Geometria

Fórmulas

Comprimento de um arco de circunferência

αr

$\alpha \rightarrow$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro

$r \rightarrow$ raio da circunferência

Área de um perímetro regular

*semiperímetro * apótema*

Área de um setor circular

$$\frac{\alpha r^2}{2}$$

$\alpha \rightarrow$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro

$r \rightarrow$ raio da circunferência

Área lateral de um cone

$\pi r g$

$r \rightarrow$ raio da base

$g \rightarrow$ geratriz

Área de uma superfície esférica

$4\pi r^2$

$r \rightarrow$ raio

Volume de uma pirâmide

$$\frac{1}{3} * \acute{A}rea\ da\ base * Altura$$

Volume de um cone

$$\frac{1}{3} * \acute{A}rea\ da\ base * Altura$$

Volume de uma esfera

$\frac{4}{3}\pi r^3$

$r \rightarrow$ raio

Equações de planos

Equação de planos paralelos aos planos coordenados no espaço

- Plano paralelo a yOz (perpendicular a Ox) que contém o ponto *P(a, b, c)*: *x = a*;
- Plano paralelo a xOz (perpendicular a Oy) que contém o ponto *P(x, y, z)*: *y = b*;
- Plano paralelo a xOy (perpendicular a Oz) que contém o ponto *P(x, y, z)*: *z = c*.

Equação de qualquer plano

Plano que contém A(x_0, y_0, z_0) é normal (perpendicular; ⊥) ao vetor $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$

- Equação geral do plano α: $\alpha = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
- Equação cartesiana do plano α: $\alpha = ax + by + cz + d = 0$

Plano que contém 3 pontos não colineares A, B e C

É necessário encontrar as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{n_\alpha}$, perpendicular ao plano α.

$\overrightarrow{n_\alpha}$ será uma das soluções do seguinte sistema (possível e indeterminado):

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Equações de retas

Equação de retas paralelas aos eixos

No plano

- Reta paralela a Ox que contém *P(a, b)*: *y = b*;
- Reta paralela a Oy que contém *P(a, b)*: *x = a*.

No espaço

- Reta paralela a Ox (perpendicular a yOz) que contém *P(a, b, c)*: $y = b \wedge z = c$;
- Reta paralela a Oy (perpendicular a xOz) que contém *P(a, b, c)*: $x = a \wedge z = c$;
- Reta paralela a Oz (perpendicular a xOy) que contém *P(a, b, c)*: $x = a \wedge y = b$.

Equação cartesiana de qualquer reta

Reta que contém o ponto A(x_0, y_0, z_0) e tem a direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

- Se $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$ então r: $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$;
- Se $u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$ então $r: x = x_0 \wedge \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$ $(r \parallel yOz)$;
- Se $u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$ então $r: y = y_0 \wedge \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{z-z_0}{u_3}$ $(r \parallel xOz)$;
- Se $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$ então $r: z = z_0 \wedge \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$ $(r \parallel xOy)$;
- Se $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$ então $r: x = x_0 \wedge y = y_0$ $(r \parallel Oz)$;
- Se $u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$ então $r: x = x_0 \wedge z = z_0$ $(r \parallel Oy)$;
- Se $u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ então $r: y = y_0 \wedge z = z_0$ $(r \parallel Ox)$.

Coroa circular

$r_1{}^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r_2{}^2, com\ centro\ C(a,b)$

Equação vetorial de uma reta r

Seja r a reta que contém o ponto *A(a ,b)* e tem a direção do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$.

- No plano: $(x,y) = (a,b) + k(u_1,u_2), k \in \mathbb{R}$
- No espaço: $(x,y,z) = (a,b,c) + k(u_1,u_2,u_3), k \in \mathbb{R}$

Equação vetorial de uma semirreta AB

$P = A + k\overrightarrow{AB}, k \geq 0$ sendo A(a_1, a_2) e $\overrightarrow{AB} = (u_1, u_2)$.

- No plano: $\dot{A}B: (x,y) = (a_1,a_2) + k(u_1,u_2), k \geq 0$
- No espaço: $\dot{A}B: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + k(u_1,u_2,u_3), k \geq 0$

Segmento de reta [AB]

$P = A + k\overrightarrow{AB}, k \in [0;1]$ sendo A(a_1, a_2) e $\overrightarrow{AB} = (u_1, u_2)$.

