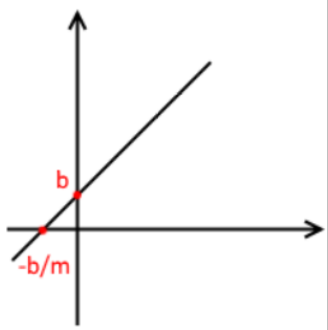
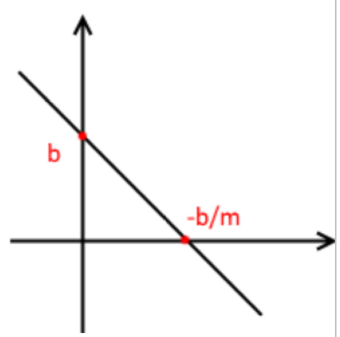
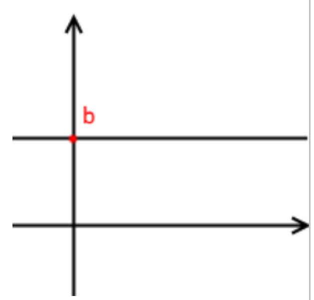
Funções

Função afim

Chama-se função afim a toda a função de domínio $\mathbb{R}$ tal que: $f(x) = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$.

Se m = 0, f(x) = b e diz-se que f é uma função constante.

f(x) = mx + b	m > 0	m < 0	m = 0
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	{b}
Zeros	$-\frac{b}{m}$	$-\frac{b}{m}$	$-\frac{b}{m}$
Representação gráfica			
Sinal	$x \in \left]-\infty; -\frac{b}{m}\right[: negativa$ $x \in \left]-\frac{b}{m}; +\infty\right[: positiva$	$x \in \left]-\infty; -\frac{b}{m}\right[: positiva$ $x \in \left]-\frac{b}{m}; +\infty\right[: negativa$	b > 0: positiva b < 0: negativa
Variação	crescente	decrescente	constante

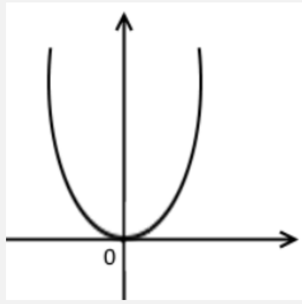
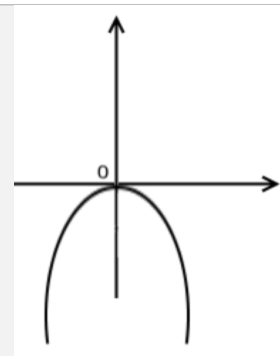
Função quadrática

Uma função real de variável real definida por um polinómio do 2º grau, ou seja, definida por uma expressão do tipo $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ é designada por função quadrática.

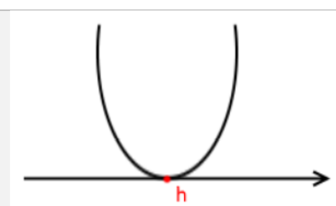
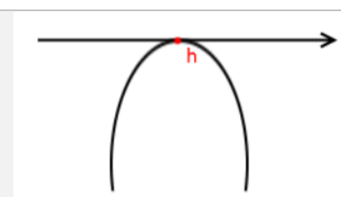
O gráfico da função quadrática é uma parábola.

$y = ax^2$

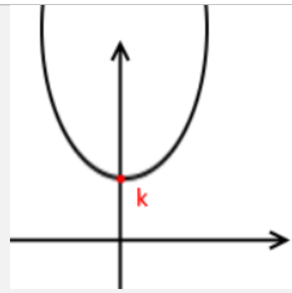
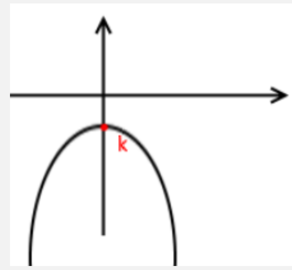
	a > 0	a < 0

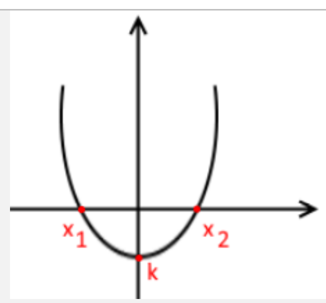
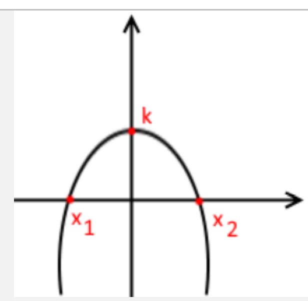
$y = ax^2$		
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	0	0
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$	Negativa em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty; 0[$ Crescente em $]0; +\infty[$	Crescente em $]-\infty; 0[$ Decrescente em $]0; +\infty[$
Extremos	Mínimo: 0 Minimizante: 0	Máximo: 0 Maximizante: 0

y = a(x-h)²

	a > 0	a < 0
$y = a(x-h)^2$		
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	h	h
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\backslash\{h\}$	Negativa em $\mathbb{R}\backslash\{h\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty; h[$ Crescente em $]h; +\infty[$	Crescente em $]-\infty; h[$ Decrescente em $]h; +\infty[$
Extremos	Mínimo: 0 Minimizante: h	Máximo: 0 Maximizante: h

$y = ax^2 + k$

	$a > 0 \wedge k > 0$	$a > 0 \wedge k < 0$
$y = ax^2 + k$		
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$[k, +\infty[$
Zeros	Não tem	x_1, x_2
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}$	Positiva em $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ Negativa em $]x_1; x_2[$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty; 0]$ Crescente em $[0; +\infty[$	Decrescente em $]-\infty; 0]$ Crescente em $[0; +\infty[$
Extremos	Mínimo: k Minimizante: 0	Máximo: k Maximizante: 0

	$a < 0 \wedge k > 0$	$a < 0 \wedge k < 0$
$y = ax^2 + k$		
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$]-\infty; k]$	$]-\infty; k]$
Zeros	x_1, x_2	Não tem
Sinal	Positiva em $]x_1; x_2[$ Negativa em $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$	Negativa em $\mathbb{R}$
Monotonia	Decrescente em $[0; +\infty[$	Decrescente em $[0; +\infty[$

	Crescente em $]-\infty; 0]$	Crescente em $]-\infty; 0]$
Extremos	Mínimo: k Minimizante: 0	Máximo: k Maximizante: 0

y = a(x-h)^2

O gráfico de uma função do tipo $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ é uma parábola com as seguintes características:

- Concavidade voltada para cima se a > 0; concavidade voltada para baixo se a < 0;
- Vértice no ponto de coordenadas (h; k);
- Eixo de simetria é a reta de equação x = h.

Determinação do vértice da parábola

As coordenas do vértice V são $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, com f(x) = ax^2 +b + c.

$f(x) = f(0) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a * 0^2 + b * 0 + c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$

Os pontos (0; f(0)) e $\left(-\frac{b}{a}; f\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$ são simétricos em relação ao eixo de simetria da função, logo a abcissa do vértice é metade de $-\frac{b}{a}$, daí que o vértice V seja dado por $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Função módulo

Uma função módulo, analiticamente, é definida por ramos. Uma função diz-se definida por ramos se é definida por expressões diferentes em partes diferentes do seu Domínio.

Exemplo:

$$f(x) = |x| = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Função soma

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Função diferença

$D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Função produto

$D_{f*g} = D_f \cap D_g$

$(f*g)(x) = f(x) * g(x)$

Função quociente

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Igualdade de funções

Dadas as funções f(x) e g(x), estas são iguais se e só se as seguintes igualdades se verificarem:

$D_f = D_g$

$f(x) = g(x), \forall_x \in D$

Função composta

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\}$ ou $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Exemplo:

$f(x) = \sqrt{x+1}; g(x) = \frac{1}{x}$

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x+1}\big) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \in [-1; +\infty[\wedge \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\} =$
$\left\{x \in \mathbb{R}: x \geq -1 \wedge \sqrt{x+1} \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1 \wedge x \neq 0\} =]-1; +\infty[$

$g \circ f =]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Função racional

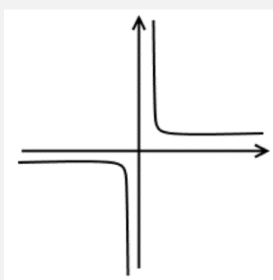
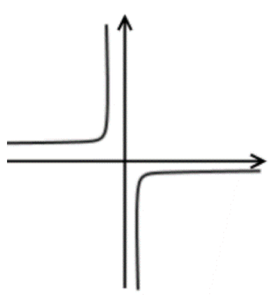
$f: x \hookrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$

O Domínio de uma função racional é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador: $D_f = \{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\}$.

