Números complexos

Números imaginários

Chama-se unidade imaginária e representa-se por *i*, o número $\sqrt{-1}$.

Exemplos:

a) $\sqrt{-3} = \sqrt{3} * \sqrt{-1} = \sqrt{3}i$
b) $\sqrt{-25} = \sqrt{25} * \sqrt{-1} = 5i$
c) $\sqrt{\frac{-2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} * \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{2}}{3}i$
d) $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow x = 2i \vee x = -2i$
e) $x^2 - 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4*1*13}}{2*1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4+\sqrt{-36}}{2} \vee x = \frac{4-\sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4+6i}{2} \vee x = \frac{4-6i}{2} \Leftrightarrow x = 2 + 3i \vee x = 2 - 3i$

Nota: dividir por *i* é equivalente a multiplicar por -*i*.

$\frac{z}{i} \Leftrightarrow (-i)z$

$\frac{1}{i} = -i$

O conjunto dos números complexos

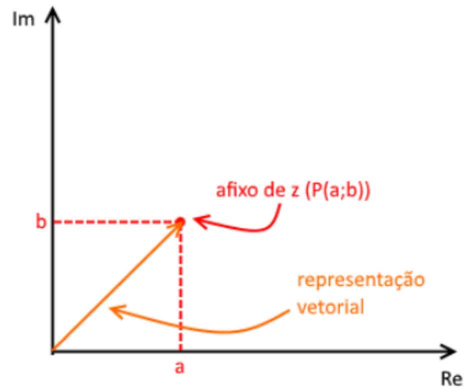
$\mathbb{C} = \{a + bi: a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\}$

$z = a + bi$

- $a \rightarrow$ parte real
- $b \rightarrow$ parte imaginária
- $a + bi \rightarrow$ número complexo
- $Re(z) = a$
- $Im(z) = b$
- $b = 0 \Rightarrow z = a \Rightarrow$ número real
- $b \neq 0 \rightarrow$ número imaginário:
    - $a = 0 \Rightarrow z = bi \rightarrow$ número imaginário puro
    - $a \neq 0 \Rightarrow z = a + bi \rightarrow$ número complexo

Representação gráfica e vetorial de números complexos: plano de Argand

- $z = a + bi \rightarrow$ representação algébrica;
- $ponto\ P(a; b) \rightarrow$ representação geométrica ou afixo;
- $vetor\ \overrightarrow{OP} = (a; b) \rightarrow$ representação vetorial.



Representação trigonométrica de números complexos

Seja $z = a + bi$ e $P(a; b)$ o afixo de z.

Seja θ o ângulo que $\overrightarrow{OP}$ faz com o semieixo positivo real.

θ designa-se por argumento de z, com $\theta \in \mathbb{R}$.

$\theta \in [0; 2\pi[\rightarrow \theta$ designa-se por argumento positivo mínimo.

$\theta \in]-\pi; \pi] \rightarrow \theta$ designa-se por argumento principal.

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow$ módulo de z.

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Leftrightarrow a = \rho\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \Leftrightarrow b = \rho\sin\theta$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

$z = a + bi \Leftrightarrow z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \Leftrightarrow z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow z = \rho(\mathrm{cis}\,\theta) \rightarrow$ forma trigonométrica de z

Representação na forma algébrica e trigonométrica

	Representação	Simétrico	Conjugado	Inverso
Forma algébrica	$z = a + bi$	$-z = -a - bi$	$\bar{z} = a - bi$	$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$
Forma trigonométrica	$z = \rho cis(\theta)$	$-z = \rho cis(\pi + \theta)$	$\bar{z} = \rho cis(-\theta)$	$z^{-1} = \frac{1}{\rho} cis(-\theta)$

Operações na forma algébrica

$z_1, z_2 = a_1 + b_1 i,\ a_2 + b_2 i$

Soma	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Diferença	$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Produto	$z_1 * z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i)$
Quociente	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 * \bar{z_2}}{z_2 * \bar{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1\mathrm{i})\,(a_2 - b_2\mathrm{i})}{(a_2 + b_2\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})}$
Potenciação	$z^n = (a + bi)^n = (a + bi)(a + bi) \dots (a + bi), n \in \mathbb{N}$
Igualdade	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

