图论(仅供学习 beamer, pgf 参考之用)

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

目录

说明

近一个月收到了十几个 Email, 发出需要拙文 DiscreteCH7.pdf 的源文件的要求, 我一直没有回复, 抱歉. 一个是源文件过大; 再有不得不考虑到版权的问题, 因为制作这样一份文档实在是花费了大量的时间精力.

出于对这些朋友的礼貌, 我制作了原文的精简版, 保留了原文中比较有特色的内容, 对特殊宏包的引用加了注释.

说明

近一个月收到了十几个 Email, 发出需要拙文 DiscreteCH7.pdf 的源文件的要求, 我一直没有回复, 抱歉. 一个是源文件过大; 再有不得不考虑到版权的问题, 因为制作这样一份文档实在是花费了大量的时间精力.

出于对这些朋友的礼貌, 我制作了原文的精简版, 保留了原文中比较有特色的内容, 对特殊宏包的引用加了注释.

- 本幻灯片使用 beamer 宏包作出. 关于 beamer 的讨论(安装、更新)可参考: `http://bbs.ctex.org/forums/index.php?showtopic=27695`
- 本文的图形主要是用 pgf 宏包作出的, 另有个别的 MetaPost 图形.
- 本幻灯片的源文件仅供学习 beamer, pgf 参考之用. 使用请注明出处.

HUANG Zheng-hua

说明

近一个月收到了十几个 Email, 发出需要拙文 DiscreteCH7.pdf 的源文件的要求, 我一直没有回复, 抱歉. 一个是源文件过大; 再有不得不考虑到版权的问题, 因为制作这样一份文档实在是花费了大量的时间精力.

出于对这些朋友的礼貌, 我制作了原文的精简版, 保留了原文中比较有特色的内容, 对特殊宏包的引用加了注释.

- 本幻灯片使用 beamer 宏包作出. 关于 beamer 的讨论(安装、更新)可参考: http://bbs.ctex.org/forums/index.php?showtopic=27695
- 本文的图形主要是用 pgf 宏包作出的, 另有个别的 MetaPost 图形.
- 本幻灯片的源文件仅供学习 beamer, pgf 参考之用. 使用请注明出处.

HUANG Zheng-hua

说明

近一个月收到了十几个 Email, 发出需要拙文 DiscreteCH7.pdf 的源文件的要求, 我一直没有回复, 抱歉. 一个是源文件过大; 再有不得不考虑到版权的问题, 因为制作这样一份文档实在是花费了大量的时间精力.

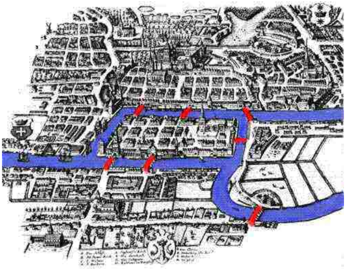
出于对这些朋友的礼貌, 我制作了原文的精简版, 保留了原文中比较有特色的内容, 对特殊宏包的引用加了注释.

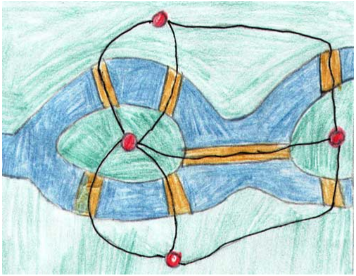
- 本幻灯片使用 beamer 宏包作出. 关于 beamer 的讨论(安装、更新)可参考: http://bbs.ctex.org/forums/index.php?showtopic=27695
- 本文的图形主要是用 pgf 宏包作出的, 另有个别的 MetaPost 图形.
- 本幻灯片的源文件仅供学习 beamer, pgf 参考之用. 使用请注明出处.

HUANG Zheng-hua

Very Brief History

The earliest paper on graph theory seems to be by Leonhard Euler in 1736. Euler discusses whether or not it is possible to stroll around Konigsberg crossing each of its bridges across the Pregel exactly once.





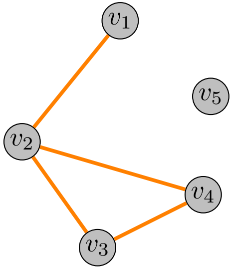
▸ Leonhard Euler 简介

参考书籍

- J. A. Bondy and U. S. R. Murty.
  Graph Theory with Applications.
  The Macmillan Press Ltd., 1976
- J. A. 邦迪, U. S. R. 默蒂　著
  吴望名, 李念祖, 吴兰芳, 谢伟如, 梁文沛　译
  图论及其应用.
  科学出版社, 1984.

与图相关的概念和约定

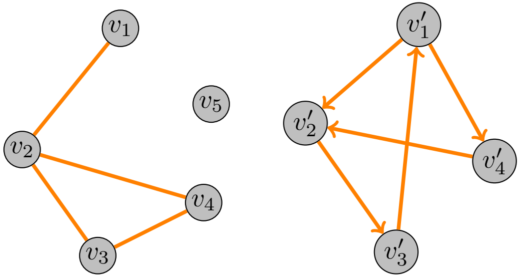
- 每条边都是无向边的图叫无向图;
- 每条边都是有向边的图叫有向图;
- 既有无向边又有有向边的图叫混合图.



(a) 无向图

与图相关的概念和约定

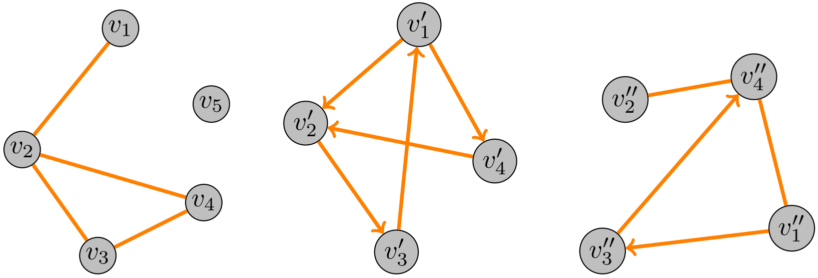
- 每条边都是无向边的图叫无向图;
- 每条边都是有向边的图叫有向图;
- 既有无向边又有有向边的图叫混合图.



(a) 无向图　　(b) 有向图

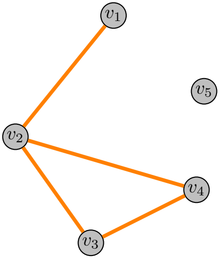
与图相关的概念和约定

- 每条边都是无向边的图叫无向图;
- 每条边都是有向边的图叫有向图;
- 既有无向边又有有向边的图叫混合图.

