基于四元数动力学的误差状态卡尔曼滤波器

张康宁

2023 年 6 月 21 日

目录

插图

表格

1 四元数定义和性质

1.1 四元数定义

Cayley-Dickson 结构给出了一个比较有意思的四元数描述：如果我们有两个复数：$A = a + bi$ 和 $C = c + di$，那么构造 $Q = A + Cj$ 并定义 $k \triangleq ij$ 就产生了四元数空间 $\mathbb{H}$ 中的一个数字，

$$Q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}, \tag{1}$$

这里的 $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{B}$，$\{i, j, k\}$ 是三个虚单位数，定义如下：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2a}$$

从上式可得：

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j. \tag{2b}$$

从式 (1) 就能看出，我们可以在四元数定义中嵌入复数，同样适用于实数和虚数。在这种意义下，实数、虚数和复数都属于四元数，即:

$$Q = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}, \quad Q = bi \in \mathbb{I} \subset \mathbb{H}, \quad Q = a + bi \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{H} \tag{3}$$

同样，为了完整起见，我们可以定义 $\mathbb{H}$ 的三维虚子空间中的数。我们把它称为纯虚四元数，可以使用 $\mathbb{H}_p = Im(\mathbb{H})$ 表示纯四元数空间，

$$Q = bi + cj + dk \in \mathbb{H}_p \subset \mathbb{H}. \tag{4}$$

值得注意的是，单位长度的常规复数 $\mathbf{z} = e^{i\theta}$ 可以编码二维平面的旋转（利用复数乘法：$\mathbf{x}' = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$），“扩展复数”或单位长度四元数 $\mathbf{q} = e^{(u_x i + u_y j + u_z k)\theta/2}$ 编码了三维空间的旋转（使用双四元数乘法：$\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$，我们后面会介绍）。

CAUTION: 并不是所有四元数定义都相同。一些作者将乘法写成 ib 而不是 bi，所以就得到 $k = ji = -ij$ 和 $ijk = 1$，这就变成了满足左手定则的四元数。并且有很多作者将实部放在最后，得到 $Q = ia + jb + kc + d$。这些选择并没有根本的影响，只是在细节上造成了整个表达方式的不同。进一步的解释和区分请参考第三节。

CAUTION: 还有一些其他定义会在公式细节上产生一些不同。主要集中在我们给予旋转操作的解释或意义，比如对向量进行旋转或对参考系进行旋转本质上是相反运算。进一步的解释和区分请参考第三节。

NOTE: 在以上不同的四元数定义中，该文档主要针对 $Hamilton$ 定义，它的显著特点就是公式(2)的定义。正确而有效的消除歧义需要开发大量的资料，所以歧义消除放在前面提到的第三节。

1.1.1 四元数表示方法

实部 + 虚部的表示法 $\{1, i, j, k\}$ 有时使用起来并不方便。在使用公式(2)的定义时，四元数可以表示为标量 + 向量的和，

$$Q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k \quad \Leftrightarrow \quad Q = q_w + \mathbf{q}_v, \tag{5}$$

这里的 q_w 指的是实数或常量部分，$\mathbf{q}_v = q_x i + q_y j + q_z k = (q_x, q_y, q_z)$ 指的是虚数或向量部分 [1]。四元数还可以定义为一个 < 常量-向量 > 的有序对：

$$Q = \langle q_w, \mathbf{q}_v \rangle. \tag{6}$$

我们一般将四元数 Q 表示成一个 4 维向量 $\mathbf{q}$，

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \tag{7}$$

向量形式便于我们利用矩阵代数来进行四元数有关的运算。在某些情况下，我们可以混用 = 运算符。典型的例子是实四元数和纯虚四元数，

$$general: q = q_w + \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H},\ real: q_w = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R},\ pure: \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p. \tag{8}$$

1.2 四元数主要性质

1.2.1 加法

直接相加即可：

$$\mathbf{p} \pm \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w \pm q_w \\ \mathbf{p}_v \pm \mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \tag{9}$$

[1]我们选择 (w, x, y, z) 作为下标是因为我们对四元数在三维笛卡尔空间的几何属性感兴趣。其他经常使用的下标表示有 $(0, 1, 2, 3)$ 或 $(1, i, j, k)$，也许更适合于数学解释。

从结构上看，加法是满足交换律和结合律的，即

$$\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{q}+\mathbf{p} \tag{10}$$

$$\mathbf{p}+(\mathbf{q}+\mathbf{r})=(\mathbf{p}+\mathbf{q})+\mathbf{r} \tag{11}$$

1.2.2 乘法

四元数乘法用符号 $\otimes$ 表示，乘法运算需要用到四元数公式(1)和公式(2)。写成向量形式如下：

$$\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}=\begin{bmatrix} p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\ p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y \\ p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x \\ p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w \end{bmatrix}. \tag{12}$$

上式也可以用标量和向量部分来表示，

$$\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}=\begin{bmatrix} p_w q_w - \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_v \\ p_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}, \tag{13}$$