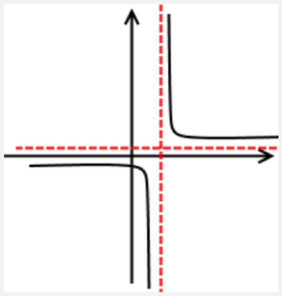
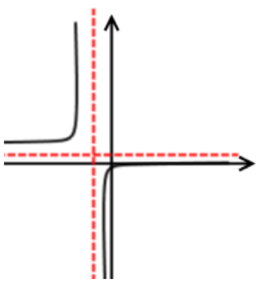
A reta x = a é uma Assíntota Vertical (A.V.) de f se f(x) tende para $\pm\infty$ quando x tende para *a* pelos valores à direta de *a* (a^+), pelos valores à esquerda de *a* (a^-) ou ambos.

A reta y = b é uma Assíntota Horizontal (A.H.) de f se f(x) tende para *b* quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$ ou ambos.

Funções do tipo $y = a + \frac{b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

<table>
<tr><td>$y = \frac{b}{x}, b \neq 0$</td><td>Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
Contradomínio: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
A.V.: x = 0
A.H.: y = 0</td></tr>
<tr><td>b > 0
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Sinal</td><td>-</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>Variação</td><td>↘</td><td></td><td>↗</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>b < 0
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Sinal</td><td>+</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>Variação</td><td>↗</td><td></td><td>↘</td></tr></table></td></tr>
</table>

$y = a + \frac{b}{x+d}, b \neq 0$	Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{-d\}$

<table>
<tr><td></td><td>Contradomínio: $\mathbb{R}\backslash\{a\}$
A.V.: x = -d
A.H.: y = a</td></tr>
<tr><td>b > 0
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-d</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Variação</td><td>↘</td><td></td><td>↗</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>b < 0
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-d</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Variação</td><td>↗</td><td></td><td>↘</td></tr></table></td></tr>
</table>

Simplificação de frações racionais

a	b
c	d

$$\frac{a}{b} \Leftrightarrow d + \frac{c}{b}$$

Exemplo:

$$f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x+1} = 2x - 1 + \frac{4}{x+1}$$

$2x^2 + x + 3$	$x + 1$
$-2x^2 - 2x$	$2x - 1$
$-x + 3$	

$+x+1$

4

Transformações do gráfico de uma função

- y = f(x) + k

  Translação na vertical para cima se k > 0

  Translação na vertical para baixo se k < 0
- y = f(x +k)

  Translação na horizontal para a esquerda se k > 0

  Translação na horizontal para a direita se k < 0
- y = kf(x)

  Alongamento vertical se k > 1

  Encolhimento vertical se 0 < k < 1
- y = f(kx)

  Encolhimento horizontal se k > 1

  Alongamento horizontal se 0 < k < 1
- y = - f(x)

  Simetria em relação ao eixo Ox
- y = f(-x)

  Simetria em relação ao eixo Oy
- y = |f(x)|

  Módulo de uma função: os intervalos de f(x) com sinal negativo passam a sinal positivo

Monotonia

- Função crescente: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall_{x_1, x_2} \in D_f$;
- Função decrescente: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall_{x_1, x_2} \in D_f$;
- Função constante: $f(x_1) = f(x_2), \forall_{x_1, x_2} \in D_f$.

Extremos

- f tem um máximo absoluto em *a* se $\forall_x \in D_f : f(x) \leq f(a)$;
  - A *a* chama-se maximizante, a *f(a)* máximo absoluto;
- f tem um mínimo absoluto em *a* se $\forall_x \in D_f : f(x) \geq f(a)$;
  - A *a* chama-se minimizante, a *f(a)* mínimo absoluto;

- f tem um máximo relativo em *a* se existir uma vizinhança V de centro *a* tal que $\forall_x \in V \cap D_f, f(x) \leq f(a)$;
    - A *a* chama-se maximizante, a *f(a)* máximo relativo;
- f tem um mínimo relativo em *a* se existir uma vizinhança V de centro *a* tal que $\forall_x \in V \cap D_f, f(x) \geq f(a)$;
    - A *a* chama-se minimizante, a *f(a)* mínimo relativo.

Injetividade

Dada uma função f de Domínio D, f é injetiva se e só se:

$$\forall_{x_1,x_2} \in D_f, se\ x_1 \neq x_2, então\ f(x_1) \neq f(x_2)\ ou$$

$$ou\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow\ x_1 = x_2, \forall_{x_1,x_2} \in D_f$$

Paridade

Função par

f é par: $f(-x) = f(x), \forall_x \in D_f$

Função ímpar

f é ímpar: $f(-x) = -f(x), \forall_x \in D_f$

Caso nenhuma das duas condições se verifique, diz-se que a função não é par nem ímpar.

Taxa média de variação

A taxa média de variação de uma função f no intervalo [a; b] representa-se por $tmv_{[a;b]}$ e é dada por: $tmv_{[a;b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Se f é estritamente crescente em $[a; b] \Rightarrow tmv_{[a;b]} > 0$;
- Se f é estritamente decrescente em $[a; b] \Rightarrow tmv_{[a;b]} < 0$;
- Se f é constante em $[a; b] \Rightarrow tmv_{[a;b]} = 0$;
- Interpretação gráfica: representa o declive da reta secante ao gráfico de f;

  Seja s a reta secante ao gráfico de f em $x = a$ e $x = b$.

  $m_s = \frac{y_b-y_a}{x_b-x_a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tmv_{[a;b]}$
- Interpretação física: representa a velocidade média da função no intervalo dado;

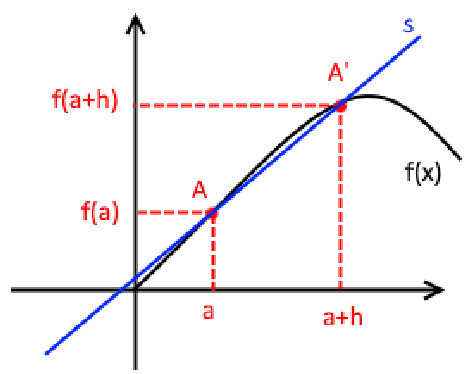
- Se uma função for estritamente crescente num intervalo do seu Domínio então a tmv é positiva nesse intervalo, mas o recíproco não é verdadeiro.

Taxa de variação

Dada uma função f chama-se derivada de f (ou taxa de variação de f) num ponto $x = a$ do seu Domínio e presenta-se por $f'(a)$ ao valor de $\lim_{h \to 0} tmv_{[a;b]}$, ou seja,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) \overset{MV\ x=a+h}{\Longleftrightarrow} f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

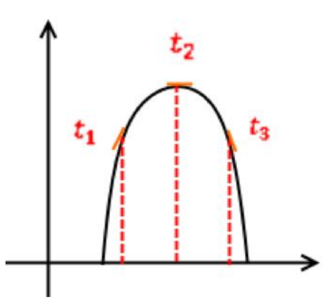
- Interpretação física: $f'(a)$ representa a velocidade instantânea da função em $x = a$;
- Interpretação gráfica:



$m_s = tmv[a; a + h]$

Quando $h \to 0$, a reta secante "transforma-se" numa reta tangente$\Rightarrow f'(a) = m_{tang.}$

A derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto:



$f'(a) = m_{t_1} > 0$

$f'(a) = m_{t_2} = 0$

$f'(a) = m_{t_3} < 0$

Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto

Uma forma de obter a equação de uma reta conhecido o seu declive (m) é um ponto $A(a; f(a))$ tal que:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

No caso da reta em causa ser a reta tangente a $x = a$, tem-se:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemplo:

Determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x + \ln(x - 2)$ no ponto $x = 3$.

$$f(3) = 3 + \ln(3 - 2) = 3 + \ln(1) = 3 + 0 = 3$$

$$f(3 + h) = 3 + h + \ln(3 + h - 2) = 3 + h + \ln(1 + h)$$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+h) - f(3)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(3+h+\ln(1+h)) - 3}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h+\ln(1+h)}{h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h} + \frac{\ln(1+h)}{h}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 3 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 6 + 3 \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

Função derivada

Seja f uma função, real de variável real, e D o conjunto de todos os elementos do Domínio de f que admitem variável.

