

脳波解析のための数学シリーズ  
統計編

後藤 優仁

2021 年 9 月 13 日

# 目次

第1章	はじめに	3
第2章	確率分布	4
2.1	確率分布と確率密度関数	4
2.2	一様分布/ベルヌーイ分布/2項分布/ポアソン分布	5
2.2.1	一様分布	5
2.2.2	ベルヌーイ分布	7
2.2.3	2項分布	9
2.2.4	ポアソン分布	10
2.3	正規分布	11
2.3.1	正規分布とは	11
2.3.2	確率密度関数の導出	12
2.3.3	100p%点	15
2.4	t分布	17
2.5	F分布	18
2.6	$\chi^2$ 二乗分布	19
第3章	大数の法則と中心極限定理	21
3.1	大数の法則	21
3.1.1	マルコフの不等式	22
3.1.2	チェビシェフの不等式	24
3.1.3	大数の法則	25
3.2	中心極限定理	25
第4章	統計量と標本分布	27
4.1	標本分布とは	27
4.2	統計量	30
4.2.1	標本平均	31
4.2.2	標本分散	32
4.3	正規分布からの標本	35
4.3.1	正規標本論	35
4.3.2	母分散既知の時の標本平均の分布	37
4.3.3	標本分散の標本分布	39
4.3.4	母分散未知の時の標本平均の分布	41

4.4	2 標本問題	44
4.4.1	母分散が既知の時	44
4.4.2	母分散が未知だが等しいとき	45
4.4.3	母分散が未知で等しいかも未知	46
4.4.4	標本分散の比の分布	46
<b>第 5 章</b>	<b>統計的検定</b>	<b>49</b>
5.1	統計的仮説検定とは	49
5.2	仮説と検定関数	53
5.3	有意水準と検出力	57
5.4	各種検定	60
5.4.1	母分散既知の時, 母平均に関する検定	61
5.4.2	母分散未知の時, 母平均に関する検定	62
5.4.3	母平均の差の検定	62
5.4.4	母分散の検定	64
5.5	母分散の比の検定	64
5.6	検出力分析	65
<b>第 6 章</b>	<b>ベイズ統計</b>	<b>66</b>
6.1	頻度主義とベイズ主義	66
6.2	加法定理と乗法定理	66
6.3	ベイズの定理	68
6.4	無情報事前分布	72
6.5	共役事前分布	72
6.6	ベイズの応用	72
<b>第 7 章</b>	<b>統計的推定</b>	<b>74</b>
7.1	点推定と区間推定	74
7.2	最尤推定	75
7.3	最大事後確率推定 (MAP 推定)	77
7.4	ベイズ推定	78
7.5	逐次推定	79
7.6	推定のまとめ	80
<b>第 8 章</b>	<b>予測</b>	<b>81</b>
8.1	ベイズ予測	81

# 第1章 はじめに

統計処理とは、実際に実験やアンケートを通して集めたデータを解釈する際に必要になる処理です。論文を読むためにも必須、というか一番大事な項目なので頑張りましょう。analysis の様々な処理を行った結果、実験で計測した脳波を何らかの形で解釈しやすいようなデータに変形する事が出来ました。つまり解析をしました。次に必要なのは、この解析で得られたデータを解釈する行程です。ここで必要になるのが統計的な処理ですね。個人的には楽しくないですが、仕方ないのでやっていきましょう。

また、結局脳の計算をモデル化しようとか発展的な議論をしていこうと思った時にはここら辺が非常に重要になってきます。先に勉強しておくとかだいぶ後が楽だと思いますが、何に役立つのか分からないとモチベは上がらないし勉強できないのは自分も痛いほど分かるので、逆に先に advanced.pdf とかでチラ見してくるのも良いかもしれませんね。

あと検定。正味これがいっちゃん大事なのですがいっちゃん勉強する気になれないんですよね... ががんばります。

## 第2章 確率分布

基礎編に乗っているような基礎統計量だけの議論では必要ないため、(多分) 高校数学ではやりませんが、それ以上の統計学をやる上で必須になってくるのが確率分布の概念です。

世の中には無数の統計的データがある、というか収集できますが、そいつらの統計的な分布、つまりヒストグラムの形は概ねいくつかの典型的なパターンのどれかに当てはまる事が知られています。中でも正規分布という分布はつよつよで、中心極限定理という定理が示すように世の中の多くの事象に適用できる分布の形です。

こいつらを知っている事で、その性質から考えて、実際に得られたデータの平均や分散といった値はどうか(推定)、そもそも普通にありえる話なのか、何か特殊な事情で一般的ではないデータが取られたのか(統計的検定)や、では次に来る事象はどうなる可能性が高いか(予測)など様々な議論を展開していく事が可能になります。

そのため、確率分布はそれだけで学んだところで特に面白味がありませんが、今後使っていくという意味では重要です。ここでは、代表的な確率分布を載せていきます。覚える必要はないので、どんな奴らがいるのかなんとか見て、3章以降で出てきた際に参照できるようにしておきましょう。

### 2.1 確率分布と確率密度関数

まずは定義の確認から改めて行っておきましょう！

確率とは、起こりうる全体の事象のうち、ある事象がどれくらいの割合で起こるのかを表します。

確率分布とは、起こりうる事象それぞれの確率がどのような分布をしているかです。

確率密度関数とは、実際に確率分布をプロット(横軸に事象、縦軸に確率)した際に現れる分布の形を表現する関数の事です。場合によっては事象は離散分布になったりするため、その場合はこの分布を連続と見立てて確率密度関数が定義されます。

## 2.2 一様分布/ベルヌーイ分布/2項分布/ポアソン分布

まずは簡単な分布から見て、徐々に複雑なものを見ていきます。今回は脳の数学であまり使わない気がするやつらはまとめて雑に確認します。

### 2.2.1 一様分布

例えばサイコロを振った時に出る目の確立分布を考えると、当然6つの事象それぞれがすべて  $\frac{1}{6}$  で表せるため、プロットすると以下ようになります。

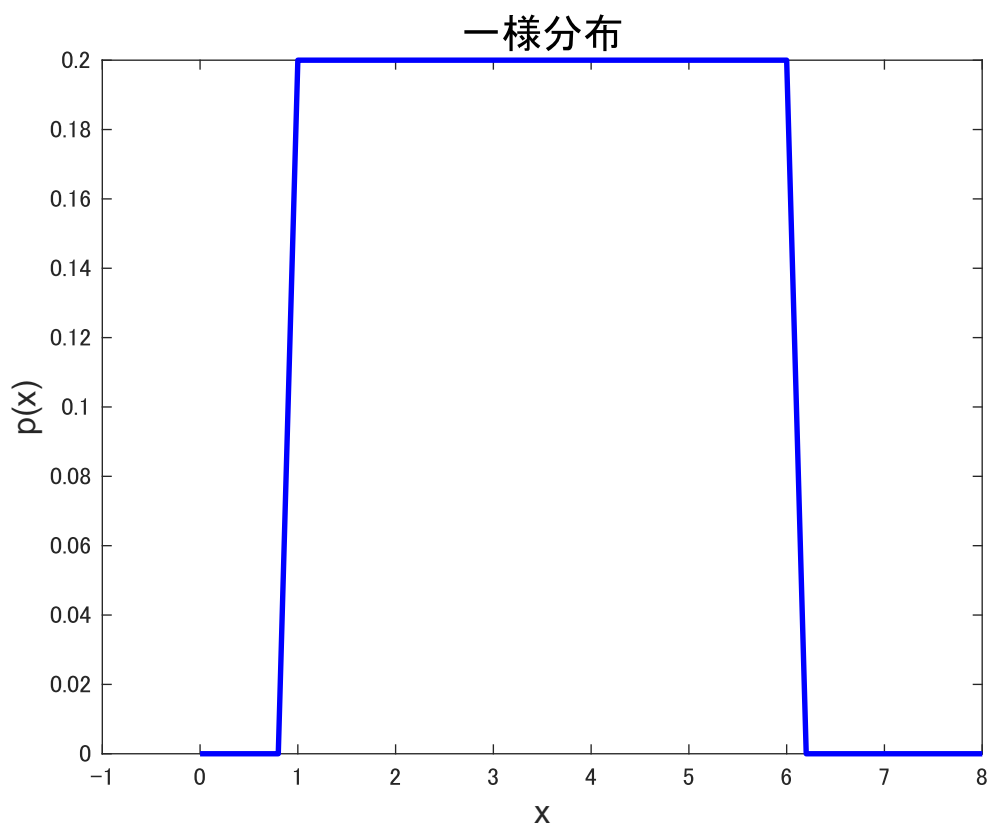


図 2.1: サイコロの確立分布 (一様分布)

一様分布は確率密度関数を定義するまでもないのですが、勉強のためにあえてやるとすると以下のようになります。まずさいころの例だとそれぞれの目が出てくる確率はこうですね。

$$f(x) = \frac{1}{6}(1 \leq X \leq 6) \quad (2.1)$$

定義域が0から6で、いずれの点においても  $\frac{1}{6}$  の確立で目がでるよってことですね。簡単です。また確率を考える際、式(2.1)のように左辺の  $(x)$  と右辺定義域内にいる  $(X)$  で使い分けがなされます。  $X$  は確率変数を表し、実際の値は取りません。観測されて確定した時には  $x$  として表現されます。今回の  $X$  と  $x$  の関係は

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] \quad (2.2)$$

のような感じです。

より一般には離散一様分布に従う変数の確率関数は、  $N$  を変数を取りうる値(さいころの目=6)として、

$$P(X = x) = \frac{1}{N} \quad (x = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

となります。これはさすがに良いですね。次。

離散一様分布の期待値と分散は以下です。

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^N kP(X = k) \quad (2.4)$$

$$= \sum_{k=1}^N k \frac{1}{N} \quad (2.5)$$

$$= \frac{(1+N)N}{2} \frac{1}{N} \quad (2.6)$$

$$= \frac{1+N}{2} \quad (2.7)$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \quad (2.8)$$

$$= \sum_{k=1}^N k^2 \frac{1}{N} - \left(\frac{1+N}{2}\right)^2 \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{N} N \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} \quad (2.10)$$

$$= \frac{N^2 - 1}{12} \quad (2.11)$$

一見複雑?な気もするかもしれませんが、普通に計算してみればわかるとおもいます。ほら、「1から100までの数の和は?」みたいな問題って工夫して暗算出来ましたよね? どうやるんでしたっけ。

連続一様分布については確率密度関数は以下ようになります。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq X \leq b) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \quad (2.12)$$

これは面積で考えると分かりやすいかも。確率密度関数は積分すると1にならないといけません。b-aは定義域なので、つまり面積でいうところの横の長さです。縦の長さはそれぞれの値が観測される確率、つまり  $f(x)$  ですよ？

そう、なので定義の  $f(x)$  を定義域で積分すると1になります。当たり前の事なのですが、確率密度関数の考え方にいまいち慣れていない人ように丁寧に言いました。以下はこのような話は省略します。

とにかく、積分すると1になるのが確率密度関数です。

平均  $\mathbb{E}(X)$  及び分散  $\mathbb{V}(X)$  は

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad (2.13)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.14)$$

一応、期待値くらいは証明もおきます。でもまあ簡単です。

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.15)$$

$$= \int_{-\infty}^a xf(x)dx + \int_a^b xf(x)dx + \int_b^{\infty} xf(x)dx \quad (2.16)$$

$$= 0 + \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx + 0 \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b \quad (2.18)$$

$$= \frac{b-a}{2} \quad (2.19)$$

### 2.2.2 ベルヌーイ分布

ベルヌーイ分布は、1か0かです。ある事が起きるか起きないか、成功するかしないかなどの2値分類ですね。超簡単です！！



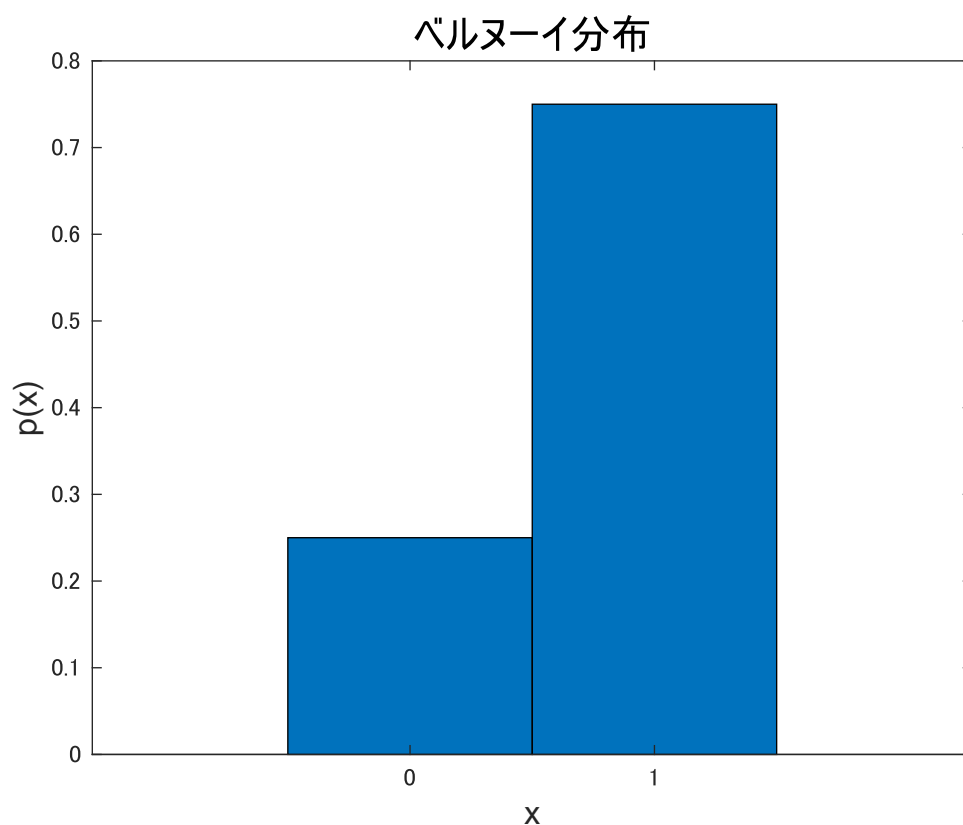


図 2.2: ベルヌーイ分布

この図 (2.2.2) では成功が 1, 失敗が 0 として成功率 75% の何かをやらせたときの確率分布です. 今回は成功率くらいの割合になる事もあります. 他にも, たとえばサイコロで 1 が出るか出ないかとか, そんな問題もこの分布で考えられます. 以上.

関数はこんな感じかな

$$f(x) = \begin{cases} p & (x = 1) \\ q (= 1 - p) & (x = 0) \end{cases} \quad (2.20)$$

平均  $\mathbb{E}(X)$  及び分散  $\mathbb{V}(X)$  は

$$\mathbb{E}(X) = p \quad (2.21)$$

$$\mathbb{V}(X) = pq \quad (2.22)$$

です. 興味ないので証明とかやりません. 僕も知らない.

### 2.2.3 2項分布

2項分布は「同じことを何回も繰り返した時、ある事柄が何回おこるか」の確立分布です。こいつは式を見れば早いですね。

$$f(x) = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (2.23)$$

式 (2.23) の右辺左側にある  ${}_n C_x p^x$  は、確率  $p$  で起こる事象  $A$  が、全体  $n$  のうち  $x$  回でたという意味で、右側の  $(1-p)^{n-x}$  は確率  $(1-p)$  で、 $A$  が起きなかった回数が  $(n-x)$  回出たという意味です。

これらを掛け合わせているので、何回当たって何回外れたかを表す式ですね。

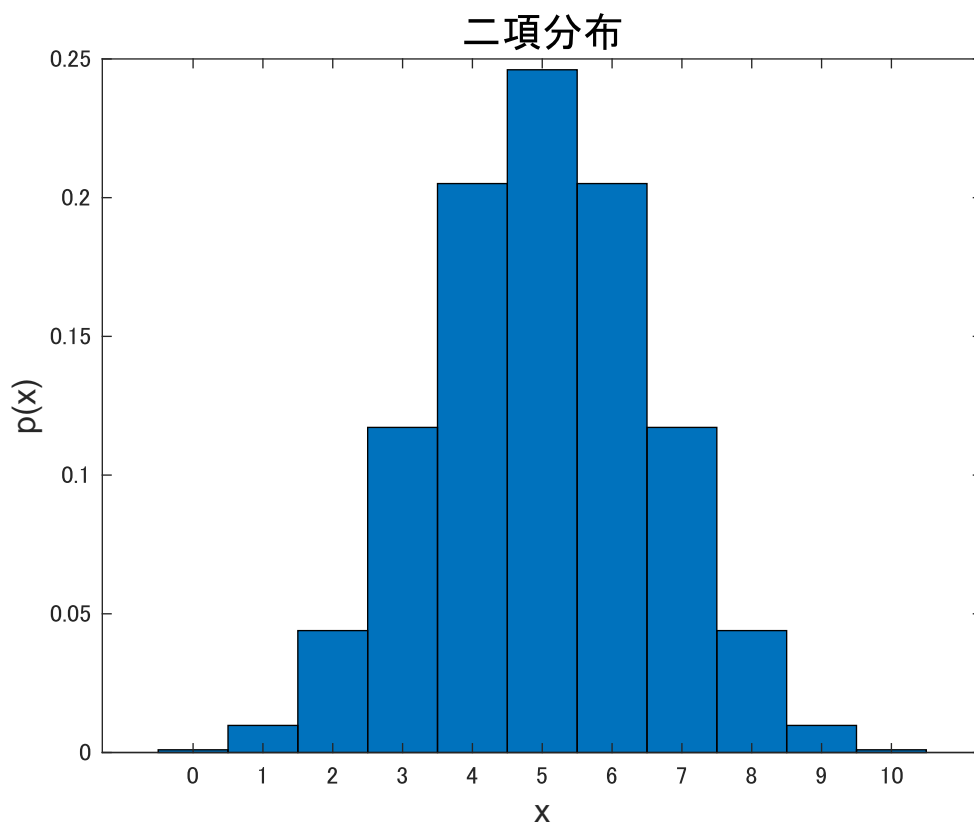


図 2.3: 二項分布

平均  $\mathbb{E}(X)$  及び分散  $\mathbb{V}(X)$  は

$$\mathbb{E}(X) = np \quad (2.24)$$

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p) \quad (2.25)$$

です。興味ないので証明とかやりません。僕も知らない。

### 2.2.4 ポアソン分布

ポアソン分布は「稀な事象が一定時間内にどれくらい起きるか」です。

たとえば、ある月にある地域で起きた交通死亡事故の件数とかです。修羅の国やゲンマー、あるいは名古屋でもない限り、普通は0か多くて2件とかですよ。

確率密度関数は以下です。

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (2.26)$$

平均  $\mathbb{E}(X)$  及び分散  $\mathbb{V}(X)$  は

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad (2.27)$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda \quad (2.28)$$

です。こいつの場合、平均も分散も同じ定数  $\lambda$  なので、こいつの値だけで形が決まります。 $\lambda$  がどんな値なのか、どうやって決まるのかは知りません。使う事があれば足します。

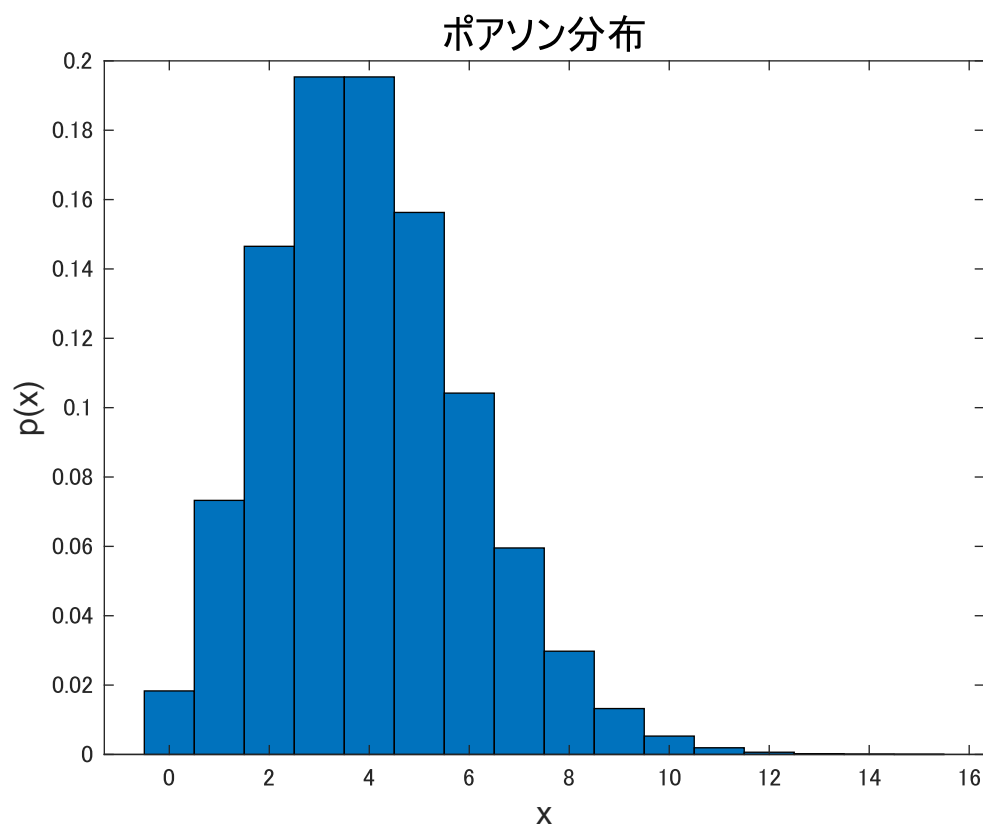


図 2.4: ポアソン分布

## 2.3 正規分布

### 2.3.1 正規分布とは

さて本題です。数ある確率分布の中でも抜きんで重要な分布, 正規分布, またの名をガウス分布です。世の中の多くの事象がこの分布に従っていて, また従っていると仮定して統計的処理がされています。今後の統計学の基礎になるのでしっかり理解しましょう。

正規分布は, 平均  $\mathbb{E}(X)$  が母集団の平均  $\mu$  と等しく, 分散  $\mathbb{V}(X)$  も母集団の分散  $\sigma^2$  と等しくなる分布で, 確率密度関数は以下になります。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.29)$$

いや, うん. 分かります. やばそうですね.