- No plano: $[AB]: (x,y) = (a_1,a_2) + k(u_1,u_2), k \geq 0$
- No espaço: $[AB]: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + k(u_1,u_2,u_3), k \geq 0$

Equação reduzida de uma reta (não vertical) no plano

y = mx + b

$m \rightarrow$ declive da reta

$b \rightarrow$ ordenada na origem (ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy)

Se A e B forem dois pontos de uma reta não vertical então $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Se $\vec{u}(u_1, u_2)$ for o vetor diretor de uma reta não vertical então $m = \frac{u_2}{u_1}$.

Equação reduzida da reta

Exemplos:

a) A(1; 2) e B(3; 5)

$$P = A + k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y) = (1,2) + k\big((3,5) - (1,2)\big), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y)$$
$$= (1,2) + k(2,3), k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x-1}{2} \\ k = \dfrac{y-2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x - 3 = 2y - 4 \Leftrightarrow 2y = 3x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

b) $(x,y) = (1,2) + k(2,5), k \in \mathbb{R}$

$$r: y = \frac{5}{2}x + b$$

$$(1,2) \in r: 2 = \frac{5}{2} * 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$r: y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

Interpretação do declive de uma reta

- m = 0 → reta horizontal;
- m > 0 → reta crescente;
- m < 0 → reta decrescente.

Posição relativa de duas retas no plano

Sendo $r: y = m_r x + b_r$ e $s: y = m_s + b_s$.

- *r* e *s* são paralelas se e só se $m_r = m_s$;
    - *r* e *s* são estritamente paralelas ($r \parallel s$): $m_r = m_s \wedge b_r \neq b_s$;

- r e s são coincidentes $(r \equiv s)$: $m_r = m_s \wedge b_r = b_s$;

- r e s são concorrentes ou secantes se e só se $m_r \neq m_s$;
  - r e s são secantes oblíquas $(r \nmid s)$: $m_r \neq m_s \wedge m_r = -\frac{1}{m_s}$;
  - r e s são perpendiculares $(r \perp s)$: $m_r = -\frac{1}{m_s}$.

Interpretação da resolução de sistema de equações no estudo da posição relativa de duas retas

- Retas concorrentes: sistema possível e determinado (uma única solução);
- Retas coincidentes: sistema possível e indeterminado (soluções infinitas);
- Retas estritamente paralelas: sistema impossível (sem solução).

Vetor como diferença de dois pontos

$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Soma de um ponto com um vetor: $A + \overrightarrow{AB} = B$

Norma de um vetor

Norma de um vetor $\vec{u}$ é a medida do comprimento do vetor e representa-se por $||\vec{u}||$. Assim,

$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}, \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

Adição de vetores

$\vec{u} + \vec{n} = (u_1, u_2, u_3) + (n_1, n_2, n_3) = (u_1 + n_1,\ u_2 + n_2,\ u_3 + n_3)$

Produto de um número real por um vetor

$k\vec{u} = k(u_1, u_2, u_3) = (ku_1, ku_2, ku_3)$

Vetores colineares

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{n}$ dizem-se colineares se têm a mesma direção:

$\vec{u}$ e $\vec{n}$ são colineares $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \vec{u} = k\vec{n}$

Se $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ e $u_3 \neq 0$ tem-se:

$\vec{u}$ e $\vec{n}$ são colineares $\Leftrightarrow \frac{n_1}{u_1} = \frac{n_2}{u_2} = \frac{n_3}{u_3}, \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

Produto escalar de dois vetores

$\vec{u} \cdot \vec{n} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{n}|| \cdot \cos(\vec{u} \wedge \vec{n})$

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{n} = (n_1, n_2)$ então: $\vec{u} \cdot \vec{n} = u_1n_1 + u_2n_2$

$\vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

$\angle(\vec{u}, \vec{n})\ agudo \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} > 0$

$\angle(\vec{u}, \vec{n})\ obtuso \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} < 0$

Ângulo de dois vetores

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{n}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\left||\vec{u}|\right| * \left||\vec{n}|\right|}$$

Ângulo de duas retas

É o menor ângulo definido por duas retas.