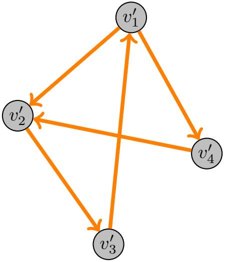


(a) 无向图　(b) 有向图　(c) 混合图

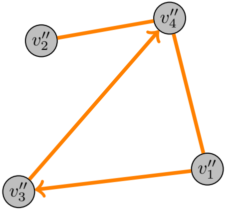
与图相关的概念和约定



(a) G (无向图)

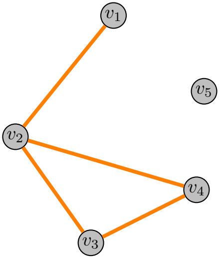


(b) G' (有向图)

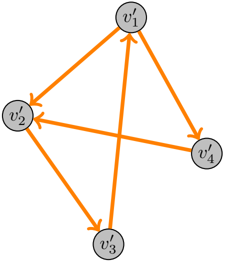


(c) G'' (混合图)

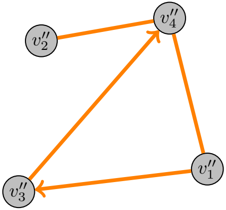
与图相关的概念和约定



(a) G (无向图)



(b) G' (有向图)

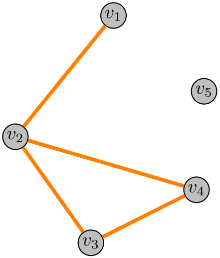


(c) G'' (混合图)

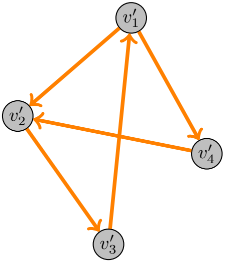
这些图可分别表示为:

$$G = \langle V, E \rangle = \Big\langle \big\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\big\}, \big\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_2, v_4)\big\} \Big\rangle$$

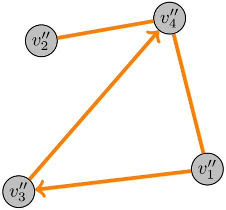
与图相关的概念和约定



(a) G (无向图)



(b) G' (有向图)



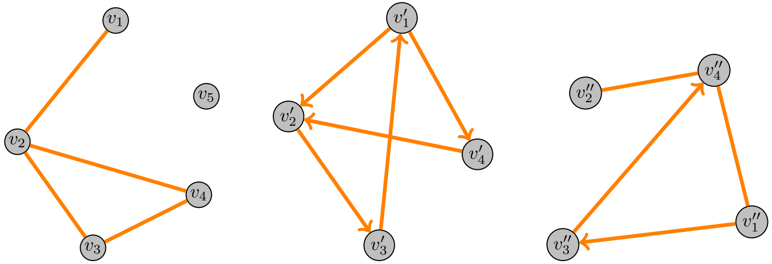
(c) G'' (混合图)

这些图可分别表示为:

$$G = \langle V, E\rangle = \Big\langle \big\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\big\}, \big\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_2, v_4)\big\} \Big\rangle$$

$$G' = \langle V', E'\rangle = \Big\langle \big\{v_1', v_2', v_3', v_4'\big\}, \big\{\langle v_1', v_2'\rangle, \langle v_2', v_3'\rangle, \langle v_3', v_1'\rangle, \langle v_1', v_4'\rangle, \langle v_4', v_2'\rangle\big\} \Big\rangle$$

与图相关的概念和约定



(a) G (无向图)　　(b) G' (有向图)　　(c) G'' (混合图)

这些图可分别表示为:

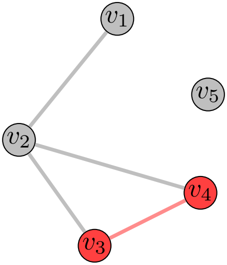
$$G = \langle V, E\rangle = \Big\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_2, v_4)\} \Big\rangle$$

$$G' = \langle V', E'\rangle = \Big\langle \{v_1', v_2', v_3', v_4'\}, \{\langle v_1', v_2'\rangle, \langle v_2', v_3'\rangle, \langle v_3', v_1'\rangle, \langle v_1', v_4'\rangle, \langle v_4', v_2'\rangle\} \Big\rangle$$

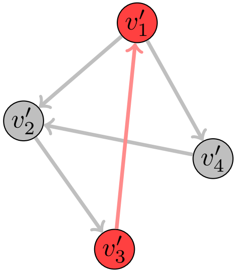
$$G'' = \langle V'', E''\rangle = \Big\langle \{v_1'', v_2'', v_3'', v_4''\}, \{(v_1'', v_4''), (v_2'', v_4''), \langle v_1'', v_3''\rangle, \langle v_3'', v_4''\rangle\} \Big\rangle$$

与图相关的概念和约定

- 若两个结点与同一条边相关联, 则称两个结点是邻接点.
- 关联于同一结点的两条边叫邻接边.



(a) G



(b) G'

Figure: 例如, “v_3 与 v_4”, “v'_1 与 v'_3” 是邻接点

与图相关的概念和约定

- 若两个结点与同一条边相关联, 则称两个结点是邻接点.
- 关联于同一结点的两条边叫邻接边.

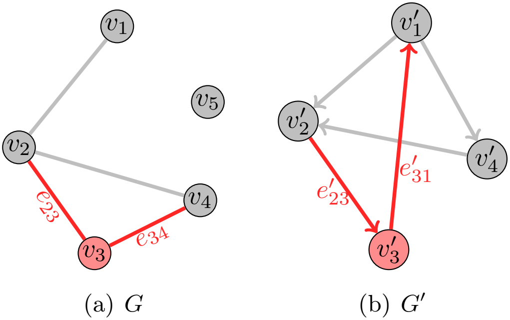
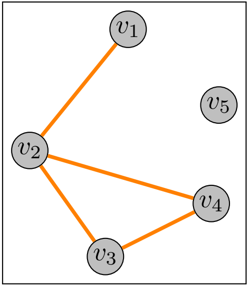


Figure: 例如, “e_{23} 与 e_{34}”, “e'_{31} 与 e'_{23}” 是邻接边

与图相关的概念和约定

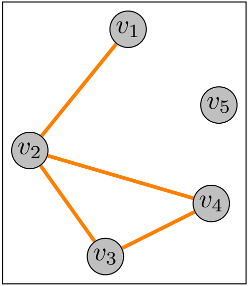
- 不与任何结点相邻接的结点, 称为孤立点.
- 仅由孤立结点组成的图叫零图; 由一个孤立结点构成的图叫平凡图.



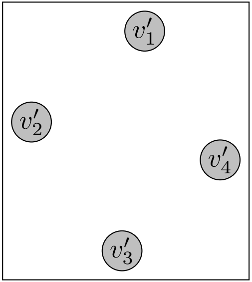
(a) 孤立点: v_5

与图相关的概念和约定

- 不与任何结点相邻接的结点，称为孤立点.
- 仅由孤立结点组成的图叫零图；由一个孤立结点构成的图叫平凡图.



(a) 孤立点：v_5



(b) 零图

Definition 1.1

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 与结点 v 相关联的边数, 叫该结点的度数, 记作 $\deg(v)$.