Operações na forma trigonométrica

$z_1, z_2 = \rho_1 cis(\theta_1), \rho_2 cis(\theta_2)$

Produto	$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$
Quociente	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} cis(\theta_1 - \theta_2)$
Potenciação	$z^n = \rho^n cis(n\theta)$
Radiciação	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$
Igualdade	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Reduções do expoente de i

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \hline R & Q \end{array}$$

$n = 4Q + R \Rightarrow i^n = i^R$

Potência de i	Valor
i^1	i
i^2	-1
i^3	-i
i^4	1

Conversões básicas de forma algébrica para forma trigonométrica

Forma algébrica	Forma trigonométrica
1	$cis(\theta)$
-1	$cis(\pi)$
i	$cis(\frac{\pi}{2})$
$-i$	$cis(\frac{3\pi}{2})$
$a + bi$ $\rho cis(\theta) = \rho(cos(\theta) + isin(\theta))$	$\rho cis(\theta), \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \tan(\theta) = \frac{b}{a}$

Exemplos de conversões entre forma algébrica e trigonométrica

a) $z = 6\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

b) $z = 4\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$
$-2 + 2\sqrt{3}i$

c) $z = 2\operatorname{cis}\frac{35\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{35\pi}{6} + i\sin\frac{35\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} -\right.$
$\left. i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$

d) $z = -1 + \sqrt{3}i$

$P(-1; \sqrt{3})$ →2º Q

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in 2ºQ \Leftrightarrow \tan\theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 2ºQ \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \wedge \theta \in 2ºQ \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$z = 2\,\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3}$

e) $z = 6 - \sqrt{12}i$

$P\left(6; -\sqrt{12}\right)$ →4ºQ

$\rho = \sqrt{6^2 + \left(-\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{12}}{6} \wedge \theta \in 4ºQ \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{6} \wedge \theta \in 4ºQ \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4ºQ \Leftrightarrow$
$\theta = -\frac{\pi}{6}$

$z = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cis} -\frac{\pi}{6}$

f) $z = -3 - 3i$

$P(-3; -3)$ →3ºQ

$\rho = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{-3}{-3} \wedge \theta \in 3ºQ \Leftrightarrow \tan\theta = 1 \wedge \theta \in 3ºQ \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$

$z = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\frac{5\pi}{4}$

Fórmula de Moive generalizada

Se $z = \rho cis(\theta)$ é um número complexo não nulo, então tem *n* raízes de índice *n* que são dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$$

As imagens geométricas das soluções da equação $z^n = w$ são os vértices de um polígono regular com *n* lados, inscrito numa circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

Exemplo:

Determinar as raízes cúbicas de $z = 8cis\left(\frac{3}{5}\pi\right)$

$$z_k = \sqrt[3]{8} cis\left(\frac{\frac{3}{5}\pi + 2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow z_k = 2cis\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$$

$$z_0 = 2cis\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2*0*\pi}{3}\right) = 2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$z_1 = 2cis\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2*1*\pi}{3}\right) = 2cis\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2cis\left(\frac{3\pi}{15} + \frac{10\pi}{15}\right) = 2cis\left(\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$z_2 = 2cis\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2*2*\pi}{3}\right) = 2cis\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{3}\right) = 2cis\left(\frac{3\pi}{15} + \frac{20\pi}{15}\right) = 2cis\left(\frac{23\pi}{15}\right)$$

Distância entre dois pontos

$z_1 = a_1 + b_1 i \rightarrow Z_1(a_1; b_1)$

$z_2 = a_2 + b_2 i \rightarrow Z_2(a_2; b_2)$

$|z_1 - z_2| \rightarrow$ distância entre os afixos de z_1 e z_2

$|z_1 - z_2| = \overline{Z_1 Z_2}$

Exemplo:

$z_1 = 3 + 2i;\ z_2 = 4 - i$

$|z_1 - z_2| = |(3 + 2i) - (4 - i)| = |3 + 2i - 4 + i| = |-1 + 3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Módulo de um número complexo

$|z| \rightarrow \text{módulo de } z \text{ (distância de } z \text{ à origem)}$

$z = a + bi \Rightarrow |z| \Leftrightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