Chama-se função derivada de f à função de Domínio D que a cada x faz corresponder o número real f’(x),

A função derivada de f pode ter as seguintes notações: $f'; y'; \frac{df}{dx}; \frac{dy}{dx}$.

Derivabilidade num ponto

Uma função f diz-se derivável (ou diferenciável) num ponto $x = a$ do seu Domínio se e só se existe derivada nesse ponto e é finito, ou seja:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k, k \neq \pm\infty$$

ou $\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x) = k, k \neq \pm\infty$

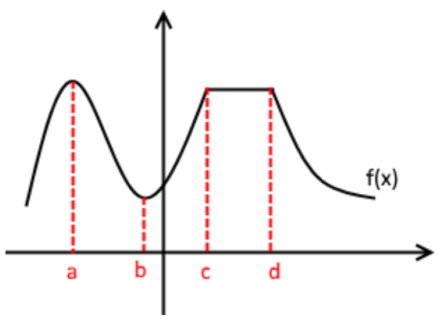
Não existe derivada em pontos angulosos.

Só existe derivada num ponto de descontinuidade de abcissa a de uma função f se e só se $\lim_{x \to a^-} f(a) = \lim_{x \to a^+} f(a) = f(a)$.

Teorema: se f é derivável num ponto $x = a$ do seu Domínio, então f é contínua nesse ponto.

Nota: $\text{derivável} \Rightarrow \text{contínua, mas contínua} \nRightarrow \text{derivável.}$

Sinal da derivada e sentido de variação (exemplo)

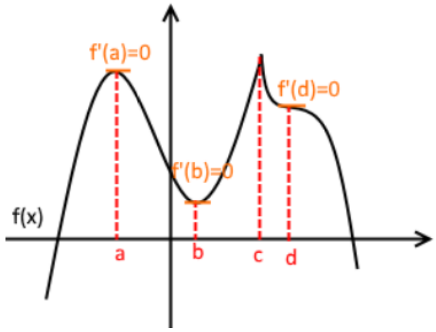


- f é estritamente crescente em $]-\infty; a[$ e $]b; c[$;
- f'é positiva em $]-\infty; a[$ e $]b; c[$;
- f é estritamente decrescente em $]a; b[$ e em $]d; +\infty[$;
- f'é negativa em $]a; b[$ e em $]d; +\infty[$;
- f é $constante\ em\ ]c; d[$;
- $f' = 0\ em\ ]c; d[\ , x = a\ (máximo\ relativo)\ e\ em\ x = b\ (mínimo\ relativo)$.

Estudo dos extremos relativos de uma função aplicado às derivadas (exemplo)

Seja f uma função contínua em $x = a$.

Se $f'(a) = 0$ ou $a \notin D_{f'}$ ($f'(a)$ não está definido) e f'muda de sinal em $x = a$, então $f(a)$ é extremo relativo (máximo ou mínimo) de f.



$D_f = \mathbb{R}$

$D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{c\} \rightarrow f'(c)$ não está definido porque $x = c$ é um ponto anguloso

$zeros_{f'} = \{a, b, d\}$

	$-\infty$	a		b		c		d	$+\infty$
sinal de f'	+	0	-	0	+	N.D.	-	0	-
variação de f	$\nearrow$	$máx: f(a)$	$\searrow$	$mín: f(b)$	$\nearrow$	$máx: f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\searrow$

Assim, $f(a)$ e $f(c)$ são máximos relativos de f, e $f(b)$ é um mínimo relativo de f.

Segunda derivada de uma função

Seja $a \in D_{f'}$:

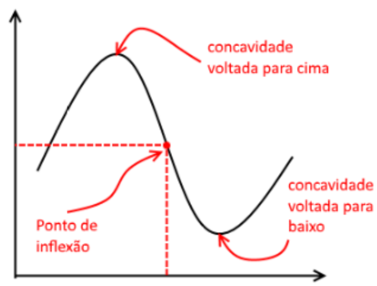
A segunda derivada ou derivada de segunda ordem em $x = a$ representa – se por $f''(a)$ e representa-se por:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} \right) ou\ f''(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \right)$$

A segunda derivada de f é a derivada de f'.

- Significado físico da segunda derivada: $f''(a)$ é o valor da aceleração da função f em $x = a$;
- Significado gráfico da segunda derivada (concavidade):

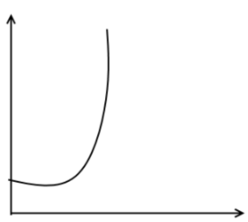
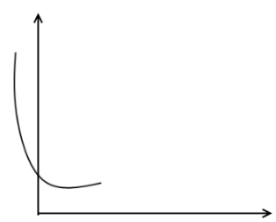
Diz-se que uma função tem a concavidade voltada para cima num intervalo do seu Domínio se em qualquer ponto desse intervalo a curva da função está acima da reta tangente nesse ponto caso contrário diz-se que a concavidade está voltada para baixo.



Uma função tem um ponto de inflexão em $x = a$ se o seu gráfico muda o sentido da concavidade nesse ponto.

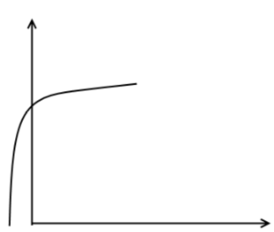
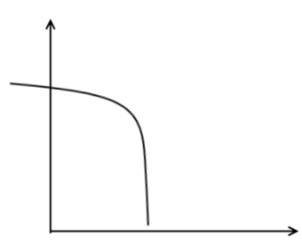
Sinal de f’ e o sentido da concavidade

Concavidade voltada para cima

m_t está a aumentar $\Rightarrow f'(x)$ é crescente $\Rightarrow \big(f'(x)\big)' > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

Concavidade voltada para baixo

m_t está a diminuir $\Rightarrow f'(x)$ é decrescente $\Rightarrow \big(f'(x)\big)' < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

Conclusão

Seja f duplamente derivável em $]a; b[$:

- f tem concavidade voltada para cima em $]a; b[\Leftrightarrow f''(x) > 0, \forall_x \in]a; b[$;

- f tem concavidade voltada para baixo em $]a; b[\Leftrightarrow f''(x) < 0, \forall_x \in]a; b[$.

Estudo analítico das concavidades e pontos de inflexão (exemplos)

1. $f(x) = (x-1)e^x$

   $f'(x) = \left((x-1)e^x\right)' = (x-1)'(e^x) + (x-1)(e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

   $f''(x) = (xe^x)' = (x')(e^x) + (x)(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \lor 1 + x = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \lor x = -1 \Leftrightarrow x = -1$

   $zeros\ de\ f'': \{-1\}$

   $f(-1) = (-1-1)e^{-1} = -\frac{2}{e}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩	$P.I.: f(-1) = -\frac{2}{e}$	∪

   f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty; -1[$.

   f tem concavidade voltada para cima em $]-1; +\infty[$.

   $\left(-1; -\frac{2}{e}\right)$ é Ponto de Inflexão de f.

2. $f(x) = \ln(x^2+1)$

   $f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$

   $f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)' * (x^2+1) - (2x) * (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2 = 0 \land (x^2+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \land x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1 \lor x = 1$

   $f(-1) = \ln((-1)^2 + 1) = \ln 2$

   $f(1) = \ln(1^2+1) = \ln 2$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	-	0	+	0	-
f	∩	P.I.	∪	P.I.	∩

   f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty; -1[$ e $]1; +\infty[$;

   f tem concavidade voltada para cima em $]-1; 1[$.

$(-1; \ln 2)$ e $(1; \ln 2)$ são Pontos de Inflexão de f.