Definition 1.1

在图 $G=\langle V, E\rangle$ 中, 与结点 v 相关联的边数, 叫该结点的**度数**, 记作 $\deg(v)$.

- 称 $\Delta(G)=\max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的**最大度**;

Definition 1.1

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 与结点 v 相关联的边数, 叫该结点的**度数**, 记作 $\deg(v)$.

- 称 $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的**最大度**;
- 称 $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的**最小度**.

Definition 1.1

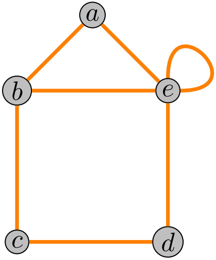
在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 与结点 v 相关联的边数, 叫该结点的度数, 记作 $\deg(v)$.

- 称 $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的最大度;
- 称 $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的最小度.
- 约定: 每个环在其对应的结点上, 度数增加 2.

Definition 1.1

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 与结点 v 相关联的边数, 叫该结点的**度数**, 记作 $\deg(v)$.

- 称 $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的**最大度**;
- 称 $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的**最小度**.
- 约定: 每个环在其对应的结点上, 度数增加 2.



例如左图 G 中, 各结点度数为:

$\deg(a) = 2$; $\deg(b) = 3$;

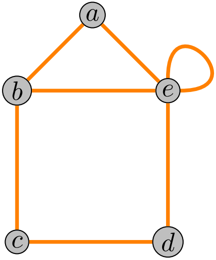
$\deg(c) = 2$; $\deg(d) = 2$;

$\deg(e) = 5$.

Definition 1.1

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 与结点 v 相关联的边数, 叫该结点的**度数**, 记作 $\deg(v)$.

- 称 $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的**最大度**;
- 称 $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的**最小度**.
- 约定: 每个环在其对应的结点上, 度数增加 2.



例如左图 G 中, 各结点度数为:

$$\deg(a) = 2; \qquad \deg(b) = 3;$$
$$\deg(c) = 2; \qquad \deg(d) = 2;$$
$$\deg(e) = 5.$$

最大度和最小度为:

$$\Delta(G) = 5; \qquad \delta(G) = 2.$$

Theorem 1.2

每个图中，结点度数的总和等于边数的 2 倍.

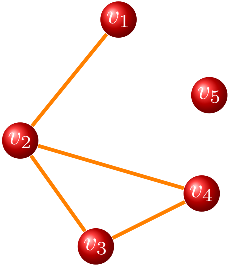
$$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2|E|$$

Theorem 1.2

每个图中，结点度数的总和等于边数的 2 倍.

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2|E|$$

证: 因为每条边关联两个结点，且一条边给予所关联的每个结点的度数为 1，从而一条边产生且仅产生两度，故结点度数的总和是边数的 2 倍.

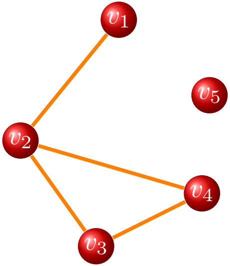


Theorem 1.2

每个图中，结点度数的总和等于边数的 2 倍.

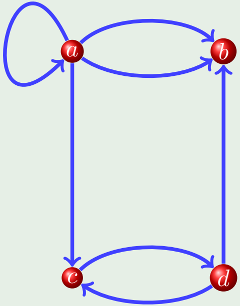
$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$

证: 因为每条边关联两个结点，且一条边给予所关联的每个结点的度数为 1，从而一条边产生且仅产生两度，故结点度数的总和是边数的 2 倍.



☞ 一个图的结点度数是偶数.

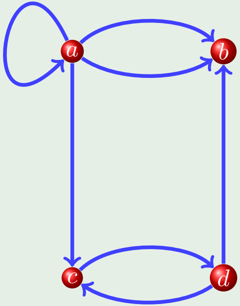
Example 1.3



左图中,

- 结点 a 的出度为 4, 入度为 1, 结点 a 的度数为 5.

Example 1.3



左图中,

- 结点 a 的出度为 4, 入度为 1, 结点 a 的度数为 5.
- 其余各结点的度数皆为 3:
  - 结点 b 的出度为 0, 入度为 3;
  - 结点 c 的出度为 1, 入度为 2;
  - 结点 d 的出度为 2, 入度为 1.

Definition 1.4

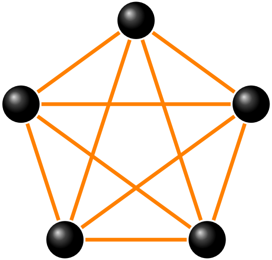
- 简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 若每对结点之间均有边相连, 则称该图为完全图.

Definition 1.4

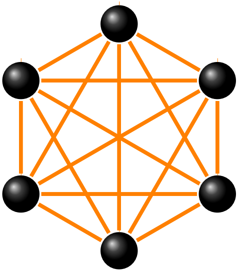
- 简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 若每对结点之间均有边相连, 则称该图为完全图.
- 有 n 个结点的无向完全图记作 K_n.

Definition 1.4

- 简单图 $G = \langle V, E\rangle$ 中, 若每对结点之间均有边相连, 则称该图为完全图.
- 有 n 个结点的无向完全图记作 K_n.



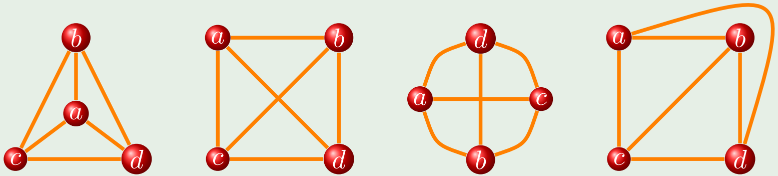
(a) 完全图 K_5



(b) 完全图 K_6

Example 1.5

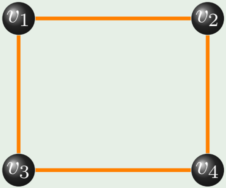
图中 G_1, G_2, G_3, G_4 是彼此同构的.



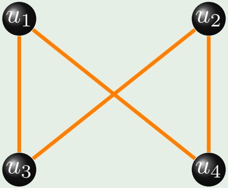
(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 (d) G_4

Example 1.6

判断下列图是否同构:



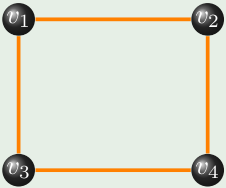
(a) G_1



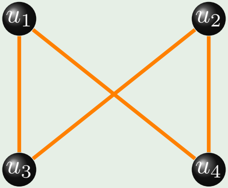
(b) G_2

Example 1.6

判断下列图是否同构:



(a) G_1

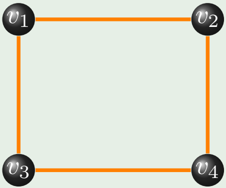


(b) G_2

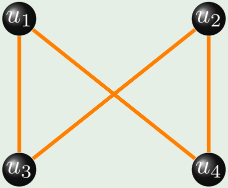
☞ $v_1 \to u_1$, $v_3 \to u_3$, $v_4 \to u_2$, $v_2 \to u_4$, 容易判断是同构的.

