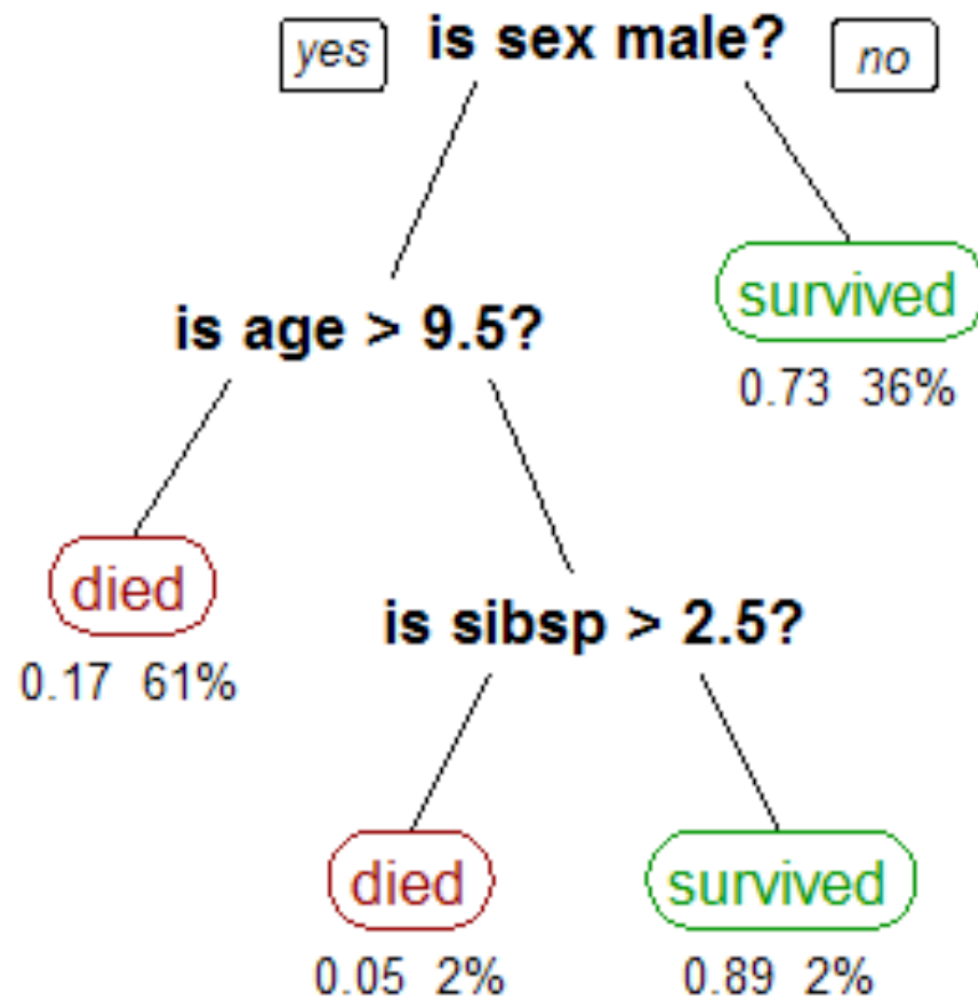


MML minor #3

Градиентный бустинг

Решающее дерево



Критерий информативности

$\{x_i, y_i\}$ — выборка

$A = \{i_1, \dots, i_n\}$ — индексы подвыборки

Классификация (k классов)

Энтропийный критерий

$$H(A) = \sum_{i=1}^k p_i \log p_i, \quad p_k = \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} [y_i = k]$$

Регрессия

Критерий дисперсии

$$H(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} (y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} y_i$$

Обучение дерева

Выбор разбиения для подвыборки A

- Рассматриваем критерии вида $[x^j < t]$ для $j = 1, \dots, d$ (признаки) и $t \in \mathbb{R}$.
- Качество разбиения A на A_l и A_r :

$$Q(A, j, t) = H(A) - \frac{|A_l|}{|A|} H(A_l) - \frac{|A_r|}{|A|} H(A_r)$$

- Наилучшее разбиение:

$$Q(A, j, t) \rightarrow \max_{j, t}$$

Критерии остановки разбиения

- Глубина
- Размер подвыборки

Решающий лес

$a_1(x), \dots, a_n(x)$ — набор решающих деревьев

$a(x) = \text{композиция}(a_1(x), \dots, a_n(x))$ — решающий лес

Композиция для классификации

$$a(x) = \arg \max_y \sum_{i=1}^n [a_i(x) = y]$$

Композиция для регрессии

$$a(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i(x)$$

Обучение леса

Как строить набор деревьев $a_1(x), \dots, a_n(x)$?

- **Бэггинг**

Каждое дерево обучается на случайной подвыборке

- **Метод случайных подпространств**

Каждое дерево обучается на случайном подмножестве признаков

- **Случайный лес**

Каждое разбиение каждого дерева рассматривает случайное подмножество признаков

Бустинг для регрессии

- **Композиция с помощью суммы**

$$a(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_K(x)$$

- **Обучение на ошибках**

$a_k(x)$ обучается на ошибках $a_1(x) + \dots + a_{k-1}(x)$.