ただまあ、なんでこんな殺意高めな式になるのかは正規分布のグラフを見れば理解できます。母集団の平均が 50, 標準偏差 20 の正規分布だとこうなります。

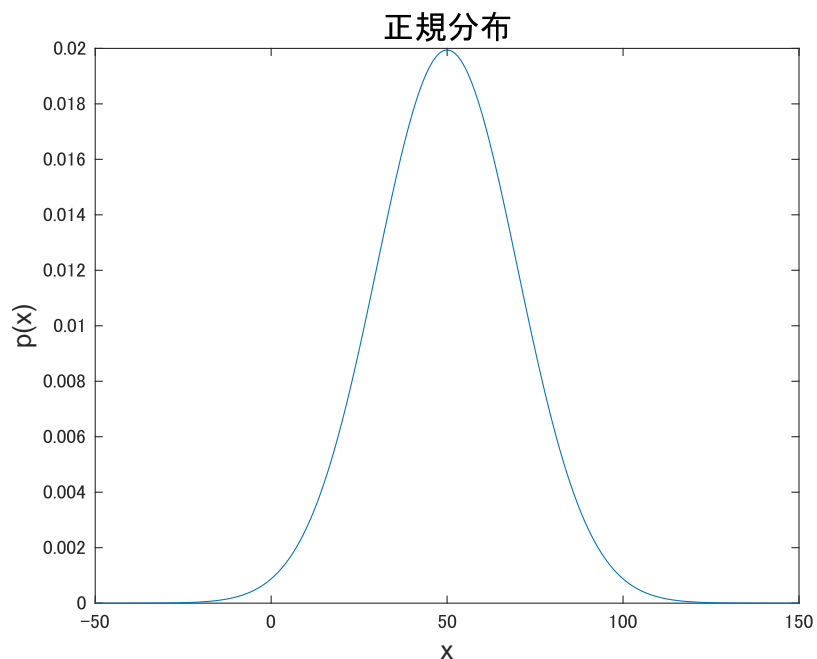


図 2.5: 正規分布

定義通り, 確率変数の平均も 50, 分散も 400(20 の二乗) になっていますね!! これが正規分布です. 綺麗ですね.

### 2.3.2 確率密度関数の導出

さて, 式 (2.29) の解説です. まずややこしいところを全て消し飛ばし, 以下のように変形しましょう.

$$f(x) = e^{-x^2} \quad (2.30)$$

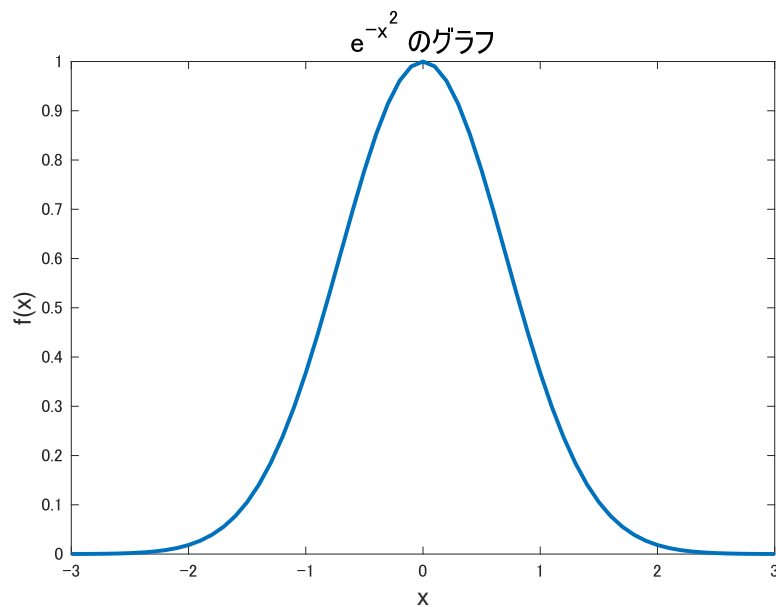


図 2.6: 式 (2.30) の図

この関数の説明はいりませんね？ 指数関数の二乗の負版です．

まず、世の中の多くの事象は平均値を取る確率が一番大きく、平均値から離れるにつれその値を取る確率は小さくなることが知られています．んで、これをどう数式で表現すれば良いかと悩んだ末考えだされたのが正規分布関数だと思ってください．

そうすると、とりあえず釣り鐘型の関数が欲しいという事で式 (2.30) を考えました．実際これでほぼ完成です．

ただ、これは任意定数がないため平均が 0、分散 (幅) も一定ですね．これでは実用できません．そこで任意定数を導入し、平均値と分散を可変にします．

まずは平均値、つまりこのグラフの頂点の位置を動かします．

$$f(x) = e^{-(x-\mu)^2} \quad (2.31)$$

二次関数で高校の時にやりましたね．

次に、分散... つまりこの釣り鐘の幅というか広がり方を変えます．

$$f(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad (2.32)$$

平均に比べて一寸難解かもしれませんが、 $\sigma$ 、つまり標準偏差で割る事で、 $\sigma$ の値が小さければ鋭く、大きければ扁平なグラフになります。

ただ、 $\sigma$ は正負が定まらないため、二乗して分散の形にする事で符号を一定にするわけです。

ともあれ ... これで、母平均と母分散によって形を変える釣り鐘型分布が完成です！！めでたい！！

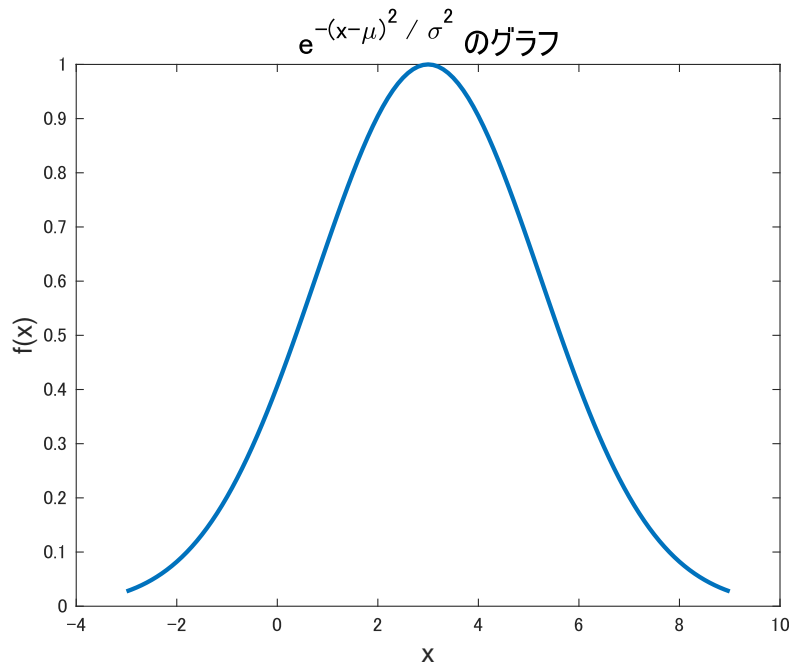


図 2.7: 式 (2.32) の図.(平均 3, 分散 10 の場合)

え？式 (2.29) と違うじゃないかって？

せっかちだなあ..... 余裕がない人間はモテないですよ。

まあ、グラフの形は実際これで完成なのです。ただ、今我々が求めているのは正規分布の「確率密度関数」でしたね？

確率の密度なので、当然合計して 1 にならないといけないわけで、先程の式 (2.32) ではその点がダメなのです。ちゃんと全確率点での値を足して 1 になるように正規化する必要があります。

つーわけで積分方程式を解きますがその前に、出てくる計算結果を綺麗にするために式 (2.32) に細工をし、 $\sigma^2$  を  $2\sigma^2$  にしておきます。2 が付きましたが、グラフの性質自体は変わりませんね？

では積分方程式.

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (2.33)$$

を解きます... 出来たものがこちらです.

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (2.34)$$

式 (2.34) で得られた  $c$  を改めて式 (2.32 の変形版) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.35)$$

が出てきましたね！良かった良かった. 以上が正規分布の確率密度関数の導出工程でした. フーリエなんかに比べれば雑魚ですね！ワンパンでした！

え？積分方程式の解き方ですか？なんか MATLAB にお願いしたら解いてくれました...

### 2.3.3 100p%点

次. 正規分布を学ぶ意味は, この概念があるからといっても過言じゃない重要な性質です. 正規分布は平均が丁度真ん中で, 広がり方は分散によって定義される左右対称な特殊な分布でしたね？

つまり, 平均の周辺であるほど高確率で観測され, 裾野ほど「レア」な事象というわけです.

この性質を利用して, (標準) 正規分布には「100p%点」と呼ばれる指標を導入する事が出来ます. これは「その点以上 (以下) の部分の確率の合計が  $p$  になる境界」を指します.  $x$  軸の正方向なら上側, 負方向なら下側, 両方を指すなら両側 100p%点です.

こいつの便利な点ですが, まず標準正規分布とは異なる平均値や分散値を持っている正規分布を同じ土俵で比べるために平均 0, 分散 1 に揃える操作, 標準化をした正規分布の事でした.

なので標準正規分布において定義される 100p%点は, どんなデータであろうと正規分布に従っているのであれば対等に語れる点である事が分かります.

これを使うからこそ, 有名な  $t$  検定だとかを使った時に  $p$  値が 0.05 だ~とかそんな話ができるわけです.



まあ言葉だとややこしいですが、グラフで見れば一瞬で分かります。

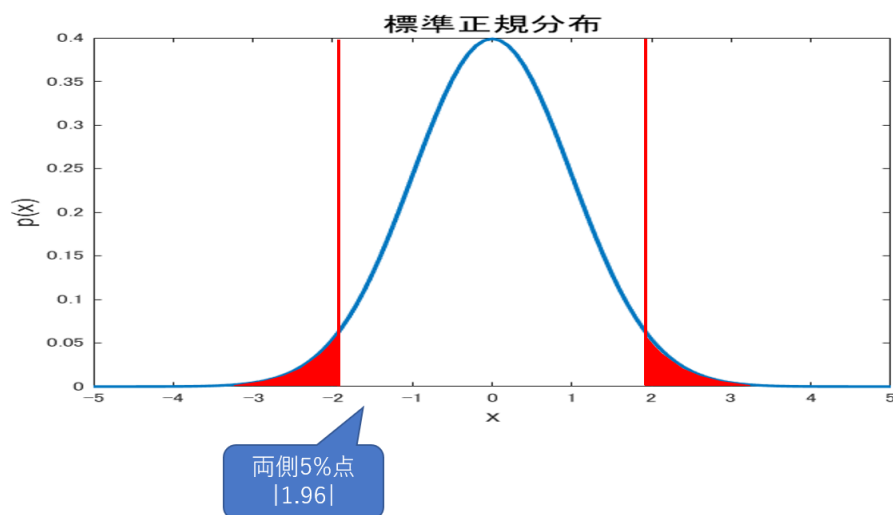


図 2.8: 正規分布の下側 5%点

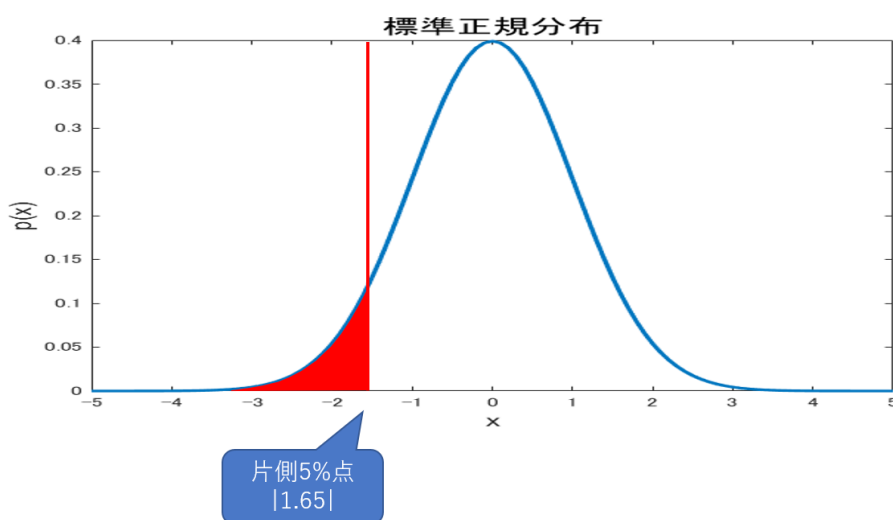


図 2.9: 正規分布の両側 5%点

下側 5%に比べ、両側 5%は左右に領域が分散した分上側の領域が狭くなってるのに注意です。

だいたい、正規分布でよく用いられるのは上下両側の 5%と 1%点です。何に使うのかはあとで説明するので、ひとまず概念だけ覚えておいてください。

## 2.4 t 分布

少ない標本数をもとに母分散がわかっていない母集団の母平均推定に使われるのが t 分布です。詳しくは推定の項で触れるので、ここでは確率密度関数と性質の確認をします。

$$f(x) = k(1 + \frac{x^2}{\alpha})^{-\frac{\alpha+1}{2}} \quad (2.36)$$

式 (2.36) が t 分布の確率密度関数です。ここで  $k$  は定数,  $\alpha$  は自由度という指標で、この形を「自由度  $\alpha$  の t 分布」と表現します。自由度とは何かはここでは説明しませんが、母集団によって算出できる値です。それ以外の部分では正規分布に似ていますね。実際、自由度  $\alpha$  が十分に大きい場合には正規分布になります。ただこいつの平均と分散は

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad (2.37)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \quad (2.38)$$

です。

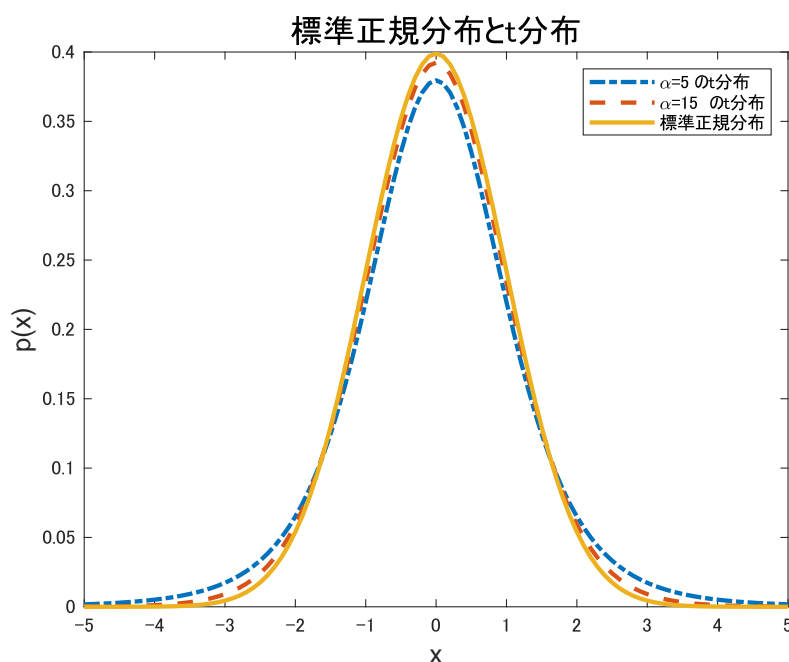


図 2.10: 自由度の異なる t 分布と標準正規分布

自由度の異なる t 分布と標準正規分布の比較です。標準正規分布とは、正規分布のうち平均が 0, 分散が 1 のやつです。  $\alpha$  の値が大きいとほぼ同じ形になる事が分かります。

では何に使うのかですが、そこはひとまず置いておきます。とにかくこういう分布があるので。

## 2.5 F 分布

F 分布は、少し特殊な形をしています非常に重要です。どう重要かという F 分布はこれまでの分布と異なり、2つの母集団から得られた標本分散の比の確率分布になります。これの何がすごいのかというと、例えば図 (2.5) は自由度が3の母集団 A と自由度が10の母集団 B の F 分布ですが、「普通は」この組み合わせだと0から2あたりの値になる事が多いのです。

しかしもし今、自由度3と10のとある母集団 A,B 間で F 値を取ったら6とかが出たとします。

通常はありえない値、つまり統計的に考えると「自由度だけでなく分散そのものに差がある = A,B の母集団は異なる」となるわけですね。こちら詳しくは後程。式はえぐえぐです。震えろ。

$$f(x) = \frac{kx^{\frac{m}{2}-1}}{\{1 + (\frac{m}{n})x\}^{\frac{m+n}{2}}} \quad (2.39)$$

こいつの導出はいいです。僕もわからん。気が向いたら勉強してまとめるかも。例によってkは定数、m,n は標本集団2つのそれぞれの自由度です。こいつは「自由度 m,n の F 分布」と表現されます。今はそれだけ。続いてグラフです。幸いこっちは簡単。

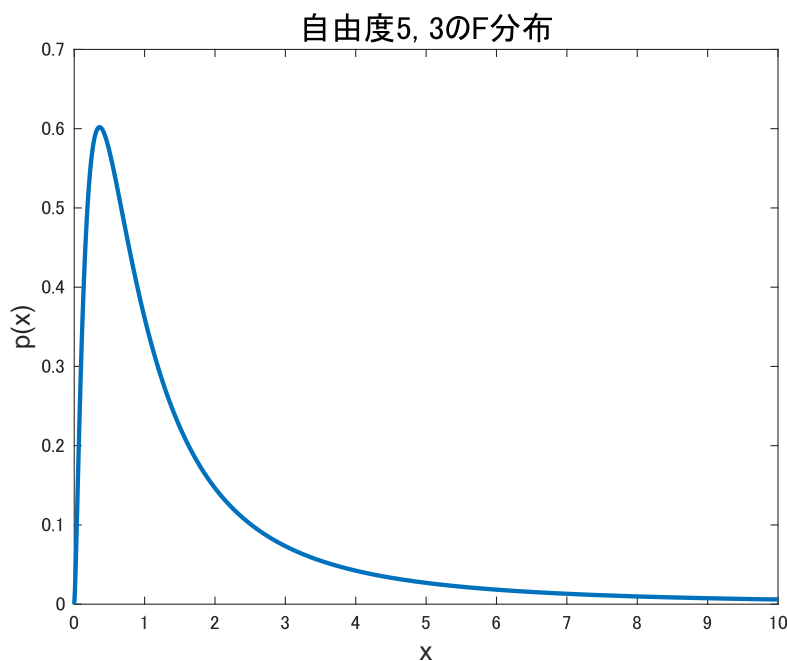


図 2.11: 自由度 5, 3 の F 分布

恒例の平均値と分散です。こいつらも殺意高めだけど覚える必要は今のところ皆無だと思っています。

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2} \quad (2.40)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (2.41)$$

## 2.6 $\chi^2$ 二乗分布

ラスト,  $\chi^2$  分布です. こいつも重要です. 我々は結果を理論に落とし込む時, なんらかの数式に近似したり回帰したりするわけですが, 実際問題理論と観測値が完全に一致するなんていう事はまれで, 様々な要因で若干の誤差が生じます. その誤差が「誤差」なのか「理論の誤り」なのかを評価する時に使うのがこの分布とそれに基づく検定です.

式はこちらです.

$$f(x) = k\chi^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \quad (2.42)$$

またえぐえぐですね. えぐえぐと言えば, 筆者は声優の江口拓也さんが「やはり俺の青春ラブコメは間違っている」のラジオでやっていた「ぼっちラジオ」が大好きです. どうせこんな数学の同人誌読んでいる人は陰キャだし, 楽しめると思います. 是非 YouTube で検索してみてください.

さて, 例によってこの  $\alpha$  は自由度,  $k$  は定数です.

幸い, どの説明を見てもこの式自体は使わないと言われているので覚えなくていいでしょう.

平均値と分散です.

$$\mathbb{E}(X) = \alpha \quad (2.43)$$

$$\mathbb{V}(X) = 2\alpha \quad (2.44)$$

簡単すぎワロタ ww ついでグラフです.

