Алгоритмы

Андрей Голяков

Что такое алгоритм?

Алгоритм — это последовательность шагов, которая решает определенную задачу. Иными словами алгоритм — это способ решения этой задачи.

В программировании алгоритм, как правило, имеет входные данные, над которыми производятся вычисления, и выходной результат. По сути задача алгоритма состоит в преобразовании входных значений в выходные.

Эффективность алгоритма

Важным критерием алгоритма выступает эффективность. Алгоритм может прекрасно решать поставленную задачу, но при этом быть не эффективным. Как правило, под эффективностью алгоритма подразумевается время работы, т.е. время преобразований данных.

Но время работы, например в секундах, всегда относительно – оно может быть разным на разных компьютерах, разных ОС, оно может зависеть от количества оперативной памяти, частоты и разрядности процессора.

В связи с этим, эффективность алгоритма часто измеряют функцией, зависящей от количества элементарных операций процессора. В таком виде алгоритмы можно сравнивать даже не запуская их на компьютере.

Асимптотический анализ алгоритмов

Асимптотическое поведение — это производительность алгоритма при росте размера задачи. Часто размер задачи обозначается как N. Чтобы описать асимптотическое поведение, нужно ответить на вопрос — что случится с производительностью алгоритма, если N сильно вырастет?

Для представления временной сложности алгоритмов в основном используют три асимптотических нотации:

- O (нотация о большое) - представляет наихудший порядок сложности,
- Ω (нотация омега большое) - представляет наилучший порядок сложности,
- Θ (нотация тета большое) - описывает порядок сложности, когда наихудший и наилучший случаи пересекаются.

Подсчет количества операций

```
int x = 0;
x = x + 1;
```

В приведенном коде на первый взгляд 2 команды, но количество операций будет бóльшим:

- int x = 0 : инициализация переменной состоит из 2 операций:
  - создать локальную переменную
  - записать в нее значение 0
- x = x + 1 : присвоение значения переменной состоит также их 2 операций:
  - вычислить значение по формуле x + 1
  - записать его в переменную x

Магия IL DASM

Сколько же операций на самом деле?

IL DASM: "C:\Program Files (x86)\Microsoft SDKs\Windows\v10.0A\bin\NETFX 4.7.1 Tools\ildasm.exe"

```
// int x = 0;
IL_0001:  ldc.i4.0        // кладем 0 как int на вершину стека.
IL_0002:  stloc.0         // кладем значение вершины стека
                          // в локальную переменную под номером 0.
// x = x + 1;
IL_0003:  ldloc.0         // достаем значение локальной переменной
                          // под номером 0 и кладем его на вершину стека.
IL_0004:  ldc.i4.1        // кладем 1 как int на вершину стека
IL_0005:  add             // сейчас в стеке лежит 2 значения: 0, который
                          // мы достали из переменной x и 1, взятая из
                          // выражения x + 1; над ними выполняется
                          // операция сложения; результат кладётся на
                          // вершину стека.
IL_0006:  stloc.0         // берем с вершины стека результат сложения
                          // и записываем его в локальную переменную 0.
// Детали по командам IL можно найти здесь: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_CIL_instructions
```

Расчет сложности алгоритма

При расчете сложности алгоритмов в виде асимптотических нотаций O и Ω делаются следующие 2 упрощения:

1. Все операции, не зависящие от переменных факторов сводятся к 1,
2. В расчет идут только функции высшего порядка.

Расчет О большого

О-нотация описывает наихудший порядок сложности нашего кода.

Когда мы говорим “худший”, мы имеем в виду “худший при разных значениях переменного фактора или переменных величин”.

Поскольку в нашем примере нет переменных величин (4 – это константа), то это просто 4.

Применяем правило асимптотических нотаций “Все операции, не зависящие от переменных факторов сводятся к 1”.

Таким образом, наша 4 превращается в 1

Запись сложности в нотации “о большое” будет выглядеть вот так: O(1). Можно сказать, что этот код в выполнится “за о 1”.

Расчет Омега большого

Ω-нотация описывает наилучший порядок сложности нашего кода.

Поскольку мы только что выяснили, что переменных факторов у нас нет, наихудший порядок также сводится к единице.

В лучшем случае этот код в выполнится “за омега 1”, т.е., Ω(1).

Расчет Тета большого

В случае, когда нотации O и Ω одинаковы, удобно использовать Θ-нотацию (тета большое). Ее нельзя посчитать самостоятельно (отдельно), она требует предварительного расчета O и Ω.

Θ-нотация дает больше информации о сложности алгоритма, чем просто O- или Ω-нотация, так как в ней сразу заключено знание о том, что это и O и Ω одновременно.

Для нашего примера, действительно, O- и Ω-нотации посчитаны и равны, следовательно запись Θ-нотации будет выглядеть так: Θ(1).

Ещё раз про Θ: можно обойтись и без Θ-нотации, можно просто написать O- и Ω-нотации – при первом взгляде будет и так видно, что они равны, однако, использование Θ-нотации даёт более лаконичную и понятную запись этой информации.