Бустинг для регрессии

$L = \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ — обучающая выборка

K — количество деревьев, λ — скорость обучения

- Инициализация

$$a(x) := 0, \quad r_i = y_i \text{ для } i = 1, \dots, N$$

- Для $k = 1, \dots, K$

- Новая обучающая выборка

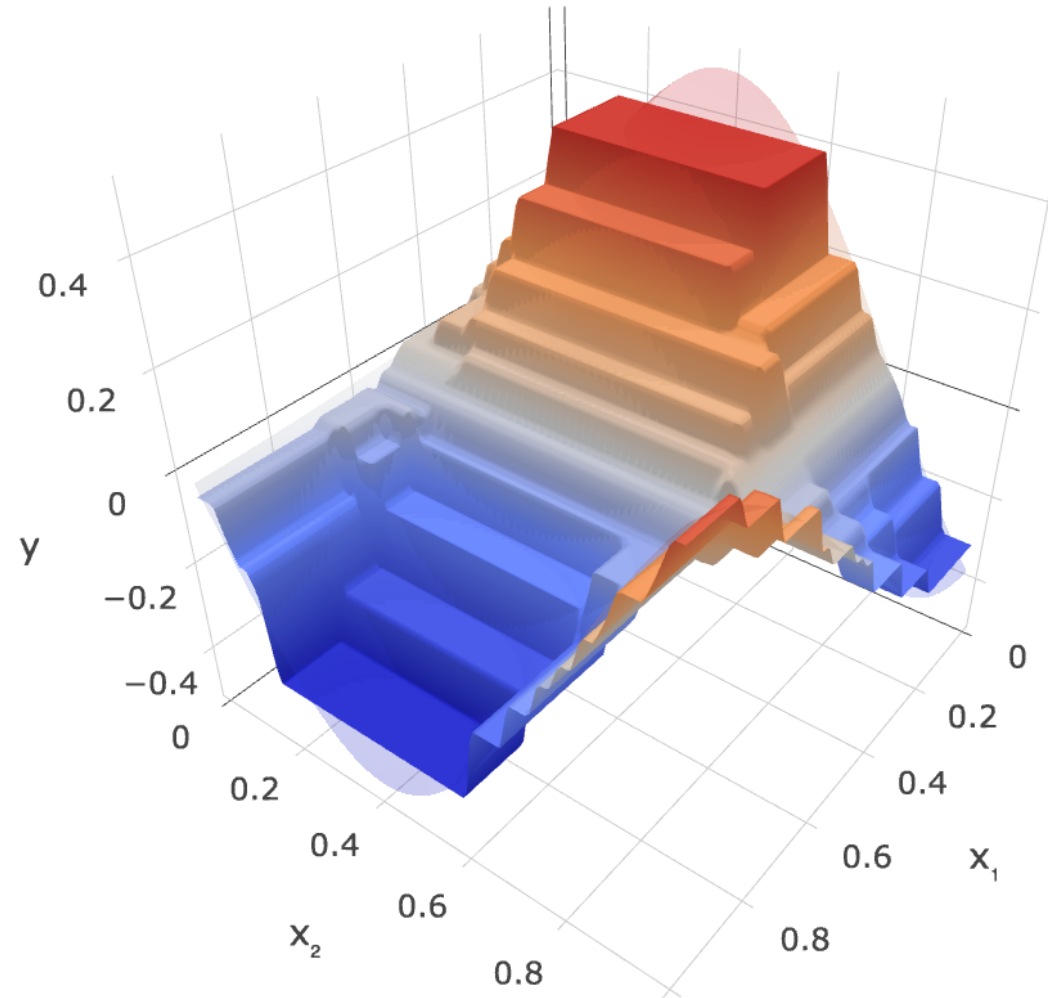
$$L' = \{x_i, r_i\}_{i=1}^N$$

- Обучение решающего дерева a_k на L'
 - Обновление алгоритма и ошибки

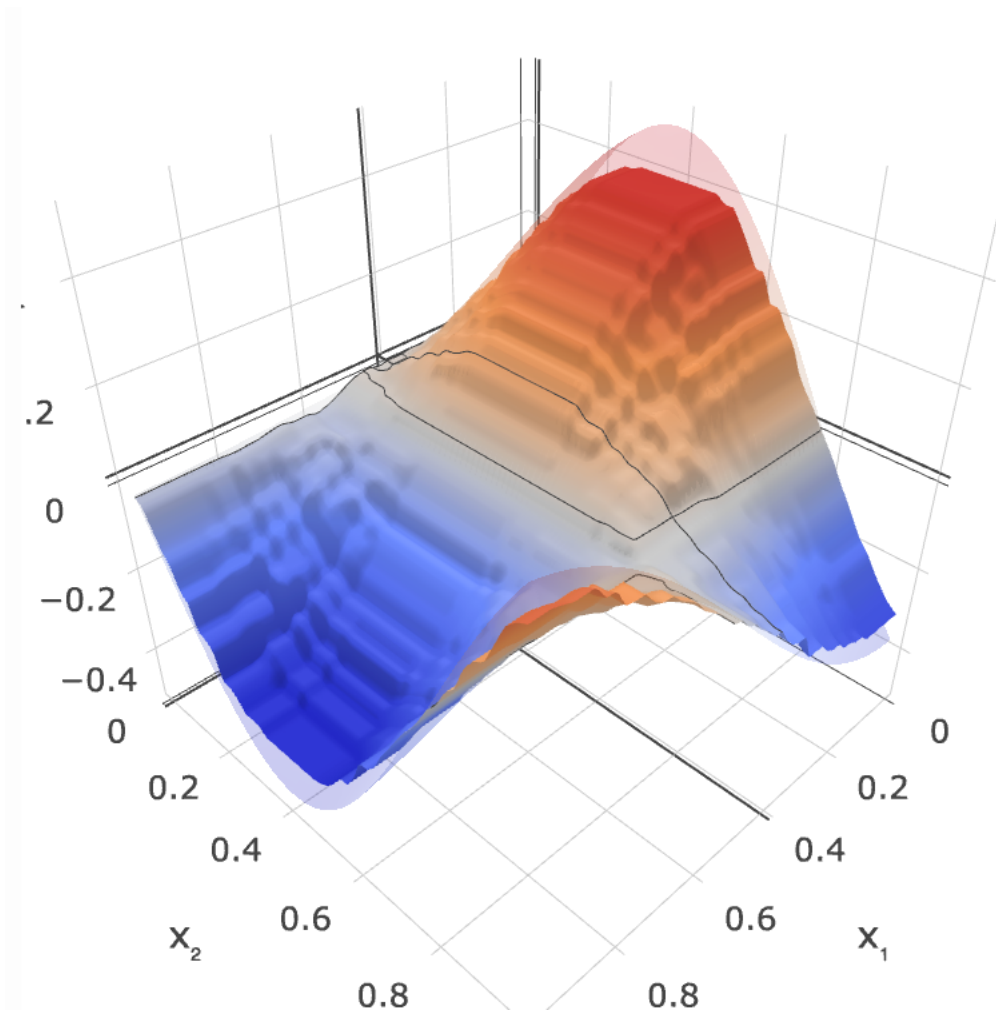
$$a(x) := a(x) + \lambda a_k(x)$$

$$r_i := y_i - a(x_i) \text{ для } i = 1, \dots, N$$