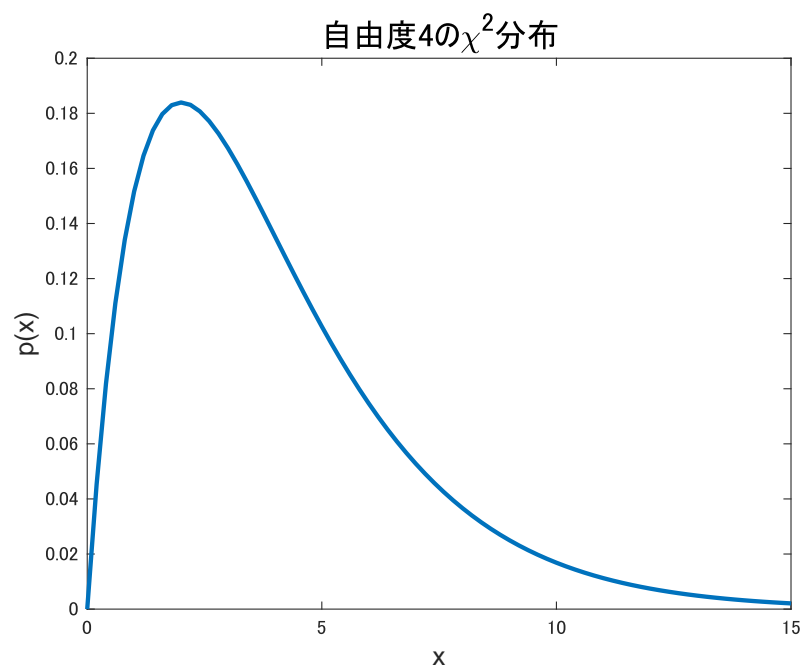


図 2.12: 自由度 4 の  $\chi^2$  分布

こいつは結構 F 分布に似てますね. ただ注意が必要なのは, F 分布は標本分散の比に関する分布ですが  $\chi^2$  分布は標本分散そのものの分布です.

## 第3章 大数の法則と中心極限定理

さて、こうして様々な確率分布の形を見てきたわけですが、そもそも全体のデータを観測して、そいつらの分布を見るならまだしも未知の集団の中から一部を抜き出して分布を見たところで、そいつの性質(平均とか)をどれだけ信じて良いものでしょうか。

### 3.1 大数の法則

よくある問題が、政党支持率を街頭インタビューやてきとうな電話で100人や1000人に聞いたデータを元に算出しているのはどれだけ信用できるのか問題とかですよ。 「あんなたった100人に聞いただけじゃ信用できん！印象操作だ！」みたいな話になりかねません。そこで出てくるのが、大数の法則です。

今、コインを $n$ 回投げて、その表が出る確率がちゃんと $1/2$ なのかを確かめる作業を考えます。 $i$ 回目の試行で表が出た場合1、裏の場合0を取る確率変数 $x_i$ を考えると、 $n$ 回投げた時の表が出た回数は

$$r = \sum_i^n x_i \quad (3.1)$$

この量を頻度と呼び、更にこれを試行数 $n$ で割った $r/n$ を相対頻度と言います。 $r$ は確率変数なので、二項分布

$$f(x) = {}_n C_x (p)^x \quad (3.2)$$

に従います。こいつらの期待値と分散は二項分布のところで確認したように

$$E(r) = np \quad (3.3)$$

$$V(r) = np(1-p) \quad (3.4)$$

である事が分かります。相対頻度の期待値と分散は

$$E(r/n) = np/n = p \quad (3.5)$$

$$V(r/n) = p(1-p)/n \quad (3.6)$$

となる事も分かると思います。で、こいつの試行数  $n$  の値を変えた時、 $E(r/n)$  の値がどう変化していくのかを見てみましょう。直観的、というか常識的に、 $n=3$  とかみたいに極端に試行数が少ないと信用できない事が分かるかと思いますが。逆に、 $n=1000000$  とかといった膨大なデータがあれば、そいつらがちゃんと分布の真の期待値である  $p$  に収束する事が分かるでしょう。で、もしここで  $n=100$  とかで見ても全然収束してないのであれば、街頭インタビューで 100 人のデータを用いて結論付けられた発表は信じるに値しなさそうですね。

では、コイン投げをしていきます。表が出る確率はちゃんと  $1/2$  としておきます。ここで、試行回数を変化させていった時それぞれに対応する、 $r/n$  の 0.5 付近 ( $\pm 0.1$ ) の値を見ていきます。つまり、ちゃんと真の期待値に迫っているかという事を評価します。

$$P(0.4 \leq r/10 \leq 0.6) = 0.656 \quad (3.7)$$

$$P(0.4 \leq r/20 \leq 0.6) = 0.737 \quad (3.8)$$

$$P(0.4 \leq r/50 \leq 0.6) = 0.881 \quad (3.9)$$

$$P(0.4 \leq r/100 \leq 0.6) = 0.968 \quad (3.10)$$

はい、という事で、 $n$  が増えるにつれて確率が上がっていき、真の確率 (表が出る確率) に迫っている事が分かります。実際、もう 100 回もやれば十分ですね。というのが感覚的な説明でしたが、これを数式で表現すると以下ようになります。

$$P(|r/n - 0.5| > 0.1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.11)$$

相対頻度が真の値である 0.5 から 0.1 以上離れている確率が 0 に収束していく過程、ですね。これこそが大数の法則 (の一例) です。

では、より一般に大数の法則を導いて行きましょう。そのためには、チェビシェフの不等式というものがなくて、さらにそいつはマルコフの不等式をベースに考える必要があります。ということでまずはマルコフの不等式から行きましょう。

### 3.1.1 マルコフの不等式

#### マルコフの不等式

任意の確率変数  $X$  と  $a > 0$  に対して

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|]}{a} \quad (3.12)$$

これがマルコフの不等式です。よく分かんと思うのでまずは証明しましょう。確率変数  $X$  に対して、ある範囲として  $a$  がでてきてるので  $X$  の期待値  $E[|X|]$  は以下のように書けます。

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^a x f(x) dx + \int_a^{\infty} x f(x) dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

式 (3.13) のうち、第一項を意図的に消した場合、下のように変形されますね。  $X$  は絶対値を取られるやつなので、第一項は必ず正の値を取っていることに注意です。

$$E[X] \geq \int_a^{\infty} x f(x) dx \quad (3.14)$$

ここで、 $x$  が取りうる範囲は  $a$  から  $\infty$  までとなっているので、この中で最小の  $a$  ですべての  $x$  を置き換えてみます。すると

$$E[X] \geq a \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (3.15)$$

$$\therefore E[X] \geq a P[X \geq a] \quad (3.16)$$

となります。何をやってるのかちょっと分からなくなってくるかもしれませんが、まず  $a$  から  $\infty$  で  $f(x)$  を積分してるんだから  $a$  以上の値をとる確率密度関数ですよ。で、こいつの  $a$  倍をしているものなので、 $a P[X \geq a]$  で書き換えられるわけです。したらこの式を移項して生理してあげればマルコフの定理、即ち

$$P[|X| \geq a] \leq \frac{E[|X|]}{a} \quad (3.17)$$

がでできます。証明終わり。

では肝心の、この不等式が何を指しているのかですが、まあ実際数字を入れてみれば分かります。さいころで考えてみます。出る値は 1 6 なので、期待値は 3.5 です。この時、 $a$  をたとえば 1 にした時、1 より大きい値を取る可能性は当然高く、それは右辺が 1 で割られている事からも明らかです。が、3 とかになると割った結果がほぼ 1 になりますね。3.5/3 だから。雲行きが怪しくなってきました。さて、ここに 5 なんかを入れると、もはや分母の方が大きいので、値は 1 よりも小さくなります。一方の左辺も、 $a$  の値が大きくなるにつれて取れる値の範囲が狭くなっていくので、それらの値を取る確率もやはり下がっていきます。

この関係を表すのがマルコフの不等式でした。



### 3.1.2 チェビシェフの不等式

ふう。マルコフの不等式が分かれば、チェビシェフの不等式なんてワンパンです、ワンパン。秒で沈めてやりましょう！

#### チェビシェフの不等式

期待値  $E[Y] = \mu$ , 分散  $V[Y] = \sigma^2$  とするとき, 任意の実数  $k > 0$  に対して

$$P[|Y - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2} \quad (3.18)$$

が成り立つ

めちゃくちゃ見覚えありますね。そう、これはマルコフの不等式の特別な場合を考えればすぐ証明できます。

まずマルコフの不等式において,  $X = (Y - \mu)^2, a = k^2\sigma^2$  とすると

$$P[(Y - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2] \leq \frac{E[(Y - \mu)^2]}{k^2\sigma^2} \quad (3.19)$$

$$\therefore P[|Y - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2} \quad (3.20)$$

となります。ただしここで,  $E[(Y - \mu)^2] = \sigma^2$  を使っています。

さて、こいつの何がすごいのかを考えてみます。結論からすると、チェビシェフの不等式がそのまま大数の法則を示すものになっています。というのも、まず式 (3.18) を見てみると「得られたデータが、 $k\sigma$  以上離れた位置、正規分布とかで考えるならめっちゃ裾の方ですね、を取る確率」である左辺は、 $k^2$  の逆数以下になるよって話ですね。

たとえば、あとで出てきますが正規分布の時によく使う  $3\sigma$  以上の値を取る確率は 0.3% 程度なのですが、実際この値 ( $1/k^2$ ) は  $1/9$  なので 0.3 以下になりますね。

すごいのは、得られたデータがどんな分布に従っていたのかという母集団の情報が全くなくても、こいつの収まる範囲が分かる事です。どんな分布でも絶対、 $1/k^2$  以下になるってわけですね。正規分布の時実際そうなるのは上で確認した通り。めっちゃすごいですねこれ。分布知らなくても言えるわけですからね！！

### 3.1.3 大数の法則

で、肝心の大数の法則です。証明していきます。チェビシェフの不等式の証明において、 $k=a^2$  としてみると、

$$P[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad (3.21)$$

となります。これも計算自体は全く同じなので、チェビシェフの不等式と呼ばれます。ここで標本平均  $\bar{X}$  を考えると、 $E[\bar{X}] = \mu, V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$  となります。これを式 (3.21) に代入すると

$$P[|\bar{X} - \mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.22)$$

となると思います。良いでしょうか。n の値が大きくなるにつれ、右辺の分母が大きくなるので値は 0 に収束していくわけですね。そう、これが大数の法則です！！

n の値、つまり得られた標本の数 ( $\bar{X}$  は  $\sum X_i/n$ ) が多くなるほど、真の値との誤差は 0 に向かって小さくなっていくことを指しています。

その主張することは何かというと、こうです。

「大標本では、観測された標本平均を母集団の真の平均とみなしてよい」

これがあるからこそ、我々はある程度のサイズのデータを使って一般化した議論が出来るわけですね。しっかり確認しておきましょう。

## 3.2 中心極限定理

大数の法則同様、統計学においてとても重要な定理としてもう一つ、中心極限定理があります。どうかこちらの方がどちらかと言えば大事かも。定理は以下です。

### 中心極限定理

期待値  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  の分布に従う確率変数列  $X_1, X_2, \dots, X_n$  に対し、 $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$  とすると

$$P(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (3.23)$$

が成り立つ。

はい、なんも分からんと思います。

ここで言いたいのは、与えられたデータから求めたそれぞれの標本平均  $X$  の総和である  $S_n$  を標準化 (左辺の真ん中のごちゃごちゃしたやつ。平均を引いて標準偏差で割ってる) したやつは  $n$  が十分に大きいと、つまり得られるデータが多いと、期待値 0, 分散 1 の正規分布に収束するということです。

正規分布の確率密度関数は以下でしたね。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.24)$$

ここで  $\mu$  を 0,  $\sigma$  は 1 を代入した形が中心極限定理の右辺に來ています。こいつを  $a$  から  $b$  の範囲で積分したものが、標準化変数である左辺の項が  $a$  から  $b$  に収まる確率と同等になるという事を表していますね。

即ち、 $n$  が十分に大きいなら部分和である  $S_n$  は平均が  $n\mu$ , 分散が  $n\sigma^2$  の正規分布に従う事になり、よって標本平均である  $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$  も平均  $\mu$ , 標準偏差  $\sigma/\sqrt{n}$  に従う事になります。

大事なのは、今回定理のところでもそもそも、母集団の分布を何も仮定していないところです。大数の法則同様、母集団の分布に関わらず従う法則なわけですね。

**母集団がどんな形であれ、 $n$  が大きい時にはそこから得られた標本平均は正規分布に従うという性質を意味します。**

ゆえに、正規分布は数ある確率分布の中でも最も重要な分布と言われるわけですね。今後学んでいく様々な検定や推定なども、正規分布を仮定する事が多いのはこれが理由になっています。

(証明... モーメント関数とか必要で自分がちゃんと整理しきれてないのと、どこにその説明入れるべきなんや... てか必要かな... と悩んでしまっているのととりあえず保留！ごめんなさい！！)

## 第4章 統計量と標本分布

突然ですが、筆者がこの数学シリーズの中でも、最初期からある程度は知っていたし一番重要でもあるし、まとめないとなあと思いつつもずっと仮説検定についてまとめられなかった言い訳をします。

お気持ちしかわからなかったのです。たとえば平均に関する検定をしたいとか思った時、「とりあえず正規分布のどのあたりに値するデータが得られたのかを見て、その生起確率を考えて仮説を棄却するやつ」みたいな理解なら B1 の頃からしていたわけですが...

何故正規分布？とか、「どのあたり」ってのの決め方は？とか、実際は何の値が正規分布になるのかよく分からん、とか、そんな感じでした。

統計の本とか読んで、実は意外とそこらへんちゃんとなくて(これは僕が「超わかりやすい！統計入門」みたいな類の本しか読んでなかったせいでもある)、なんというかちゃんと説明できなかったんですね。

周波数解析でいえばオイラーの公式もフーリエ変換も知らない感じ。そうそう、t 検定って言葉は知ってるけど「t 検定の式」とか言われても分からんやん？そんな気持ち悪さでした。

そこでちゃんと統計勉強してみて気付いたのが、結局スキップしないでちゃんと基礎をやりましょうって話でした。という事で、基礎になっちゃいますがこの章を理解すればあとは検定は自然に導かれます。頑張らしましょう。

### 4.1 標本分布とは

基礎編で確認したような平均や分散といった話と、これ以降でしていく話とで根本的に違うことがあります。それは、今までやっていたような基本的な話は全て、得られたデータの特徴を説明するために要約するような量でした。

つまり、既に得られている既知の分布、データについての統計です。言い換えれば、分析したい対象全てのデータを使っています。

これを、記述統計と言います。

一方、我々が研究で使う多くのデータはそう上手くいきませんよね。たとえば、健常者と自閉症患者の脳活動を比較したいという時、世界に存在する全ての健常者と自閉症患者を持ってきて脳活動を測るなんて、考えるまでもなく無理ゲーです。

故に、人類の代表として 20 名とかずつ呼んできますよね。この時、全健常者や全患者の事を母集団と称し、呼び出してきた被験者を標本と言います。一応、標本は特定のデータではなくデータの集合である事を注意しておきます。筆者は最初それがごちゃごちゃになってました。被験者 A さんは標本ではなく標本の要素です。

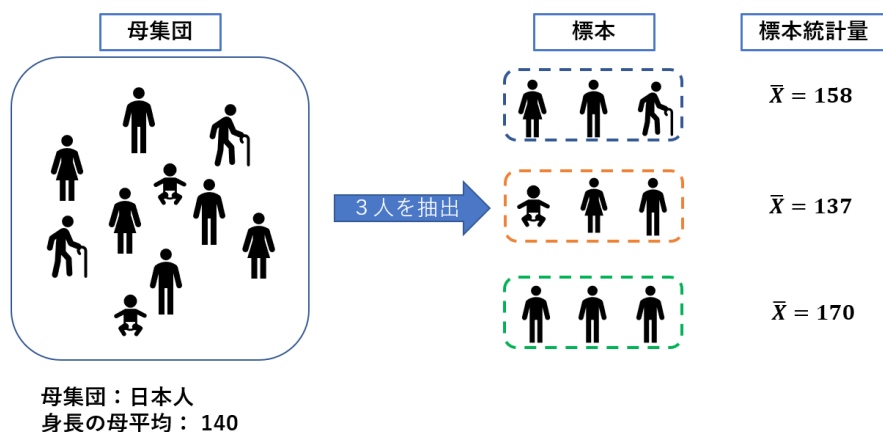


図 4.1: 母集団と標本の関係。母集団から代表していくつかのデータを抜き出したものを標本という。標本は無作為に偏りなく抽出する必要がある。図では3つ目の標本は若い男性だけを標本として抽出してしまっているため、データの偏りが強く良い標本の抽出とは言えない。ちなみに日本人の平均身長を 140 としてるのはマジでできとーです。

母集団全体を調べる記述統計的な全数調査は不可能なので、我々がやるのは標本の特徴から母集団の特徴を推測する作業で、これを統計的推測と言います。

この時、既に母集団が従う分布が特定されている場合、得られた標本から推定するのは母集団の平均や分散といったパラメータ、母数だけで済みます。たとえば正規分布に従うって分かっていたら平均と分散さえ分かれば分布が一意に定まりましたよね。そんな感じ。

このように、特定の分布に従う事は既に分かっている母集団について、あとは分布のパラメータさえ分かれば良い問題をパラメトリックな場合と言います。

一方で、母集団が従う分布の形すら分からんという状況。この場合はまず、分布の形も位置もばらつきも、いろんな値を考えていく必要があります。これをノンパラメトリックな場合と言い、一般にノンパラの方が難しいです。

とりあえず本書ではパラメトリックな話を進めていきます。

では、標本統計の流れを見ていきましょう。

まずは母集団から標本を抽出する必要があります。これは考えればわかる事ですが、なるべく母集団の中から偏りなく平等に抽出する必要があります。

たとえば健常者母集団から標本として20代の女性だけ20名呼んでくるようなのは良くないですね。それでは健常者ではなく健常な20代女性、が母集団になってしまいます。

という風に、なるべく母集団から偏りなく標本を抽出することを無作為抽出と言います。

また、母集団から一度抜き出した要素を一度母集団に戻してから次の要素を抽出する事を繰り返して作る標本を復元抽出と言います。通常、我々が行う統計では非復元抽出がメインです。当たり前ですね。

以降、特に断らない限り標本は母集団から非復元的に無作為抽出されたものを仮定して議論を進めます。

ここまでは常識。で、ここから先を勉強していく上で簡単のように思えて重要な考え方があります。それが標本と標本分布です。

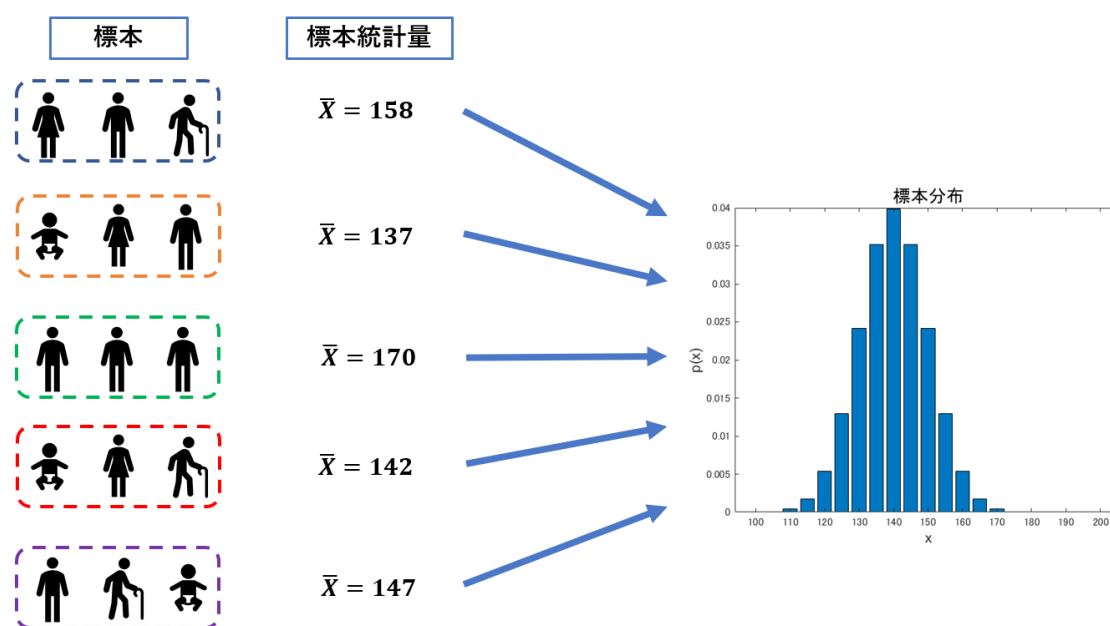


図 4.2: 標本と標本分布。ここでは、得られた標本平均の標本分布を plot している。

標本は母集団から無作為に選んできたいくつかの要素で構成されていました。まあ言ってみれば母集団の部分集合です。すると必然的に、その組み合わせは母集団の数を  $N$ 、標本の要素数を  $n$  とすると

$${}_NC_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (4.1)$$

通りの標本の取り方が考えられますよね。問題は、こうして得られる標本たちは異なる要素をもっているのです、たとえば標本の平均 (標本平均) などを求めた際には値が毎回異なります。