Example 1.6

判断下列图是否同构:



(a) G_1



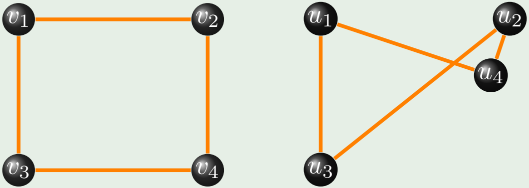
(b) G_2

☞ $v_1 \to u_1$, $v_3 \to u_3$, $v_4 \to u_2$, $v_2 \to u_4$, 容易判断是同构的.

(把图 G_2 中的 u_4 上移就看得更清楚了.)

Example 1.6

判断下列图是否同构:



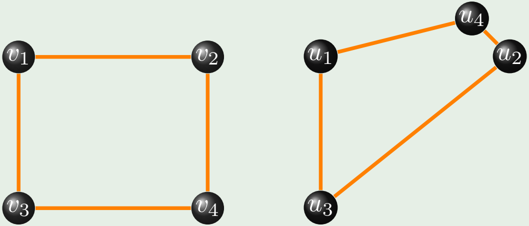
(a) G_1 (b) G_2

☞ $v_1 \to u_1$, $v_3 \to u_3$, $v_4 \to u_2$, $v_2 \to u_4$, 容易判断是同构的.

(把图 G_2 中的 u_4 上移就看得更清楚了.)

Example 1.6

判断下列图是否同构:



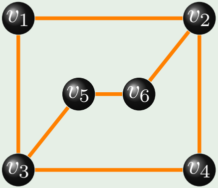
(a) G_1 (b) G_2

☞ $v_1 \to u_1$, $v_3 \to u_3$, $v_4 \to u_2$, $v_2 \to u_4$, 容易判断是同构的.

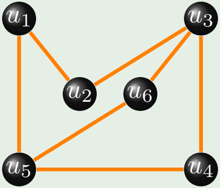
(把图 G_2 中的 u_4 上移就看得更清楚了.)

Example 1.7

判断下列图是否同构:



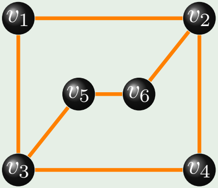
(a) G_1



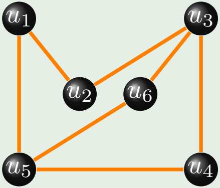
(b) G_2

Example 1.7

判断下列图是否同构:



(a) G_1

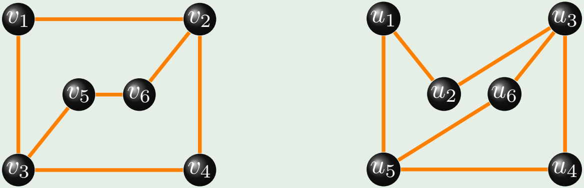


(b) G_2

注意 G_1 中有两个度数为 3 的结点 v_3, v_2; G_2 中度数为 3 的结点是 u_5, u_3. 容易看到图形是同构的.

Example 1.7

判断下列图是否同构:



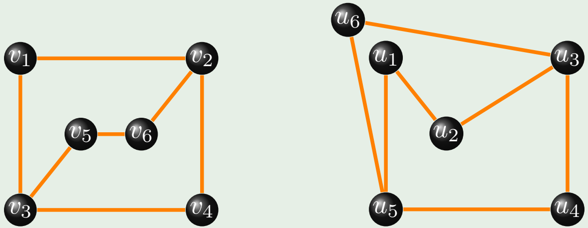
(a) G_1　　(b) G_2

注意 G_1 中有两个度数为 3 的结点 v_3, v_2; G_2 中度数为 3 的结点是 u_5, u_3. 容易看到图形是同构的.

把 u_6 上移可以看得更清楚.

Example 1.7

判断下列图是否同构:



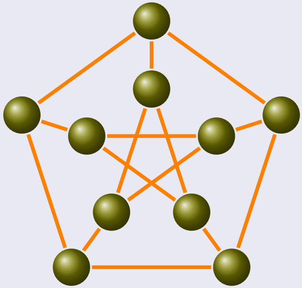
(a) G_1 (b) G_2

注意 G_1 中有两个度数为 3 的结点 v_3, v_2; G_2 中度数为 3 的结点是 u_5, u_3. 容易看到图形是同构的.

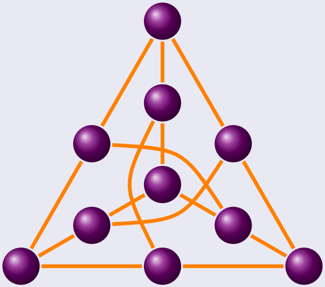
把 u_6 上移可以看得更清楚.

练习 P.279 (4)

下面两个图是同构的.[a]



(a) G_1

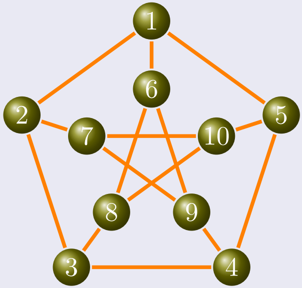


(b) G_2

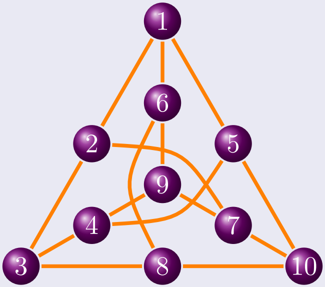
[a]彼得森图. 彼得森(Julius Peter Christian Peterson, 1839 – 1910) 丹麦人.

练习 P.279 (4)

下面两个图是同构的. [a]



(a) G_1

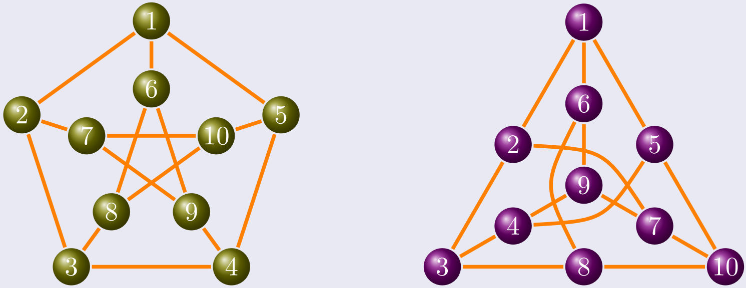


(b) G_2

[a]彼得森图. 彼得森(Julius Peter Christian Peterson, 1839 – 1910) 丹麦人.