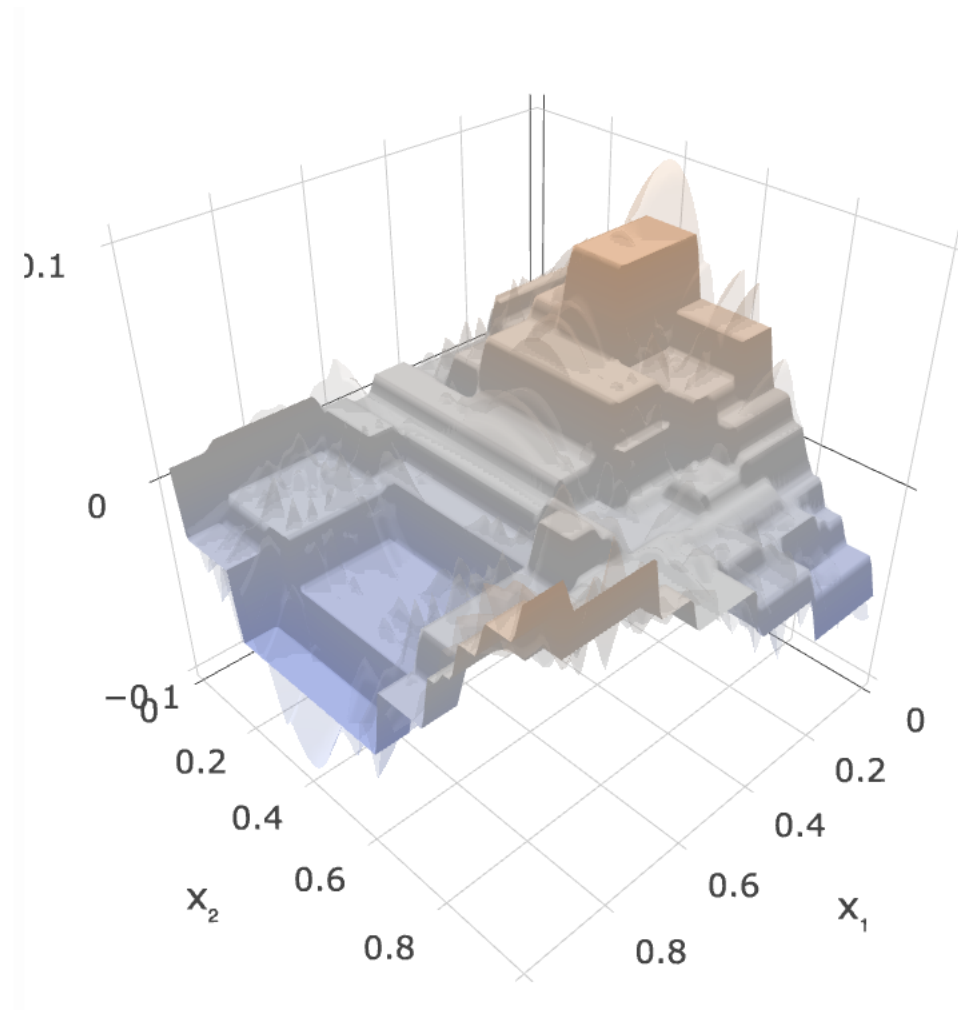
Одно дерево глубины 6



Строим следующее дерево на остатки



Уже построили 6 деревьев



Строим седьмое на остатки

Остаток и градиент потерь

- Заметим, что остатки могут быть найдены как антиградиент функции потерь по ответу модели, посчитанный в точке ответа уже построенной композиции:

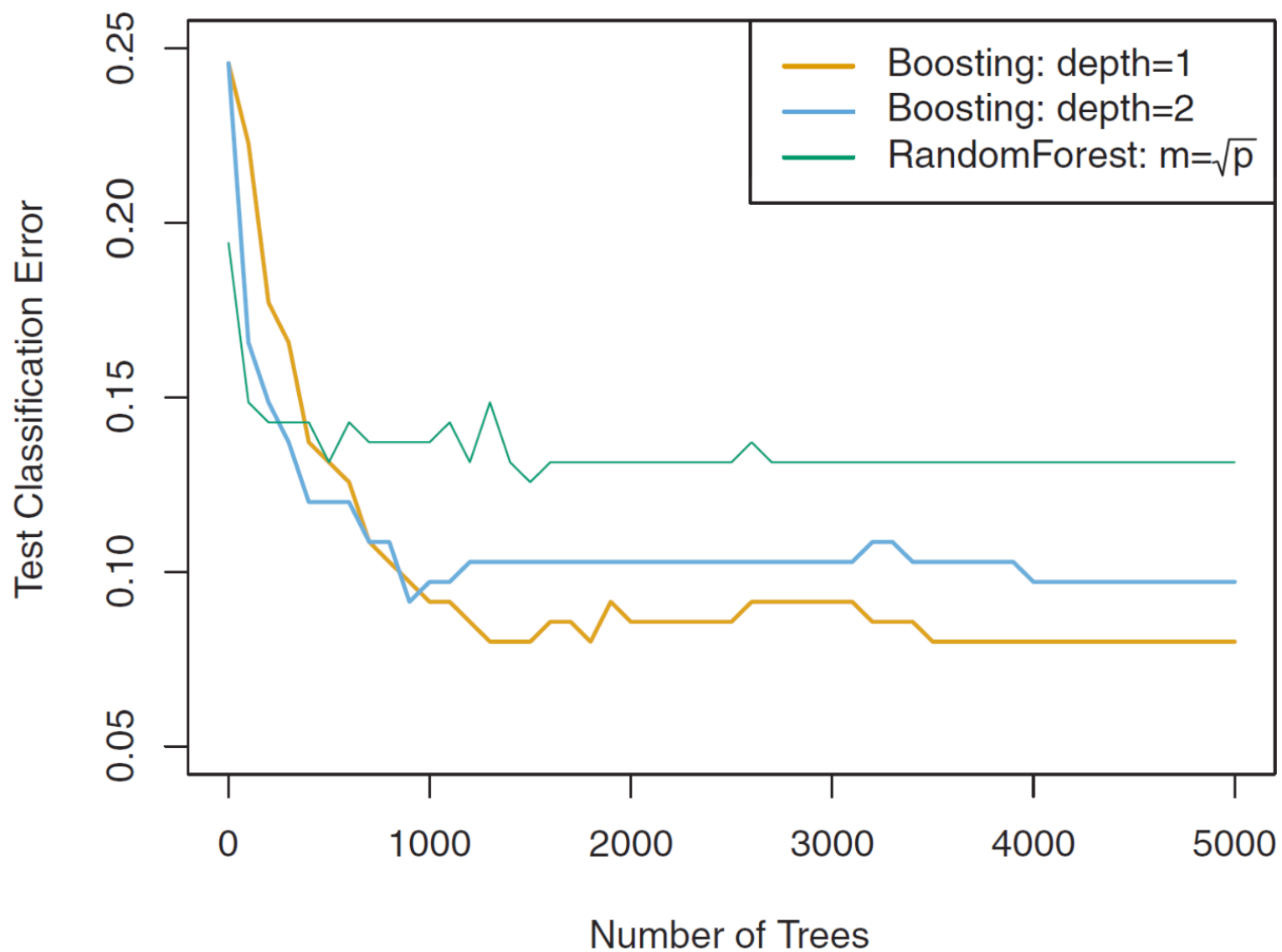
$$z_i^{(N-1)} = \boxed{y_i - a_{N-1}(x_i)} = - \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} (a - y_i)^2 \Big|_{a=a_{N-1}(x_i)}$$