標本の取り方によって値が変わるので、標本平均などの値は標本の関数とも言え、その分布を定義する事ができますね。ヒストグラムが書けるでしょ？

こうして作られる分布の事を、標本分布と言います。母集団の持つ母数分布に対して、標本集団の持つ分布ですね。

以上の理由で、標本の取り方によって値が変わってしまうので「てきとうに選んだ標本平均=母平均！」なんて事は簡単には言えないわけです。

が、実際ぼくらって研究の際にそんなことを言ってますよね。どんな時なら、なんで、それを言っているのかを勉強していきましょう。

## 4.2 統計量

母数は母集団のもつパラメータ、母平均や母分散の事でした。それに対し、先程でてきたように標本の平均や標本の分散なんてのを考えるとき、これらを統計量と言います。推定や検定なんかは、この統計量を使って母数についてあーだこーだ考える手法とも言えます。ので、ここからはネチネチと色々な統計量について考えていきます。

実際、統計量が分かればあとは簡単です。たとえばあの有名なt検定は、t統計量と呼ばれる統計量を使った検定、てな具合です。

まずは母数から確認しましょうか。と言っても、これは基本の統計なので皆大丈夫だと思います。

## 母平均

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{連続}) \quad (4.2)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^N x_i f(x_i) \quad (\text{離散}) \quad (4.3)$$

## 母分散

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (\text{連続}) \quad (4.4)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 f(x_i) \quad (\text{離散}) \quad (4.5)$$

定義通りですね。大丈夫でしょうか。

### 4.2.1 標本平均

で、肝心の標本統計量行きましょう。まずは標本平均から考えます  $X_i$  が具体の要素、 $X$  が標本集合とし、 $n$  は要素数とします。するとこれは勿論、

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (4.6)$$

で表されます。こいつの性質ですが、以下を満たします。

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (4.7)$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.8)$$

$$\therefore V(\bar{X}) \propto \frac{1}{n} \quad (4.9)$$

まず期待値を取ると  $E(\bar{X}) = \mu$  となります。

「ん？平均の期待値？」となった人は落ち着いて考えてください。標本は選ぶ要素によって違う集合になって、当然計算される標本平均  $\bar{X}$  の値も毎回違うんでしたね。そいつらの分布を考えた、標本平均の標本分布があった時、そいつの期待値です。正規分布なら中央の山の部分。そいつの値が母平均  $\mu$  に一致するって話です。

もう一つ、標本平均の分散、これが  $1/n$  に比例するという性質があります。これはつまり大数の法則です。標本の要素数が増えるにつれて分散は小さくなり、確率は収束するのでしたね。



式 (4.7) は当然な気もするけど、なんで？と言われるとパッと思いつきませんよね。僕はこういったところに気持ち悪さを感じて放置してた結果この年でこんな基礎やる羽目になったので、ちゃんと確認しておきましょう。え？パッと思いつく？ブラウザバックしてください。

簡単に導くと、

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \quad (4.10)$$

$$= \frac{E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n} \quad (4.11)$$

$$= \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}{n} \quad (4.12)$$

$$= \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{n} \quad (4.13)$$

$$= \mu \quad (4.14)$$

となります。まず、期待値を分解できるのは良いでしょうか。期待値の加法性です。そしたら、それぞれの標本  $X_i$  は全て、平均  $\mu$  の母集団より生成されているのだから期待値は全て  $\mu$  になりますよね。なのでその総和を  $n$  で割ると  $\mu$  が出るって寸法です。

分散の方行きましょう

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \quad (4.15)$$

$$= V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{n^2}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \quad (4.17)$$

$$= n \frac{\sigma^2}{n^2} \quad (4.18)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.19)$$

という流れです。ただし、 $V(aX) = a^2V(X)$  という公式を用いています。

当たり前のようですが、これらはちゃんと確認できるとありがたい性質ですね。ようはある程度以上の標本の要素数があれば、ちゃんと母平均に近付ける事を表しています。さらに、分散の方は  $n$  が増えれば増えるほど小さくなっていくことも分かります。これは大数の法則で示されている事でしたね。

てことで、すくなくとも標本平均についてはちゃんと母平均の議論に使える事が分かりました。めでたし。

## 4.2.2 標本分散

次に、標本分散について考えていきましょう。標本分散は二種類あるのですが、まずは基本の方から。

$$s^2 = \frac{1}{n} \{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2\} \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.21)$$

これもまあ、分散の基本ですね。特に言うことないと思います。各要素について、標本平均との偏差二乗和の平均を取ったやつですね。以上。

がしかし、ここで終わらないのがちょっと面倒なところです。実はこの標本分散の定義だと、不都合が生じる事があります。故に、次の形で示す標本分散を用いるのが一般的です。

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2\} \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.23)$$

nがn-1になりましたね。謎です。導出は下で行いますが、とりあえずこいつは不偏分散と呼ばれる量です。大事なのでちゃんと下の説明を理解するよう心がけてみてください。

まず、この n-1 は自由度と呼ばれる値です。誰だよそいつって思うはずなので説明すると、その式の中で自由な値を取れる値の数の事です。だから何言ってんだよお前説明になってねえよって声が聴こえてきたので更に説明をしていきます。

たとえば、男子の身長を平均を考える時。X=168,170,176,181,150 というグループがいたとします。なんか一人可哀想... なんとかして救ってあげたいですね。

平均は当然、 $(\sum X)/n = 169$  で計算できます。これは自由度5の例です。可哀想な5人目がこっそりメンヘラちゃんから借りた厚底ブーツで盛っても計算は出来ます。10cm 盛ったとしたら平均は171になります。

しかしここで、惨いことをしてみましょう。神様が「お前たち5人の平均身長は169だ」ありがたいお言葉をくださったとします。こうなると大変です。高身長組4人は身長を隠したいとも思っていないので自己申告します。さて、その場合どうなるかというと

$$169 = \frac{168 + 170 + 176 + 181 + \text{哀れな子羊}}{5} \quad (4.24)$$

となってしまうので、なんと彼はどうかあがいても身長が150である事がバレてしまいます。これが自由度が4の状況です。平均が169になるという制約条件を課されたため、4つまで値が決まれば残りの

値も一意に定まるため、5人目の身長は他の値を取れない、自由に動けない状態になってしまうわけです。持ってる情報が0です。

標本分散の時もこれが起きます。だから  $n$  ではなく  $n-1$  で割る訳なのですが、もう少し丁寧に解説を続けます。

標本平均を計算する際の式は  $\sum X_i$  を使っています。これは別になんの制約も課されていないので自由な値を取れるため、自由度は  $n$  です。

それに対し、標本分散の計算は  $\sum (X_i - \bar{X})^2$  を使っています。問題なのは、 $X_i$  と  $\bar{X}$  はどちらも同じ標本の値を使っているため標本平均 ( $\bar{X}$ ) の定義から  $\sum (X_i - \bar{X}) = 0$  という制約が課されてしまう事です。同じ集合から計算された平均と各要素の差を全部たしたら当然0になりますね？

これはまさに、さっきの身長の例と同様です。合計値の制約があるため自由に振る舞える値の数が1つ減ってしまうわけです。もし仮に、ここで引き算するのが母平均  $\mu$  であつたら問題ありません。偏差の総和は0になるとは限らないですからね。でも残念なことに、ここで使っているのは標本平均  $\bar{X}$  です。

では、標本分散では自由度が減る事が確認できたので、次に何故  $n-1$  で割るのかを考えます。

$\bar{X}$  は  $\mu$  とは違います。勿論期待値は  $\mu$  ですが、実際に得られた1標本での平均は母平均と一致しません。この  $\bar{X}$  は、母平均  $\mu$  を中心として  $\frac{\sigma^2}{n}$  の範囲で揺らいでいました。これは標本平均の分散の話 (式 4.19) です。この事を踏まえて、もう一度式 (4.21) を見てみましょう。

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_n - \bar{X})^2 \quad (4.25)$$

標本分散を計算するカッコの中に、 $\bar{X}$  を含んでいます。こいつはそもそもが平均  $\mu$  を基準に分散  $\frac{\sigma^2}{n}$  を孕んでるのでした。なので、

$$E(s^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_n - \mu)^2 - \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.26)$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.27)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^2 \quad (4.28)$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (4.29)$$

となりそうなのが分かるでしょうか。ちょっと厳密には違うかも、怪しいですが大まかには合ってるはず。

こうなりゃあとは簡単で、求めたいのは標本分散 ( $s^2$ ) じゃなくて、標本分散を元にした母分散の計算の仕方です。なので逆算すると

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} E(s^2) \quad (4.30)$$

となります。これより

$$\hat{\sigma}^2 (= s^2 \iota) = \frac{n}{n-1} s^2 \quad (4.31)$$

$$= \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \quad (4.32)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \quad (4.33)$$

と、母分散の推定量 ( $\hat{\sigma}^2$ ) として、標本分散  $s^2$  の新しい形  $s^2 \iota$  が定義できました。

ふう、自分が結構悩んだので丁寧に説明してみました。とりあえず標本分散についてはこんな感じです。

以降、標本分散といった時には暗黙的に不偏分散を意味しているので注意してください。

## 4.3 正規分布からの標本

### 4.3.1 正規標本論

正規分布は確率分布としてありふれ、また扱いやすいものである事はこれまでも何回か説明しました。

さらに、中心極限定理から、他の分布であっても標本分布を正規分布に近似していく事が出来る事が示されているため、標本分布について考える時はとにかく正規分布からの標本について考えるのが大事な事になります。

これが正規標本論。

我々は何かを観測する際、様々な方法をとります。目視だったり定規で長さ測ったり、です。が、これらの観測方法は完璧ではなく、様々なノイズによって若干の誤差を常に孕んでいます。空気の屈折率とか金属の温度依存での膨張とか、そういうのも含むノイズです。

これらのために、同一の対象を観測していても、常に誤差が生じるわけですが、これらは平均0、分散 $\sigma^2$ の正規分布に従い、測定の精度によってこの分散の値は変わるというのがガウスが提唱した誤差理論です。

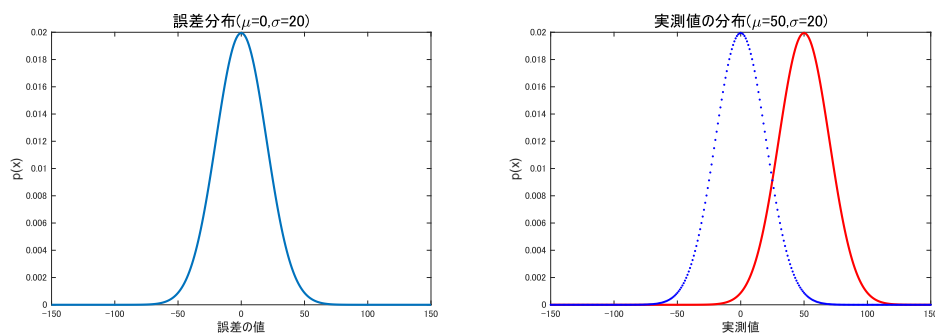


図 4.3: ガウスの誤差理論

大事なのは、一般に何かを観測する際には誤差が生じ、それはガウス分布、つまり正規分布に従うということです。

これに、対象のもつ真の値という意味で $\mu$ を加えると、 $X_1 \dots X_n$ の確率分布になり、これは $N(\mu, \sigma^2)$ に従います。つまり

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.34)$$

ですね。我々が観測する多くの現象はこの分布に従っているぜというのがこれからたくさん出てくる統計の基本で、それは主に以下の理由によります。

- そもそも正規分布に従う現象が多い
- なんらかの変数変換で正規分布に従うのも多い
- 確率変数の和は中心極限定理より漸近的に正規分布に従う

まず、最初の理由は良いですね。身長とか、正規分布やもんね。低身長男子は高身長男子と同じくらいレアなので強く生きていきましょう。

次、たとえば体重なんかは1/3乗すると正規分布に従うということが言われているらしいです。不思議。

次、中心極限定理は良いですね。これはつまり、たとえば標本平均なんかの多くの統計量が正規分布に従う事を意味します。

ちなみに、平均 0、分散 1 の正規分布は標準正規分布と言って、以下の形で表されるのでした。これも復習しておきます。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4.35)$$

まあ普通に代入すれば出ますね。標準，というからには正規分布に従う  $X$  を標準化すればこれになるわけで、

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (4.36)$$

で定義される標準化変数  $Z$  は、 $N(0,1)$  の標準正規分布に従います。

この標準化の作業，しっかり覚えておきましょう。これ以降ありえん出てきます。平均 0、分散 1 になるように変数を変換する方法でしたね。これにより  $N(\mu, \sigma^2)$  が  $N(0,1)$  になりました。

### 4.3.2 母分散既知の時の標本平均の分布

さて、ここ以降はいろんな条件の元で、標本平均や標本分散の従う標本分布の性質について学び、様々な統計量を定めていきます。統計量はとても大事で、言っちゃえば〇〇検定とは「〇〇統計量が一定の値を超えたかどうか」を調べる作業です。検定について学びたい読者は、しっかりと見ていってください。

つまり、ここで色々場合分けして考える統計量それぞれに対応した検定があるわけで、自分が研究をする際にもそのことを意識して適切な検定を選ぶ必要があります。そのためにも気を付けて確認していきましょう。

まずは母数のうち、母分散が既知の時に母平均を考えたいという状況を考えます。母平均を考えるんだから標本平均の分布を見る必要がありますね。

標本平均は以下でした。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (4.37)$$

$X_i$  は勿論、 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  によって生成されます。で、この時  $X_i$  を標準化すると

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (4.38)$$

となり、これは  $N(0,1)$  に従います。しつこいようですが、標準化とは平均 0、分散 1 になるよう変換する作業です。なのでこの  $N(0,1)$  を標準正規分布とよぶのでした。

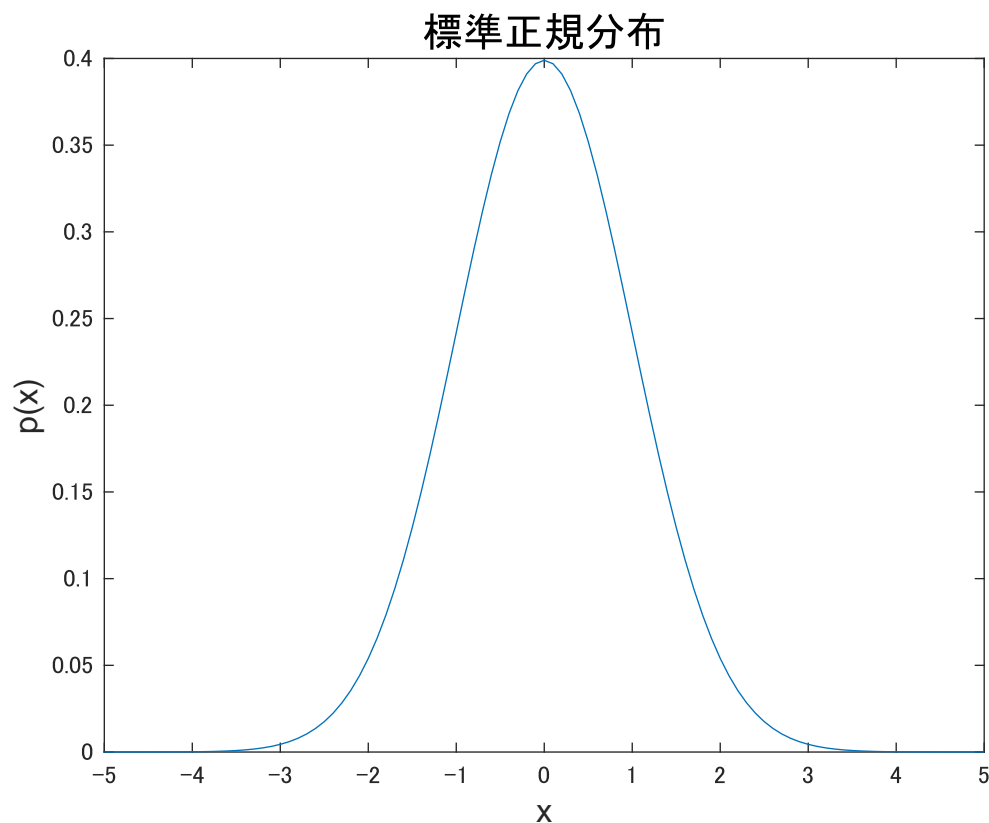


図 4.4: 標準正規分布

そもそも何故これをするかですが、そのままの分布だと考えている問題によって毎度平均も分散も違うのだからずれまくってしまいますよね。

標準正規分布において、その点より上側の面積、つまり確率が  $\alpha\%$  になる点の事を  $\alpha$  パーセント点、と言います。

これを使って検定などをしていきます。p 値とかで出てくる 0.05 とかに関連する奴です。これをどんな平均や分散を持っているデータでも同じように議論するため、標準化が必要なわけですね。

てわけで、母分散既知の時に使う母平均に関する統計量が定義できました。次！

### 4.3.3 標本分散の標本分布

次に、母平均  $\mu$ 、母分散  $\sigma^2$  の母集団からとられた標本のもつ分散 ( $s^2$ ) についての標本分布を考えます。

$s^2$  の式は

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.39)$$

でしたね。ガウスの誤差理論でいう、誤差  $e_i$  の分散  $\sigma^2$  について求めたいわけですが、とりあえず定義から  $e_i$  はそれぞれ、 $N(0, \sigma^2)$  に従っているため、その期待値を取ると勿論

$$E(e_i^2) = \sigma^2 \quad (4.40)$$

になります。定義そのまま。この時、 $n$  回の試行を行ったとしたら

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (4.41)$$

を統計量の基礎として使うを考えます。分散の総和的な量ですね。

ここで、 $\chi^2$  分布を思い出しましょう。標準正規分布に従う独立な確率変数 ( $Z_i$ ) を考えた時

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k Z_i^2 \quad (4.42)$$

で定義される確率変数が従う分布は自由度  $k$  の  $\chi^2$  分布というのでした。こいつは標本分散を扱う議論には必ず出てくる重要な分布です。



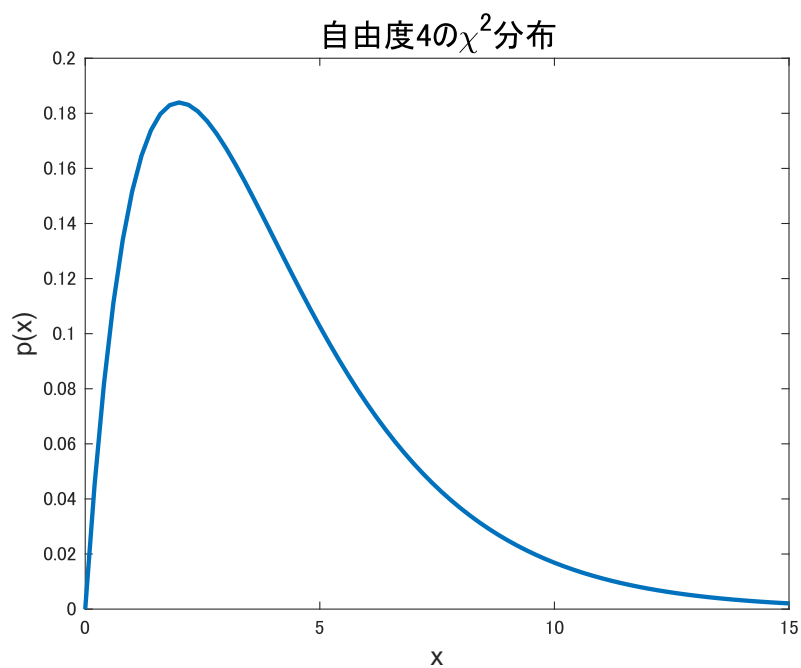


図 4.5:  $\chi^2$  分布

実際、これを使うと正規母集団から得られた  $X_n$  の標本分散を

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.43)$$

とすると、

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad (4.44)$$

は自由度  $(n-1)$  の  $\chi^2(n-1)$  に従います。簡単に証明ばい事をする、まず標本を標準化すると

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad (4.45)$$

となります。で、こいつらは別の標本だから独立なので  $\chi^2$  分布が使えて、

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \quad (4.46)$$

が、自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布に従うことが分かります。

ところで、不変分散  $s^2$  は

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.47)$$

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.48)$$

と変形する事が出来ます。移項しただけ。で、この時式 (4.48, 4.46) を見比べると結構似てますね。というか両辺を母分散で割れば同じ形になりそう。なので式 (4.48) を寄せに行くと、

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \quad (4.49)$$

となって、こちらも  $\chi^2$  分布に従う事が分かります。がしかし、こちらは母平均ではなく標本平均を用いた標準化のような事をしているため、標本分散の説明の時同様に自由度が一個減っているの、こいつの従う分布は  $\chi^2(n-1)$  となります。

こいつを使った検定が  $\chi^2$  検定です。

#### 4.3.4 母分散未知の時の標本平均の分布

次、母分散が未知の時の標本平均について考えます。

実際問題、母平均が未知なのに母分散は分かっているとかいう謎な状況は考えにくく、普通はこの状況が最も考えられます。実際、この状況を考えた時の検定が  $t$  検定です！論文で見るのって  $t$  検定ばかりですよ！

$t$  検定は、 $t$  統計量を使った検定だという話を以前しました。なのでこの節の目標はそう、 $t$  統計量を導出し、 $t$  検定に備えることにあります。

