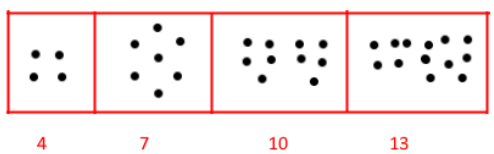
Sucessões

Conceito de sucessão

Chama-se sucessão de números reais, ou simplesmente sucessão, a uma função que a cada número natural faz corresponder um número real, de Domínio $\mathbb{N}$.

Exemplo:



u(1) = 4, u(2)=7, u(3) = 10, u(4) = 13, …

u(n) = 3n + 1

$u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \hookrightarrow 3n + 1$

A expressão u(1) = 4 pode ser representada por u_1 = 4 e lê-se “o primeiro termo da sucessão é 4”.

A expressão u(n) = 3n + 1 pode ser representada por u_n = 3n + 1 e lê-se “o termo de ordem n é 3n + 1”. Diz-se que o termo geral da sucessão é 3n + 1.

É usual utilizar a notação u_n para designar a sucessão:

$u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \hookrightarrow u_n$

Modos de definir uma sucessão

Seja t_n uma sucessão tal que:

t(1) = 1, t(2) = 3, t(3) = 6, t(4) = 10, …

É possível definir t_n por recorrência:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n, n \geq 2 \end{cases}$$

Diz-se que uma sucessão é definida por recorrência se é (são) conhecido(s) o(s) primeiro(s) termo(s) e a "lei" para determinar qualquer outro termo, recorrendo a termos anteriores.

Sucessões monótonas

Dada uma sucessão u_n diz-se que:

- É uma sucessão crescente (em sentido estrito) se e só se $u_n < u_{n+1}, \forall_n \in \mathbb{N}, ou\ seja, u_{n+1} - u_n > 0, \forall_n \in \mathbb{N};$
- É uma sucessão decrescente (em sentido estrito) se e só se: $u_n > u_{n+1}, \forall_n \in \mathbb{N}, ou\ seja, u_{n+1} - u_n < 0, \forall_n \in \mathbb{N};$
- É uma sucessão monótona (em sentido estrito) se e só se é crescente ou decrescente.

Se $u_n \leq u_{n+1}$ ou $u_n \geq u_{n+1}, \forall_n \in \mathbb{N}$, a sucessão diz-se monótona crescente ou monótona decrescente em sentido lato.

Sucessões limitadas

Um conjunto P de números reais diz-se limitado se tiver majorantes e minorantes.

Uma sucessão u_n diz-se limitada se o conjunto dos seus termos é majorado e/ou minorado:

u_n é $limitada\ se\ e\ só\ se\ \exists_m, M \in \mathbb{R}: m \leq u_n \leq M, \forall_n \in \mathbb{N}.$

- Se u_n é monótona crescente, então o primeiro termo é um minorante do conjunto dos termos da sucessão $u_1 \leq u_n, \forall_n \in \mathbb{N};$
- Se u_n é monótona decrescente, então o primeiro termo é um majorante do conjunto dos termos da sucessão $u_1 \geq u_n, \forall_n \in \mathbb{N}.$

Progressões aritméticas

Uma sucessão u_n é progressão aritmética se e só se existe um número real r (razão) tal que:

$u_{n+1} - u_n = r, \forall_n \in \mathbb{N}$

Cada termo da sucessão é obtido a partir do anterior adicionando-lhe r, a chamada razão aritmética:

$u_{n+1} = u_n + r, \forall_n \in \mathbb{N}$

Se u_n é uma progressão aritmética de razão r, tem-se:

$u_n = u_1 + (n-1)r, \forall_n \in \mathbb{N}\ ou$

$u_n = u_k + (n-k)r$

Soma dos n primeiros termos

A soma S_n dos n primeiros termos é dada por:

$\frac{u_1+u_n}{2} * n$

Soma de termos consecutivos

A soma dos termos consecutivos desde u_p até u_n é dada por:

$S = S_n - S_{p-1}\ ou$

$S = \frac{u_p+u_n}{2} * (n-p+1)$

Progressões geométricas

Uma sucessão u_n é uma progressão geométrica se e só se existe um número real r (razão) tal que:

$u_{n+1} = u_n * r, \forall_n \in \mathbb{N}$

Cada termo da sucessão obtém-se do anterior multiplicando-o por r, a chamada razão da progressão geométrica.