Regras de derivação

- $(ax^n)' = nax^{n-1}$

  Exemplos:

  a) $(4x^3)' = 3 * 4x^{3-1} = 12x^2$
  b) $\left(-\frac{3}{2}x^4\right)' = -\frac{12}{2}x^3 = -6x^3$
  c) $(3)' = 0$

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

  Exemplos:

  a) $\left(5x^3 + \frac{x^2}{2}\right)' = 15x^2 + \frac{2x}{2} = 15x^2 + x$
  b) $(4x^2 - 5x + 1)' = 8x - 5$

- $(f * g)'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x), \forall_x \in D_f \cap D_g$

  Exemplos:

  a) $\left(x(3x^2-4x)\right)' = (x)'(3x^2-4x) + (x)(3x^2-4x)' = 1(3x^2-4x) + (x)(6x-4) = 3x^2 - 4x + 6x^2 - 4x = 9x^2 - 8x$
  b) $\left((x^2+6x)\left(\frac{2}{3}x-4\right)\right)' = (x^2+6x)'\left(\frac{2}{3}x-4\right) + (x^2+6x)\left(\frac{2}{3}x-4\right)' = (2x+6)\left(\frac{2}{3}x-4\right) + (x^2+6x)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}x^2 - 8x + 4x - 24 + \frac{2}{3}x^2 + 4x = 2x^2 - 24 = x^2 - 12$
  c) $\left(5(x^3-2x)\right)' = (5)'(x^3-2x) + (5)(x^3-2x)' = 0(x^3-2x) + 5(3x^2-2) = 15x^2 - 10 = 3x^2 - 2$

- $\left(k * f(x)\right)' = k * f'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}, \forall_x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0$

  Exemplo:

  $\left(\frac{x^2-3x+2}{4x+1}\right)' = \frac{\left(x^2-3x+2\right)'*(4x+1)-\left(x^2-3x+2\right)*(4x+1)\prime}{(4x+1)^2} = \frac{(2x-3)*(4x+1)-\left(x^2-3x+2\right)*4}{(4x+1)^2} = \frac{8x^2+2x-12x-3-4x^2+12x-8}{(4x+1)^2} = \frac{4x^2+2x-11}{(4x+1)\text{^}2}$

- $\left(\frac{f(x)}{k}\right)' = \frac{f'(x)}{k}$

- $\left(\frac{k}{f(x)}\right)' = -\frac{kf'(x)}{(f(x))^2}, \forall_x \in D_{f'}: f(x) \neq 0$

  Exemplo:

  $\left(\frac{5}{3x^2+x}\right)' = -\frac{5(3x^2+x)'}{(3x^2+x)^2} = -\frac{30x+5}{(3x^2+x)^2}$

- $(f^n)'(x) = n * f^{n-1}(x) * f'(x), \forall_n \in \mathbb{R}$

  Exemplos:

  a) $((2x-5)^3)' = 3 * (2x-5)^2 * (2x-5)' = 3 * (2x-5)^2 * 2 = 6 * (2x-5)^2$

  b) $\left(\sqrt[5]{3x+2}\right)' = \left((3x+2)^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5} * (3x-2)^{\frac{1}{5}-1} * (3x+2)' = \frac{1}{5} * (3x-2)^{-\frac{4}{5}} * 3 =$

  $\frac{3}{5} * (3x-2)^{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} * \frac{1}{\sqrt[5]{(3x-2)^4}} = \frac{3}{5 * \sqrt[5]{(3x-2)^4}}$

- $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n * \sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}, \forall_x \in D_{\sqrt{f}}: f(x) \neq 0$

  Exemplo:

  $\left(\sqrt[4]{2x-10}\right)' = \frac{(2x-10)'}{4 * \sqrt[4]{(2x-10)^3}} = \frac{2}{4 * \sqrt[4]{(2x-10)^3}} = \frac{1}{2 * \sqrt[4]{(2x-10)^3}}$

- $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2 * \sqrt{f(x)}}$

  Exemplo:

  $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)'}{2 * \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2 * \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

- $(\sin(u))' = u' \cos(u)$
- $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$
- $(\tan(u))' = \frac{u'}{(\cos(u))^2}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(e^u)' = u'e^u$

  Exemplo:

  $\left(e^{6x^2-4x+1}\right)' = (6x^2-4x+1)'\left(e^{6x^2-4x+1}\right) = (12x-4)\left(e^{6x^2-4x+1}\right)$

- $(a^u)' = u' * a^u * \ln(a), a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

  Exemplo:

  $(5^{6x-4})' = (6x-4)' * (5^{6x-4}) * \ln(5) = 6 * 5^{6x-4} * \ln(5)$

- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

  Exemplo:

$(\ln(x^2+3))' = \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} = \frac{2x}{x^2+3}$

- $(\log_a(u))' = \frac{u'}{u ln(a)}, a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

  Exemplo:

  $\left(\log_5\left(\frac{3}{x^2}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{3}{x^2}\right)'}{\left(\frac{3}{x^2}\right) * \ln 5} = \frac{-\frac{6x}{x^4}}{\frac{3\ln 5}{x^2}} = \frac{-\frac{6}{x^3}}{\frac{3\ln 5}{x^2}} = -\frac{6x^2}{3x^3\ln 5} = -\frac{2}{x * \ln 5}$

- $(f \circ g)'(x) = \left(f'g(x) * g'(x)\right)\ ou\ f'(u) = f'(u) * u$

  Exemplo:

  $f(x) = x^2 - 3x; g(x) = 2x + 1$

  $f'(x) = 2x - 3; g'(x) = 2$

  $(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) * g'(x) = f'(2x+1) * 2 = (2(2x+1) - 3) * 2 = (4x + 2 - 3) * 2 = (4x - 1) * 2 = 8x - 2 = 4x - 1$

- Função definida por ramos
  - Derivar cada ramo;
  - Determinar as derivadas laterais (usando limites) nos pontos de transição dos ramos, para verificar se há derivada;
  - Apresentar a função derivada;

  Exemplo:

  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x < 1 \\ 4\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

  $f(1) = 4\sqrt{1} = 4$

  $(x^2 + 3)' = 2x$

  $\left(4\sqrt{x}\right)' = 4\left(\sqrt{x}\right)' = 4 * \frac{(x)'}{2\sqrt{x}} = 4 * \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$

  $f'(1^-) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2 + 2h}{h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\left(\frac{h(h+2)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(h+2) = 0 + 2 = 2$

  $f'(1^+) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4\sqrt{1+h} - 4}{h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\left(\frac{4(\sqrt{1+h} - 1)}{h}\right) = 4\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}\right) = 4\lim_{h\to 0}\left(\frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)}\right) = 4\lim_{h\to 0}\left(\frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)}\right) = 4\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{(\sqrt{1+h} + 1)}\right) = 4 * \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = 4 * \frac{1}{2} = 2$

  $f'(1^-) = f'(1^+) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$

  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \frac{2\sqrt{x}}{x}, & x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ \frac{2\sqrt{x}}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Função inversa

Seja f uma função real de variável real de Domínio A e injetiva:

$f: A \to \mathbb{R}$

$x \hookrightarrow f(x)$

Se B é o Contradomínio de f, isto é, B = f(A), chama-se função inversa de f e representa-se por f^{-1} à função assim definida:

$f^{-1}: B \to A$

$x \hookrightarrow f^{-1}(x)$

em que $f^{-1}f\big((x)\big) = x, \forall_x \in A$.

Uma função f admite função inversa se e só se f for injetiva.

Funções irracionais

$f(x) = \sqrt[n]{x}, n\ par$

$g(x) = \sqrt[n]{x}, n\ ímpar$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

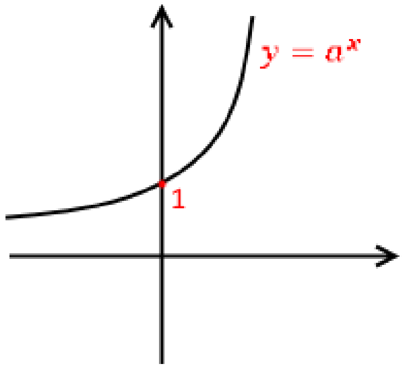
$D_g = \mathbb{R}$

Numa função irracional g de índice n ímpar, o Domínio de g é $\mathbb{R}$.

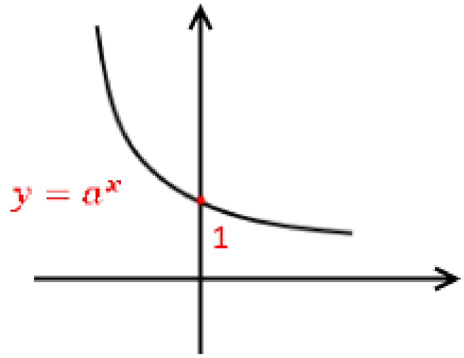
Numa função irracional f de índice n par, o Domínio de f é calculado através da equação $x \geq 0$.