练习 P.279 (4)

下面两个图是同构的. [a]

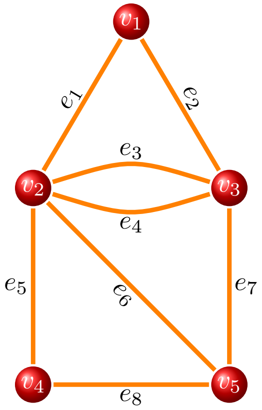


(a) G_1　　(b) G_2

根据点与边的关联关系, 在两图编号相同的结点间建立双射, 便可知这两个图同构.

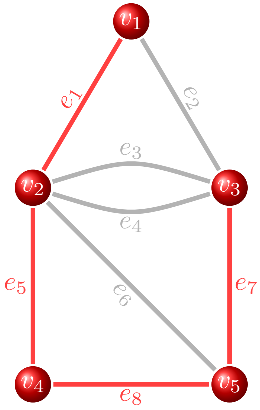
[a]彼得森图. 彼得森(Julius Peter Christian Peterson, 1839 – 1910) 丹麦人.

例如下图中:



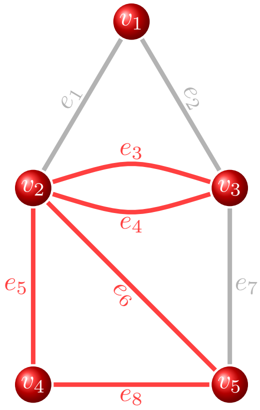
- $v_1e_1v_2e_5v_4e_8v_5e_7v_3$ 是迹(无重复的边), 也是通路(无重复结点);
- $v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_8v_4e_5v_2$ 是回路(起点与终点重合), 但不是圈;
- $v_2e_3v_3e_7v_5e_6v_2$ 是圈(是回路, 但没有重复的结点).

例如下图中:



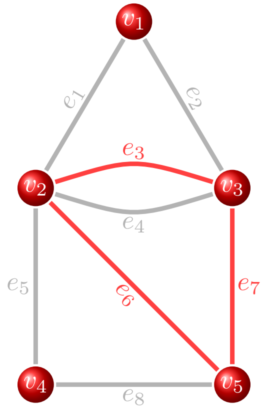
- $v_1e_1v_2e_5v_4e_8v_5e_7v_3$ 是迹(无重复的边), 也是通路(无重复结点);
- $v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_8v_4e_5v_2$ 是回路(起点与终点重合), 但不是圈;
- $v_2e_3v_3e_7v_5e_6v_2$ 是圈(是回路, 但没有重复的结点).

例如下图中:



- $v_1e_1v_2e_5v_4e_8v_5e_7v_3$ 是迹(无重复的边), 也是通路(无重复结点);
- $v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_8v_4e_5v_2$ 是回路(起点与终点重合), 但不是圈;
- $v_2e_3v_3e_7v_5e_6v_2$ 是圈(是回路, 但没有重复的结点).

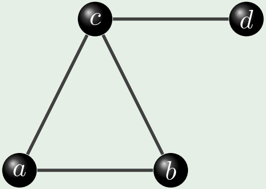
例如下图中:



- $v_1e_1v_2e_5v_4e_8v_5e_7v_3$ 是迹(无重复的边), 也是通路(无重复结点);
- $v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_8v_4e_5v_2$ 是回路(起点与终点重合), 但不是圈;
- $v_2e_3v_3e_7v_5e_6v_2$ 是圈(是回路, 但没有重复的结点).

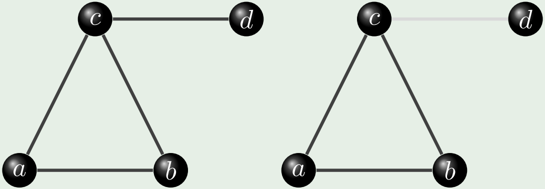
Example 2.1

求下图所示的图 G 的边连通度.



Example 2.1

求下图所示的图 G 的边连通度.



删除边 e_{cd} 就会产生不连通图, 所以

$$\lambda(G) = 1$$

Theorem 2.2

设 G 为无向图，则

$$k(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

Theorem 2.2

设 G 为无向图，则

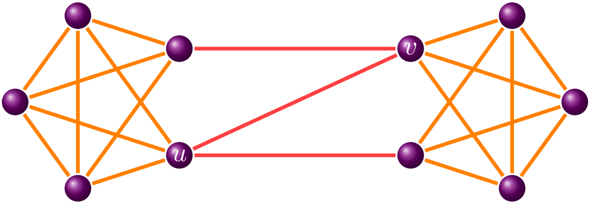
$$k(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

这个定理的证明可以用下图的例子予以说明. 这里

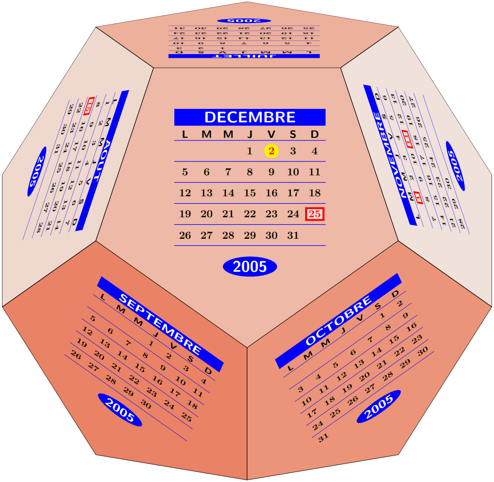
$$k(G) = 2,$$

$$\lambda(G) = 3,$$

$$\delta(G) = 4.$$



周游世界问题

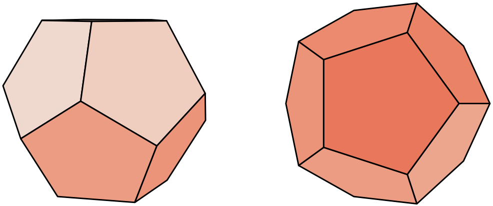


十二面体的 20 个顶点用不同的城市作标记. 智力题的目标是在一个城市开始, 延十二面体的边旅行, 访问其他 19 个城市每个恰好一次, 回到第一个城市结束.

旅行经过的回路用钉子和细线来标记.

周游世界问题

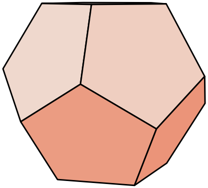
周游世界问题可以算是欧拉七桥问题的延续.

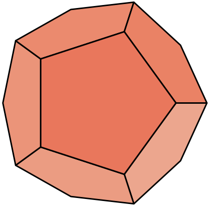


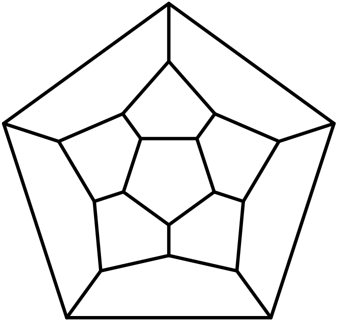
周游世界问题

周游世界问题可以算是欧拉七桥问题的延续.