$u_{n+1} = u_n * r, \forall_n \in \mathbb{N}$

u_n é uma progressão geométrica se e só se:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \forall_n \in \mathbb{N}$

Se u_n é uma progressão geométrica de razão r, então:

$u_n = u_1 * r^{n-1}, \forall_n \in \mathbb{N}\ ou$

$u_n = u_k * r^{n-k}$

Soma de n termos consecutivos

Se u_n tem $r \neq 1$, então S_n é dada por:

$S_n = u_1 * \frac{1-r^n}{1-r}, r \neq 1$

Se r = 1, todos os termos são iguais ao primeiro, tendo-se $S_n = n * u_1$

Indução Matemática

- Provar a validade para o primeiro elemento do conjunto (b(1))
- Provar a validade para o elemento n do conjunto (b(n))
- Provar a validade para o elemento n + 1 do conjunto (b(n+1))

Sucessões convergentes e divergentes

Uma sucessão u_n é convergente se existir um número real *a* tal que:

$$\lim(u_n) = a \Leftrightarrow \lim(u_n - a) = 0$$

Neste caso diz-se que u_n converge para *a*.

Uma sucessão u_n é divergente se não for convergente, isto é, $\lim(u_n)$ não existe ou é infinito.

Teorema da Unicidade de limite

Uma sucessão convergente tem limite único.

Teorema do Critério de convergência das sucessões monótonas

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Infinitamente grandes e infinitésimos

- Infinitamente grande positivo -> $\lim(u_n) \longrightarrow +\infty$;
- Infinitamente grande negativo -> $\lim(u_n) \longrightarrow -\infty$;
- Infinitamente grande em módulo -> $\lim(|u_n|) \longrightarrow +\infty$;
- Infinitésimo -> $\lim(u_n) \longrightarrow 0$

Seja u_n uma sucessão tal que $u_n \neq 0, \forall_n \in \mathbb{N}$. Então:

- u_n é um infinitésimo $\Rightarrow \frac{1}{u_n}$ é um infinitamente grande, ou seja, $u_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{u_n} \longrightarrow \infty$;
- u_n é um infinitamente grande $\Rightarrow \frac{1}{u_n}$ é um infinitésimo, ou seja, $u_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{u_n} \longrightarrow 0$.

Operações com limites finitos

Se $u_n = k$ então $\lim(u_n) = k$.

Sendo u_n e v_n sucessões convergentes, então:

- $\lim(u_n \pm v_n) = \lim(u_n) \pm \lim(v_n)$;
- $\lim(k * u_n) = k * \lim(u_n)$;
- $\lim(u_n * v_n) = \lim(u_n) * \lim(v_n)$;
- $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}$;
- $\lim(u_n)^p = (\lim(u_n))^p, p \in \mathbb{Z}$;
- $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}, n \in \mathbb{N}, f(x) \geq 0, se\ n\ par$

Operações com limites infinitos

$+\infty + \infty = +\infty$	$\frac{+\infty}{k^+} = +\infty$	$\frac{k^+}{0^+} = +\infty$	$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$	$\frac{+\infty}{k^-} = -\infty$	$\frac{k^+}{0^-} = -\infty$	$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$
$+\infty \pm k = +\infty$	$\frac{-\infty}{k^+} = -\infty$	$\frac{k^-}{0^+} = -\infty$	$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$
$-\infty \pm k = -\infty$	$\frac{-\infty}{k^-} = +\infty$	$\frac{k^-}{0^-} = +\infty$	$\frac{-\infty}{0^-} = +\infty$
$(+\infty) * (+\infty) = +\infty$			
$(+\infty) * (-\infty) = -\infty$			
$(-\infty) * (+\infty) = -\infty$			
$(-\infty) * (-\infty) = +\infty$			
$(+\infty)^n = +\infty$			
$(-\infty)^n = +\infty, n\ par$			
$(-\infty)^n = -\infty, n\ ímpar$			

Notas:

- $a^{-\infty} = 0$;
- $\log_a 0^+ = +\infty$.