Função exponencial

Chama-se função exponencial de base a $(a > 0 \wedge a \neq 1)$ à função $f(x) = a^x$ ou qualquer função desta família.



a > 1



a < 1

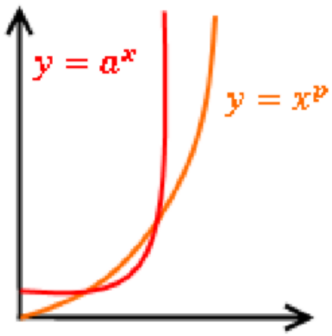
Estudo da função f(x) = a^x com a > 1

- Domínio: $D_f = \mathbb{R}$;
- Contradomínio: $D'_f =]0; +\infty[\ ou \ \mathbb{R}^+$;
- Zeros: f não tem zeros $a^x = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$;
- Continuidade: f é contínua;
- Pontos relevantes: $P_1(0;1)$ e $P_2(1;a)$;
- Monotonia: f é estritamente crescente: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall_{x_1,x_2} \in D_f$, ou seja, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;
- Injetividade: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \forall_{x_1,x_2} \in D_f$, ou seja, $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$;
- Assíntota: A.H.: reta y = 0;
- Paridade: f não é par nem ímpar;
- Limites:
  - $\lim_{x \to -\infty} (a^x) = 0$;
  - $\lim_{x \to +\infty} (a^x) = +\infty$.

O gráfico de $f(x) = a^x$ com 0 < a < 1 pode ser obtido por simetria relativamente ao eixo Oy de uma função $g(x) = b^x$ com b > 1, sendo $b = \frac{1}{a}$

Comparação do crescimento exponencial com o da potência

$\forall_{a>1, p\in\mathbb{R}}, \exists_{x_0} \in \mathbb{R}: x > x_0 \Rightarrow a^x > x^p$



Para $x > x_0, a^x - x^p$ aumenta indefinidamente com x:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x}{x^p}\right) = +\infty, a > 1, p \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^p}{a^x}\right) = 0, a > 1, p \in \mathbb{R}$$

Determinação do Contradomínio de uma função exponencial

Exemplos:

a) $f(x) = 5 + 3 * 2^{x+4}$

$x \in \mathbb{R}$

$x + 4 \in \mathbb{R}$

$2^{x+4} > 0 \xrightarrow{*3} 3 * 2^{x+4} > 0 \xrightarrow{+5} 5 + 3 * 2^{x+4} > 5$

$D'_f =]5; +\infty[$

b) $g(x) = -1 + 2 * 5^{3-x^2}$

$x \in \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0$

$-x^2 \leq 0$

$3 - x^2 \leq 3$

$0 < 5^{3-x^2} \leq 5^3 \rightarrow 0 < 5^{3-x^2} \leq 125 \xrightarrow{*2} 0 < 2 * 5^{3-x^2} \leq 250 \xrightarrow{-1} -1 < -1 + 2 * 5^{3-x^2} \leq$ 249

$D'_f =]-1; 249]$

c) $h(x) = 4 + 3e^{1-x^2}$

$x \in \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0$

$-x^2 \leq 0$

$1 - x^2 \leq 1$

$0 < e^{1-x^2} \leq e^1 \overset{*3}{\rightarrow} 0 < 3e^{1-x^2} \leq 3e \overset{+4}{\rightarrow} 4 < 4 + 3e^{1-x^2} \leq 4 + 3e$

$D'_f =]4; 4 + 3e]$

d) $i(x) = 2 + 5 * 3^{x^2+4}$

$x \in \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0$

$x^2 + 4 \geq 4$

$3^{x^2+4} \geq 3^4 \overset{*5}{\rightarrow} 5 * 3^{x^2+4} \geq 405 \overset{+2}{\rightarrow} 2 + 5 * 3^{x^2+4} \geq 407$

$D'_f = [407, +\infty[$

Logaritmo

Equação polinomial vs. Equação exponencial

$x^3 = 81 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{81}$ → equação polinomial (a incógnita está na base): o número que elevado a 3 é 81 e representa-se por $\sqrt[3]{81}$.

$3^x = 81 \Leftrightarrow x = \log_3 81 \Leftrightarrow x = 4$ → equação exponencial (a incógnita está no expoente da potência): o número ao qual se deve elevar 3 para obter 81.

Outros exemplos:

a) $\log_2 8 = 3\ (2^3 = 8)$
b) $\log_5 25 = 2\ (5^2 = 25)$
c) $\log_2 32 = 5\ (2^5 = 32)$
d) $\log_4 64 = 3\ (4^3 = 64)$

Definição

Seja $a > 0$, com $a \neq 1$ e $b > 0$. Chama-se logaritmo de *b* na base *a* e representa-se por $\log_a b$ ao expoente a que é necessário elevar *a* para obter *b*.

Assim: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Nota:

$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ ou $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

Logaritmo de base 10

Representa-se por $\log a$ e designa-se por logaritmo decimal

$\log a = \log_{10} a$

Exemplos:

a) $\log 100 = 2 \ (10^2 = 100)$
b) $\log 10000 = 4 \ (10^4 = 10000)$
c) $\log 0{,}01 = -2 \ (10^{-2} = 0{,}01)$

Logaritmo de base *e*

Representa-se por $\ln a$ e designa-se por logaritmo neperiano ou natural.

Exemplos:

a) $\ln e^3 = 3 \ (e^3 = e^3)$
b) $\ln \frac{1}{e} = -1 \ (\frac{1}{e} = e^{-1})$
c) $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}\right)$

Consequências da definição de logaritmo

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, a > 0, a \neq 1$

- $\log_a 1 = 0 \ (a^0 = 1)$
- $\log_a a = 1 \ (a^1 = a)$
- $\log_a a^x = x \ (a^x = a^x)$
- $a^{\log_a x} = x$

Exemplos:

a) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$
b) $\ln \sqrt[3]{\frac{1}{e}} = \ln \sqrt[3]{e^{-1}} = \ln(e^{-1})^{\frac{1}{3}} = \ln e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$
c) $\log_8 32 = \log_8 2^5 = (2^3)^{\frac{5}{3}} = \log_8 8^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$
d) $\log_9 \sqrt{3} = \log_9 3^{\frac{1}{2}} = \log_9\left(\sqrt{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_9 9^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$
e) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \log_{\sqrt{2}} 2^{-2} \log_{\sqrt{2}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-4} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{-4} = -4$

Regras operatórias dos logaritmos

$a \neq 0 \wedge a > 1, u > 0, n > 0$

1)

$\log_a(u * n) = \log_a u * \log_a n$

Demonstração:

$u = a^{\log_a u}, n = a^{\log_a n}$

$\log_a(u * n) = \log_a(a^{\log_a u} * a^{\log_a n}) = \log_a(a^{\log_a u + \log_a n}) = \log_a u + \log_a n$

Exemplo:

$\log_2(8 * 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = \log_2 2^3 + \log_2 2^2 = 3 + 2 = 5$

2)

$\log_a\left(\frac{u}{n}\right) = \log_a u - \log_a n$

Demonstração:

$u = a^{\log_a u}, n = a^{\log_a n}$

$\log_a\left(\frac{u}{n}\right) = \log_a\left(\frac{a^{\log_a u}}{a^{\log_a n}}\right) = \log_a a^{\log_a u - \log_a n} = \log_a u - \log_a n$

Exemplo:

$\log_3\left(\frac{81}{27}\right) = \log_3 81 - \log_3 27 = \log_3 3^4 - \log_3 3^3 = 4 - 3 = 1$

3)

$\log_a\left(\frac{1}{u}\right) = -\log_a u$

Demonstração:

$u = \log_a u$

$\log_a\left(\frac{1}{u}\right) = \log_a 1 - \log_a u = 0 - \log_a u = -\log_a u$

Exemplo:

$\log_5\left(\frac{1}{4}\right) = -\log_5 4$

4)

$\log_a u^n = n * \log_a u$

Exemplo:

$\log_2 4^3 = 3 * \log_2 4 = 3 * \log_2 2^2 = 3 * 2 = 6$

5)

$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b u}$

Exemplos:

$$\log_9 \sqrt{3} = \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3^2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\log_2\left(\frac{1}{4}\right)}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

6)

$$\log^2{}_a b = (\log_a b)^2$$

Comparação do crescimento logarítmico com o da potência

A função $y = \log_a x \ (a > 1)$, cresce muito mais lentamente do que $y = x^p \ (p > 0)$. Logo:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^p}{\log_a x} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$.

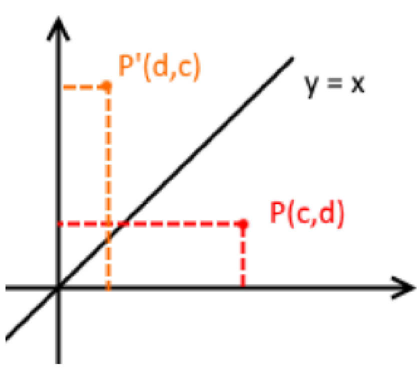
Função logarítmica de base superior a 1

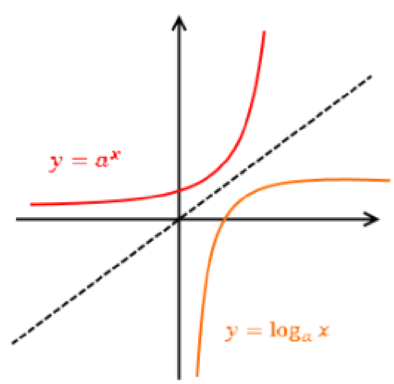
Seja $f(x) = a^X, a > 1$.