Мы получили градиентный бустинг для задачи регрессии!

Особенности бустинга

- **Переобучение**
Нужна сильная регуляризация деревьев.
Например: глубина 1 или 2.
- **Медленное обучение**
Сильная регуляризация → медленная сходимость
- **Высокая эффективность**
(сильная регуляризация + много итераций)

Пример кривой потерь



Бустинг для классификации

$\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ — обучающая выборка

$$y_i \in \{-1, +1\}$$

$$a_i(x) \in \{-1, +1\} \text{ для } i = 1, \dots, K$$

$$a(x) = a_1(x) + \dots + a_K(x)$$

На итерации k : $a_k(x) \sim \{x_i, r_i\}$

$$r_i = y_i - a(x_i) = y_i - (a_1(x_i) + \dots + a_{k-1}(x_i))$$

Это вообще законно?

Бустинг для классификации

Добавляем компонент:

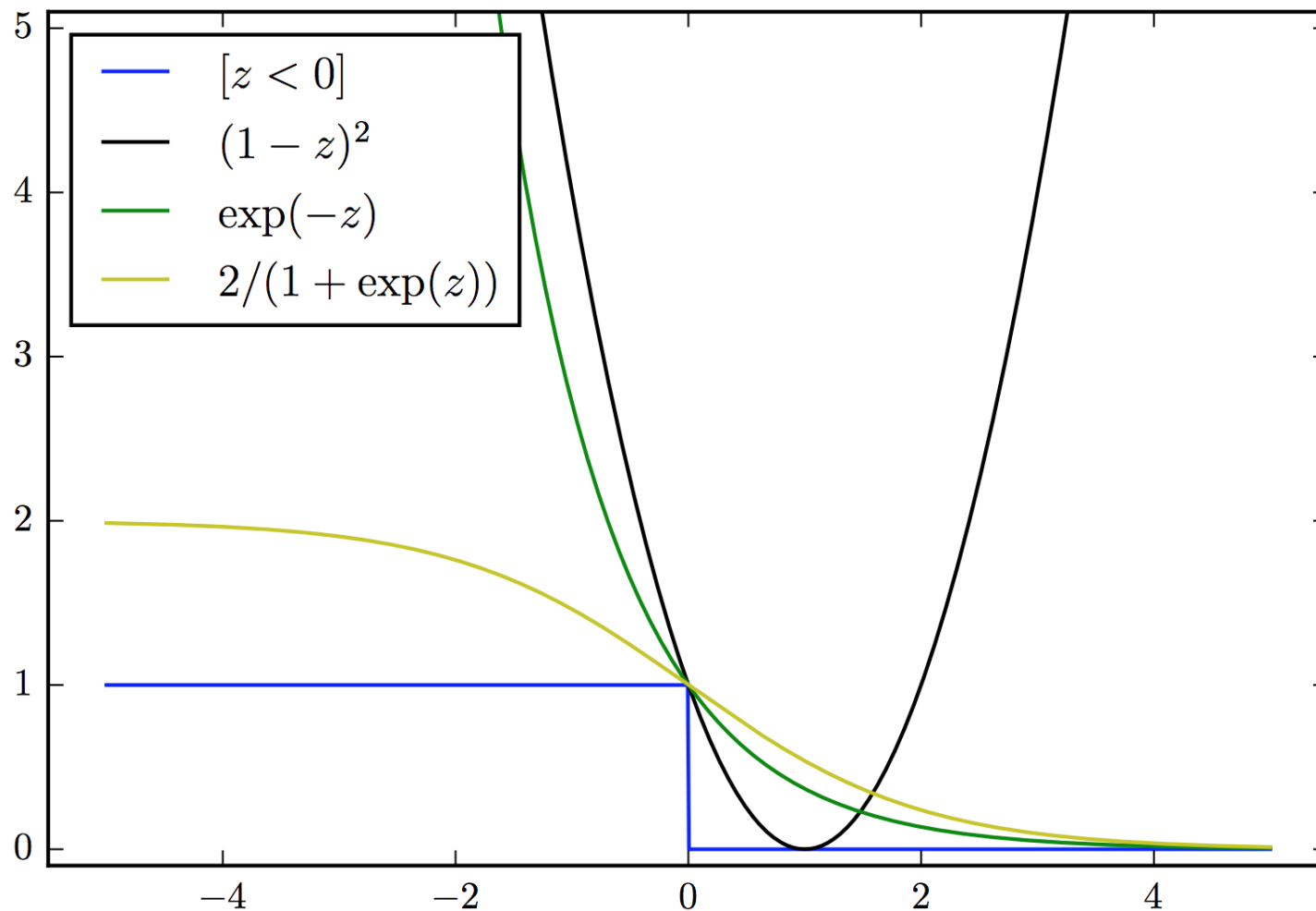
$$Q(a, a_{k+1}) = \sum_{i=1}^N [y_i \neq \text{sign}(a(x_i) + a_{k+1}(x_i))]$$

$$Q(a, a_{k+1}) \rightarrow \min_{a_{k+1}}$$

$$\sum_{i=1}^N [y_i \neq \text{sign}(f(x_i))] = \sum_{i=1}^N [y_i \underbrace{f(x_i)}_{\text{Отступ на объекте}} < 0] \quad \text{Оптимизировать сложно!}$$