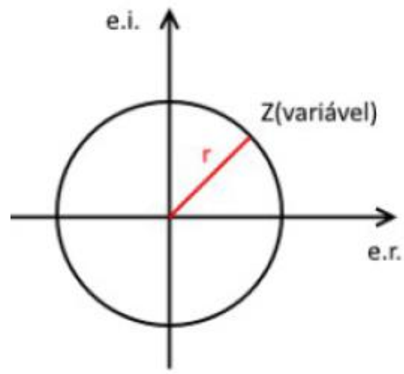
Exemplos:

a) $z = 2 - 3i \rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$
b) $z = \sqrt{2} + i \rightarrow |z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
c) $z = -4i \rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

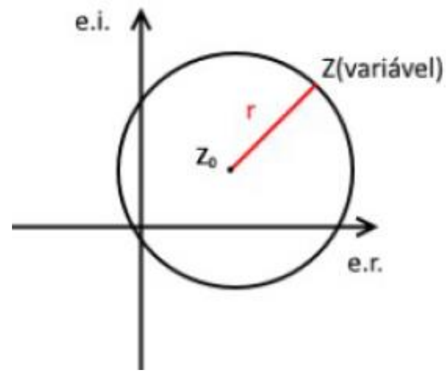
Figuras planas definidas em $\mathbb{C}$

Circunferência

Centro na origem	**Centro arbitrário (Z_0)**

<table>
<tr>
<td>


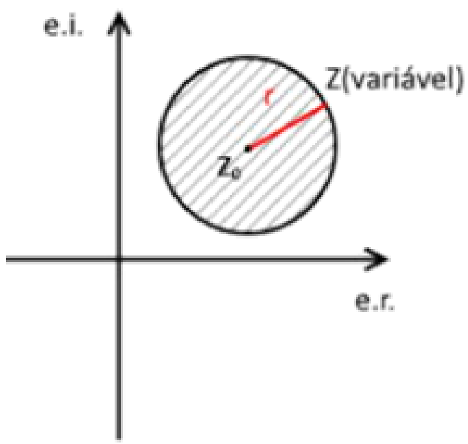
r > 0

|z| = r
</td>
<td>


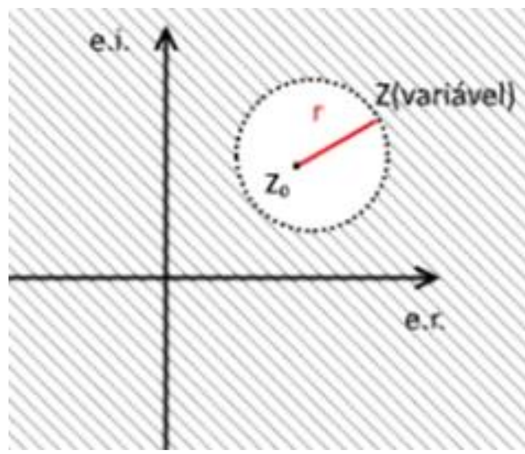
r > 0

$|z - z_0| = r$
</td>
</tr>
</table>

Círculo

<table>
<tr>
<th>Centro qualquer (Z_0)</th>
<th>Exterior</th>
</tr>
<tr>
<td>


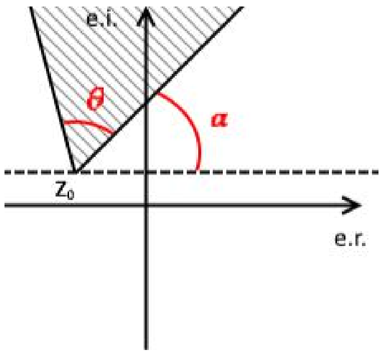
r > 0

$|z - z_0| \leq r$
</td>
<td>


r > 0

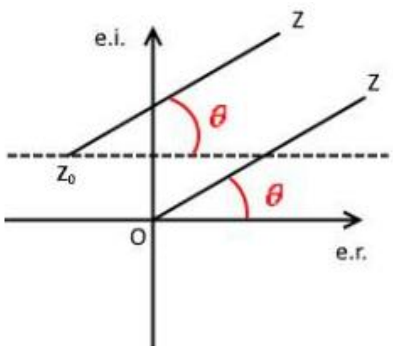
$|z - z_0| > r$
</td>
</tr>
</table>

Ângulo de vértice Z_0



$\alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \alpha + \theta$

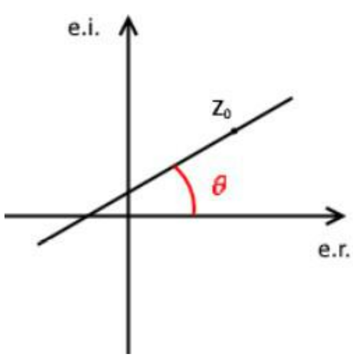
Semirreta com origem em (0;0) e em Z_0



$\arg(z) = \theta \rightarrow$ semirreta com origem em (0; 0), cuja reta suporte tem inclinação θ