Важно понимать ⚠

Обратите внимание, X в данном случае не является переменным фактором алгоритма (хотя и является переменной с точки зрения программиста), так как при при любых значениях X в нашем коде из двух строк будет одно и то же количество операций.

То, что мы записали, не означает, что наш алгоритм работает за 1 операцию!

Если бы в нашем алгоритме было 100 операций или 1 000 000 операций – он занимал бы ощутимое время!

Асимптотическая запись Θ(1) говорит лишь о том, что сложность нашего алгоритма – это постоянная величина. Т.е. количество операций не меняется в зависимости от исходных данных.

С практической точки зрения, это означает, что если наш алгоритм и время его работы устраивает всех в текущем виде, можно не бояться, что мы в будущем получим проблемы производительности. Наш код всегда будет выполняться примерно за это время.

Когда уместно O, а когда Ω?

Чаще всего пользуются O-нотацией – она практически более полезна, так как отвечает на вопрос “Как в худшем случае поведет себя алгоритм?”

Ω-нотация отвечает на вопрос “Насколько сложен алгоритм при самом благоприятном стечении обстоятельств?” и может быть полезна, например, в случае, когда необходимо доказать, что алгоритм имеет слишком высокий порядок сложности и мог бы быть оптимизирован.

Реализация алгоритма на C#

```
const int length = 5;           // длина массива
const int maxValue = 100;       // максимальное значение элемента

var arr = new int[length];  // создаем массив с размером равным length
var rnd = new Random();     // создаем объект генератора случайных чисел

for (var i = 0; i < arr.Length; i++) // перебираем каждый элемент массива
{
    arr[i] = rnd.Next(maxValue);    // заполняем его произвольным значением
}                                   // меньше maxValue

// Выводим на экран результат
for (var i = 0; i < arr.Length; i++)
{
    Console.WriteLine(arr[i]);
}
```

Реализация алгоритма на C#

```
// перебираем массив по j, не доходя до последнего элемента
// до него мы доберемся через выражение j + 1
int limit = arr.Length - 1;

for (int j = 0; j < limit; j++)
{
    // сравниваем текущий и последующий элементы
    // если текущий больше последующего, меняем их местами
    if (arr[j] > arr[j + 1])
    {
        int temp = arr[j + 1];  // обмен значений
        arr[j + 1] = arr[j];    // двух переменных
        arr[j] = temp;          // через третью
    }
}
```

Реализация алгоритма на C#

Затем усложняем этот код, накручивая сверху второй массив, чтобы все элементы заняли нужные места. При каждой итерации лимит будет уменьшаться на 1:

```
// i нам нужна уже не для доступа к массиву, а всего лишь
// для уменьшения лимита внутреннего цикла
for (int i = 0; i < arr.Length - 1; i++)
{
      // перебираем массив по j, не доходя до последнего элемента
      // до него мы доберемся через выражение j + 1
      int limit = arr.Length - 1;

      for (int j = 0; j < limit; j++)
      {
            // сравниваем текущий и последующий элементы
            // если текущий больше последующего, меняем их местами
            if (arr[j] > arr[j + 1])
            {
                  int temp = arr[j + 1];  // обмен значений
                  arr[j + 1] = arr[j];    // двух переменных
                  arr[j] = temp;          // через третью
            }
      }
}
```

Рассчитываем количество операций

Можно упрощенно считать, пользуясь следующей подсказкой:

- x = y — 1 операция присвоения значения
- x < y — 1 операция сравнения
- x++ — 1 операция инкремента
- int x = y — 2 операции (создание переменной и присвоение значения)
- int x = y + z — 3 операции (создание переменной, сложение, присвоение значения)
- for (int x = 0; x < N; x++) — 2 + 2N операций:
  - создание переменной и присвоение значения происходит один раз
  - сравнение и инкремент происходит каждую итерацию
  - все тело цикла будет выполняться N раз (все операции внутри умножаются на N)

Надо понимать, что это не точное определение количества команд, однако,
при асимптотическом подсчете сложности это не так принципиально. Важен порядок функции f(N)

Рассчитываем количество операций

```
for (int i = 0; i < arr.Length - 1; i++)
{
  int limit = arr.Length - 1 - i;
  for (int j = 0; j < limit; j++)
  {
    if (arr[j] > arr[j + 1])
    {
      int temp = arr[j + 1];
      arr[j + 1] = arr[j];
      arr[j] = temp;

    }
  }
}
```

```
// 2 + 2 × (N - 1) × (
  // 3
  // 2 + 2 × (N - 1) / 2 × (
    // 2

    // 3 : эти три строчки
    // 3 : кода могут не
    // 1 : выполниться ни разу
  // )
// )
```

Худший случай: 2×(N-1)×(3+2+2×(N-1)/2×(9)) = (2N-2)×(9N-4) = 18N^2-26N+8

Лучший случай: 2×(N-1)×(3+2+2×(N-1)/2×(2)) = (2N-2)×(2N+3) = 4N^2+2N-6

Рассчитываем сложность алгоритма

Худший случай: `18×N^2 - 26×N + 8`

Лучший случай: `4×N^2 + 2×N - 6`

Применяем упрощения:

1. Все операции, не зависящие от переменных факторов сводятся к 1
2. В расчет идут только функции высшего порядка.