A função inversa de f é dada por: $f(x) = y \Leftrightarrow a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y \to y = \log_a x$

Conclusão: a função inversa de $y = a^x$ é $y = \log_a x$.

Gráfico de $y = \log_a x$:





$f(c) = d \to P(c; d)$ pertence ao gráfico de $y = \log_a x$.

$f^{-1}(d) = c \rightarrow P'(d; c)$ pertence ao gráfico de $y = a^x$.

Assim, o gráfico de $y = \log_a x$ é simétrico do gráfico de $y = a^x$ relativamente à reta $y = x$.

Estudo do gráfico de f(x) = $\log_a$x, a > 1

- Domínio: $D_f =]0; +\infty[= \mathbb{R}^+$;
- Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R}$;
- Zeros: $\{1\}$ $(\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1)$;
- Continuidade: f é contínua em todo o Domínio;
- Injetividade: f é injetiva;

  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \forall_{x_1,x_2} \in D_f$

  $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- Monotonia: f é estritamente crescente;

  $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2, \forall_{x_1,x_2} \in D_f$

  $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Assíntotas: A.V.: $x = 0$.

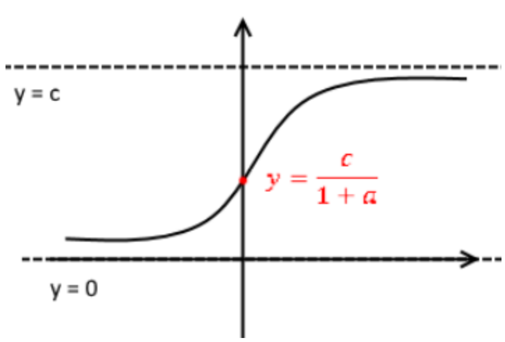
Domínio de uma função logarítmica

$f(x) = \log_a P(x)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: P(x) > 0\}$

Função logística

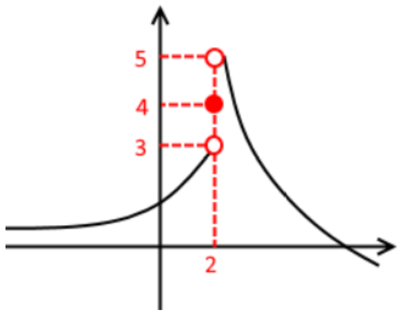
$f(x) = \frac{c}{1+ae^{-bx}}, a, b, c \in \mathbb{R}^+$



$\frac{c}{1+ae^{-\infty}} = \frac{c}{1+a*0} = c$

Definição de limite de uma função segundo Heine

Limites laterais



$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow u_n \to 2^- \Rightarrow f(u_n) \to 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5 \Rightarrow u_n \to 2^+ \Rightarrow f(u_n) \to 5$

Limite à direta de a

Diz-se que $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ se e só se, a toda a sucessão u_n que tende para *a*, de termos pertencentes a D_f e superiores a *a*, lhe corresponde uma sucessão de $f(u_n)$ que tende para *b*.

Limite à esquerda de a

Diz-se que $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ se e só se, a toda a sucessão u_n que tende para *a*, de termos pertencentes a D_f e inferiores a *a*, lhe corresponde uma sucessão de $f(u_n)$ que tende para *b*.

Limite em a

Diz-se que existe $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b \Rightarrow$ os limites laterais são iguais.

Limite num ponto segundo Heine

Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se toda a sucessão u_n de termos pertencentes ao D_f que tenda para *a* por valores diferentes de *a*, a correspondente sucessão $f(u_n)$ tende para *b*.

Assim, como consequência da definição: $u_n \to a \Leftrightarrow \lim f(u_n) = \lim_{x \to a} f(x)$

Exemplos:

a) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

$u_n = n^2$

$\lim u_n = \lim(n^2) = (+\infty)^2 = +\infty$

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0$

b) $f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$

$u_n = -\frac{1}{n}$

$\lim u_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{+\infty} = -0 = 0^-$

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x-1}{e^x-1}\right) = \frac{0-1}{e^{0^-}-1} = \frac{-1}{1^- -1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

c) $f(x) = \ln x$

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim u_n = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = e$

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e}(\ln x) = \ln e = 1$

d) $f(x) = \ln(e-x)$

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim u_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

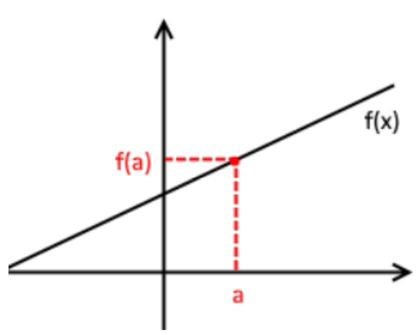
$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e}(\ln(e-x)) = \ln(e-e) = \ln(0^+) = -\infty$

Continuidade

Uma função f diz-se contínua num ponto *x* = *a* do seu Domínio se e só se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

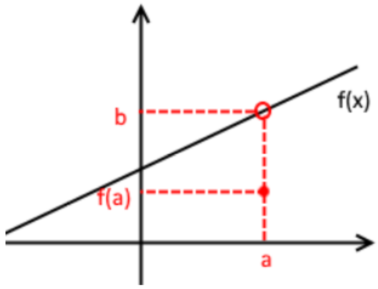
Exemplos:

1.



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow f \text{ é contínua em } a$$

2.



$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$, ou seja, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ *mas* $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a) \Rightarrow$ f não é contínua em a

Continuidade lateral

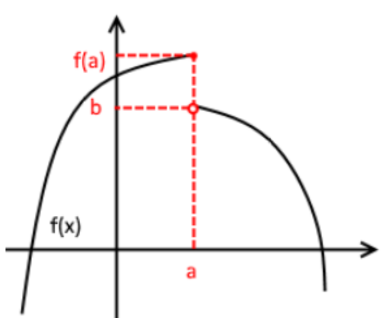
Uma função f diz-se contínua à esquerda no ponto *x* = *a* do seu Domínio se e só se $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Uma função f diz-se contínua à direita no ponto *x* = *a* do seu Domínio se e só se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Uma função f é contínua no ponto *x* = *a* se e só se for contínua à esquerda e à direita no ponto *x* = *a*.

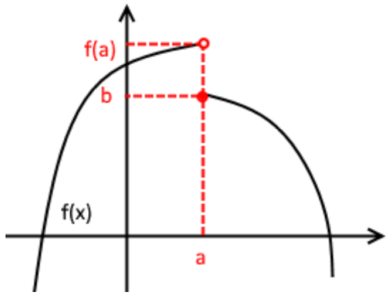
Exemplos:

1.



$\lim_{x \to a^-} f(x) = fa) \Rightarrow f$ é contínua à esquerda em $x = a$

2.

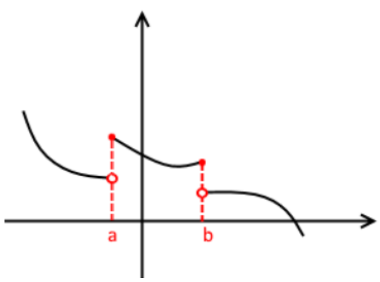


$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow f \text{ é contínua à direita em } x = a$$

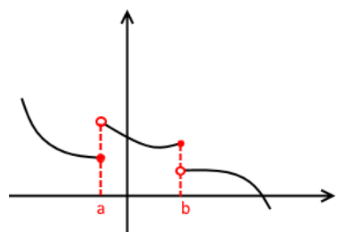
Continuidade num intervalo

Uma função f diz-se contínua num intervalo [a; b] do seu Domínio se e só se for contínua em todos os pontos do intervalo]a; b[e for contínua à direita no ponto *x* = *a* e à esquerda em *x* = *b*.