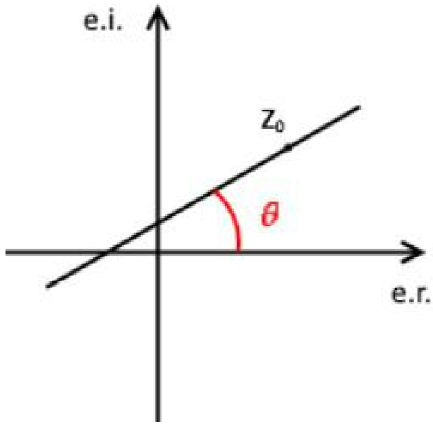
$\arg(z - z_0) = \theta \rightarrow$ semirreta com origem em Z_1 e cuja reta suporte tem inclinação θ

Reta



$\arg(z - z_0) = \theta \vee \arg(z - z_0) = \theta + \pi \rightarrow$ reta que contém Z_1 e tem inclinação θ

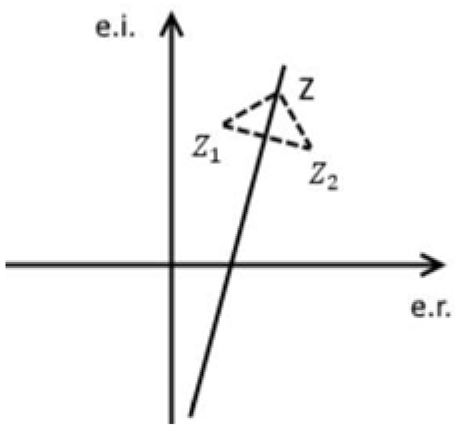
Semiplano



Superior: $\theta \leq arg(z - z_0) \leq \theta + \pi$

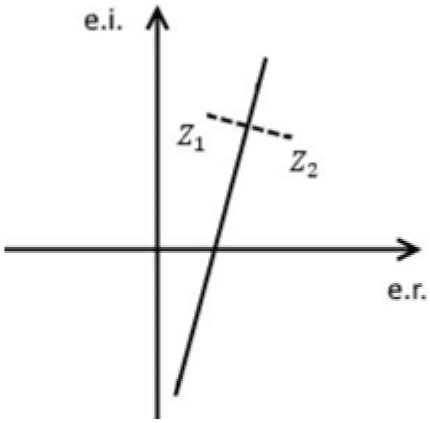
Inferior: $\theta + \pi \leq \arg(z - z_0) \leq \theta + 2\pi$

Reta mediatriz do segmento [Z_1Z_2]



$|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$

Semiplano com origem na mediatriz de [Z_1Z_2]



Superior à mediatriz: $|Z - Z_1| \geq |Z - Z_2|$

Inferior à mediatriz: $|Z - Z_1| \leq |Z - Z_2|$

Domínios planos em variável complexa

z = x +yi → ponto genérico (incógnita) → Z(x; y)

z_1 = a + bi → ponto conhecido → Z_1(a; b)

$|z - z_1| = r, r \in \mathbb{R}^+$ → circunferência de centro em Z_1 e raio r

$|z - z_1| \leq r$ → círculo de centro Z_1 e raio r

$r_1 \leq |z - z_1| \leq r_2$ → coroa circular

Exemplos:

a) $|z - i| = 1 \Leftrightarrow |z - (0 + 1i)| = 1$
   Circunferência de centro (0; 1) e raio 1
b) $|z - 1 + i| < 2 \Leftrightarrow |z - (1 - i)| < 2$
   Região interior de uma circunferência de centro (1; -1) e raio 2
c) $|z - i| \geq 1 \wedge |z| \leq 2 \Leftrightarrow |z - (i)| \geq 1 \wedge |z| \leq 2$
   Reunião entre a região exterior de uma circunferência de centro (0; 1) de raio 1 e a região exterior de uma circunferência de centro (0; 0) e raio 2
d) $|z - 2 + 3i| \leq 3 \wedge |z| \geq 2 \Leftrightarrow |z - (2 - 3i)| \leq 3 \wedge |z| \geq 2$
   Reunião entre a região interior de uma circunferência de centro (2; -3) de raio 3 e a região exterior de uma circunferência de centro (0; 0) de raio 2