Indeterminações

- $\infty - \infty$;
- $\infty * 0$;
- $\frac{0}{0}$;
- $\frac{\infty}{\infty}$;
- 1^∞;
- 0^0;
- ∞^0.

Limite de Nepper

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

A partir deste limite pode provar-se que:

$\lim\left(1+\frac{k}{u_n}\right)^{u_n}=e^{k}\,, com\; u_n\to+\infty$

Exemplos:

a) $\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}=e^{3}$

b) $\lim\left(1-\frac{5}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{-5}{n}\right)^{n}=e^{-5}$

c) $\lim\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^{n}=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{e^{3}}=e\sqrt{e}$

d) $\lim\left(1-\frac{5}{n}\right)^{2n}=\lim\left(1-\frac{10}{2n}\right)^{2n}=e^{-10}$ ou $\lim\left(1-\frac{5}{n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1-\frac{5}{n}\right)^{n}\right)^{2}=(e^{-5})^{2}=e^{-10}$

e) $\lim\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{n}=\lim\left(\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{n+2}*\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{-2}\right)=e^{3}*\left(1+\frac{3}{+\infty}\right)^{-2}=e^{3}*(1+0^{+})^{-2}=e^{3}*1=e^{3}$

n + 5	n + 3
-n – 2	1
3	

f) $\lim\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{n}=\lim\left(\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{n-3}*\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{3}\right)=e^{5}*\left(1+\frac{5}{(+\infty)-3}\right)^{3}=e^{5}*(1+0^{+})^{3}=e^{5}*1=e^{5}$

g) $\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n+4}=\lim\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}*\left(1-\frac{2}{n}\right)^{4}\right)=e^{-2}*\left(1-\frac{2}{+\infty}\right)^{4}=e^{-2}*(1-0^{+})^{4}=e^{-2}$

Número de Nepper

Designa-se por número de Nepper e representa-se por e o limite da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Trata-se de um número irracional, sendo $e\approx 2{,}718281$.

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

Limites notáveis

- $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x}) = 1$
- $\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x}) = 1$

  Exemplos:

  a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\right) = \frac{1}{1} = 1$

  b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2(e^{2x}-1)}{2x*x^2}\right) =^{MV\ y=2x} \lim_{y\to 0}\left(\frac{2(e^y-1)}{y*x^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{x^2} * \frac{e^y-1}{y}\right) = \frac{2}{0^2} * 1 = (+\infty) * 1 = +\infty$

  c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{(e^{x+2}-1)}{x+2}\right) =^{MV\ y=x-2} \lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{y-2+2}-1}{y-2+2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right) = 1$

  d) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1-e^{x-3}}{2x-6}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{-(e^{x-3}-1)}{2(x-3)}\right) =^{MV\ y=x-3} \lim_{y\to 0}\left(\frac{-(e^y-1)}{2y}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right) = -\frac{1}{2} * 1 = -\frac{1}{2}$

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1$

  Exemplos:

  a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(2 * \frac{x}{\ln(x+1)}\right) = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right) = 2 * \frac{1}{1} = 2$

  b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{4x-4}\right) =^{MV\ y=x-1} \lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(y+1)}{4y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{4} * \frac{\ln(y+1)}{y}\right) = \frac{1}{4} * 1 = \frac{1}{4}$

  c) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{\ln(x-3)^2}{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to 4}\left(\frac{2\ln(x-3)}{x(x-4)}\right) =^{MV\ y=x-4} \lim_{y\to 0}\left(\frac{2\ln(y+4-3)}{(y+4)(y+4-4)}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2\ln(y+1)}{y^2+4y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{y+4} * \frac{\ln(y++1)}{y}\right) = \frac{2}{0+4} * 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

  d) $\lim_{x\to -3}\left(\frac{\ln(5x+16)}{10x+30}\right) =^{MV\ y=x+3} \lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(5(y-3)+16)}{10(y-3)+30}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(5y+1)}{10y}\right) =^{MV\ z=5y} \lim_{z\to 0}\left(\frac{\ln(z+1)}{2z}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2} * \frac{\ln(z+1)}{z}\right) = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$