さて、 $\bar{X}$  の標本分布を考えた時、まずこいつは正規分布  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  に従うというのは大丈夫でしょうか。前の章？でやりましたね。分からん人は一回戻っててください。

さて、例にもれずこの時の  $X$  を標準化してみます。しつこいようですが、標準化は

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (4.50)$$

とする操作です。今回は正規分布  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  に従っているんだから、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \quad (4.51)$$

となりますね。こいつは当然、 $N(0, 1)$ に従います。ただし、ここで考えている問題はそう、母分散である  $\sigma^2$  が不明なのです。困った。仕方ないので、標本分散で代用しましょう。そうすると

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \quad (4.52)$$

となります。左辺、変わりましたね！tです！

こいつがスチューデントのt統計量と呼ばれる量です。ほんでこいつを使った検定が、あとでやりますがt検定です。

つまり、正規分布に従う標本平均を標準化しようとした時、悲しい事に母分散が分からなかったので標本分散で代用して標準化モドキをしたのがt統計量です。

モドキなので、もはやこいつは標準正規分布  $N(0, 1)$  には従いません。

むむむ。ではどうなるのでしょうか。

ちょっとトリッキーな事をしてみます。

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} / \sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}} \quad (4.53)$$

こう変形できるのは分かるでしょうか。まあ普通に掛け算計算すりゃ元のt統計量がでます。さらにさらにこいつを

えいやっ

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} / \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} / (n-1)} \quad (4.54)$$

と表せるのも良いでしょうか。あの、式(4.53)の分母の、分母と分子の両方に  $(n-1)$  をかけました。

なんでこんな複雑なことを... と思うかもしれませんが、よく見てみるとなんと分子の

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \quad (4.55)$$

こいつは  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  に従う  $X$  の標準化された値なので、標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う事が分かります。

ほんでさらに

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad (4.56)$$

は自由度  $n-1$  の  $\chi^2$  分布に従いますね！こう見ると、 $t$  統計量は標準正規分布と  $\chi^2$  分布の比になっています。

と、いうことでこのように  $N(0, 1)$  の確率変数  $Z$  と  $\chi^2(k)$  の確率変数  $X$  があるとき、

$$t = \frac{Z}{\sqrt{X/k}} \quad (4.57)$$

で定義される確率変数  $t$  が従う分布を、自由度  $k$  の  $t$  分布と定義します。この定義によると、さっき  
ようやっと出てきた式 (4.52) の  $t$  統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \quad (4.58)$$

は自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従うと言えますね！自由度が  $n-1$ なのは、 $\chi^2$  分布側の自由度が  $n-1$  だったからです。これは最初に確認したように、 $t$  統計量は母分散の変わりに標本分散を使っているから自由度が1つ落ちるんでしたね。

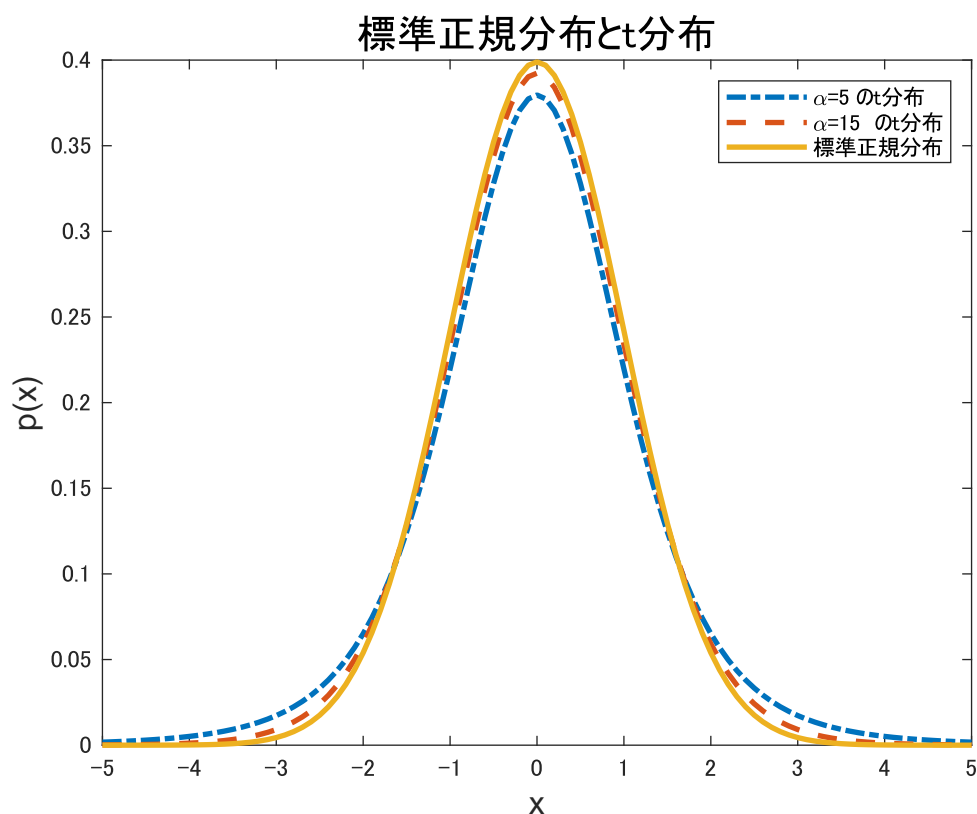


図 4.6: スチューデントの t 分布

これで t 統計量についての説明は終わりです。

## 4.4 2 標本問題

さっきまでの説明では、どれも一つの母集団から一つの標本を得た場合の話をしていました。ここでは、明らかに異なる母集団から標本を抽出し、そいつらを比較する場合を考えます。

### 4.4.1 母分散が既知の時

まず、1 標本の時同様に母分散が既知というレアなケースから考えます。この場合、得られる 2 つの標本はそれぞれ、 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  から  $X_1 \dots X_m$ ,  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  から  $Y_1 \dots Y_n$  の要素が独立に得られたとします。

この時の、標本平均間の差の分布を考えましょう。

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad (4.59)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (4.60)$$

は良いですね。こいつらは当然独立に得られているので、この差である  $\bar{X} - \bar{Y}$  も正規分布に従い、 $N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$  に従います。改めて正規分布の性質って便利ですね。

はい、嫌な予感がしますよね。でも残念、あきらめて標準化します。

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/m) + (\sigma_2^2/n)}} \quad (4.61)$$

どん！

思ったほどじゃなかった。良かった。とにかくこいつは標準正規分布  $N(0, 1)$  に従います。統計量だせましたね。こいつを使って2標本の平均の差の検定が出来ます。次！

#### 4.4.2 母分散が未知だが等しいとき

これもまたちょっと特殊かも知れませんが、母分散は未知だけど等しいことが分かってるときです。ああでも、2クラスの身長とかだったらこれで良さそうですね。

さて、 $\sigma^2$  は未知なのでt統計量の時同様に代わりに標本分散を使い、 $\bar{X} - \bar{Y}$  の分散を考えます。

平均の差の分布は  $N(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\sigma^2)$  となります。先程とは  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  でまとめられた点が変わります。母分散が共通なので、得られたXとYをがっしょんこさせて新しい全体分散的な量

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}{m - 1 + n - 1} \quad (4.62)$$

を定義します。それぞれの不偏分散を使ってもう少しこれを整理すると、

$$s^2 = \frac{(m - 1)s_1^2 + (n - 1)s_2^2}{m + n - 2} \quad (4.63)$$

となります。これで  $s^2$ ，つまり標本分散が完成です。またこいつを使って

$$\frac{(m + n - 2)s^2}{\sigma^2} \quad (4.64)$$

を考えると、これは自由度  $m+n-2$  の  $\chi^2(m+n-2)$  に従っている事が分かります。ふう...

いったんこれは置いて、次に平均の差、つまり  $N(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\sigma^2)$  を標準化してみます。すると

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\sigma^2}} \quad (4.65)$$

になります。よし。

ここで  $t$  統計量の復習なんですけど、あれって標準正規分布  $Z/\chi^2$  分布でしたよね。式 (4.64, 4.65) はそれぞれ  $\chi^2$  と標準正規だったので、こいつらを使って式

$$t = \frac{Z}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} \quad (4.66)$$

をやってみます。こうすると、2 式に含まれている未知数である  $\sigma^2$  が消えて

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \quad (4.67)$$

が算出できます。こいつの名前は 2 標本  $t$  統計量といって、2 標本で母分散が不明だけど等しいと仮定できる時に使う統計量で、2 標本  $t$  検定なんかに使われます。そのままですね。

#### 4.4.3 母分散が未知で等しいかも未知

基本むりっぽい。

なんかウェルチの近似法ってのもで近似的にはいけるっぽいんだけど、基本は無理らしいので触れません。怖いし...

#### 4.4.4 標本分散の比の分布

最後に、2 つの母集団分布の分散の比についての統計量を考えます。

これは、二つの標本平均の差  $\bar{X} - \bar{Y}$  の分布を考える際に、未知の母分散が等しい事を仮定して2標本の t 統計量を定義した事に関係します。

この仮定を置いていいのか悪いのか、それを標本分散の比から調べてみます。

それぞれの標本分散の分布は独立で、 $\chi^2$  分布に従っているため、 $\chi^2$  分布同士の比の確率分布が欲しくなります。

もしここで、 $s_1^2/s_2^2 \simeq 1$  なら母数も  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  に近い関係である事と考えられます。ここで使われるのが F 分布です。

自由度  $k_1, k_2$  の独立な  $\chi^2$  分布 A と B があったとき、

$$F = \frac{\frac{A}{k_1}}{\frac{B}{k_2}} \quad (4.68)$$

で定義される量は、自由度  $(k_1, k_2)$  の F 分布  $F(k_1, k_2)$  に従うと表されます。また、この F の事をフィッシャーの分散比と言います。

さて、本題の  $s_1^2, s_2^2$  の比ですが、

$$\frac{(m-1)s_1^2}{\sigma_1^2}, \quad \frac{(n-1)s_2^2}{\sigma_2^2} \quad (4.69)$$

はそれぞれ、 $\chi^2(m-1), \chi^2(n-1)$  に従っています。よって F 分布が適用できて、

$$\frac{\frac{(m-1)s_1^2}{\sigma_1^2}/(m-1)}{\frac{(n-1)s_2^2}{\sigma_2^2}/(n-1)} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (4.70)$$

が  $F(m-1, n-1)$  の F 分布に従う事が分かります。2 標本の分散の比の検定に使う統計量はこいつですね。検定は F 検定。



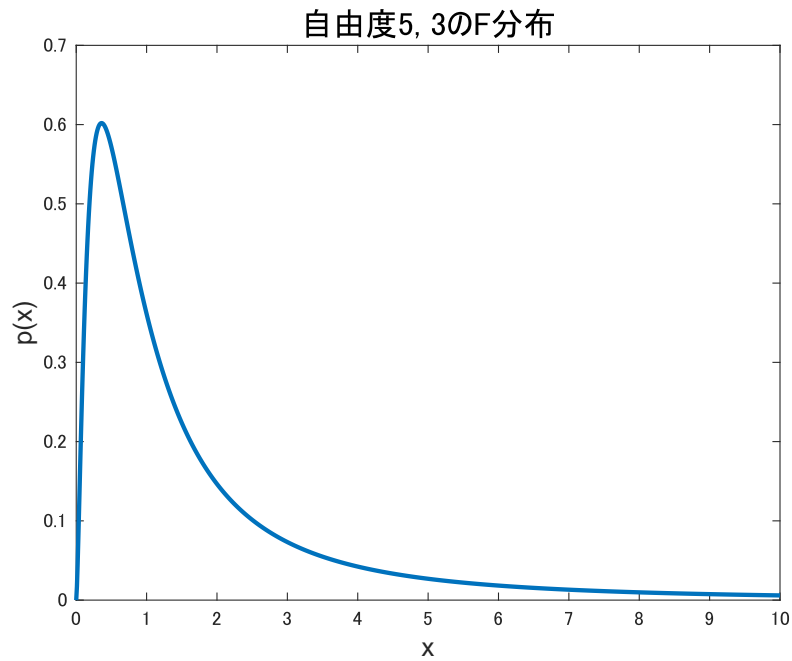


図 4.7: F 分布

ちなみに，母分散が等しい時は

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (4.71)$$

になります．単純になりますね．全部こうなってくれ．

さて，ネチネチといろんな統計量の定義をしてきました．が，ここまでちゃんと読めた人なら分かるんじゃないでしょうか．もうほぼ終わりですね．あとはこうして定義した統計量を実際のデータで計算して，そいつがどんくらのパーセント点にいるのか見てけば良いわけですからね！

こういう使い方をするために，わざわざ標準化してなんかすげえ形に変形してきたわけです．ここまですでに分かったらもう勝ったも同然っしょ．多分，知らんけど．

## 第5章 統計的検定

今の今まで、面倒だなあ面白くないんだよなあと逃げに逃げまくっていましたが...「はやく検定書けよ使えねえオタクだな」って色々な人に尻を蹴りあげられたので、その勢いで腰をあげて頑張ろうと思います。

しかしまあ、最近の神経科学というか実験心理学では統計の問題が色々と指摘されていて、日々 Twitter で神経科学のキラ細胞みたいなフレンズが色々な人の研究を晒上げて燃やし尽くしている状況なので、統計の記述をするのマジで怖いですね...

さて、がんばるぞい

### 5.1 統計的仮説検定とは

統計的仮説検定とは何か、いつ使うものなのかですが、結論から言えばどの論文にもほぼ必ず出てくる作業ですよ。研究者の掲げる「ある仮説」の有意性を検定するものです。「ある仮説」の元で期待する結果と、実際に得られて観測された結果とを見比べた時、そこにある差が偶然起こった程度のものかと言えるか、否かを評価します。偶然じゃないのなら、きっとその差には何か意味があるはず、つまり仮説が間違っているという事になります。

これを使って、たとえば1軍と2軍の能力は同等であるという仮説の元に能力テストを行って、結果を比べると明らかに1軍の方が高かったとなれば、残念ながら仮説は間違っていて1軍より2軍の方が優秀であったんだ！のような主張を出来るわけですね。

この発想自体は、我々人間が日頃からやっているようなごく普通の思考プロセスですよ。

与えられた仮説のもとで考えられる範囲を超えた誤差が生じた場合、それは何らかの意味があると考え、このずれは「有意である」、と言います。ここから、統計的仮説検定とは即ち仮説の有意性検定であるとも言えます。

ではここで問題なのが、どうやってその有意性を判断するのかです。有意性とは、標本が有意なずれを示す確率であるので、ここで標本分布を使う事になります。コインを10回投げて、表が何回出るかを使ってコインがいかさまコインじゃないかを判定する事を考えましょう。一般のコインであれば、確率的に平均を取れば5回表が出るはずですね。

5回表が出たら、普通の人ならイカサマコインではない判定をすると思います。では4回ならどうでしょう？たった10回の試行中なので、僕なら良しとします。では3回は？ここらへんから少し怪しいですね...僕は何とも言えないなぐらいの評価です。2回まで行くと、ちょっとイカサマを疑っちゃいますね。1回とか0回は舐めてる。許せんわ。

と、普通に我々が行う思考はこんな感じですね。表が出る確率  $p$  は  $p(\text{表}) = 1/2$  であると考えて、二項分布 ( $Bi(10, 1/2)$ ) の確率分布に従う事を仮説として、その中で与えられたデータ (表が出た回数) が分布のどのあたりにあるのかを考えるわけです。

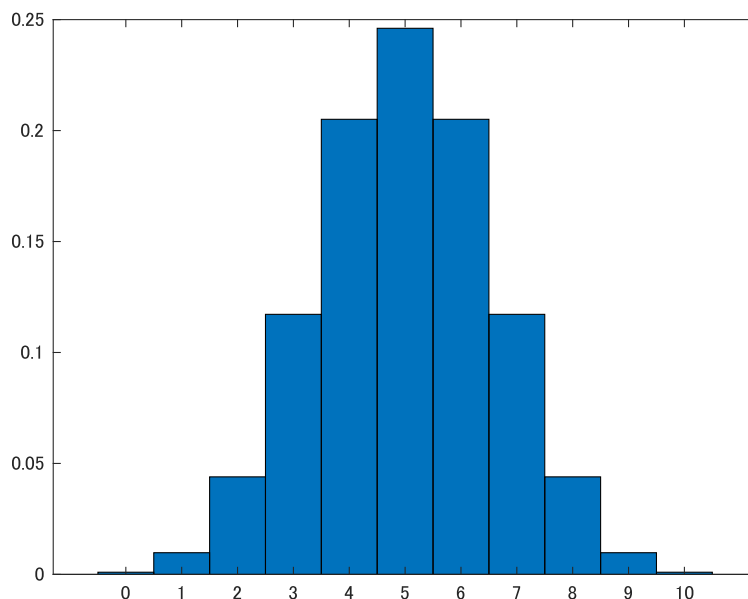


図 5.1: 表が出る回数の二項分布

確率の議論なので、ここでさっきの例をちゃんと計算してみましょう。  $n=10$  の二項分布で表が出る回数別にそれぞれの確率を計算すると以下ようになりました。

$$x = 5 \quad p = 0.2461$$

$$x = 4 \quad p = 0.2051$$

$$x = 3 \quad p = 0.1172$$

$$x = 2 \quad p = 0.0439$$

こう見ると、やはり3あたりから怪しくて、2はやばいってのがなんとなく分かりますね。2回だけ表が出る確率は二項分布の元でわずか4.3%しかないわけですからね。

この時、仮説の元では出るはずがない結果がでたということで、仮説が誤っていたと判断します。この事を、仮説を棄却する、と言います。

また、実用では基本的にこの仮説は否定したい、というか否定される事を想定して設定されるものです(研究であれば、AグループとBグループに差があると言いたいから、差がないという仮説を立てて否定しますね)。故に、こうして否定される仮説の事を特に、帰無仮説とも言います。

反対に、対立的な仮説(コインの例なら、表が出る確率は1/2未満である、とか)を立てて置くこともあります。この仮説を特に、対立仮説と言います。

帰無仮説と対立仮説は互いに反する事象なので、帰無仮説を否定する事は対立仮説を採択する事とほぼ同義、というふうにして使われる事が多いですね。がしかし、注意が必要なのは帰無仮説が  $p = 0.5$  だとして、対立仮説に  $p < 0.5$  を置いたとしたら第三の可能性として  $p > 0.5$  もあります。こうした場合は帰無仮説の否定＝対立仮説の採択とは違うので気を付ける必要があります。

以上の内容を言い換え、改めて仮説検定とは何か考えると、  
「用意された仮説が有意であるか否かを判断し、それに応じて仮説を棄却するか採用するか判定する作業」  
であると言えます。

ここまでの内容で、ある程度くらいの脳を持った人なら気付くと思いますが、確率やらを持ってきてそれっぽい空気を出してはいるけど結局最後の有意性の判定が恣意的でしたよね。さっきは「わずか4.3%しか起こりえないはずの事象を観測するのはおかしい」と決めつけて、コインはイカサマであると判断しました。

その時々で勝手に変えるのも困るので、こうした有意性の判定のためにある基準値を設ける必要があります。それが有意水準( $\alpha$ )と呼ばれるやつです。

ほら、よく論文とかでも見る  $p < 0.05$  とかのやつです。これは  $p$  値が0.05という有意水準を下回っていますよ、つまり有意ですよ、だから帰無仮説を棄却しますよ、という意思表示なわけですね。一般に、有意水準は0.1,0.05,0.01などが使われます。

しかし有意水準を下回ったからといって、絶対にありえないわけじゃありません。5%の確率でしかありえない事は、20回に1回程度は起こりうる事でもあります。そのため、帰無仮説や対立仮説をそれぞれ採択したけれども、実際は誤りで他方が正解であったという事が起こってしまいます。これらの誤りをまとめると以下ようになります。

		判断	
		差あり	差なし
真実	差あり	正しい判断	第2種の過誤
	差なし	第1種の過誤	正しい判断

図 5.2: 統計的仮説検定の結果と過誤の対応

帰無仮説を棄却したけど実際は偶然で5%とかの確率を引き当ててしまっていた場合を第一種の過誤、帰無仮説を採択したけど実際は仮説が間違っている場合を第二種の過誤と言います。

また、第一種の加護は偽陽性、第二種は偽陰性とも言います。個人的にはこっちのが分かりやすく好きです。

もう一つ注意が必要なのは、統計的仮説検定は帰無仮説が否定される事によって対立仮説を採択するといういわゆる背理法を用いているので、厳密には帰無仮説が棄却されなかったからと言ってそれが正しいという事にもならないし、対立仮説が間違っているとも言えません。あくまで、帰無仮説と得られた結果が矛盾しない、というだけにとどまります。

以上の性質を踏まえ、検定の用いる目的として主に3つの状況が考えられます。

- 帰無仮説を反証し、棄却する目的
- 異常の検知
- 数学的に扱いやすいためおく便宜的な仮定

まず一つ目、これが最も我々が使うものかもですね。先に説明したように背理法的な使い方をして、データに見られる誤差が確率的に偶然で許される範囲かを考え、逸脱していた場合は帰無仮説を棄却して対立仮説を採択するやつ。新薬の効果があるって主張したいから、まずは薬を投与してもしなくても変わりませんよって帰無仮説を設定してそいつを論破してやろうって使い方です。