解此题时, 亦应用了图论的特性, 就是图中点与线之间的关系是最重要的, 点的位置和线的长度并不重要. 因此我们可以将原图变形, 并"压平"至一个平面之上来考虑, 从而得到它的解.



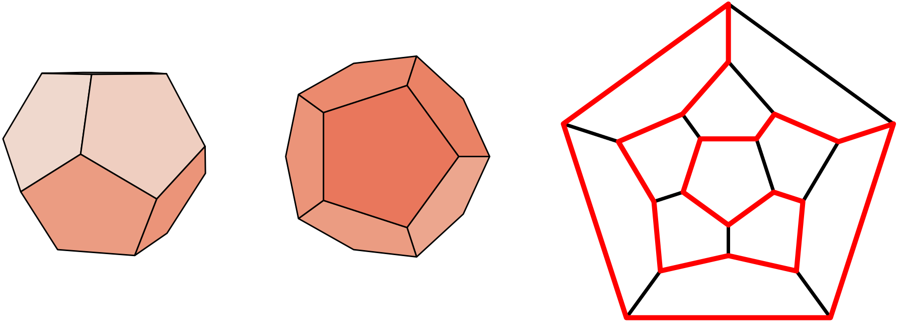


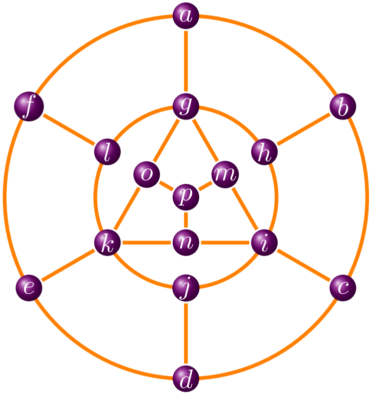


周游世界问题

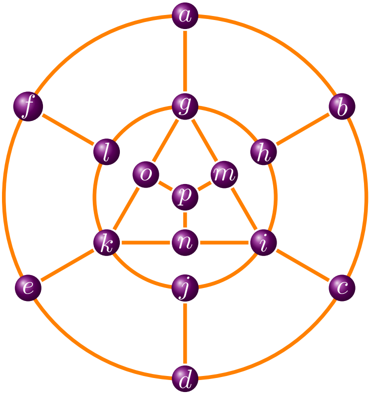
周游世界问题可以算是欧拉七桥问题的延续.

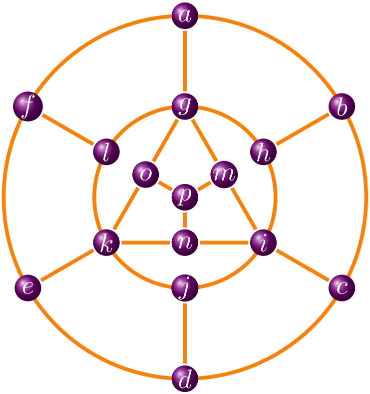
解此题时, 亦应用了图论的特性, 就是图中点与线之间的关系是最重要的, 点的位置和线的长度并不重要. 因此我们可以将原图变形, 并"压平"至一个平面之上来考虑, 从而得到它的解.

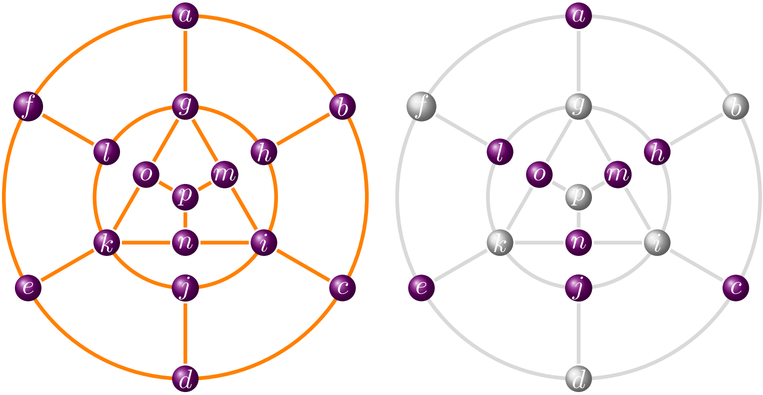


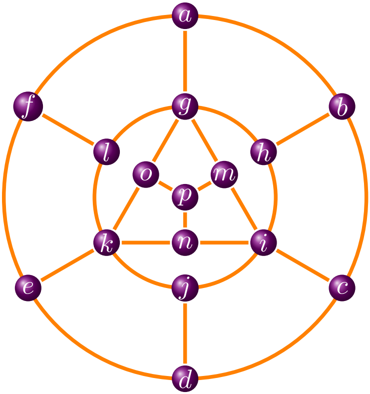


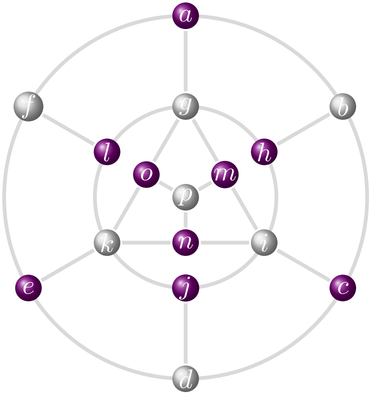
a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
p


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
p


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
p


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
p
a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
p





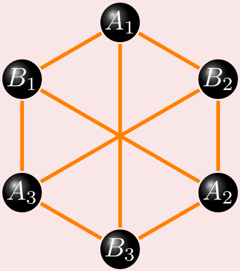
因为

$$
\begin{aligned}
W\big(G-\{a,b,c,d,e,f,g\}\big) &= 9 \\
\nleq \big|\{a,b,c,d,e,f,g\}\big| &= 7
\end{aligned}
$$

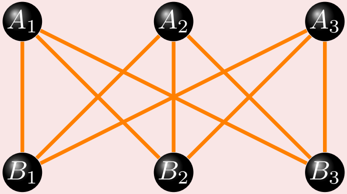
所以图 G 不是汉密尔顿图.