Exemplos:



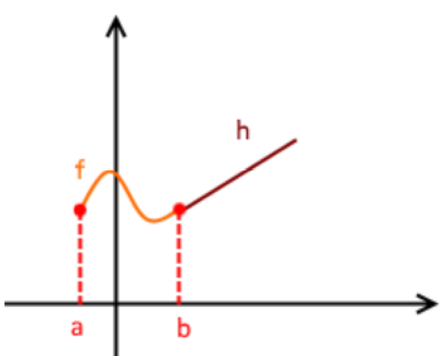
f é contínua em [a; b]



f é contínua em]a; b]

Prolongamento/Restrição de uma função

Exemplo:



$D_f = [a; b]$

$D_g = [a;\ +\infty[$

$f(x) = h(x), \forall_x \in D_f \cap D_g \Rightarrow$

h é um prolongamento de f a $[a;\ +\infty[$ ou f é uma restrição de h a $[a; b]$

Operações com funções contínuas

Se f e g são duas funções contínuas em *x* = *a* (com $a \in D_f \cap D_g$) então as seguintes funções também são contínuas em *x* = *a*:

- $f + g$
- $f - g$
- $f * g$
- $\frac{f}{g}, se\ g(a) \neq 0$
- $f^n, n\ \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{f}, se\ f(a) \in D_{\sqrt{f}}$

Funções contínuas

As seguintes funções são contínuas em todo o seu Domínio:

- Função polinomial ($D = \mathbb{R}$)

  Exemplo:

  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1 \rightarrow f$ é contínua em $\mathbb{R}$
- Função racional fracionária

  Exemplo:

  $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-3} \rightarrow D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\} \rightarrow f$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$
- Função exponencial ($y = a^x, a > 1; D = \mathbb{R}$)

  Exemplo:

  $f(x) = e^x \rightarrow f$ é contínua em $\mathbb{R}$
- Função logarítmica ($y = \log_a x\,, a > 1$)

  Exemplo:

  $f(x) = \ln x \rightarrow f$ é contínua em $\mathbb{R}^+$

Exemplos

a) $f(x) = 3^x + x^2$

f é contínua em $\mathbb{R}$ porque é a soma de uma função exponencial $y = 3^x$ (contínua em $\mathbb{R}$) com uma função polinomial $y = x^2$ (contínua em $\mathbb{R}$).

b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-3} * \log x$

$D_{\frac{x^2+2}{x-3}} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$D_{\log x} = \mathbb{R}^+$

f é contínua em $\mathbb{R}^+\backslash\{3\}$ porque é o produto de uma função racional fracionária $y = \frac{x^2+2}{x-3}$ (contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$) por uma função logarítmica $y = \log x$ (contínua em $\mathbb{R}^+$).

Continuidade da função composta

Sejam f e g duas funções e *a* um ponto pertencente ao Domínio da função $g \circ f$.

Se f for contínua em *a* e g for contínua em *f(a)* então $g \circ f$ é contínua em *a*.

Exemplos:

a) $(g \circ f)(x) = e^{x^2-3x}$

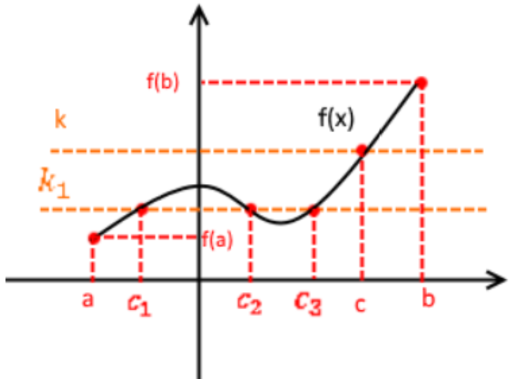
$g \circ f$ é contínua em $\mathbb{R}$ porque é a composta de uma função exponencial $y = e^x$ (contínua em $\mathbb{R}$), com uma função polinomial $y = x^2 - 3x$ (contínua em $\mathbb{R}$).

b) $(g \circ f)(x) = \ln(x-2)$

$g \circ f$ é contínua em todo o seu Domínio, $]2; +\infty[$, porque é a composta de uma função logarítmica $y = \ln x$ (contínua em $\mathbb{R}^+$), com uma função polinomial $y = x - 2$ (contínua em $\mathbb{R}$).

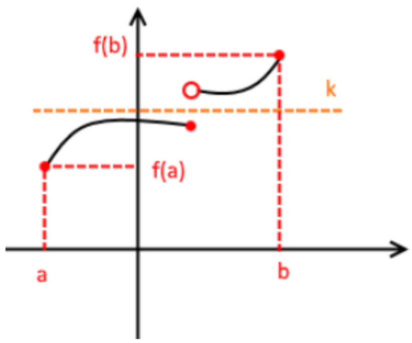
Teorema de Bolzano-Cauchy

Uma função contínua num intervalo passa de um valor para o outro sem percorrer todos os valores intermédios.



$f(x) = k \Leftrightarrow x = c$ (1 solução)

$f(x) = k_1 \Leftrightarrow x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3$ (3 soluções)



$f(x) = k$ não tem solução porque f não é contínua.

Assim:

f é contínua em $[a; b] \wedge f(a) < k < f(b)$ ou $f(b) < k < f(a) \Rightarrow \exists_c \in]a; b[: f(c) = k$

Exemplos:

a) Provar que a equação $f(x) = \frac{7}{2}$ tem uma solução em $]\frac{1}{2}; 3[$ sendo $f(x) = \frac{2^x+1}{x}$

f é contínua em $[\frac{1}{2}; 3]$ porque é o quociente entre a soma de uma função exponencial $y = 2^x$ com uma função constante $y = 1$ e uma função polinomial $y = x$, sendo todas estas funções contínuas no intervalo dado.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{\frac{1}{2}}+1}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} + 2 \approx 4{,}8$$

$$f(3) = \frac{2^3+1}{3} = 3$$

$f(3) < \frac{7}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right)$

O Teorema de Bolzano garante que $\exists_c \in \left]\frac{1}{2}\,; 3\right[: f(c) = \frac{7}{2}$.

b) Provar que a equação $f(x) = 10$ tem uma solução no intervalo $]-3; 1[$ sendo $f(x) = 5e^x - 1$

f é contínua em $[-3; 1]$ porque é a diferença entre o produto de uma função constante $y = 5$ por uma função exponencial $y = e^x$ e uma função constante $y = -1$, sendo todas estas contínuas no intervalo dado.

$f(-3) = 5e^{-3} - 1 = \frac{5}{e^3} - 1 = \frac{5-e^3}{e^3} \approx -0{,}75$

$f(1) = 5e^1 - 1 \approx 12{,}59$

$f(-3) < 10 < f(1)$

O Teorema de Bolzano garante que $\exists_c \in]-3; 1[: f(c) = 10$.

c) Provar que a equação $f(x) = x + 5$ tem uma solução no intervalo $]2; 6[$ sendo $f(x) = x^2 - 3x$

$f(x) = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 5$

$g(x) = x^2 - 4x$

g é contínua no intervalo $[2; 6]$ porque é definido por uma função polinomial $y = x^2 - 4x$, contínua em $\mathbb{R}$.

$g(2) = 2^2 - 4 * 2 = -4$

$g(6) = 6^2 - 4 * 6 = 12$

$g(2) < 5 < g(6)$

O Teorema de Bolzano garante que $\exists_c \in]2; 6[: g(x) = 5$, ou seja, $\exists_c \in]2; 6[: f(c) = x + 5$.

Corolário do Teorema de Bolzano

Se uma função f for contínua num intervalo $[a; b]$ e *f(a)* e *f(b)* tiverem sinais contrários podemos garantir que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]a; b[$.

$f \text{ é contínua em } [a; b] \wedge f(a) * f(b) < 0 \Rightarrow \exists_c \in]a; b[: f(x) = 0$

Exemplo:

Mostrar que a função $f(x) = \log_2(x-2)$ tem um zero em $]\frac{5}{2}; 6[$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 > 0\} \Leftrightarrow D_f =]2; +\infty[$

f é contínua em $]2; +\infty[$.

f é contínua em $[\frac{5}{2}; 6]$ porque é contínua em todos o seu Domínio, $]2; +\infty[$, uma vez que é composta por uma função logarítmica $y = \log_2 x$ (contínua em $\mathbb{R}^+$), e por uma função afim $y = x - 2$ (contínua em $\mathbb{R}$).

