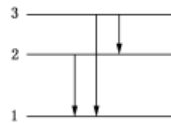
(2) 当从  $n = 3$  能级向下跃迁时，可能发出如下三条谱线：

$$n = 3 \rightarrow n = 1: \tilde{\nu}_{31} = R \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right] = \frac{8}{9} R, \quad \lambda_{31} = \frac{9}{8R} = \frac{9}{8 \times 1.097 \times 10^7} = 102.6 \text{ nm};$$

$$n = 2 \rightarrow n = 1: \tilde{\nu}_{21} = R \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right] = \frac{3}{4} R, \quad \lambda_{21} = \frac{4}{3R} = 121.6 \text{ nm};$$

$$n = 3 \rightarrow n = 2: \tilde{\nu}_{32} = R \left[ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right] = \frac{5}{36} R, \quad \lambda_{32} = \frac{36}{5R} = 656.3 \text{ nm}。$$

(3) 能级跃迁图如图所示。



2. 已知一维运动粒子的波函数为

$$\Psi(x) = \begin{cases} A x e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

式中  $\lambda > 0$ ，试求：

(1) 归一化常数  $A$  和归一化波函数；

(2) 该粒子位置坐标的概率分布函数（概率密度）。

答案：(1)  $A = 2\lambda^{3/2}$ ,  $\Psi(x) = \begin{cases} 2\lambda^{3/2} x e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ ;

$$(2) \rho = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}。$$

解：(1) 由归一化条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$ ，有

$$\int_{-\infty}^0 0^2 dx + \int_0^{+\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$

得  $A = 2\lambda^{3/2}$  (积分公式  $\int_0^{+\infty} y^2 e^{-by} dy = \frac{2}{b^3}$ )

经归一化的波函数为  $\Psi(x) = \begin{cases} 2\lambda^{3/2} x e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases};$

(2) 粒子的概率分布函数为

$$\rho = |\Psi(x)|^2 = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

3. 一维无限深的方势阱中粒子的定态波函数为  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 试求下述两种情况下粒

子在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间被找到的概率: 当 (1) 粒子处于基态时; (2) 粒子处于  $n=2$  的状态时。

答案: (1) 0.19; (2) 0.40。

解: (1) 当粒子处于基态时

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x$$

粒子在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间被找到的概率为

$$P = \int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_1(x)|^2 \cdot dx = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{3}} \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cdot dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.19$$

(2) 当粒子处于  $n=2$  的激发态时

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x$$

粒子在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间被找到的概率为

$$P = \int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_2(x)|^2 \cdot dx = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{3}} \sin^2 \frac{2\pi}{a} x \cdot dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0.40$$

4. 设有一电子在宽为 0.20 nm 的一维无限深的方势阱中。

(1) 计算电子在最低能级的能量;

(2) 当电子处于第一激发态 ( $n=2$ ) 时, 在势阱中何处出现的概率最小, 其值为多少?

答案: (1) 9.43eV;

(2) 在  $x=0, \frac{a}{2}, a$  (即  $x=0, 0.10\text{nm}, 0.20\text{nm}$ ) 处概率最小, 其值均为零。

解: (1) 一维无限深势阱中粒子的可能能量  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$ , 式中  $a$  为势阱宽度。

当量子数  $n=1$  时, 粒子处于基态, 能量最低。因此, 电子在最低能级的能量为

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma} = 1.51 \times 10^{-18} \text{ J} = 9.43 \text{ eV}$$

(2) 粒子在无限深方势阱中的波函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

当它处于第一激发态 ( $n=2$ ) 时, 波函数

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a$$

相应的概率密度函数

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\text{令 } \frac{d(|\psi(x)|^2)}{dx} = 0, \quad \text{得 } \frac{8\pi}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} = 0.$$

在  $0 \leq x \leq a$  的范围内讨论可得, 当  $x=0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{4}, a$  时, 函数  $|\psi(x)|^2$  取得极值。

由  $\frac{d(|\psi(x)|^2)}{dx} > 0$  可知, 函数在  $x=0, \frac{a}{2}, a$  (即  $x=0, 0.10\text{nm}, 0.20\text{nm}$ ) 处概率最小, 其值均为零, 即电子不出现在这些位置。

5. 氢原子中的电子处于  $n=4, l=3$  的状态。问:

- (1) 该电子角动量  $L$  的值为多少?
- (2) 这角动量  $L$  在  $z$  轴的分量有哪些可能的值?
- (3) 角动量  $L$  与  $z$  轴的夹角的可能值为多少?

答案: (1)  $L = \sqrt{12} \frac{h}{2\pi}$ ;

(2)  $L_z$  的可能取值为  $0, \pm \frac{h}{2\pi}, \pm \frac{2h}{2\pi}, \pm \frac{3h}{2\pi}$ ;

(3)  $\theta$  分别为  $30^\circ, 55^\circ, 73^\circ, 90^\circ, 107^\circ, 125^\circ, 150^\circ$ 。

解: (1)  $n=4, l=3$  时, 电子角动量

$$L = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi} = \sqrt{12} \frac{h}{2\pi}$$

(2) 轨道角动量在  $z$  轴上的分量  $L_z = m_l \frac{h}{2\pi}$ , 对于  $n=4, l=3$  的电子来说  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ , 则  $L_z$

的可能取值为  $0, \pm \frac{h}{2\pi}, \pm \frac{2h}{2\pi}, \pm \frac{3h}{2\pi}$ ;

(3) 角动量  $L$  与  $z$  轴的夹角  $\theta = \arccos \frac{L_z}{L} = \arccos \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$ 。

如图所示, 当  $m_l$  分别取  $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$  时, 相应夹角  $\theta$  分别为  $30^\circ, 55^\circ, 73^\circ, 90^\circ, 107^\circ, 125^\circ, 150^\circ$