次に二つ目、異常の検知です。こいつも検定の例だとよく出てきます。本書でも書くと思うけど、工場の生產品の不良品率の話が例によくでてきますね。通常の状態であれば観測されるデータが属しているはずのデータ群として帰無仮説を設定しておいて、こいつが棄却されないならヨシ、されてしまうのなら何か異常があるとするやつです。

最後がちょっと特殊ですが、統計モデルを考える際に使うものばい。確率変数が正規分布に従うって仮定をいろんなところで置くと思うんですけど、まあこれは中心極限定理があるからある程度信用でき

るとは家やより分からない事なので、あくまで仮定は仮定、仮説です。なので、仮説検定を使ってちゃんとデータがこの分布に従っているのか、つまりここで置いたモデルは妥当なものなのかを検証する際にも使うことができます。便利ですね。

## 5.2 仮説と検定関数

と、ここまでの内容は皆さん大体、既に知ってると思います。個人的な話になりますが、統計を勉強する上で特に検定でやる気が起きないの、とにかく数式での説明がないからよく分からないというイメージしきれないってところなんですよ。という事で、以上の内容を数式使って表していきます。

まず、検定の問題では帰無仮説と対立仮説を置いていました。こいつらは相反するべきものなので、以下のように定義します。

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset (\text{空集合}) \quad (5.1)$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \quad (5.2)$$

ここで、式 (5.1) では  $\Theta$  は母数空間であり排反な部分集合である  $\Theta_0, \Theta_1$  に分けられています。こいつらがそれぞれ帰無仮説と対立仮説に対応する母数の集合です。あ、 $a \in b$  は、 $a$  が  $b$  に含まれているという意味の記号です。

ここで、未知のパラメータである  $\theta$  がそのどちらに属しているかを表すのが式 (5.2) あり、これが帰無仮説と対立仮説 (Hypothesis) に相当します。

例で考えます。ある工場の製品の不良生産品率を  $p$  としたとき、それが許容範囲かどうかを検定する問題で、 $p$  がある  $p_0$  以下であればヨシ、それを超えている場合には生産工程に問題があるとして責任者を減給する事にしましょう。さらに、一般に帰無仮説は  $H_0$ 、対立仮説は  $H_1$  とする事が多いようなので従うと、ここで考える検定問題は

$$H_0 : p \leq p_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : p > p_0 \quad (5.3)$$

となりますね。閾値として設定した  $p_0$  以下だったら有意差なし、セーフ、許すとして、超えていたら対立仮説を採択、不良製品率が高すぎるのでこの工場は問題ありとするわけです。

それから前節で説明を忘れていた大事な概念に、両側検定と片側検定があります。これは検定問題の式を考えると分かりやすいですが、

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad (5.4)$$

のように、特定の値を決めてそれびったしなのが帰無仮説、そうでない場合を対立仮説とする場合を両側検定と言います。つまり、分布の右でも左でも関係なく、とにかく帰無仮説で定めた値から逸脱した範囲の場合対立仮説を採択するものです。

一方で、

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \quad (5.5)$$

のように（あるいは不等号が逆でも）、決めた値に対してどちらかに超えた場合を検出するものを片側検定と言います。たとえば、ある薬の治療効果を確かめたいという目的で検定をするなら、なんらかの健康の指標が薬の投与によって上昇すれば良いので、上側の片側検定で良さそうですね。このように目的に応じて検定は使い分けられます。

で、我々？検定を使う人？がやる決定  $d$  は、 $H_0$  が正しいのか  $H_1$  が正しいのかを判断する事です。帰無仮説  $H_0$  を採択する事を  $d=0$ 、棄却する事を  $d=1$  としておきましょう。

すると決定の結果生じる損失について次のようにまとめられます。これを使って偽陽性や偽陰性について考えていきます。

$$L(\theta, d=0) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \in \Theta_0 \\ 1, & \text{if } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

$$L(\theta, d=1) = 1 - L(\theta, d=0) \quad (5.6)$$

損失関数については統計編で触れてないと思いますが、まあ「状況」と「判断」を変数としたときの、間違いによって生じる「損失」についての関数です。判断があてれば損失は生まれないし、間違っていれば生まれます。

ここでは、偽陽性や偽陰性の時に損失が生じれば良いわけですね。たしかに式 (5.6) では正解が  $\Theta_0$  なのに  $d=1$ 、つまり  $\theta \in \Theta_0$  を否定しちゃったり、逆に  $\Theta_1$  なのに  $d=0$  として  $\theta \in \Theta_1$  を否定しちゃったりしたときに 1 を取る、つまり損失が生まれる事になっていますね。

そう、偽陰性や偽陰性とはつまり、こうして判断の結果損失が生まれてしまう状態を指します。より一般には、偽陽性と偽陰性はどちらも同じ損失である必要はなく、偽陽性よりも偽陰性の方を厳しくみたいとか色々あると思いますが、ここではとりあえず等価としています。

次に、検定関数 ( $\delta$ ) について考えていきます。これは、 $X = x$  を観測したときに帰無仮説を棄却するなら 1、採択するなら 0 を取る関数で、要は検定の結果を判断する関数です。そのまんまですね。小泉 ○○○さんばい。

こいつは与えられた統計量によって帰無仮説を棄却する 1 を取る時と、採択する 0 を取る事があるので範囲を 2 分する事が出来、

$$A = \{x|\delta(x) = 0\} \quad R = \{x|\delta(x) = 1\} \quad (5.7)$$

$$U = A \cup R, \quad A \cap R = \emptyset \quad (5.8)$$

と表現できます。A は accept, R は reject です。検定関数の値によって、与えられた変数を採択か棄却かに二分しています。またこいつらに重複はなく、これらの和は当然全体集合になります。ここから、A を採択域、R を棄却域と言います。

検定関数  $\delta(x)$  は前章で確認したように、与えられた標本  $X$  を元にした様々な統計量 ( $Z, F, t, \chi^2 \dots$ ) が使われるのでこいつらを  $t(X)$  としておくと、式 (5.7) は

$$A = \{X|t(X) \leq t_0\}, \quad R = \{X|t(X) \geq t_0\} \quad (5.9)$$

と表すことが出来ます。この時の  $t_0$  は、統計量がこの値を超えたら (下回ったら) 帰無仮説を棄却するというような値なので、棄却点、あるいは有意点と言います。

有意、ここで初めて出てきました。(所与の帰無仮説の元では) 普通に得られるとは考えにくい確率なので、きっとこの結果には意味がある、というニュアンスです。

検定で考える問題はつまり、検定関数に食わせた結果、与えられた統計量が (帰無仮説の) 棄却域と採択域のどちらに落ちるのかを判定する事だと言えます。

ではここで、この判定によって生じるリスク (R) についての関数も考えましょう。定義はまず

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(X))] \quad (5.10)$$

です。リスクとは得られる可能性のある損失についての関数なので、変数として式 (5.6) 同様に  $\theta$  を引っ張りつつ、違いとして  $\delta$  が入ってきています。これは検定関数の判断の結果の値となるので、判断、即ち式 (5.6) で言うところの  $d$  と同じですね。

$\theta$  と  $\delta$  を使って表される損失関数、を考えられる  $\theta$  について期待値を取ったものがリスク関数である、と解釈できます。つまりどの  $\theta$  だった場合にはどれくらいの損失があるってのを全ての  $\theta$  について平均するわけだね。まだよく分からん人も次の説明を見れば分かります。

さらに、よく考えてみれば  $L$  が取る値は 1 か 0 だけなので、結局  $L$  の期待値ってのは

$$E[L] = 0 \times P(L = 0) + 1 \times P(L = 1) \quad (5.11)$$

$$= P(L = 1) \quad (5.12)$$



となりますね。単純です。これを使うと  $\delta$  のリスク関数は

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} P_\theta(\text{偽陽性}) = \alpha, & \text{if } \theta \in \Theta_0 \\ P_\theta(\text{偽陰性}) = \beta, & \text{if } \theta \in \Theta_1 \end{cases} \quad (5.13)$$

とまとめられました。つまり、本当は  $\Theta_0$  が正しいときに生じるリスクは偽陽性である確率、逆に  $\Theta_1$  の時には偽陰性の確率がリスクになるわけですね。

また、資料によっては偽陽性率を  $\alpha$ 、偽陰性率を  $\beta$  としておくものもあるので、これ以降採用し、必要に応じて利用していきます。特に偽陽性が  $\alpha$  なのは、有意水準  $\alpha$  と混同すると悩む人がいるかもしれませんが、後で解消されるのでとりあえず置いておいてください。

言うまでもないことですが、良い判断とはリスクが最小の判断なので、ここで言う偽陽性率と偽陰性率をともに最小化できるのがベストな検定関数という事になります。

また個人的な話になりますが、今まで検定ってすごいふわとした話でばかり勉強していたのですけどこうした形で書いてみるとすごいこう、数学っぽさが出ていいですね。最適化みたいな話でできたし。

さて、これも考えるまでもない事ではありますが、偽陽性と偽陰性はトレードオフです。どちらかを極端に抑えればどちらが多く出現するようになってしまいます。

たとえば、読者諸君の中にもいると思いますが、急に鳴って怖いくせに結局何も起きない事が多いから、という理由で携帯電話機に実装されている緊急地震速報などの警報機能を常時 OFF にしている人がいると思います。

あれは「どっかで異常が起きたから、お前のいるところも危ないはず！！」という予測なので、警報を発したけど何も起きない状況は偽陽性だと考えられそうです。逆に警報を発さなかったけど危険な目にあうのは偽陰性ですね。

警報を切っている人達は、偽陽性を嫌って警報機能を常時 OFF にしています。こうすることで偽陽性率は驚異の 0% を叩き出せるわけですが、それと引き換えに偽陰性率は脅威の 100% となります。うーん。これがトレードオフって話です。

閑話休題。

まあとにかく、よくある最適化問題同様、両者のバランスを上手く取りつつ最小化する検定関数を求める必要があります。

### 5.3 有意水準と検出力

そこで、ここからはやっぱり「うーん」という感じするのですが、どうやら統計屋さんの考えとしては偽陽性を抑える方を重視するそうです。なので偽陽性がある限界まで抑え、その範囲内で偽陰性も可能な限り抑えちゃおうっていう考え方です。

そう、この、ある限界というのが、ようやく出てきました、有意水準というわけですね！！

有意水準  $\alpha$  はだいたい5%とか1%ですが、これはつまり偽陽性率が5%とかの有意水準以下に抑えられるよという意味なのでした。が、ここで当然、こんなに偽陽性率を小さくしてしまうと偽陰性率は高くなってしまいます。

だから、どっかの節の最後の方でも言いましたが帰無仮説を有意水準の元で棄却できなかったからと言って、帰無仮説が正しいと証明できるわけでもないし、積極的に採択というか主張に使うものではないという事になるのでした。

最初からこういうふうに書いてほしいですよねえ、どの統計の本もあまりこうした説明がないので、感覚的なふわっとした話しか分からなくて勉強のやる気をごりごり削られていました。

さらに、こうして式を使って説明していたが故に次の話題、検出力についてもあっさりと説明が出来ます。

この検出力、今まで軽く統計検定の勉強していた人達もあまりなじみのない言葉だと思いますがめちゃ重要です。てか、これについて知っておかないと後でTwitterで燃やされることになります。ちゃんと確認しておきましょう。

まずは、

$$\beta_{\delta}(\theta) = E_{\theta}[\delta(X)] = P_{\theta}(\delta(X) = 1) \quad (5.14)$$

を定義します。この  $\beta_{\delta}(\theta)$ こそ、検出力と呼ばれる指標です。

第三項を見ればわかる通りこいつは、検定関数  $\delta$  が帰無仮説を棄却する確率 ( $d=1$ ) になります。第二項から第三項への遷移は、 $\delta(X)$  は1か0の値を取る関数なので、こいつの期待値を考えるのは  $\delta(X)$  が1をとる確率を考えるのと同義だからです。

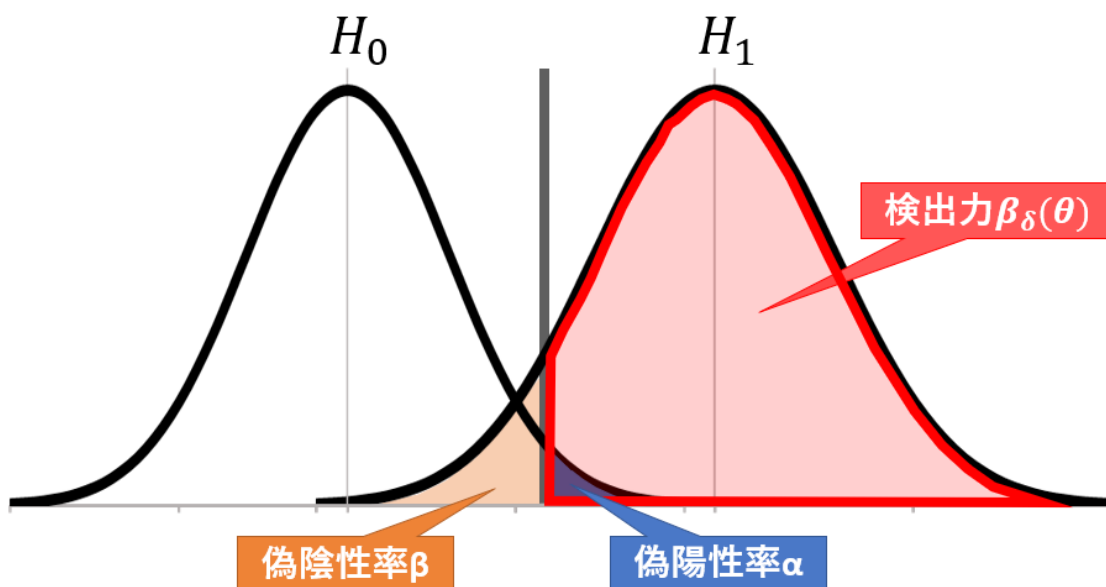


図 5.3: 偽陽性, 偽陰性, 検出力の関係

図 (5.3) を見つづ, 検出力とは何か考えていきます.

まず, 帰無仮説  $H_0$  が間違っていて, 対立仮説  $H_1$  が正しい場合にそれを「検出する」確率であると言えます. この意味で検出力と言うっぽい.

勿論, 帰無仮説が正しい場合には誤った対立仮説を検出してしまふ, つまり偽陽性の確率 ( $= \alpha$ ) を意味します.

また, 帰無仮説が間違っていて対立仮説があっているのに, 検定関数  $\delta(x)$  の結果帰無仮説を棄却しない確率, つまり偽陰性率  $\beta$  を考えると

$$\beta = 1 - \beta_\delta(\theta) \quad (5.15)$$

$$\therefore \beta_\delta(\theta) = 1 - \beta \quad (5.16)$$

と, 検出力  $\beta_\delta(\theta)$  を別の形で表記する事も出来ます. こちらの表記をする資料も多いので戸惑わないようにしましょう.

この検出力を使うことで式 (5.13)

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} P_\theta(\text{偽陽性}) = \alpha, & \text{if } \theta \in \Theta_0 \\ P_\theta(\text{偽陰性}) = \beta, & \text{if } \theta \in \Theta_1 \end{cases} \quad (5.17)$$

のリスク関数を

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} \beta_\delta(\theta), & \text{if } \theta \in \Theta_0 \\ 1 - \beta_\delta(\theta), & \text{if } \theta \in \Theta_1 \end{cases} \quad (5.18)$$

と定義し直す事もできます。こうみると、検出力と偽陽性、偽陰性の関係がより理解できると思います。

さて、こいつの有用性を考えてみましょう。てきとうに、また工場の不良品問題で考えます。不良品率の閾値を  $p_0 = 0.01$  として、20 個の製品を検査してそのうち 1 個異常の不良品があったら帰無仮説を棄却するという検定を考えます。つまり

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.19)$$

が検定関数になります。がばがば判定ですけどまあとりあえず。X の分布は 10 個のデータが 0.01 の確率で 1 か 0 に分類されるんだから  $Bi(10, 0.01)$  の二項分布ですね。今回仮定している母数は  $p_0 = 0.01$  なので、検出力関数  $\beta_\delta(\theta)$  の母数パラメータにこの値を入れて検出力を計算すると、

$$\beta_\delta(0.01) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.01)^{20} \quad (5.20)$$

となりますね。

$\beta_\delta(\theta)$  は  $\theta \in \Theta_0$  の時は偽陽性率でもあるため、有意水準  $\alpha$  に対して以下の条件を満たさなければなりません。そもそも有意水準とは、偽陽性率とその値以下であるという値でしたからね。定義として満たさなければいけないわけです。

$$\beta_\delta(\theta) \leq \alpha, \theta \in \Theta_0 \quad (5.21)$$

これを満たすのであれば、偽陽性率がちゃんと有意水準を下回っているので大丈夫な検定...? 「 $\delta$  は有意水準  $\alpha$  の検定である」と言えます。

ただし、ここで  $\beta_\delta(\theta)$  の最大値は別に  $\alpha$  の値に一致する必要があるわけでもないということで、

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\delta(\theta) < \alpha \quad (5.22)$$

であっても問題なく、この時の左辺の事を検定関数  $\delta$  のサイズとよびます。

左辺の  $\sup$  の意味は下の条件を満たす中で、与えられた値の上限を意味します。まあ最大値で良いです。だいたい。ちなみに読みはスープライです。この資料を書く時まで、ずっと気さくなネイティブ

アメリカンを舌に宿しながらサップと読んでいました。恥ずかしい...

が、結局のところ偽陽性を抑えるためにはこの値をめっちゃ小さくすりゃ良いんだけど偽陰性も抑えるためには大きくしないといけないので、バランス考えると結局サイズは有意水準  $\alpha$  と同じ値になるのが理想的な検定関数になります。

議論を整理します。工場の例だと、式 (5.20) は計算すると 0.1821 となります。むむむ。左辺が 0.1821 となっているので、右辺、即ち有意水準として使える  $\alpha$  は 0.19 以上... 結構やばいですね。一応、この検定  $\delta$  は有意水準 0.2 の検定の一つと言える事になりますがゴミです。まあ 20 個も取ってきてそのうち 1 個でも不良品があったら責任者をクビにするのもえぐい話です、そこそこまぐれを引いちゃうかもだからね。

では 20 個はやりすぎなので、10 個だけ引いてその中に不良品があったらということにしてみましょうか。これなら、不良品率は 1% のはずだったのでまぐれ率は下がりそうですね。同じく二項分布の  $Bi(10, 0.01)$  から検出力を計算すると、0.0956 となりました。これはそこそこ抑えられましたね！有意水準 0.1 の検定という事になります。実用にギリ耐え？くらいの性能になりそうです。

こんな風に、統計検定はまず偽陽性を少なくするようにします。でもその中でも偽陰性が少なくなるように考えると、検定のサイズは有意水準に等しい値となります。そこで検定力を計算してやって、これがちゃんと有意水準より小さい値になっていればその有意水準に耐える検定関数  $\delta$  だね！となるのでした。

この後各種検定についてまとめていった後、もう一度この検出力が出てきますので覚えておきましょう。上の議論は言い換えれば、検定の結果有意水準  $\alpha$  で帰無仮説を棄却したぜ！有意差あり！という論文があっても、 $n$  数だったりをよく見て検出力を出すとサイズが  $\alpha$  よりも大きい値になっていて... とかありえるわけですからね。

適切な検定が出来ているのかを確認するために必要になるって話です。実際最近の心理学がやばくねとか言われている理由の一つに直結しています。

## 5.4 各種検定

ここで、ようやくお待ちかねの各種検定についてまとめていきます。と言っても、考えている問題に適切な統計量さえ分かっていたらあとはそれが有意点を超えるかどうか見るだけなので簡単です。

### 5.4.1 母分散既知の時，母平均に関する検定

例のごとく， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  で得られた標本に対して，母分散が既知の状況で母平均に関して検定したい問題を考えます．

帰無仮説と対立仮説は

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (5.23)$$

とします．母平均が  $\mu_0$  であると仮定したけどこれであっているのか，それとも違うのか，を検定します．

この時，検定に使う統計量，検定統計量は式 (4.38)

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \quad (5.24)$$

を用います．両側の検定であれば，有意水準を  $\alpha$  とすると

$$|Z| > Z_{2/\alpha} \quad (5.25)$$

を棄却域として設定するわけですね．

$\alpha$  が  $1/2$  されているのは，上側と下側の両方の確率を足して  $\alpha\%$  になるように調整しているからです．なので片側検定の場合は勿論，仮説が

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (5.26)$$

とかになり，

$$Z > Z_\alpha \quad or \quad Z < -Z_\alpha \quad (5.27)$$

が棄却域となります．

あとは普通に，実際に得られた標本から標本平均  $\bar{X}$  を計算して， $n$  はデータ数， $\mu_0$  は検定の時仮定した数字，最後に  $\sigma$  は既知という前提だったので，こいつら全部を使って  $Z$  値を出します．

$Z$  は標準化されているので，どんなデータだろうと正規分布表を参照すれば正規分布のどこに落ちるのかが分かります．この値が  $Z_\alpha, Z_{\alpha/2}$  に比べて棄却域か採択域のどちらに入ってるかみりゃいいわけですね．つまり不等式 (5.25) を満たすか確認し，有意か判断します．簡単ですね．