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \log_2\left(\frac{5}{2} - 2\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2^{-1}) = -1$

$f(6) = \log_2(6-2) = \log_2(4) = \log_2(2^2) = 2$

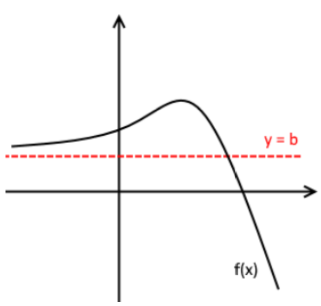
$f\left(\frac{5}{2}\right) * f(6) < 0$

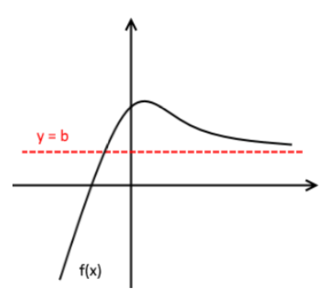
O Corolário do Teorema de Bolzano garante que $\exists_c \in]\frac{5}{2}; 6[: f(x) = 0$

Assintotas

Assíntotas horizontais (A.H.)

A reta de equação $y = b$ é uma A.H. do gráfico da função f se e só se:





$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- No máximo, uma função tem duas A.H.;
- Uma função pode ter uma A.H. bilateral;
- Uma função de Domínio limitado ($[a; b]$ ou $]a; b[$ ou $[a; b[$ ou $]a; b]$) não tem A.H.;
- Uma função com Domínio $]-\infty; a[$ tem no máximo uma A.H. (em $-\infty$);
- Uma função com Domínio $]a; +\infty[$ tem no máximo uma A.H. (em $+\infty$).

Exemplos:

a) $f(x) = \frac{3x^2+2x}{6x-3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 6x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2+2x}{6x-3}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{6x}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{+\infty}{2} \vee \frac{-\infty}{2} = +\infty \vee -\infty$

Assim conclui-se que f não tem A.H.

b) $f(x) = \frac{5}{1+2e^x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 1 + 2e^x \neq 0\} = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5}{1+2e^x}\right) = \frac{5}{1+2e^{+\infty}} \vee \frac{5}{1+2e^{-\infty}} = \frac{5}{1+2*(+\infty)} \vee \frac{5}{1+2*0} = \frac{5}{+\infty} \vee \frac{5}{1} = 0 \vee 5$

Assim conclui-se que $y = 0$ é A.H. de f em $+\infty$ e $y = 5$ é A.H. de f em $-\infty$.

c) $f(x) = 3 + \ln(4 - x)$

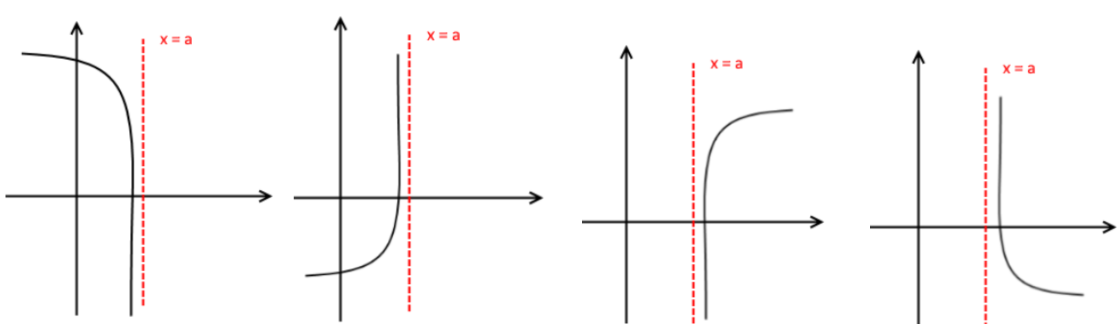
$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x > 0\} =]-\infty; 4]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3 + \ln(4 - x)) = 3 + \ln(4 - (-\infty)) = 3 + \ln(4 + \infty) = 3 + \ln(+\infty) = 3 + (+\infty) = +\infty$

Assim conclui-se que f não tem A.H.

Assintotas verticais (A.V.)

A reta de equação $x = a$ é A.V. do gráfico da função f se e só se:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

- Uma função pode ter um número infinito de A.V.;
- Testar pontos de acumulação: pontos que não pertencem ao Domínio, mas em cuja vizinhança há pontos do Domínio;
    - Exemplos:

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\} \rightarrow$ testar $\lim_{x\rightarrow 3^{\pm}} f(x)$
- $D_f =]-\infty; 5[\rightarrow$ testar $\lim_{x\rightarrow 5^{-}} f(x)$
- $D_f =]7; +\infty[\backslash\{10\} \rightarrow$ testar $\lim_{x\rightarrow 7^{+}} f(x)$ e $\lim_{x\rightarrow 10^{\pm}} f(x)$

- Testar pontos de descontinuidade do Domínio;
- Geralmente estes tipos de pontos são os pontos de transição nas funções definidas por ramos;
- Uma função contínua de Domínio $\mathbb{R}$ não tem A.V.

Exemplos:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{1; 3\}$

$$\lim_{x\rightarrow 1} f(x) = \lim_{x\rightarrow 1}\left(\frac{x-1}{x^2-4x+3}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\rightarrow 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}\right) = \lim_{x\rightarrow 1}\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{1-3}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Assim $\lim_{x\rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 1$ não é A.V. de f.

$\lim_{x\rightarrow 3} f(x) = \lim_{x\rightarrow 3}\left(\frac{x-1}{x^2-4x+3}\right) = \frac{3-1}{3^2-4*3+3} = \frac{2}{0}$

$\lim_{x\rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\rightarrow 3^-}\left(\frac{x-1}{x^2-4x+3}\right) = \frac{3-1}{((3^-)^2-4*(3^-)+3)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\rightarrow 3^+}\left(\frac{x-1}{x^2-4x+3}\right) = \frac{3-1}{((3^+)^2-4*(3^+)+3)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

Assim $x = 3$ é A.V. bilateral de f.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 5 \\ \ln(x-5), & x > 5 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

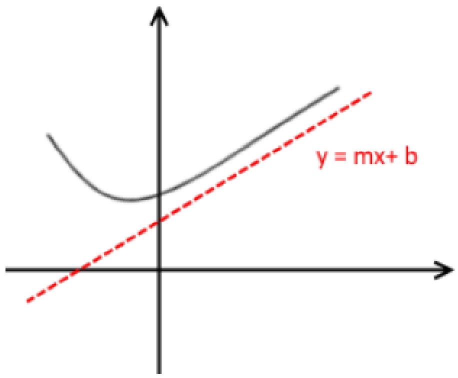
$\lim_{x\rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x\rightarrow 5^-}(x^2 + 1) = 5^2 + 1 = 26$

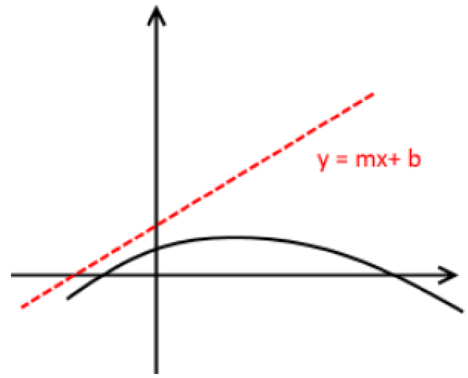
$\lim_{x\rightarrow 5^+}(\ln(x-5)) = \ln(5^+ - 5) = \ln(0^+) = -\infty$

Assim $x = 5$ é A.V. de f à direita.

Assíntotas oblíquas (A.O.)

A reta de equação $y = mx + b, m \neq 0$, é uma A.O. do gráfico da função f se e só se:





$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$

Assíntotas não verticais (A.N.V.)

Chamam-se Assíntotas não verticais ao conjunto das A.H. e A.O., ou seja, às assíntotas de equação $y = mx + b, m \in \mathbb{R}$. No máximo, uma função tem duas A.N.V.

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$

Se $m = \pm\infty$ não há A.N.V. (não é preciso calcular *b*).

Se $m = 0$, a assíntota, se existir, é horizontal (A.H.).

Exemplo:

$f(x) = \frac{3x^2-13x+5}{x-4}$

$D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

$m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{3x^2-13x+5}{x-4}}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2-13x+5}{x^2-4x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2}{x^2}\right) = 3$

Assim $m = 3$ em $\pm\infty$.

$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2-13x+5}{x-4} - 3x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2-13x+5-3x(x-4)}{x-4}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2-13x+5-3x^2+12x}{x-4}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-x+5}{x-4}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$

Assim $b = -1$ em $\pm\infty$, logo $y = 3x - 1$ é A.O. de f em $\pm\infty$.

Aspetos a considerar no estudo analítico de uma função

- Domínio;
- Paridade;
- Assíntotas;
- Interseção com os eixos;
- Monotonia e extremos (1ª derivada);
- Contradomínio (por observação da tabela de variação);
- Concavidades e pontos de inflexão (2ª derivada);
- Representação gráfica.