$0° \leq r \wedge s \leq 90°$

$$\cos(r \wedge s) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\left||\vec{r}|\right| * \left||\vec{s}|\right|}\ , sendo\ \vec{r}\ e\ \vec{s}\ vetores\ diretores\ de\ r\ e\ de\ s$$

- Se r for uma reta oblíqua de equação y = mx + b e $m = \frac{c}{d}$ então $\vec{r} = k(d, c)$
- Se r for uma reta horizontal de equação y = a então $\vec{r} = k(1,0), k \in \mathbb{R}$
- Se r for uma reta vertical de equação x = a então $\vec{r} = k(0,1), k \in \mathbb{R}$

Produto de um número real por um vetor

$\vec{n} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R}, \vec{u} \neq \vec{0}$

- k > 0 → mesma direção, mesmo sentido, comprimento = $|k| * ||\vec{u}||$
- k < 0 → mesma direção, sentido oposto, comprimento = $|k| * ||\vec{u}||$
- k = 0 → $k\vec{u} = \vec{0}$

Inclinação de uma reta

É o menor ângulo θ não negativo que a reta faz com o semieixo positivo das abcissas.

- $m = \tan(\theta) \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}(m)$
  - $m > 0 \Leftrightarrow \theta\ agudo$

- $m < 0 \Leftrightarrow \theta \ obtuso$

Perpendicularidade entre vetores no plano

Se $\vec{r} = (r_1, r_2)$ e $\vec{s} \perp \vec{r} \ então \ \vec{s} = k(-r_2, r_1), k \in \mathbb{R}$

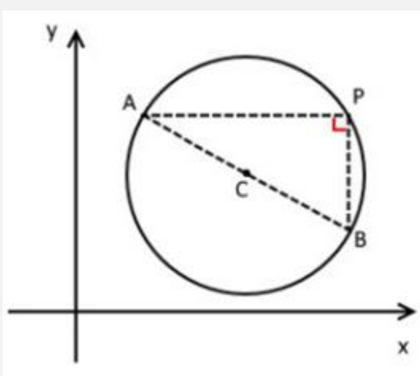
Perpendicularidade entre retas no plano

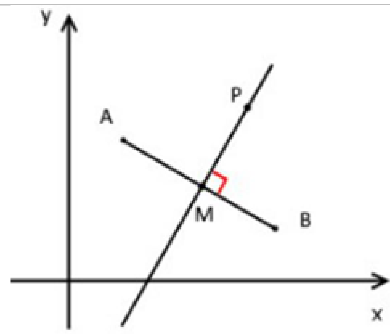
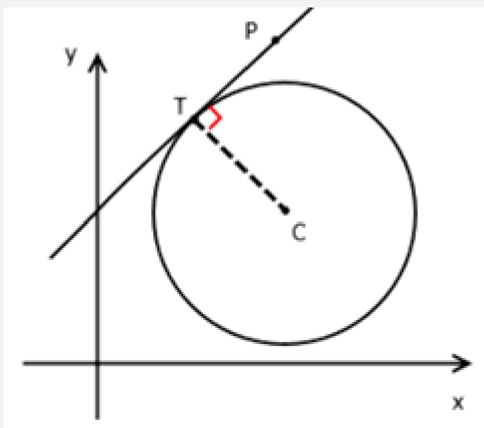
Se $r \perp s$ e $m_s = \frac{a}{b} \ então \ m_r = -\frac{b}{a}$

Paralelismo e perpendicularidade no espaço

- $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \ colinear \ com \ \overrightarrow{n_\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = k\overrightarrow{n_\beta}, k \in \mathbb{R}$;
- $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = 0$;
- $r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$;
- $r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \ colinear \ com \ \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \vec{r} = k\overrightarrow{n_\alpha} = 0, k \in \mathbb{R}$.