$z$  値を使うので  $z$  検定と言います．

### 5.4.2 母分散未知の時，母平均に関する検定

母分散が既知というのも変な話なので，母分散が未知という状況で母平均に関して検定を考えます．仮説は

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (5.28)$$

で先程同様です．ただし，

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \quad (5.29)$$

のうち  $\sigma$  が未知という状況なので，こういう時はスチューデントの  $t$  統計量 (4.52)

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s} \quad (5.30)$$

を使えば良いのでしたね．こいつを使って同様の作業をしていきます．棄却域は

$$|t| > t_{\alpha/2}(n-1), \quad \text{or} \quad t > t_{\alpha}(n-1), \quad \text{or} \quad t < -t_{\alpha}(n-1) \quad (5.31)$$

になります．両側か上下の片側の3つの棄却域です．以降はめんどくさいので下側は多分書きません．

こいつは統計量に  $z$  ではなく  $t$  を使っているんで， $t$  検定ですね．

$z$  検定に比べ，自由度が  $n-1$ なのは  $t$  分布だからです．こいつは母分散じゃなく標本分散を使っているから自由度が  $-1$  されるんでしたね．

### 5.4.3 母平均の差の検定

二つの独立な母集団から抽出された標本同士から，母平均に差があったのかを検定する問題を考えます．研究でめっちゃ使いますね．健常者群と疾患群でパフォーマンスや脳活動に差があるのかの検定です．

2 標本検定なのでまず標本はそれぞれ  $X = (X_1, \dots, X_m) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  に従い得られます．この時，仮説は

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (5.32)$$

あるいは

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{or} \quad \mu_1 < \mu_2 \quad (5.33)$$

となります。

この問題も、前章で確認したように  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  の関係が判明しているのかどうかで用いる統計量が変わりました。

### 母分散既知

まずはそれぞれの母分散既知である場合については式 (4.61) の

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/m) + (\sigma_2^2/n)}} \quad (5.34)$$

を用いるのでした。勿論、この時母分散が共通であっても問題なく、その場合は  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  なので

$$Z = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \quad (5.35)$$

が統計量になります。なので

$$|Z| > Z_{\alpha/2} \quad (5.36)$$

なら帰無仮説を棄却します。

### 母分散共通、未知

二つの母分散の値については不明だけれど、共通であることは分かっている場合、標本分散として新しく合併した分散 (4.62)

$$s^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2} \quad (5.37)$$

を用いるのでした。さらに、こいつを使って 2 標本での t 統計量 (4.63)

$$t = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s} \quad (5.38)$$

が与えられる事も確認しました。あとはこいつを使ってやれば、

$$|t| > t_{\alpha/2}(m+n-2) \quad \text{or} \quad t > t_{\alpha}(m+n-2) \quad (5.39)$$

の棄却域で母分散が共通である 2 標本の母平均に差があるのか検定する事が出来ます。t 分布の自由度が  $m+n-2$ なのは良いですね。自由度が  $m-1$  のやつと  $n-1$  のやつを合算したからこうなっているのです。



#### 5.4.4 母分散の検定

次は母分散に関する検定です。仮説は

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{or} \quad \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad (5.40)$$

です。母分散が  $\sigma_0^2$  と考えていいのかですね。こいつは、標本平均  $s^2$  を使って式 (4.64)

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad (5.41)$$

で表せ、自由度  $n-1$  の  $\chi^2$  分布に従うのでした。なのでこいつを統計量として使って、両側検定の場合は

$$\chi_{1-\alpha/2(n-1)}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{\alpha/2(n-1)}^2 \quad (5.42)$$

が満たされない場合に帰無仮説を棄却します。絶対値を使って  $|\chi^2|$  などと表していないのは、 $\chi^2$  分布は左右非対称な分布だから左右で同じ  $\alpha$  の点でも値が異なるからです。でもやってることは同じで、左右の端っこは棄却するという意味です。

片側検定の場合は単純に、

$$\chi^2 > \chi_{\alpha/2(n-1)}^2 \quad , \quad \chi^2 < \chi_{1-\alpha/2(n-1)}^2 \quad (5.43)$$

の時に棄却すればいいだけです。 $\chi^2$  を使っているので、 $\chi^2$  検定です。

#### 5.5 母分散の比の検定

そして、2 標本の平均の比の検定の際に重要になったのが 2 つの母分散が等しいかどうかでした。これも調べる必要がありましたね。

仮説は

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad \text{or} \quad \sigma_1^2 > (<) \sigma_2^2 \quad (5.44)$$

ですね。

こいつはフィッシャーの分散比 (4.70)

$$F = \frac{\frac{(m-1)s_1^2}{\sigma_1^2}/(m-1)}{\frac{(n-1)s_2^2}{\sigma_2^2}/(n-1)} = \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2} \quad (5.45)$$

を使うのでした。われながらこのままだとすげえ見にくいのでちょっといじります。

$$F = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 / (m-1)}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 / (n-1)} \quad (5.46)$$

同じです。こいつを検定統計量として、F分布の元で採択域を

$$F_{1-\alpha/2(m-1,n-1)} \leq F \leq F_{\alpha/2(m-1,n-1)} \quad (5.47)$$

として、外れたら帰無仮説を棄却する（両側検定）か、あるいは

$$F < F_{1-\alpha(m-1,n-1)} \quad , \quad F > F_{\alpha(m-1,n-1)} \quad (5.48)$$

として値を比較します。こいつも、単純に絶対値を使ったりせずに  $1-\alpha$  の形を使っているのは  $\chi^2$  同様に対称じゃないからです、ていうかF分布自体が  $\chi^2$  で出来てますからね。

統計量にFを使っているので、F検定です。

## 5.6 検出力分析

良い資料さがしちゅー。なかなか見つからん。

## 第6章 ベイズ統計

### 6.1 頻度主義とベイズ主義

これに触れるのは気が引けるというか、ややこしいのですがどの統計本もこの話題から触っているの一応。確率を考える方法には、どうやら“主義”があるようです。確率や統計はその性質上、絶対的な正解というものは存在しません。「こんな傾向があるよね」なんて議論を数学的にやろうという話なので、絶対はないからです。それ故、考え方の基礎というか根っこの部分で置く仮定のようなもので派閥が別れるのかななんて思っています。

とにかく、確率には頻度主義と呼ばれる派閥とベイズ主義と呼ばれる派閥があります。この派閥という表現だと対立しているようにも思えますし、実際対立している面倒な人達もいるようですが実際の現場ではどちらも便利なのところがあるし、要は使い分けだと思います。よってどちらが優れているとか、どちらが正解とかいう議論は無意味だし、答えもないと思います。注意してください。

ということで、筆者はこうした宗教戦争には興味がないのと下手に触れると炎上しそうなので紹介だけです。興味があるようなら自分で勉強してみてください。正直自分はよく分かってないです。

### 6.2 加法定理と乗法定理

ベイズ統計に入る前に、確率に関する基本的な法則を二つ導入しておきます。加法定理と乗法定理です。三角関数とかでおなじみのあれです。確率の加法と乗法について考えてみましょう。

まずは加法定理から。確率変数  $X, Y$  を導入します。それぞれ  $X = x_i, Y = y_j$  を取る確率を  $p(X = x_i, Y = y_j)$  と書き、これを  $X = x_i, Y = y_j$  の同時確率と言います。

ここまでは良いですね。  $x_i$  と  $y_j$  が同時に観測される確率だから同時確率です。

さて、この  $X, Y$  の両方についてそれぞれサンプルを取る作業を  $N$  回行う事にします。この時、  $X = x_i, Y = y_j$  となる試行の回数を  $n_{ij}$  と表します。こうすると、以下の式が成り立ちますね。

$$p(X = x_i, Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{N} \quad (6.1)$$

これは普通に、「大小のさいころ 2 つを振って大 3, 小 6 を引く確率（同時確率）を求めよ」とかと同じです。全試行分の当該試行ですね。

では次に、 $X = x_i$  となる確率を考えます。Y が取る値と関係なく、 $X = x_i$  となる試行数を  $c_i$  としておきましょう。そうすると、 $p(X = x_i)$  は

$$p(X = x_i) = \frac{c_i}{N} \quad (6.2)$$

になります。「大小 2 つのさいころを振って、大きい方が 6 になる確率は？」です。うーん？この例あまり良くないですね。どちらにせよ試行数 1 なので... まあいいや。

この式 (6.2) ですが、式 (6.1) を使ってあえて複雑に書けばこうなります。

$$p(X = x_i) = \sum_{j=1} p(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1} \frac{n_{ij}}{N} \quad (6.3)$$

Y の値はなんでも良いから、X が  $x_i$  になる確率を出したのが式 (6.2) なので、これは全ての  $Y = y_j$  について式 (6.1) を足し合わせたものと同じだよねという式になります。

これが確率の加法定理です。また、捉え方を変えとこの処理は x 以外の変数（ここでは y）についての周辺化をするとも言い、式 (6.3) を x の周辺確率とも言います。

次に、 $X = x_i$  が既に観測されている状況に限って、その中で  $Y = y_j$  が観測される可能性を考えます。これを条件付き確率と言い、今の例だと以下ようになります。

$$p(Y = y_j | X = x_i) = \frac{n_{ij}}{c_i} \quad (6.4)$$

左辺の記法、最初は慣れないかもしれませんが慣れましょう。縦線は条件付きである事を表し、「右側の条件の元の左についての～～」を意味します。逆にならないように注意。筆者は最初よく逆に捉えていてわけわからんになっていましたが、これ以降頻繁に出てくる表現です。ここでは、上で述べたように“ $X = x_i$  の時の  $Y = Y_i$  の確率 ( $p$ )” という意味です。

式に戻りますが、右辺は分母に  $X = x_i$  になる試行数である  $c_i$  が来ていて、分子は X と Y が  $x_i, y_j$  になる試行数である  $n_{ij}$  ですね。言葉の通り、 $X = x_i$  が確定した状況での  $Y = y_j$  が成り立つ可能性になっている事が分かるかと思います。

以上の事から確認されるように、加法定理同様、式 (6.1, 6.2) を考慮すると

$$p(X = x_i, Y = y_j) = p(Y = y_j | X = x_i)p(X = x_i) \quad (6.5)$$

が言えます。つまり、 $X = x_i, Y = y_j$  の同時確率は  $X = x_i$  が観測された上での  $Y = y_j$  の確率であり、これらの乗算によって求められるという事です。一応計算しても、

$$p(Y = y_j | X = x_i)p(X = x_i) = \frac{n_{ij}}{c_i} \frac{c_i}{N} = \frac{n_{ij}}{N} \quad (6.6)$$

で式 (6.1) が確かに求められていますね。これが確率の乗法定理です。意味するところは、 $X = x_i, Y = y_j$  の同時確率は  $X = x_i$  の確率と、 $X = x_i$  の元での  $Y = y_j$  の条件付確率との積である、ということになります。

まとめると、確率論の基本法則 2 つは以下になります。

確率の基本法則

$$p(X) = \sum_Y p(X, Y) \quad \text{加法定理}$$

$$p(X, Y) = p(Y | X)p(X) \quad \text{乗法定理}$$

ここで  $p(X)$  は確率変数  $X$  の確率分布を指します。なので先程までの記法に従うと  $p(X = x_1, x_2, x_3, \dots)$  となります。面倒なので以降はこうやって省略します。

## 6.3 ベイズの定理

いよいよベイズに行きます。ここではベイズ統計の歴史だとか主義がどうかは一切触れないので、ぬるっと導入していきます。筆者がベイズいまいち分からん気がする理由は、ここでぬるっと導入できちゃうところにあたりもします。つまり主義がだの仮定がだの言っている割に、いわゆる頻度統計 (?) で使ってる普通の式の変形でだせちゃうんですよね。いきます。

まず、同時確率は対称です。つまり  $p(X, Y) = p(Y, X)$  です。式 (6.1) より自明ですね。この性質を使って遊んでみるとベイズの定理が出てきちゃいます。

$$p(X, Y) = p(Y | X)p(X) \quad (6.7)$$

$$\therefore p(Y | X) = \frac{p(X, Y)}{p(X)} \quad (6.8)$$

$$\therefore p(Y | X) = \frac{p(X | Y)p(Y)}{p(X)} \quad \because p(X, Y) = p(Y, X) \quad (6.9)$$

できちゃいました。∴, ∵ の使い方あってるかな？あってるよね。∴ は tex だと therefore って書き、∵ は because って書きます。これで分かりますね？

さて、あっさりとベイズの定理が出せちゃったわけですが、その意味を解釈する前にもう一つ導きたい式があります。分母にいる  $p(X)$  に関して、加法定理と同時確率の対称性を使って

$$p(X) = \sum_Y p(X, Y) = \sum_Y p(Y, X) = \sum_Y p(X|Y)p(Y) \quad (6.10)$$

が言えますね。これを使って書き直した特殊な表現と原型を以下にまとめます。

ベイズの定理

$$p(Y|X) = \frac{p(X|Y)p(Y)}{p(X)} \quad (6.11)$$

$$p(Y|X) = \frac{p(X|Y)p(Y)}{\sum_Y p(X|Y)p(Y)} \quad (6.12)$$

上の式がよく見るベイズの形。下は式 (6.10) を使って定義しなおした式です。下を使って、ベイズの定理の意味するところを見ていきましょう。右辺の分母は、分子の計算を全ての  $Y$  について足し合わせたものになっています。つまりこれは、左辺の条件付確率を全ての  $Y$  について足し合わせると 1 になるように正規化しているのだという事がわかります。確率だもんね、A である確率は 60%、B である確率が 90%、あわせて 150% です！なんてあほな話は困ります。

大小 2 つのさいころの例で考えるなら、こんな感じ

$$p(\text{小} = 1 | \text{大} = 3) = \frac{p(\text{大} = 3 | \text{小} = 1)p(\text{小} = 1)}{p(\text{大} = 3 | \text{小} = 1)p(\text{小} = 1) + \dots + p(\text{大} = 3 | \text{小} = 6)p(\text{小} = 6)} \quad (6.13)$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} \quad (6.14)$$

$$= \frac{1}{6} \quad (6.15)$$

このことから、ベイズの定理の大事な部分は分母以外の  $p(Y|X), p(X|Y), p(Y)$  になります。こいつらについてそれぞれ何を意味しているのか考えていきましょう。

まず  $p(Y)$  と  $p(Y|X)$  です。  $p(Y)$  は単純ですね、確率変数  $Y$  の分布です。これは、計算を行う前から我々が「知っている」分布なので、  $Y$  の事前分布といいます。

知っているとは何かというのがベイズ確率の面白い？批判されている？ところで、ここで置く分布はなんでもいいです。「さいころなんだから全部  $1/6$  の一様分布でしょ」としてもいいし、「さっきから 3 ばかり出てるから 3 が 60% くらいな気がする」でも、「3 が全然出てこないからそろそろ出てきそう」でもいいし、とにかく、  $X$  を観測する前に想定されている  $Y$  の確率です。

一方、  $p(Y|X)$  は何かというと、  $X$  を観測した元での、という条件付確率分布なので事後分布と呼ばれます。ベイズで求めるのは事後分布ですね。事前分布  $p(Y)$  に何か ( $p(X|Y), p(X)$ ) をかけたり割ったりし

て、条件付確率  $p(Y|X)$  にしているので、事前分布を得られた  $X$  で条件づけた何らかの処理によって修正する過程とも捉えられることが分かります。

残りは  $p(X|Y)$  です。こいつが多分一番納得しにくいのかなと思います。対称性使ってひょっこり持ってきた項だしね。これは  $X$  の  $Y$  の元での条件付確率です。先程確認したように、ベイズの定理は事前確率  $p(Y)$  を、 $X$  を観測した上での  $p(Y|X)$  に修正する過程でした。

ここで  $Y$  の元での  $X$ 、というのが何を指すかですが、事前確率  $Y$  の元でデータ  $X$  が観測される可能性、ですね？言い換えると、「 $Y$  の値は  $Y_j$  である！」と仮定したときに  $X_i$  が得られる確率、となります。

なので、事前確率が正解に近いほど大きな値になり、逆に遠いほど小さい値になります。事前分布が、得られた  $X$  に対してどれだけもっともらしいのかを表すので尤度と呼ばれる量です。

以上を踏まえて、改めてベイズの定理を眺めると、正規化項を無視すれば

$$\text{事後分布} \propto \text{尤度} \times \text{事前分布} \quad (6.16)$$

という式であると解釈する事ができます。

事前分布で持ってきていた“予想”の元で得られたデータがどれだけありえるかで予想を修正していくわけですね。あ、 $\propto$  は比例を意味する記号です。

理解を深めてもらうため、一つちゃんとベイズっぽい例題を考えてみます。

研究室 A と研究室 B があります。研究室 A は男 4 人、女 6 人、研究室 B は男 8 人女 2 人だとします。多分 研究室 A は心理系のわりかしほんわかしたところで、研究室 B はくさいオタクが多そうですね。女性 2 人の心労はすごそうです。

それはさておき、今ここからどちらかの研究室を選択し、無作為に 3 回授業の手伝いのために雑用を選んで来たら、男男女女だったとします。さて、最初に選んだ研究室はどちらでしょう？という問題を考え、ベイズ的に解いてみましょう。

研究室が A, B である事象をそれぞれ  $L = L_a, L_b$  とし、選んだのが男女である事象を  $S = S_m, S_f$  とします。

今、1 回目に男性が選択された時の研究室 A, B それぞれの事後確率を計算してみましょう。ベイズの定理を使って表してみます。

$$p(L_a|S_m) = \frac{p(S_m|L_a)p(L_a)}{\sum_L p(S|L)p(L)} \quad (6.17)$$

$$p(L_b|S_m) = \frac{p(S_m|L_b)p(L_b)}{\sum_L p(S|L)p(L)} \quad (6.18)$$

こうなりますね。次に各変数に実際の値を代入していきます。まず研究室の選択方法は無作為であったと仮定し、事前分布は一樣、つまり  $p(L_a) = p(L_b) = \frac{1}{2}$  とします。 $p(S_m|L_a), p(S_m|L_b), p(S_m)$  は上記の設定より普通に計算できるので、1 回目の試行での事後確率は以下ようになります。

$$p(L_a|S_m) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{4}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad (6.19)$$

$$p(L_b|S_m) = \frac{\frac{8}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{4}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad (6.20)$$

これはまあ普通ですよ。単純に全体のうち男性の比率が研究室 A と B で 1:2 になっているのを反映しています。では次に 2 回目の試行について考慮します。1 回目に男性が出たという事から、研究室 A or B という事前分布が更新されます。

先程は一樣にどちらも 50% という仮定でしたが、今回は研究室 B である確率が高いと考えて事前分布を設定します。注意が必要なのは、分子の事前分布のみでなく分母に含まれている  $p(Y)$  の値もそれぞれ更新されている事です。この点、あえて  $p(S_m)$  と書かない今回の記法の方が理解しやすいと思います。

$$p(L_a|S_m) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \quad (6.21)$$

$$p(L_b|S_m) = \frac{\frac{8}{10} \times \frac{2}{3}}{\frac{4}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{3}} = \frac{4}{5} \quad (6.22)$$

確率が更新されました。これがベイズの「母数自体がパラメータ」という考え方を反映していて、唯一無二の確率を出すというよりも「今まで得られているデータからはこんな事が言えそう」という主張です。よってデータを得るたびに逐次的に更新する事が出来ます。

これを使ったのが、後で触れる逐次学習だったりになりますがそれはとりあえず置いておきます。

さて、最後。今まで男男と連続で引いたので、やはり男性率の圧倒的に高い研究室 B である確率が高いという事になっています。しかし最後は女性を引きます。どうなるでしょう？

$$p(L_a|S_f) = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{1}{5}}{\frac{6}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \times \frac{4}{5}} = \frac{6}{14} \quad (6.23)$$

$$p(L_b|S_f) = \frac{\frac{2}{10} \times \frac{4}{5}}{\frac{6}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \times \frac{4}{5}} = \frac{8}{14} \quad (6.24)$$

ありゃ、意外とがつつり削られたな。こんなもんなのか。3 回目に女性を引いたことによって、今まで高まっていた研究室 B である確率があぐりと落ち、逆に A である確率が上がりましたね。とはいえまだ B が優勢... という状況です。

例のごとく事前分布  $p(Y)$  は更新されているので注意。ベイズ統計はこのようにして予想を適宜修正していくような使い方が出来るわけですね。この、少しずつ分布を更新していく過程をベイズ更新とも言います。これゆえ機械学習だとか脳のモデルと相性が良いわけです。つまり、得られたデータを毎瞬反映させて少しずつ内部モデルを更新していけるわけです。つよい。

面倒なので計算はしませんが、一つ皆さんも気になるだろう話題について問題提起だけしておきます。



今回の問題では研究室 A か B のどちらが選ばれたのか最初に一様分布を仮定しましたが、そうじゃない場合はどうなるでしょう？

雑用を選ぶ問題だったので、なんとなく先生の力が弱い方の研究室が押し付けられそうですね。研究室 A は新任の特任准教授、研究室 B は学部長の主催するラボだったとしましょう。そうするとなんとなく、押し付けらそうなので事前分布に研究室 A 75%, B が 25% とかって仮定をおいてみたくなります。