Получается, что

- O-нотация: O(N^2)
- Ω-нотация: Ω(N^2)

Поскольку мы вычислили и O- и Ω-нотацию и они оказались равны, можно записать сложность в более короткой и точной Θ-нотации:

- Θ-нотация: Θ(N^2)

Рассчитываем сложность алгоритма

Вот некоторые функции, которые чаще всего используются для вычисления сложности. Функции перечислены в порядке возрастания сложности. Чем выше в этом списке находится функция, тем быстрее будет выполняться алгоритм с такой оценкой.

- O(1) – константная сложность
- O(log(N)) – логарифмическая сложность
- O(N) – линейная сложность
- O(N×log(N)) – квазилинейная сложность
- O(N^C), где C > 1 – экспоненциальная сложность
- O(C^N), где C > 1 – “гладкая” функция, растет ещё быстрее, чем N^C
- O(N!) – факториальная сложность

Считаем время работы алгоритма

Для подсчета времени работы кода в .NET есть класс Stopwatch, расположенный в области видимости System.Diagnostics.

Методы класса:

- Start() : запустить секундомер
- Stop() : остановить секундомер
- Restart() : сбросить предыдущий замер и запустить секундомер

Свойства класса:

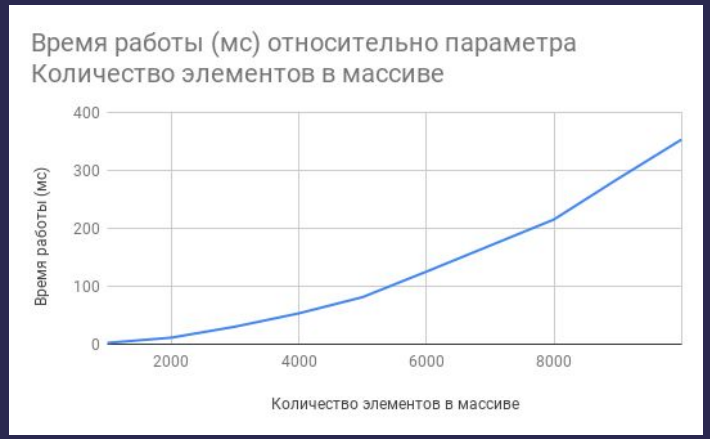
- ElapsedMilliseconds : количество миллисекунд между вызовами Start и Stop.

```
var stopwatch = new Stopwatch();   // init Stopwatch instance
stopwatch.Start();                 // start time calculation
target code for execution time calculations
stopwatch.Stop();                  // start time calculation
Console.WriteLine($"Code done in {stopwatch.ElapsedMilliseconds} ms):");
stopwatch.Restart();               // reset last calculation and start again
other code needs in time calculations
```

Считаем время выполнения BubbleSort

Если посчитать время выполнения нашей функции BubbleSort, мы увидим экспоненциальный рост времени работы нашего метода при линейном увеличении количества элементов массива.

- 1000 : ~2 мс
- 2000 : ~11 мс
- 3000 : ~30 мс
- 4000 : ~53 мс
- 5000 : ~81 мс
- 6000 : ~125 мс
- 7000 : ~170 мс
- 8000 : ~215 мс
- 9000 : ~285 мс
- 10000 : ~353 мс



Встроенная сортировка .NET: Array.Sort

.NET имеет встроенные алгоритмы работы с данными и для сортировки, конечно же, имеется своя реализация.

Если заглянуть “под капот”, можно узнать, Array.Sort() динамически выбирает один из трех алгоритмов сортировки в зависимости от размера массива:

- Если размер меньше 16 элементов, используется "сортировка вставками" (Insertion Sort algorithm),
  Ω(N), O(N^2)
- Если размер превышает 2×log^N, где N - диапазон значений входного массива, используется алгоритм пирамидальной сортировки (Heap Sort algorithm),
  O(N×log(N)).
- В остальных случаях используется "быстрая сортировка" (Quicksort algorithm),
  Ω(N×log(N)), O(N^2)

На частично отсортированных данных все эти методы будут работать лучше, так как наша “пузырьковая” реализация даже в лучшем случае – это Ω(N^2).

Самостоятельная работа

Дописываем программу таким образом, чтобы можно было сравнить наш алгоритм сортировки “пузырьком” с встроенной сортировкой .NET по времени.

По завершению сортировки каждым из методов, должно выводится 2 значения - время время работы соответствующего метода в миллисекундах.

Домашнее задание

Посчитать асимптотическую сложность алгоритма вашего решения задачи прошлого урока (на валидацию скобок):

- наилучший случай – Ω-нотация,
- наихудший случай – O-нотация,

Если это имеет смысл, описать сложность в виде Θ-нотации.

Спасибо за внимание.