上式中叉乘的出现意味着四元数乘法一般是不可交换的（即不满足交换律），

$$\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}\neq\mathbf{q}\otimes\mathbf{p}. \tag{14}$$

上面这种一般非交换性的例外情况是 $\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v = 0$，当其中一个四元数是实四元数（$\mathbf{p}=p_w$ 或 $\mathbf{q}=q_w$），或者两个四元数的向量部分是平行的（$\mathbf{p}_v||\mathbf{q}_v$），就会出现这种例外情况，即四元数乘法可交换.
四元数乘法是满足结合律的，

$$(\mathbf{p}\otimes\mathbf{q})\otimes\mathbf{r}=\mathbf{p}\otimes(\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}) \tag{15}$$

以及分配率，

$$\mathbf{p}\otimes(\mathbf{q}+\mathbf{r})=\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{p}\otimes\mathbf{r} \quad and \quad (\mathbf{p}+\mathbf{q})\otimes\mathbf{r}=\mathbf{p}\otimes\mathbf{r}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{r} \tag{16}$$

两个四元数的乘法是双线性的，并且可以表示为两个等价的矩阵乘法，如下：

$$\mathbf{q}_1\otimes\mathbf{q}_2=[\mathbf{q}_1]_L\mathbf{q}_2 \quad and \quad \mathbf{q}_1\otimes\mathbf{q}_2=[\mathbf{q}_2]_R\mathbf{q}_1, \tag{17}$$

这里的 $[\mathbf{q}]_L$ 和 $[\mathbf{q}]_R$ 分别是左和右四元数乘法矩阵，它们是从公式(12)和(17)简单推导而来，

$$[\mathbf{q}]_L = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_R = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}, \tag{18}$$

或者更简洁一些，从公式(13)和(17)推导可得，

$$[\mathbf{q}]_L = q_w\mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & [\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_R = q_w\mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}. \tag{19}$$

这里的反对称运算符[2] $[\bullet]_\times$ 对应生成叉乘矩阵,

$$\mathbf{a}_\times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

上式称为反对称矩阵，$[\mathbf{a}]_\times^T = -[\mathbf{a}]_\times$，等价于叉乘，即，

$$[\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \tag{21}$$

然后根据

$$(\mathbf{q} \otimes \mathbf{x}) \otimes \mathbf{p} = [\mathbf{p}]_R[\mathbf{q}]_L\mathbf{x} \quad and \quad \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}) = [\mathbf{q}]_L[\mathbf{p}]_R\mathbf{x} \tag{22}$$

我们得到如下关系：

$$[\mathbf{p}]_R[\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L[\mathbf{p}]_R \tag{23}$$

这就是左、右四元数乘法矩阵的交换性。这些矩阵的更多特性将在 2.8 节介绍。四元数的乘积运算符 $\otimes$ 组成了非交换群。该群的单位元素 $\mathbf{q}_1 = 1$，和逆 $\mathbf{q}^{-1}$ 接下来介绍。

[2]反对称运算符在文献中有很多种不同的名称和符号，比如叉乘符号 $\times$ 或'hat' 符号 $\wedge$，所以下面的表示方法是等价的，

$$[\mathbf{a}]_\times \equiv [\mathbf{a}_\times] \equiv \mathbf{a}\times \equiv \mathbf{a}_\times \equiv [\mathbf{a}] \equiv \hat{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{a}^\wedge.$$

.

1.2.3 单位量

四元数单位量 $\mathbf{q}_1$ 的乘法性质：$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$。它对应于以四元数表示的实数单位‘1’，

$$\mathbf{q}_1 = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}.$$

1.2.4 共轭

四元数共轭定义为：

$$\mathbf{q}^* \triangleq q_w - \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix} \tag{24}$$

四元数共轭具有以下性质：

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}. \tag{25}$$

以及

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p}^* \tag{26}$$

.

1.2.5 模

四元数的模定义为：

$$||\mathbf{q}|| \triangleq \sqrt{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*} = \sqrt{\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}} = \sqrt{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

模具有以下性质：

$$||\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}|| = ||\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}|| = ||\mathbf{p}||||\mathbf{q}||. \tag{28}$$

1.2.6 逆

四元数的逆 $\mathbf{q}_{-1}$ 也就是四元数乘以它的逆得到单位量，即：

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_{-1} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}_1. \tag{29}$$

逆的计算：

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_* / ||\mathbf{q}||^2. \tag{30}$$

1.2.7 单位/归一化四元数

对单位四元数 $||\mathbf{q}|| = 1$ 来说，四元数的逆等于它的共轭：

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_{*}. \tag{31}$$

当把单位四元数解释为方向表示或旋转运算符时，这个属性意味着逆旋转可以由共轭四元数来完成。单位四元数也可以写成如下形式：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \mathbf{u}\sin\theta \end{bmatrix}, \tag{32}$$

这里的 $\mathbf{u} = u_x i + u_y j + u_z k$ 是单位向量，θ 是常量。
根据式(28)，单位四元数及对应的乘法操作 $\otimes$ 组成了非交换群，其逆正好与共轭相同。

1.3 四元数其他性质

1.3.1 四元数换向器