  Exemplos:

  a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x^5}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^4} * \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1}{(+\infty)^4} * 0 = \frac{1}{+\infty} * 0 = 0 * 0 = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x^5}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5*\ln x}{x}\right) = 5*0 = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln 3x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln 3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\ln 3}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0$

Ou $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln 3x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln 3x}{3x}\right) =^{MV\ y=3x} \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{3\ln y}{y}\right) = 3*0 = 0$

- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^p}\right) = +\infty, p\in\mathbb{R}$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^5}}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{3x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(e^3)^x}{x}\right) = +\infty$

Ou $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{3x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3e^{3x}}{3x}\right) =^{MV\ y=3x} \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{3e^y}{y}\right) = 3*(+\infty) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^3}\right) =^{MV\ y=-x} \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{(-y)^3}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{-y^3}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{y^3}\right) = -(+\infty) =$

$-\infty$

Cálculo de limites (exemplos)

a) $\lim_{x\to+\infty}(3e^{-x}) = 3e^{-(+\infty)} = 3e^{-\infty} = 3*0 = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty}(5+2^x) = 5+2^{+\infty} = 5+(+\infty) = +\infty$

c) $\lim_{x\to0^+}(\log_3 x - 4) = \log_3 0^+ - 4 = -\infty - 4 = -\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)*x^{-3}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right) = 0$

e) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^3}*\log x) = \sqrt[5]{(+\infty)^3}*\log(+\infty) = (+\infty)*(+\infty) = +\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^5*\frac{3}{5\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^5}{5\ln x}\right) = \frac{3}{5}*\frac{x^5}{\ln x} = \frac{3}{5}*(+\infty) = +\infty$

g) $\lim\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0^+$

h) $\lim\left(3+\frac{5}{n}\right) = 3+\frac{5}{+\infty} = 3+0^+ = 3^+$

i) $\lim(n^2+2n) = (+\infty)^2 + 2*(+\infty) = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$

j) $\lim\left(\frac{-4}{n+1}\right) = \frac{-4}{(+\infty)+1} = \frac{-4}{+\infty} = 0^-$

k) $\lim\left(1+\frac{5}{4-2n^2}\right) = 1+\frac{5}{4-2*(+\infty)^2} = 1+\frac{5}{4-(+\infty)} = 1+\frac{5}{-\infty} = 1+0^- = 1^-$

l) $\lim\left(\frac{3n-4}{n}\right) = \frac{3*(+\infty)-4}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminação

$\lim\left(\frac{3n-4}{n}\right) = \lim\left(\frac{3n}{n} - \frac{4}{n}\right) = \lim\left(3 - \frac{4}{n}\right) = 3 - \frac{4}{+\infty} = 3 - 0^+ = 3^-$

m) $\lim\left(\frac{4n+7}{2n-3}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\left(2 + \frac{13}{2n-3}\right) = 2 + \frac{13}{2*(+\infty)-3} = 2 + \frac{13}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$

$$\begin{array}{r|l} 4n + 7 & 2n - 3 \\ \hline -4n + 6 & 2 \\ +13 & \end{array}$$

n) $\lim\left(\frac{5-6n}{3n+1}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\left(-2 + \frac{7}{3n+1}\right) = -2 + \frac{7}{3*(+\infty)+1} = -2 + \frac{7}{+\infty} = -2 + 0^+ = -2^+$

$$\begin{array}{r|l} -6n + 5 & 3n + 1 \\ \hline +6n + 2 & -2 \\ +7 & \end{array}$$

o) $\lim(3 + 2^{-n}) = 3 + 2^{-(+\infty)} = 3 + 2^{-\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$

p) $\lim(-8\log(n^2 + 2)) = -8\log((+\infty)^2 + 2) = -8\log(+\infty) = -8 * (+\infty) = -\infty$

q) $\lim(5e^{n+1} + n) = 5e^{(+\infty)+1} + (+\infty) = 5 * (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

r) $\lim\left(\log\frac{1}{n}\right) = \log\frac{1}{+\infty} = \log 0^+ = -\infty$

s) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln(x)) \overset{\infty*0}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) = -\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) = -\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x^{-1})}{\frac{1}{x}}\right) \overset{MV\ y=\frac{1}{x}}{=} -$