Retas paralelas aos eixos e respetivos semiplanos

$Re(z - z_1) = c \rightarrow reta\ vertical, c \in \mathbb{R}$

$Im(z - z_1) = c \rightarrow reta\ vertical, c \in \mathbb{R}$

Exemplos:

a) $Re(z - 3 + 2i) = 5 \Leftrightarrow Re(x + yi - 3 + 2i) = 5 \Leftrightarrow Re\big((x - 3) + (y + 2)i\big) = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 8$

b) $Im(z - 3 + 2i) = 5 \Leftrightarrow Im(x + yi - 3 + 2i) = 5 \Leftrightarrow Im\big((x - 3) + (y + 2)i\big) = 5 \Leftrightarrow y + 2 = 5 \Leftrightarrow y = 3$

c) $Re(z - 5i) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$

d) $Im(z + 4 - i) < 1 \Leftrightarrow y - 1 < 1 \Leftrightarrow y < 2$

e) $Re(z + 4) < 3 \wedge Im(z + 1 - 3i) \geq 1 \Leftrightarrow x + 4 < 3 \wedge y - 3 \geq 1 \Leftrightarrow x < -1 \wedge y \geq 4$

Resolução de equações em C

Deve-se procurar resolver a equação com a incógnita z, mas quando tal não é possível (nomeadamente quando a equação envolve z e $\bar{z}$) pode ser mesmo necessário substituir z por $x + yi$.

Exemplos:

a) $iz^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(iz - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee iz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{1}{i} = -i$

$C.S. = \{0; -i\}$

b) $2z - 3i = zi \Leftrightarrow 2z - zi = 3i \Leftrightarrow z(2 - i) = 3i \Leftrightarrow z = \frac{3i}{2-i} \Leftrightarrow z = \frac{3i(2+i)}{(2-i)(2+i)} \Leftrightarrow z = \frac{6i+3i^2}{4+2i-2i-i^2} \Leftrightarrow z = \frac{6i-3}{4-(-1)} \Leftrightarrow z = \frac{-3+6i}{5} \Leftrightarrow z = -\frac{3}{5} + \frac{6i}{5}$

c) $\frac{2z}{i} + \frac{\bar{z}}{i^3} = i \Leftrightarrow \frac{2(x+yi)}{i} + \frac{x-yi}{i^3} = i \Leftrightarrow (-i)(2x + 2yi) + \frac{x-yi}{i*i^2} = i \Leftrightarrow -2xi - 2yi^2 + (x - yi) * (-1) * (-i) = i \Leftrightarrow -2xi + 2y + xi - yi^2 = i \Leftrightarrow -xi - 2y + y = i \Leftrightarrow -xi + 3y = i \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ -xi = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

$z = -1 + 0i \Leftrightarrow z = -1$

$C.S. = \{-1\}$

d) $z^3 + 3z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$

$C.S. = \{0; -\sqrt{3}i; \sqrt{3}i\}$

e) $z^2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1*2}}{2*1} \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1+\sqrt{7}i}{2} \vee$

$z = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$

$C.S. = \left\{\frac{1-\sqrt{7}i}{2}; \frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right\}$

f) $2z - i\bar{z} = 1 + 3i \Leftrightarrow 2(x + yi) - i(x - yi) = 1 + 3i \Leftrightarrow 2x + 2yi - xi + yi^2 =$

$1 + 3i \Leftrightarrow 2x + 2yi - xi - y = 1 + 3i \Leftrightarrow (2x - y) + i(-x + 2y) = 1 + 3i \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 2x \\ -x + 2(-1 + 2x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 2x \\ -x - 2 + 4x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = -1 + 2x \\ 3x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 2\left(\frac{5}{3}\right) \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + \frac{10}{3} = \frac{7}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

$z = \frac{5}{3} + \frac{7}{3}i$

$C.S. = \left\{\frac{5}{3}; \frac{7}{3}i\right\}$