Kuratowski 定理

注意 $K_{3,3}$ 的不同表示, 下面两个图都是 $K_{3,3}$:



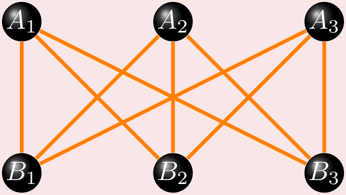
(a) $K_{3,3}$



(b) $K_{3,3}$

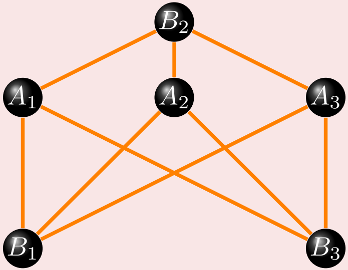
Kuratowski 定理

注意 $K_{3,3}$ 的不同表示, 下面两个图都是 $K_{3,3}$:



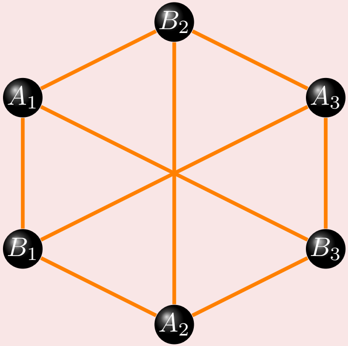
Kuratowski 定理

注意 $K_{3,3}$ 的不同表示, 下面两个图都是 $K_{3,3}$:

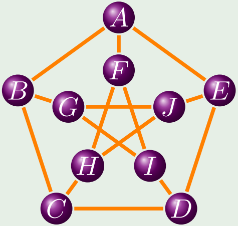


Kuratowski 定理

注意 $K_{3,3}$ 的不同表示, 下面两个图都是 $K_{3,3}$:

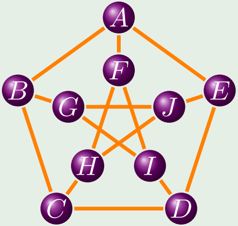


证明 Petersen 图不是平面图.

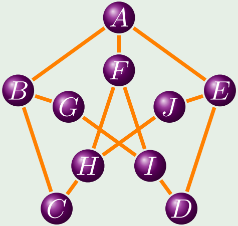


(a) Petersen 图

证明 Petersen 图不是平面图.

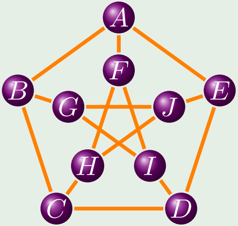


(a) Petersen 图

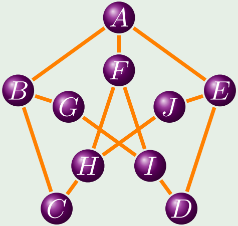


(b) 取 Petersen 图子图

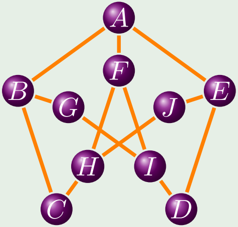
证明 Petersen 图不是平面图.



(a) Petersen 图

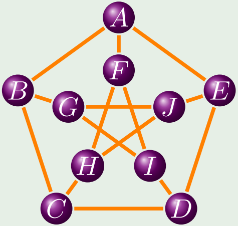


(b) 取 Petersen 图子图

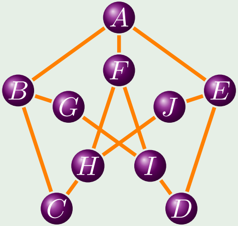


(c) 子图的变形

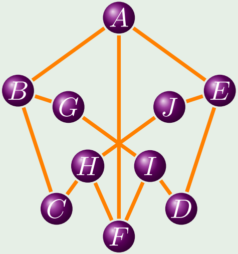
证明 Petersen 图不是平面图.



(a) Petersen 图

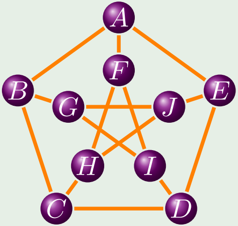


(b) 取 Petersen 图子图

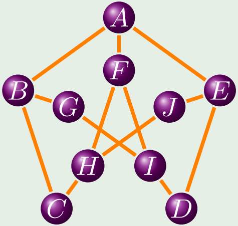


(c) 子图的变形

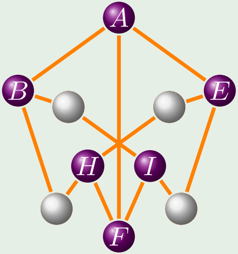
证明 Petersen 图不是平面图.



(a) Petersen 图

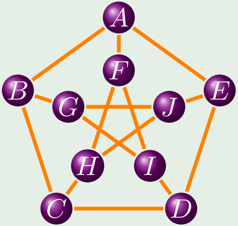


(b) 取 Petersen 图子图

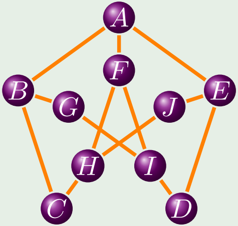


(c) 子图的变形

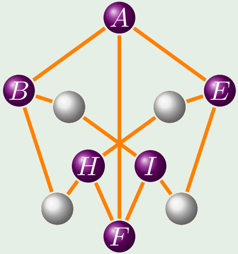
证明 Petersen 图不是平面图.



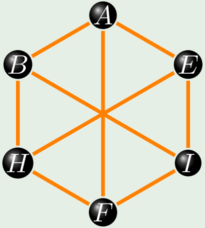
(a) Petersen 图



(b) 取 Petersen 图子图



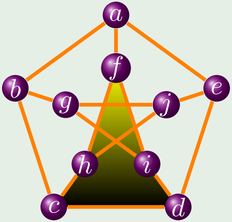
(c) 子图的变形



(d) 删除二度结点 C, D, G, J 得 $K_{3,3}$

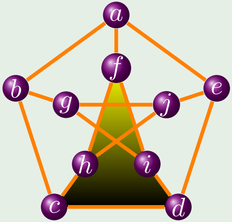
练习

应用欧拉公式证明 Petersen 图是非平面图.



练习

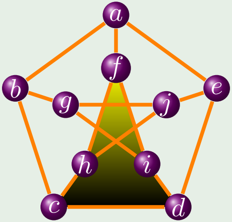
应用欧拉公式证明 Petersen 图是非平面图.



证: Petersen 图中, $v = 10$, $e = 15$, 从图上可以看出, 每个面由五边围成.

练习

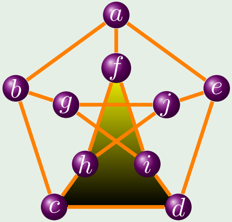
应用欧拉公式证明 Petersen 图是非平面图.



证: Petersen 图中, $v = 10$, $e = 15$, 从图上可以看出, 每个面由五边围成. 根据定理 7-5.1, 如果 Petersen 图是平面图, 则 $2e = 5r$.

练习

应用欧拉公式证明 Petersen 图是非平面图.



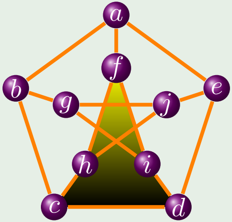
证: Petersen 图中, $v=10$, $e=15$, 从图上可以看出, 每个面由五边围成. 根据定理 7-5.1, 如果 Petersen 图是平面图, 则 $2e=5r$. 所以

$$r=\frac{2}{5}e=6$$

$$\Rightarrow v-e+r=10-15+6=1\neq 2$$

练习

应用欧拉公式证明 Petersen 图是非平面图.