$\lim\limits_{y\to +\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\right) = 0$

Indeterminações

São operações com limites cujo resultado difere de caso para caso.

As indeterminações podem ser de diferentes tipos:

- $\infty - \infty$;
- $\frac{\infty}{\infty}$;
- $\infty * 0$;
- $\frac{0}{0}$.

Quando no cálculo de um limite se obtém alguma destas operações é necessário "levantar a indeterminação", ou seja, substituir a expressão dada por outra equivalente que não dê origem a uma indeterminação.

Exemplos:

a) $\lim(5n^2 - 3n^2) = 5 * (+\infty)^2 - 3 * (+\infty)^2 = +\infty - (+\infty)$ Indeterminação
$\lim(5n^2 - 3n^2) =^{\infty-\infty} \lim(2n^2) = 2 * (+\infty)^2 = +\infty$

b) $\lim\big((3n+5) - 3n\big) =^{\infty-\infty} \lim(3n + 5 - 3n) = \lim(5) = 5$

c) $\lim\left(\frac{2n^2}{n^2}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim(2) = 2$

d) $\lim\left(\frac{n}{4n^2}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim\left(\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{4*(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

e) $\lim\left(\frac{5n^3+1}{n}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim\left(\frac{5n^3}{n} + \frac{1}{n}\right) = \lim\left(5n^2 + \frac{1}{n}\right) = 5 * (+\infty)^2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0^+ = +\infty$

f) $\lim\left(n^2 * \frac{1}{n}\right) =^{\infty*0} \lim(n) = +\infty$

g) $\lim\left(n * \frac{3}{n}\right) =^{\infty*0} \lim(3) = 3$

h) $\lim\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}}\right) =^{\frac{0}{0}} \lim\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

i) $\lim\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right) =^{\frac{0}{0}} \lim(n) = +\infty$

Levantamento de indeterminações

0 / 0

Funções racionais fracionárias

Fatorizar o numerador e o denominador, usando preferencialmente a Regra de Ruffini com o valor para o qual tende x como zero.

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-3x-6}{x^2-4}\right) =^{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(3x+3)}{(x-2)(x+2)}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x+3}{x+2}\right) = \frac{3*2+3}{2+2} = \frac{9}{4}$

C.A.

$3x^2 - 3x - 6 = 0 \overset{FR}{\Leftrightarrow} x = 2 \vee x = -1$ ou

	3	-3	-6
2		+6	+6

	3	+3	0

$3x^2 - 3x - 6 = 3(x-3)(x-2)$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-2}{x^3-2x^2-5x+6}\right) =^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 1}\left(\frac{2(x-1)}{(x-1)(x^2-x-6)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-x-6}\right) = \frac{2}{1^2-1-6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

C.A.

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2-x-6)$

Funções irracionais fracionárias

Racionalizar o denominador (ou o numerador).

a) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{4-x}{\sqrt{x}-2}\right) =^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 4}\left(\frac{(4-x)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right) = \lim_{x\to 4}\left(\frac{(4-x)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\left(\frac{(4-x)(\sqrt{x}+2)}{-(4-x)}\right) =$

$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{-1}\right) = \frac{\sqrt{4}+2}{-1} = -4$

b) $\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{\sqrt{x-3}}{9-x^2}\right) =^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3})}{(9-x^2)(\sqrt{x-3})}\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x-3}{(3+x)(3-x)(\sqrt{x-3})}\right) =$

$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{-(3+x)}{(3+x)(3-x)(\sqrt{x-3})}\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{-1}{(3-x)(\sqrt{x-3})}\right) = \frac{-1}{(3-3^+)(\sqrt{3^+-3})} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