Верхние оценки

- $T(z) = \sum_{i=1}^N [z = y_i f(x_i) < 0]$



AdaBoost

$$a(x) = \text{sign}(\alpha_1 t_1(x) + \dots + \alpha_k t_k(x))$$

$$\alpha_j \in \mathbb{R}, \quad t_j(x) \in \{-1, +1\} \text{ для } j = 1, \dots, k$$

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N \exp \left(-y_i \sum_{j=1}^k \alpha_j t_j(x_i) \right)$$

Добавляем компонент:

$$Q(a, \alpha_{k+1}, t_{k+1}) = \sum_{i=1}^N \exp \left(-y_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j t_j(x_i) + \alpha_{k+1} t_{k+1}(x_i) \right) \right)$$

$$Q(a, \alpha_{k+1}, t_{k+1}) \rightarrow \min_{\alpha_{k+1}, t_{k+1}}$$

AdaBoost

$$\begin{aligned} Q(a, \alpha_{k+1}, t_{k+1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \exp \left(-y_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j t_j(x_i) + \alpha_{k+1} t_{k+1}(x_i) \right) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \exp \left(-y_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j t_j(x_i) \right) \right) \exp(-y_i \alpha_{k+1} t_{k+1}(x_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^N w_i \exp(-y_i \alpha_{k+1} t_{k+1}(x_i)). \end{aligned}$$

$$w_i = \exp \left(-y_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j t_j(x_i) \right) \right)$$

AdaBoost

$$Q(\alpha_{k+1}, t_{k+1}) = \sum_{i=1}^N w_i \exp(-y_i \alpha_{k+1} t_{k+1}(x_i))$$

Обучение t_{k+1}

- Взвешенные объекты: w_i
- Исходные метки: y_i
- Ошибка классификации: $w_i[y_i \neq t_{k+1}(x_i)]$

Выбор α_{k+1} (без доказательства)

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^N w_i[y_i \neq t_{k+1}(x_i)]}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

$$\alpha = \ln((1 - \varepsilon)/\varepsilon)$$

Взвешенные решающие деревья

Взвешенные доли классов:

$$p_k = \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} w_i [y_i = k]$$

Энтропия:

$$H(A) = \sum_{i=1}^k p_i \log p_i,$$

Качество разбиения A на A_l и A_r :

$$Q(A, j, t) = H(A) - \frac{|A_l|}{|A|} H(A_l) - \frac{|A_r|}{|A|} H(A_r)$$

Алгоритм AdaBoost

$L = \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ — обучающая выборка

- Инициализация решающей функции

$$f(x) := 0, \quad w_i = 1/N \text{ для } i = 1, \dots, N$$

- Для $k = 1, \dots, K$

- Взвешенная обучающая выборка

$$L' = \{x_i, y_i, w_i\}_{i=1}^N$$

- Обучение решающего дерева t_k на L'
 - Вычисление α_k по величине ошибки t_k на L'
 - Обновление алгоритма и весов

$$f(x) := f(x) + \alpha_k t_k(x)$$

$$w_i = \exp(-y_i f(x_i))$$

- Итоговый классификатор: $a(x) = \text{sign}(f(x))$

AdaBoost

Достоинства

- Высокая обобщающая способность

Недостатки

- Неустойчивость к шуму
(экспоненциальная функция потерь)
- Плохая интерпретируемость