アカデミア、政治色強いですね。研究は大した事なくても政治だけでのしあがっていく先生も多いし、闇を感じる場所は多々あります。いや、筆者もおそらく政治強い側の人間になりそうなので強く言えませんが... コネって大事ですね。

閑話休題。

さて、暇な人はこのように事前分布を変えて計算してみてください。当然結果は変わります。そしてこの点がまさに、ベイズに批判的な人達の武器で、事前分布に何を用いるかが結局強く影響しちゃうんですよね。なのでベイズを用いる際は、事前分布の妥当性はちゃんと検証しなければならないです。

## 6.4 無情報事前分布

わすれてた

## 6.5 共役事前分布

ごめんなさい！！！！！！！！！！

## 6.6 ベイズの応用

応用、というか実際にベイズを何にどうやって使っていくのかという話です。まず、ここまでベイズは離散で考えてきましたが当然連続確率分布でも計算できます。むしろそっちの利用の方が多いでしょう。まあ例のごとく基本は  $\sum$  を  $\int$  に変えるだけです。

これを使ってどんなアプリケーションが使えるのかというと、先程の逐次学習がまずあります。次々観測されるデータを元に、内部モデルを更新していく過程ですね。パターン認識、機械学習、それから脳のモデルなんかに頻繁に適用されて議論されます。

自分の専門でもあるから少し述べるなら、脳は常に環境に適用するため、次に何が起きるのかや、得られた刺激がどういったものなのかを推定していく必要があります。

同時に、もしその推定が間違っているなら修正していく必要があるし、うまくいったなら強化していくと嬉しい事がありそうです。まさにこの過程がベイズ使った更新なんじゃない？みたいな話になっていくわけですね。

まあ実際はそんな単純じゃないし、上に書いたような内容は古いというか単純な話です。もう少し複

雑だったり，厳密にはちょっと違ったりしてきます．がこれ以降は万人に共通して必要な知識というほどでもないと思うので advanced の方に引き渡します．興味ある人は読んでみてください．

## 第7章 統計的推定

なぜ確率分布のあとにベイズに突然触れたかという点、この章で扱う推定に密接に関わってくるからです。実世界で統計を使っていく上で重要なのは、あるデータ群が形成する分布の種類を特定する事ではありません。ただ分布型が分かっただけでは大抵、なんの役にも立ちません。

重要なのは、その分布の平均や分散です。クラスのテスト成績が正規分布に従う事を知っていても、肝心の平均点などが分からないと学生は喜んでいいのか落ち込むべきなのか分からないし、教員も授業内容の補修をするべきかもっと踏み込んだ議論をするべきか分かりません。

という事で、母集団の確率分布を規定する“母数”を推定したくなります。母数は、たとえば母平均や母分散といった量があります。母平均の推定はわりとよくやっていますね。

あるクラスでてきとうに選んだ5人の点数( $X_1, X_2, \dots, X_5$ )があれば、彼らの平均からクラス全体の平均を推定しようとするでしょう。これが母数の推定です。

$$\hat{\mu} = (X_1 + X_2 + \dots + X_5)/5 \quad (7.1)$$

この式では、母平均( $\mu$ )の推定を行っています。 $\mu$ の上についている $\hat{\mu}$ は推定値である事を意味します。当然、母集団全てを加算平均してだした $\hat{\mu}$ は $\mu$ と同じ値になります。しかし現実には母集団全てを観測し計算するなど不可能なことが多いため、その一部のみを使ってうまく母数に近づけた推定値を求めていく必要があります。

あるいは、統計的ないわゆる〇〇分布ではないけれどもなんらかの関数で説明できるような変化、分布も多くあります。これらを説明する際に、多項式曲線を使ってフィッティングしていったりするのですが、この際にもやはりこのモデルの形を定めるパラメータの適切な値を推定したくなります。

こうした量を推定していく方法を勉強していきましょう。

### 7.1 点推定と区間推定

母数の推定値を求める際に、方法が大きく分けて2種類あります。それが点推定と区間推定です。簡単ですが一応、点推定は先程の式(7.1)のように母数のある一つの値 $\hat{\theta}$ で指定する方法を指します。なおここで $\theta$ は母数を表す一般化記号で、実際には $\mu, \sigma$ などがあてはまります。

単一の点で推定をする以上、どうしても実際の母数との誤差が生じます。そのため、この誤差を最小

化していきたいというのが点推定の主なモチベーションです。

区間推定は、点推定と異なり推定に幅を持たせる方法です。たとえば、A組のテストの平均点は50-60点の間で、56くらいの可能性がめっちゃ高い。などといった推定です。

## 7.2 最尤推定

まずは点推定のうち、頻度主義でよく使われる最尤推定を考えます。そのために、まずはベイズの時に出てきていた尤度についてもう少し考えます。尤度は何もベイズ主義の用語ではありません。頻度主義でもよく使うもので、結局ベイズと頻度とのちがいは何かということと事前分布を用いるかの方にあります。

で、尤度ですが、事前確率を評価しているという風に言っていました。が推定の枠組みで考え直します。推定は分布の母数だったり、あるいはより複雑な多項式曲線フィッティングのパラメータだったりするので、こいつらを確率変数ベクトル  $\mathbf{w}$  とします。たとえば  $\mathbf{w} = [\mu, \sigma]$  とかです。

観測データを  $D$  でおくと、ベイズの定理は以下の形を取ります。

$$p(\mathbf{w}|D) = \frac{p(D|\mathbf{w})p(\mathbf{w})}{p(D)} \quad (7.2)$$

ここで、尤度  $p(D|\mathbf{w})$  について考えるとデータ集合  $D$  に対するベクトル  $\mathbf{w}$  による評価関数と捉えられます。事前分布を更新するという話の時と同様です。例のごとく  $p(D)$  は正規化しているだけなのでどうでもいいです。

さて、最尤推定ですが、読んで字のごとく尤度を最適化する推定方法です。尤度はパラメータベクトルの元での、得られたデータの尤もらしさを評価する関数なので、これを最大化する事で最も尤もらしいパラメータの推定値、最尤推定値を求める手法です。実際に例を考えながら説明してみます。

ある研究室 (A) に所属する学振特別研究員の数推定したいとします。学生 (S) の数は5人にしておきましょう。推定したいパラメータ (DC 研究員数) を  $i$  とします。そうすると

$$p(S = DC|i) = \frac{i}{5} \quad (7.3)$$

$$p(S = 凡人|i) = \frac{5-i}{5} \quad (7.4)$$

と尤度を仮定できます。最尤推定の基本は、尤度が最大の事象が観測されたという仮定を置くことにあります。よって、観測された事象分の尤度をかけ合わせて、最大になるパラメータ  $i$  の値を採用します。

たとえば今回、研究室 A から適当に人を選んできて DC に採用されているか確認したところ、採用採用不採用となっていたとします。その場合尤度関数  $L(S; i)$  は

$$L(S; i) = \frac{i}{5} \frac{5-i}{5} \quad (7.5)$$

となります。こいつを最大化すれば良いわけですね。ちなみに記法ですが、 $f(x;y)$  という記法は数学ではパラメータ  $y$  によって規定される変数  $x$  の関数、という意味です。ここでは  $y$  は変数ではなく、 $f$  を定義する際の固定値になります。だからこそ、今回は固定値として使う  $i$  の値を最適化したいというモチベになります。最尤法について多くの資料ではこっちの記法を使っていますが、違いが特になさそうなのと面倒なのでここでは  $L(S|i)$  としておくことにします。

せっくなんで手計算。

$$L(S|i) \propto -i^3 + 5i^2 \quad (7.6)$$

$$\therefore L(S|i)' \propto i(-3i + 10) \quad (7.7)$$

$$i = \frac{10}{3} \quad (7.8)$$

最大化は微分して 0 になる点を探せば良いんですね。今回のだとだいたい 3 が尤度最大の点でした。研究室 A の DC 学生は 5 人中 3 人であるという推定になります。優秀や...

なお、今回は大した計算じゃなかったのですがそのままやりましたが実際は 100 試行とかになると尤度を掛け算でだと値がすごい事になってしまうので対数に変換した対数尤度関数の最大化を行う事が多いです。対数に変換した場合、掛け算は足し算になるので計算が楽ですね。

さて、計算方法と気持ちが分かったところで以上の手順を一般化します。まずは尤度関数の定義から。

尤度関数

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad \text{尤度関数} \quad (7.9)$$

$$\log L(\theta|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta) \quad \text{対数尤度関数} \quad (7.10)$$

大丈夫でしょうか。尤度関数のかけざんを対数尤度関数では足し算に変換しました。ここで  $\theta$  は母数だったり、とにかくパラメータです。パラメータ  $\theta$  によって規定され、変数  $x$  を変数とする尤度を全ての  $x$  についてかけあわせたのが尤度関数でした。

対数尤度は計算を簡単にするため、それを対数変換したものです。

で、最尤推定はこいつらを最大化する処理なので、最尤推定値  $\hat{\theta}$  は

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} L(\theta) \quad (7.11)$$

$$= \arg \max_{\theta} \log L(\theta) \quad (7.12)$$

となります。  $\arg \max_x f(x)$  は関数  $f(x)$  を最大にする  $x$  の集合を意味します。つまり一番高い上に凸の山の頂点です。勿論集合の要素は1つのみでも問題ないので、解は一つだったり複数だったりします。

余談ですが、対数尤度関数は最大化する事で尤もらしい値をだすものでしたが、機械学習とかだとよくこれを符号反転させた  $-\log L(\theta)$  を誤差関数と呼び、これを最小化する方向にフィッティングしているものも多いようです。単調減少していくので、0に近付けるという意味で扱いやすいんでしょうね。

## 7.3 最大事後確率推定 (MAP 推定)

しかし本当に尤度最大化で良いのでしょうか？

さっきの例だと、自分のラボを優秀に見せようとしたPIがわざと採択されている学生だけ選ばれるように仕向けていたのかもしれない。本当は1人しかいないかもしれないし、極端な話2回目の試行で止めていたら採用採用だったので採用率 100%、最尤推定の結果は当然、採択者 5/5 名となってしまいます。

これでは困りますよね。このように、最尤推定の弱点として十分な試行回数がないと極端すぎる結果を招きかねない点があります。どうにか、尤度だけじゃなくて「あの教授は信用ならないしなあ」とかといった事も考慮できないのでしょうか...

そこでベイズに立ち返りましょう。

ベイズの定理の右辺には尤度だけでなく、事前分布もありました！これも使えば良いわけですね！

改めてベイズの式。

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{D}) = \frac{p(\mathbf{D}|\mathbf{w})p(\mathbf{w})}{p(\mathbf{D})} \quad (7.13)$$

$$\therefore p(\mathbf{w}|\mathbf{D}) \propto p(\mathbf{D}|\mathbf{w})p(\mathbf{w}) \quad (7.14)$$

最尤推定はこのうち尤度 ( $p(\mathbf{D}|\mathbf{w})$ ) にのみ注目して、こいつを最大化させていました。しかしそれでは十分なサンプル数がないと偶然の影響を消しきれないのでしたね。ではそれに加えて事前分布  $p(\mathbf{w})$  も用いてみましょう。

という事で、最尤推定と同じ問題に取り組むもう一つの方法として、MAP 推定 (Maximum a posteriori estimation) があります。

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg \max_{\theta} p(\theta|\mathbf{D}) \quad (7.15)$$

$$= \arg \max_{\theta} \frac{p(\mathbf{D}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{D})} \quad (7.16)$$

$$= \arg \max_{\theta} p(\mathbf{D}|\theta)p(\theta) \quad (7.17)$$

MAP 推定は日本語では最大事後確率推定、そのままですね。つまりベイズの定理の左辺を最大化しようという話で、事後確率を最大にする  $\theta$  を求めます。

つまり事後分布の一番山になっている部分に対応する  $\theta$  を選択します。簡単ですね。

ここまでは良いと思いますが、問題が一つ。

右辺で尤度に事前分布をかける事は、すなわち得られるパラメータ  $\theta$  自体も分布をもっていて、唯一つの真の値ではないという考えの元行うものです。ではそのパラメータが従う分布をどうするか？という事が問題になるわけで方法は大きく2種類です。

一つ、先行研究や何かしらの資料から明らかになっている分布を引っ張ってくる。これは分かりやすいですね。学振の例だったら、そのラボのこれまでの採択率だったり、国全体の採択率だったりのデータをもってきても良いかも。

次、そういった傾向すら分からない場合。この場合は無情報事前分布を持ってきます。無情報事前分布は事前に情報がない場合や事前分布を設定するにあたって根拠がない場合などに用いる分布でしたね。

無情報事前分布のうち、「多分一様やろ」として特に重みづけをしない分布が一様分布でした。勿論こいつも MAP 推定に使えます。その場合、MAP 推定値と最尤推定値は等しくなります。

しかし無情報事前分布として一様分布を利用する問題点として、連続分布にはなれない事などがあげられます。そのため、やはり多いのは共役事前分布を用いる事だと思います。尤度関数の形が分かっている場合、それに対応した共役事前分布を用いる事が多いです。

二項分布に対してはベータ分布、とかね。

## 7.4 ベイズ推定

MAP 推定は事後確率の最大にする  $\theta$  を求める方法でした。言い換えると、事後確率分布が最大になるような  $\theta$  を求める事です。よって、MAP 推定値が同じ  $\theta$  になった二つの分布があったとしてもその違いは評価されません。たとえば(計算すると若干違うかも?)、100 戦やって 75 勝しているベテランと 4 戦やって 3 勝している新人とを同じ勝率、強さで評価してしまったりすることになります。

勝率が同じになるのは良いとしても、その信頼度が全然違いますよね。ベテランの方がデータが多いので信用できます。新人の方は単純にビギナーズラックかも。

そこでベイズ推定は、事後分布そのものを使っちゃいます。

つまり、単純に  $\arg \max$  しないでそのまま分布を使えばいいわけです。ただ注意しないといけないのは、 $\arg \max$  ではないので MAP 推定のように  $p(\mathbf{D})$  は無視できません。

手順は普通にベイズを使って、

$$p(\theta|\mathbf{D}) = \frac{p(\mathbf{D}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{D})} \quad (7.18)$$

を計算し、事後分布  $p(\theta|\mathbf{D})$  を求めるだけです。この時、別に  $\theta$  の点推定をしているわけじゃないので  $\hat{\theta}_{bayes}$  のような量が求められるわけではないです。それをするのは MAP 推定でしたね。

こうすることで、 $\theta$  の分布を求められます。裾野が広く背の低い分布なら信頼度は低いし、裾野が狭く背の高い分布なら信頼度が高い、という風に見ることが出来ます。一般に、データ数が多いほど信頼度は上がっていく傾向にあります。

## 7.5 逐次推定

分布を使えるということに加え、もう一つベイズ推定の便利な点、それは求めた事後分布を事前分布として用いて、また次のデータを使って推定を計算しなおす、という事を容易に可能にする点です。

ここでは、そんな逐次推定として逐次ベイズ推定を紹介します。

とはいえ、それっぽい事は実は既にやっています。ベイズの定理の説明で無作為に選んだ男女の数から研究室を推定する問題を考えましたよね。一回目男性、二回目男性、三回目女性、とデータを重ねるにつれて事前確率を更新しつつ計算しました。基本的にはあの操作の事です。

$$p(\theta|x_1) = \frac{p(x_1|\theta)p(\theta)}{p(x_1)}$$

$$\therefore p(\theta|x_1) \propto p(x_1|\theta)p(\theta) \quad (7.19)$$

これは一つのデータを観測して未知の母数の事後分布を推定する式でした。ここで、 $p(x_1|\theta)$  を特に尤度関数  $L(\theta|x_1)$  と言いました。次に、もういくつかデータを観測した場合と、そこに更にもう一つデータをプラスした尤度関数は

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta) \quad (7.20)$$

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = L(\theta|x_1, \dots, x_n)p(x_{n+1}|\theta) \quad (7.21)$$

となりました。よってデータ  $X = x_1, \dots, x_n$  で計算された事後分布

$$p(\theta|x_1, \dots, x_n) \propto L(\theta|x_1, \dots, x_n)p(\theta) \quad (7.22)$$

$$(7.23)$$

と、そこにデータ  $x_{n+1}$  を新たに加えて計算された事後分布とは

$$p(\theta|x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \propto L(\theta|x_1, \dots, x_n)p(x_{n+1}|\theta)p(\theta) \quad (7.24)$$

$$\propto L(\theta|x_{n+1})L(\theta|x_1, \dots, x_n)p(\theta) \quad (7.25)$$

$$\propto L(\theta|x_{n+1})p(\theta|x_1, \dots, x_n) \quad (7.26)$$



と証明できるように、これまでの観測値を得て計算した事後分布は新たな観測値を得たときの事前分布になる関係にある事がわかります。これを用いて、新しくデータを観測するたびに  $p(x|\theta)$  をかけていく事で分布を更新していく事ができます。

一方、最尤推定などの手法は事前分布を考えません。つまり「さっき計算したデータ」を利用することが出来ないわけですね。もう一度最初から計算しなおす必要があります。この点、新しく得たデータ分だけ分布をちょっと修正すれば言い訳ですから、ベイズ推定は計算コスト的にも考え方的にも楽だし便利ですね。

## 7.6 推定のまとめ

推定はあくまで、パラメータのもつ不確実性を実測されたデータで条件づけて更新する作業です。得られたデータから、そのデータの母集団が従っている分布は、母数 (母平均とか) は、パラメータは、なんだろうと考えるものです。

最尤推定は実測値が尤も観測されやすそうなパラメータを尤度のみを用いて推定する手法で、ベイズ推定は事前分布も用いてそのパラメータの事後分布を推定する手法でした。MAP 推定はベイズ推定の事後分布のうち、事後確率が最大になるパラメータを点推定する手法でした。

これらの手法を用いる事で、得られたデータ分布の特徴を掴むことができます。よって、脳の学習モデルの基本になっていたりします。これまでに得られた感覚データを元に、外界についてのモデルを内部に構築していく過程のことを我々は学習と呼んでいます。よって、脳は (逐次) ベイズ推定によって環境に適用しているよね！なんてベイズ脳理論なんていうものが盛んだった過去があります。

というよりも、ベイズ推定自体が人間っぽく統計しようって考えられたみたいな背景があるようです。

今ではもっと拡張というか盛り盛りになった自由エネルギー原理なんていうお化けに吸収されていたりしますが、いずれにせよ重要な概念です。頭のかたすみに置いておくくらいしておく嬉しいかもですね。

## 第8章 予測

実測データで条件づけたパラメータの不確実性を減少させる推定に対し、実測データで条件づけた未観測のデータについての不確実性を更新するのが予測です。実際の現場だとこっちを使いたい事も多いですね。

機械学習なんかはこれをいかにセクシーでエレガントにやるかを競っているわけです。神経科学的には、BMIの実装だったり、脳の知覚モデルなんかを理解していく上で必要になります。しかし絶対というわけでもないのですらっと、とりあえずベイズの予測だけいれておきます。

### 8.1 ベイズ予測

まずは分かりやすいベイズ予測。これまでに観測されたデータを用いたベイズ推定で求めた事後分布を使って、

ベイズ予測の手順

$$\begin{aligned} p(\theta|\mathbf{D}) &= \frac{p(\mathbf{D}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{D})} && \text{事後分布の推定} \\ p(D^{new}|\mathbf{D}) &= \int p(D^{new}|\theta)p(\theta|\mathbf{D})d\theta && \text{予測} \end{aligned} \quad (8.1)$$

のような事をして、未観測のデータを予測します。 $p(D^{new}|\mathbf{D})$ はデータ集合 $\mathbf{D}$ を観測した状態で、次に観測されると思われるデータの予測値の分布で、これを事後予測分布と言います。

式を解釈すると、パラメータ $\theta$ が取りうる値の全ての範囲で、パラメータ $\theta$ がある値を取る確率 $p(\theta)$ で重みづけした $p(D_1^{new}|\theta)$ の足し合わせを $D_1^{new}$ の確率、 $p(D_2^{new}|\theta)$ の足し合わせを $D_2^{new}$ の確率、というように計算することで $D^{new}$ が取りうる値の予測分布を求めるものです。

ここで、尤度 $p(D^{new}|\theta)$ は未観測データの尤度になりますが、事前に観測されているデータと同じ生成過程で生成されているとすれば事後分布の計算の際に用いた尤度 $p(\mathbf{D}|\theta)$ と同じものを使うことができます。

こうして得られた事後予測分布から、期待値を取ったりして点推定しても良いし、そのまま分布として扱ってもいいです。ちょっとお漏らしすると、この予測分布による点推定？のような事を脳は常におこなっていて、ゆえに「我々が感じているのは厳密には実際の外界じゃなくて脳の予測結果(\*正確じゃない表現です)である、だからたまに予測がミスの事があって、それが錯覚である」、なーんて話があったりもします。楽しいですよ。

詳しくはいずれ advanced で書いていきましょう。ぼくの学士卒論は視聴覚統合錯覚だったので、当

時はこういった話を聞いてとてもわくわく，というか興味をそそられました．計算論的に神経科学に向き合うのも良いな！と思ったきっかけです．当時は何書いているのか何も分からなかったのに，今は自分で簡単に解説できるくらいにはなったのかなと思うと感慨深いです．