∞ - ∞

Funções polinomiais

$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty}(2x^5 - 4x^2) =^{\infty-\infty} \lim_{x\to+\infty}(2x^5) = 2 * (+\infty)^5 = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}(5x^3 + 3x^2 - x) =^{\infty-\infty} \lim_{x\to-\infty}(5x^3) = 5 * (-\infty)^3 = 5 * (-\infty) = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}(-5x^2 + 3x - 1) =^{\infty-\infty} \lim_{x\to-\infty}(-5x^2) = -5 * (-\infty)^2 = -5 * (+\infty) = -\infty$

d) $\lim_{x\to 0}(3x^2 + 4x - 6) =^{\infty-\infty} 3 * 0^2 + 4 * 0 - 6 = -6$

Funções racionais fracionárias

Efetua-se a operação (somar/subtrair reduzindo ao mesmo denominador).

Exemplo:

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right) =^{\infty-\infty} \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{(x-3)(x+3)}\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}-\frac{6}{(x-3)(x+3)}\right) =$$
$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x+3-6}{(x-3)(x+3)}\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Funções irracionais

Exemplo:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+2}-3x\right) =^{\infty-\infty} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{9x^2+2}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+2}+3x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{9x^2+2}\right)^2-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+2}+3x}\right) =$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{9x^2+2-9x^2}{\sqrt{9x^2+2}+3x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{9x^2+2}+3x}\right) = \frac{2}{\sqrt{9*(+\infty)^2+2}+3*(+\infty)} = \frac{2}{(+\infty)+(+\infty)} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

∞ / ∞

Funções racionais fracionárias

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_n}\right) = \lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{a_0x^n}{b_0x^m}\right)$$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5x^3-x^2+1}{2x^3+x}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5x^3}{2x^3}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$ $(\text{significa que } y = \frac{5}{2} \text{ seria uma A. H. da função em } +\infty)$

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3-5x}{x^4+x^3-4x+1}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^4}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$ $(\text{logo } y = 0 \text{ é uma A. H. da função em } +\infty)$

c) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4x^5-2x^2+x}{3x^2-5x}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4x^5}{3x^2}\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4x^3}{3}\right) = \frac{4*(-\infty)^3}{3} = \frac{-\infty}{3} = -\infty$ $(\text{logo não há A. H. em } -\infty)$

d) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x+2}{x+3}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty}(2) = 2$ $(logo\ y = 2\ é\ A.H.da\ função\ em -\infty)$

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+5x-1}{2x+3}\right) = \frac{0^3+5*0-1}{2*0+3} = -\frac{1}{3}$

Funções irracionais fracionárias

(1) Ter em conta que $\sqrt{x^2} = |x|,\ ou\ seja, \sqrt{x^2} = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases},\ ou\ ainda, x = \begin{cases} -\sqrt{x^2}, & x < 0 \\ \sqrt{x^2}, & x \geq 0 \end{cases}.$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5+\sqrt{x^2}}{x}\right) =^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5+x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$ $(\text{y} = 1 \text{ é A. H. da função em } +\infty)$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5+\sqrt{x^2}}{x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5-x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x}\right) = -1 \text{ (y} = -1 \text{ é A. H. da função em} -\infty)$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+3}}{x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+3}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \text{ (y} = 0 \text{ é A. H. da função em} +\infty)$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3-x}}{x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3-x}}{-\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{3-x}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{-x}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{-1}{x}}\right) = -\sqrt{\frac{-1}{-\infty}} = -\sqrt{0} = 0 \text{ (y} = 0 \text{ é A. H. da função em} -\infty)$

(2) Pôr em evidência o termo de mais alto grau do numerador e do denominador.

Exemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{+\infty}}}{(+\infty)\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)} = \frac{1+\sqrt{0}}{(+\infty)(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \text{ (y} = 0 \text{ é A. H. da função em} +\infty)$$

$\infty * 0$

Efetuam-se as operações, de forma a transformar $\infty * 0$ numa outra indeterminação.