Градиентный бустинг

$$a_N(x) = \sum_{n=1}^N b_n(x)$$

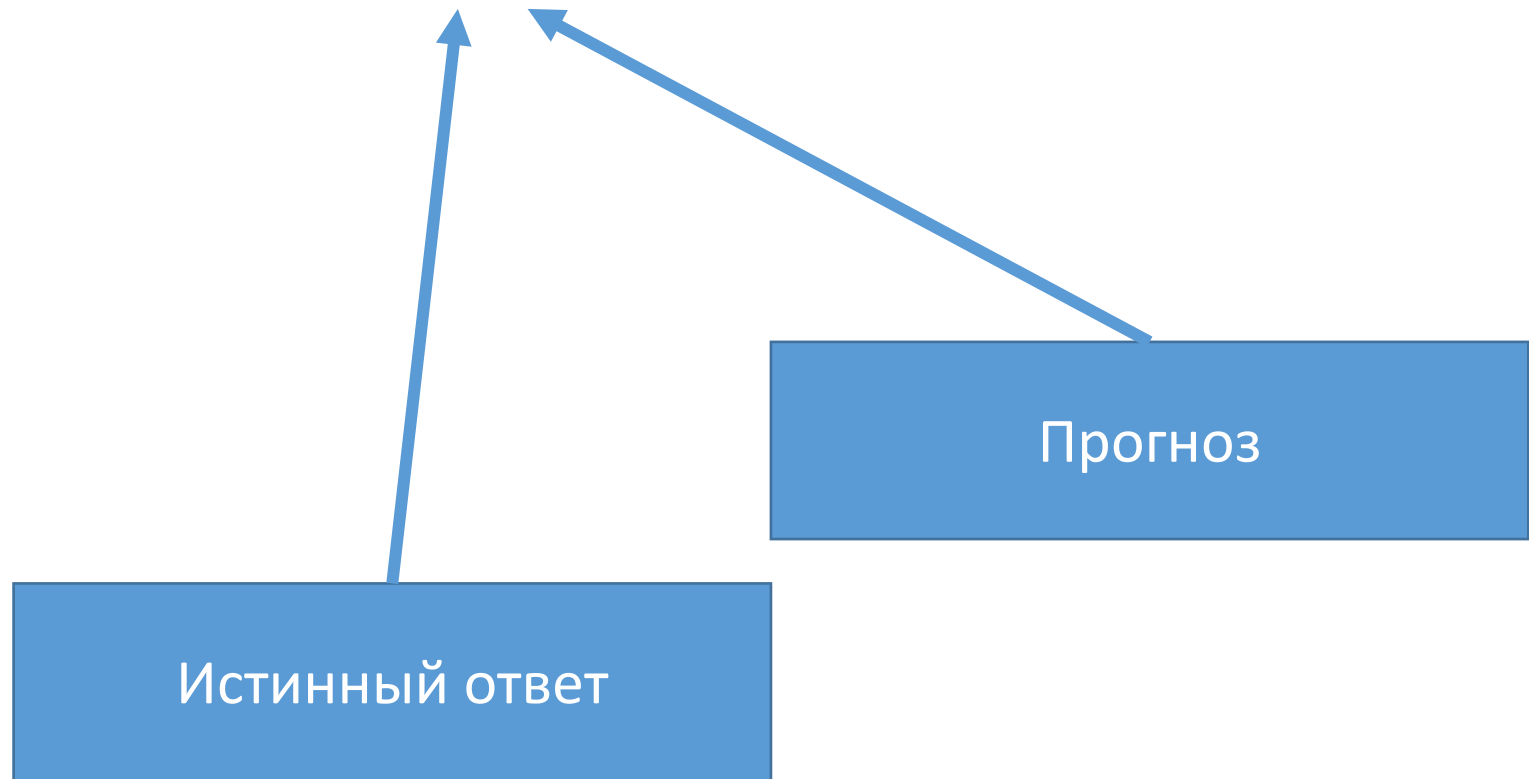


Базовый алгоритм

The diagram consists of a blue rectangular box at the bottom right containing the text 'Базовый алгоритм'. A blue arrow originates from the top-left corner of this box and points diagonally upwards and to the left, terminating at the term $b_n(x)$ within the summation formula $a_N(x) = \sum_{n=1}^N b_n(x)$ located above and to the left of the box.

Функция потерь

- Ошибка на одном объекте: $L(y, z)$



Функция потерь

- Ошибка на одном объекте: $L(y, z)$
- MSE: $L(y, z) = (y - z)^2$
- Логистическая функция потерь: $L(y, z) = \log(1 + \exp(-yz))$
- ...

Инициализация

- $b_0(x)$ — первый алгоритм в композиции
- Примеры:
- $b_0(x) = 0$
- $b_0(x) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} y_i$
- $b_0(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{i=1}^{\ell} [y_i = y]$

Обучение базового алгоритма

- Уже построили:

$$a_{N-1}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(x)$$

Обучение базового алгоритма

- Задача:

$$\sum_{i=1}^{\ell} L(y_i, a_{N-1}(x_i) + b(x_i)) \rightarrow \min_b$$

Оптимальный сдвиг

- Какие прогнозы оптимальны для обучающей выборки?

$$\sum_{i=1}^{\ell} L(y_i, a_{N-1}(x_i) + s_i) \rightarrow \min_{s_1, \dots, s_{\ell}}$$

Оптимальный сдвиг

- Вектор сдвигов: $s = (s_1, \dots, s_\ell)$

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\ell} L(y_i, a_{N-1}(x_i) + s_i) \rightarrow \min_s$$

Оптимальный сдвиг

- Сдвинемся в сторону наискорейшего убывания:

$$s = -\nabla F = \left(\underbrace{-L'_z(y_1, a_{N-1}(x_1))}, \dots, -L'_z(y_\ell, a_{N-1}(x_\ell)) \right)$$

Сдвиг по первому объекту

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\ell} L(y_i, a_{N-1}(x_i) + s_i) \rightarrow \min_s$$

Ошибка на одном объекте: $L(y, z)$

Оптимальный сдвиг

- Сдвинемся в сторону наискорейшего убывания:

$$s = -\nabla F = \left(-L'_z(y_1, a_{N-1}(x_1)), \dots, \underbrace{-L'_z(y_\ell, a_{N-1}(x_\ell))}_{\text{Сдвиг по } \ell\text{-му объекту}} \right)$$

Сдвиг по ℓ -му объекту

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\ell} L(y_i, a_{N-1}(x_i) + s_i) \rightarrow \min_s$$

Ошибка на одном объекте: $L(y, z)$

Обучение базового алгоритма

- Знаем $b(x)$ для обучающей выборки
- Нужно найти функцию для всего пространства объектов
- Задача машинного обучения

Обучение базового алгоритма

$$b_N(x) = \arg \min_b \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (b(x_i) - s_i)^2$$

- Вся информация о функции потерь L содержится в сдвигах s_i
- Используем MSE независимо от исходной задачи