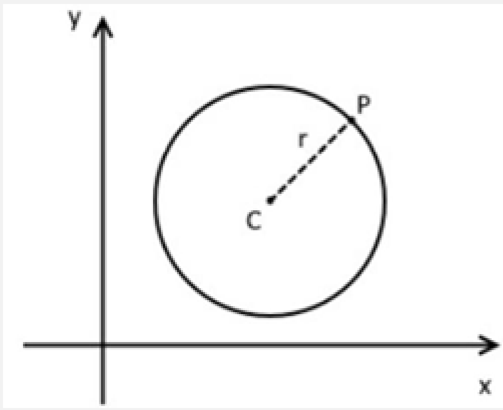
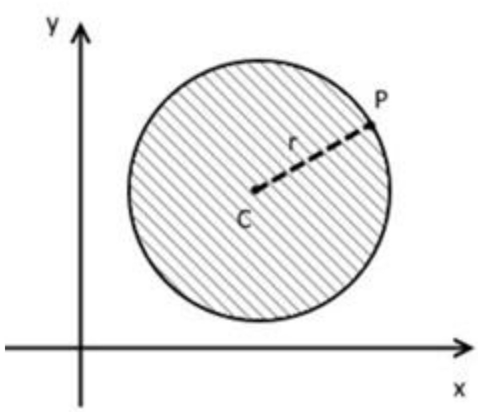
Condições obtidas recorrendo ao produto escalar

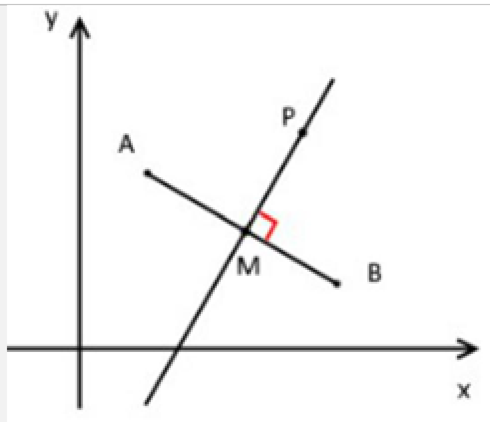
No plano	No espaço
Circunferência de diâmetro [AB] é o conjunto dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 	**Superfície esférica** de diâmetro [AB] é o conjunto dos pontos P do espaço que satisfazem a condição $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$
Mediatriz do segmento de reta [AB], de ponto médio M, é o conjunto dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$	**Plano mediador do segmento de reta** [AB], de ponto médio M, é o conjunto dos pontos P do espaço que satisfazem a condição $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$

 	
Reta tangente à circunferência de centro C no ponto T é o conjunto dos pontos P que satisfazem a condição $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$  	**Reta tangente à superfície esférica** de centro C no ponto T é o conjunto dos pontos P que satisfazem a condição $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$

Condições obtidas recorrendo à distância entre pontos

No plano	**No espaço**
Ponto médio do segmento [AB] com A(x_1,y_1) e B(x_2,y_2) $M_{[A,B]} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	**Ponto médio** do segmento [AB] com A(x_1,y_1,z_1) e B(x_2,y_2,z_2) $M_{[A,B]} = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$
Distância entre os pontos A(x_1,y_1) e B(x_2,y_2) $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	**Distância** entre os pontos A(x_1,y_1,z_1) e B(x_2,y_2,z_2) $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
Circunferência	**Superfície esférica**

de centro C(a,b) e raio r, é o conjunto de pontos P(x,y) que se encontram à mesma distância de r e de C $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$  	de centro C(a,b,c) e raio r, é o conjunto dos pontos P(x,y,z) que se encontram à mesma distância r de C $(x-a)^{2}+(y-a)^{2}+(z-c)^2=r^{2}$
Círculo de centro C(a,b) e raio r é o conjunto de pontos P(x,y) que se encontram a uma distância igual ou inferior a r de C $(x-a)^2+(y-a)^2\leq r^2$  	**Esfera** de centro C(a,b,c) e raio r, é o conjunto dos pontos P(x,y,z) que se encontram a uma distância igual ou inferior a r de C $(x-a)^{2}+(y-a)^{2}+(z-c)^2\leq r^{2}$
Meditatriz do segmento de reta [AB], com A(x_1,y_1) e B(x_2,y_2) é o conjunto de pontos P(x,y) equidistantes de A e de B $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$	**Plano mediador** do segmento de reta [AB], com A(x_1,y_1,z_1) e B(x_2,y_2,z_2) é o conjunto de pontos P(x,y,z) equidistantes de A e de B $(x-x_1)^{2}+(y-y_1)^{2}+(z-z_1)^{2}$ $=(x-x_2)^{2}+(y-y_2)^{2}$ $+(z-z_2)^{2}$


y
x
A
B
P
M