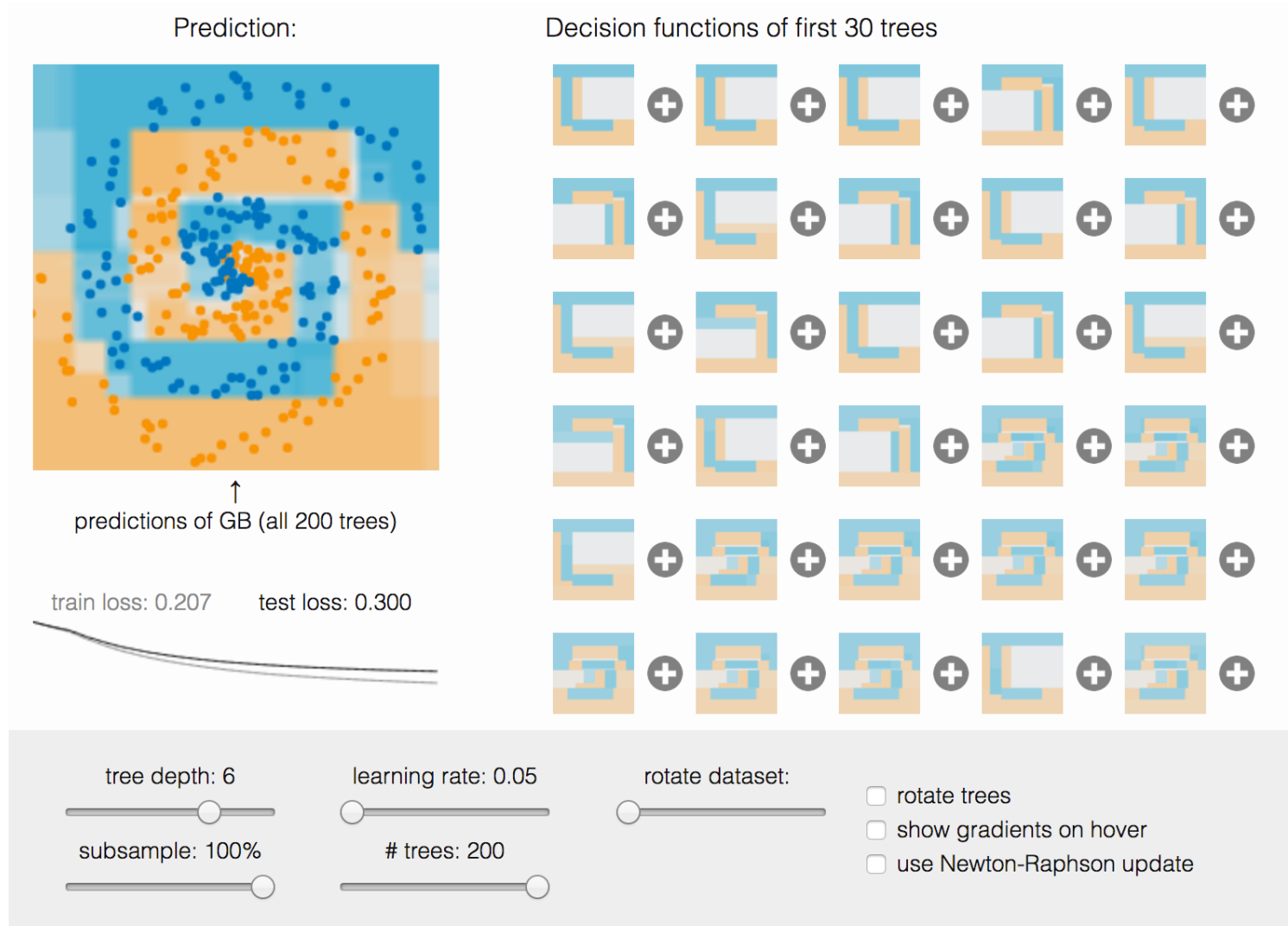
Градиентный бустинг

1. Построить начальный алгоритм $b_0(x)$
2. Для $n = 1, \dots, N$:
3. Вычислить сдвиги:
 - $s = \left(-L'_z(y_1, a_{n-1}(x_1)), \dots, -L'_z(y_\ell, a_{n-1}(x_\ell)) \right)$
4. Обучить новый базовый алгоритм:
 - $b_N(x) = \arg \min_b \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (b(x_i) - s_i)^2$
5. Добавить алгоритм в композицию: $a_n(x) = \sum_{m=1}^n b_m(x)$

Резюме

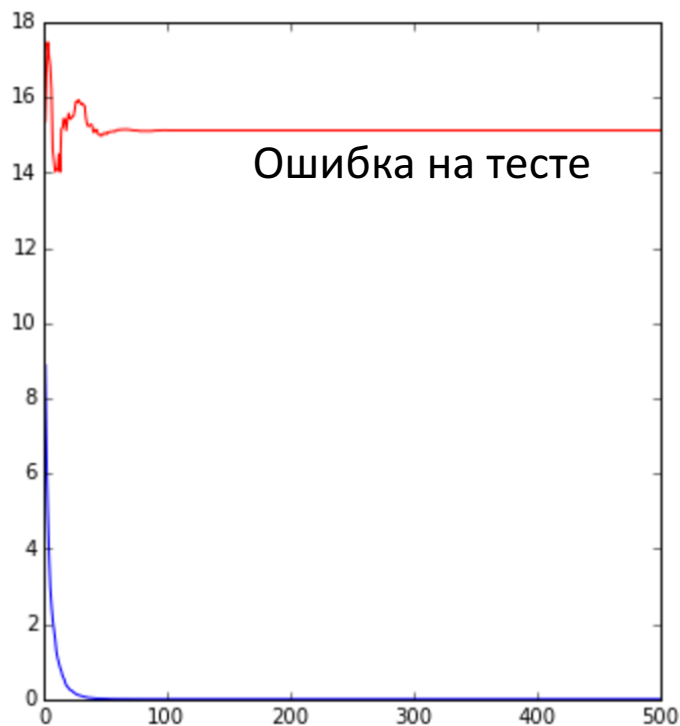
- Градиентный бустинг последовательно строит композицию
- Базовый алгоритм приближает антиградиент функции ошибки
- Результат — градиентный спуск в пространстве алгоритмов

Как приближает

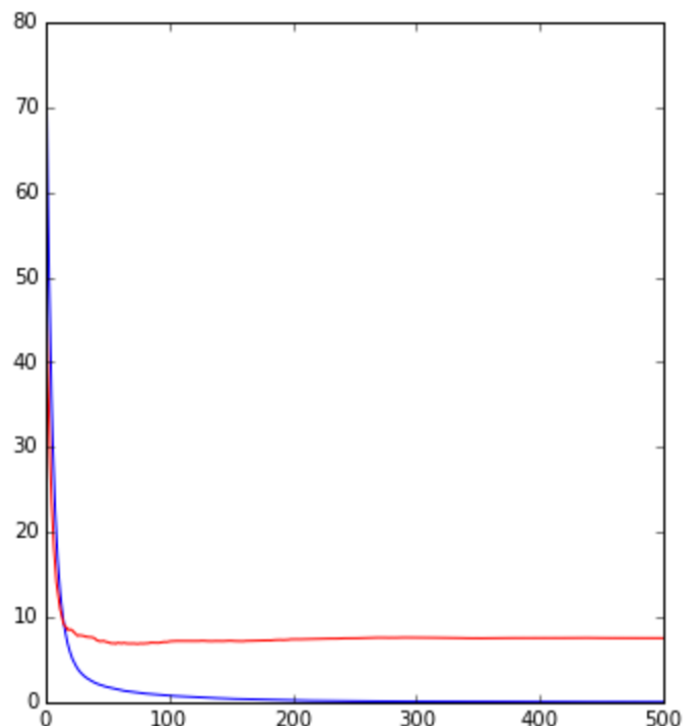


Сокращение шага

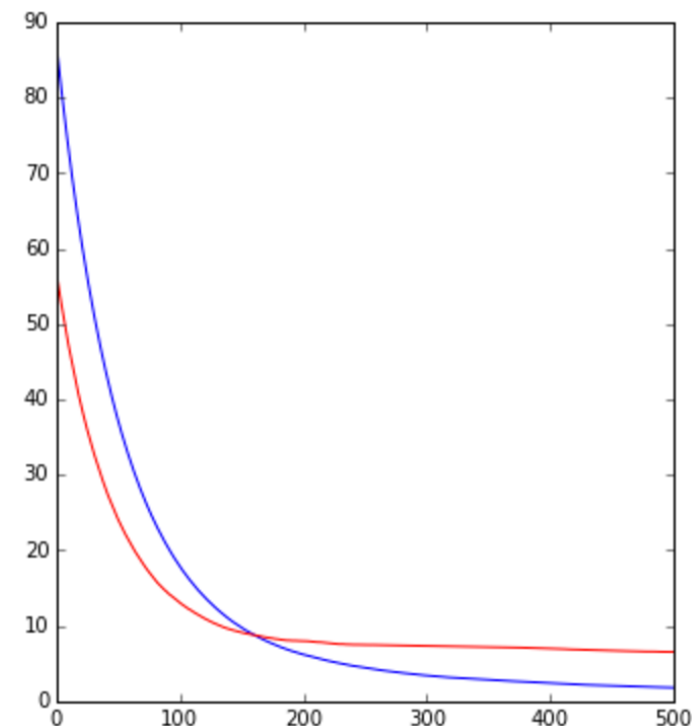
Как и в градиентном спуске шаг надо подбирать и уменьшать с итерациями



$$\eta = 1$$



$$\eta = 0.1$$



$$\eta = 0.01$$

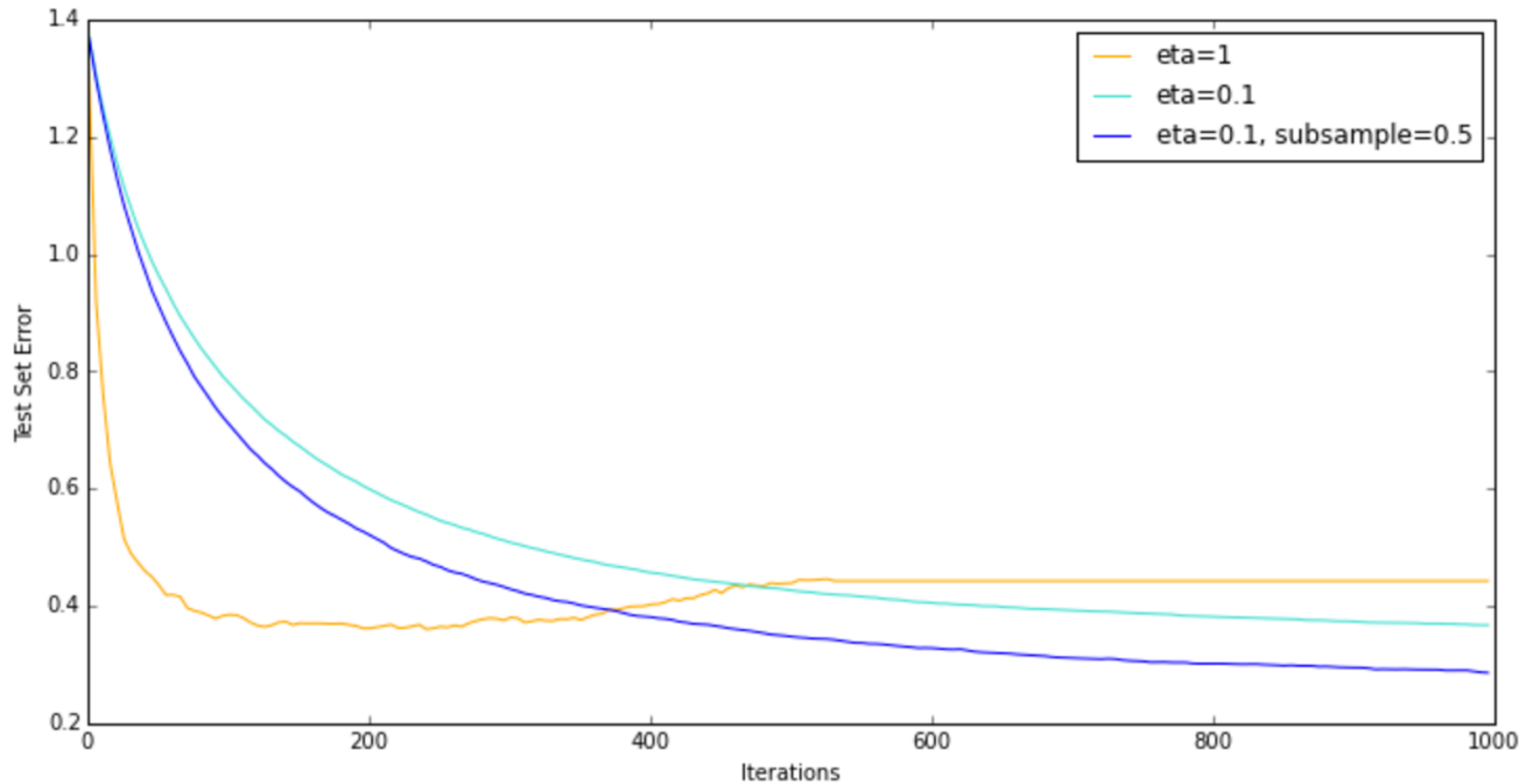
Сокращение шага

- Чем меньше шаг, тем больше нужно базовых алгоритмов
- Сокращение шага — гиперпараметр
- Две стратегии перебора:
 - Зафиксировать η , подбирать N
 - Зафиксировать N , подбирать η

Стохастический градиентный бустинг

- Обучаем каждый алгоритм по случайной подвыборке

Стохастический градиентный бустинг



Резюме

- Градиентный бустинг переобучается из-за слабых базовых алгоритмов
- Решение: сокращение шага
- Стохастический градиентный бустинг

Ссылки

- <https://alexanderdyakonov.wordpress.com/2017/06/09/градиентный-бустинг/>
- [http://arogozhnikov.github.io/2016/07/05/gradient boosting playground.html](http://arogozhnikov.github.io/2016/07/05/gradient_boosting_playground.html)
- [http://arogozhnikov.github.io/2016/06/24/gradient boosting explained.html](http://arogozhnikov.github.io/2016/06/24/gradient_boosting_explained.html)