证: Petersen 图中, $v = 10$, $e = 15$, 从图上可以看出, 每个面由五边围成. 根据定理 7-5.1, 如果 Petersen 图是平面图, 则 $2e = 5r$. 所以

$$r = \frac{2}{5}e = 6$$

$$\Rightarrow v - e + r = 10 - 15 + 6 = 1 \neq 2$$

这说明 Petersen 图不满足欧拉公式, 故它不是平面图.

Definition 4.1

图 G 的对偶图 $G^{\star}$ 同构于 G, 则称图 G 是自对偶图.

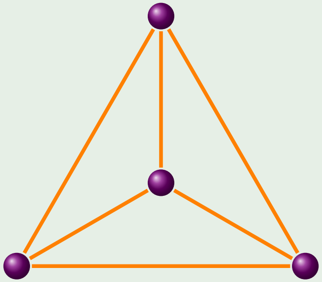
Definition 4.1

图 G 的对偶图 $G^\star$ 同构于 G, 则称图 G 是自对偶图.

Example 4.2

自对偶图的例子:

- “面”演化为“点”;
- “面的公共边界”演化为“点的邻接边”.



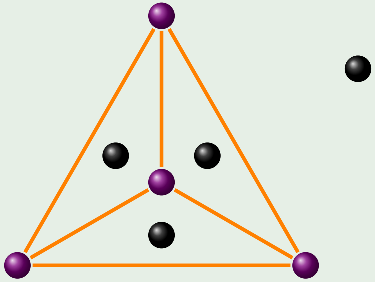
Definition 4.1

图 G 的对偶图 $G^\star$ 同构于 G, 则称图 G 是自对偶图.

Example 4.2

自对偶图的例子:

- “面”演化为“点”;
- “面的公共边界”演化为“点的邻接边”.



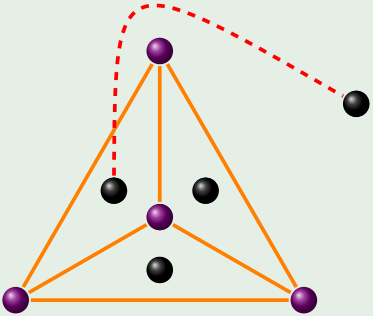
Definition 4.1

图 G 的对偶图 $G^\star$ 同构于 G, 则称图 G 是自对偶图.

Example 4.2

自对偶图的例子:

- “面”演化为“点”;
- “面的公共边界”演化为“点的邻接边”.



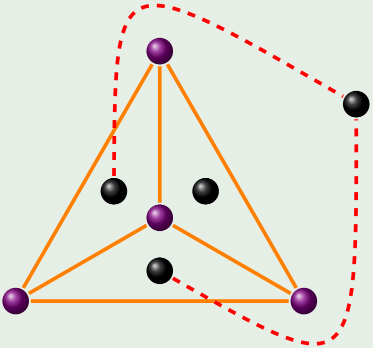
Definition 4.1

图 G 的对偶图 $G^\star$ 同构于 G, 则称图 G 是自对偶图.

Example 4.2

自对偶图的例子:

- “面”演化为“点”;
- “面的公共边界”演化为“点的邻接边”.



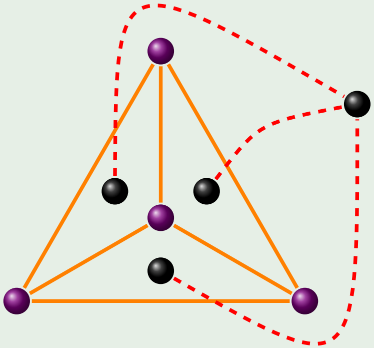
Definition 4.1

图 G 的对偶图 $G^\star$ 同构于 G, 则称图 G 是自对偶图.

Example 4.2

自对偶图的例子:

- “面”演化为“点”;
- “面的公共边界”演化为“点的邻接边”.



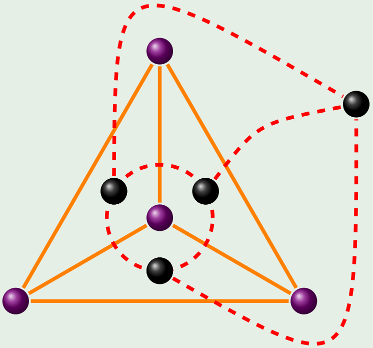
Definition 4.1

图 G 的对偶图 $G^\star$ 同构于 G, 则称图 G 是自对偶图.

Example 4.2

自对偶图的例子:

- “面”演化为“点”;
- “面的公共边界”演化为“点的邻接边”.

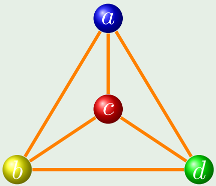


正常着色

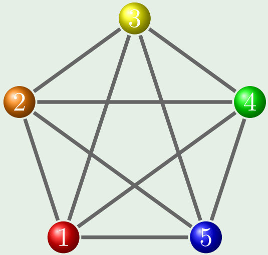
Example 4.3

下图中,

- 图 (a) 着色所需的最少颜色数为 4, 因此它是 4-色的.
- 图 (b) 着色所需的最少颜色数为 5, 因此它是 5-色的.



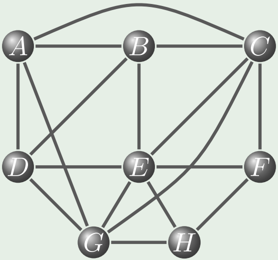
(a)



(b)

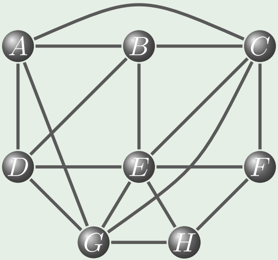
Example 4.4

对下图着色.



Example 4.4

对下图着色.

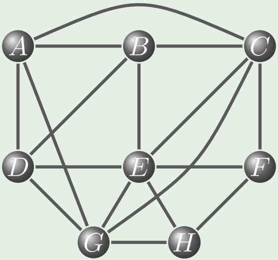


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

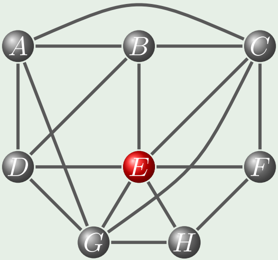


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

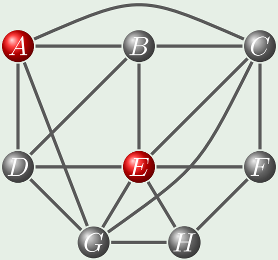


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

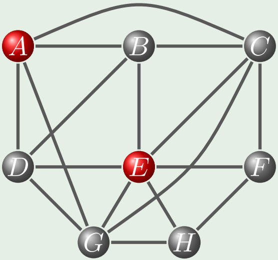


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

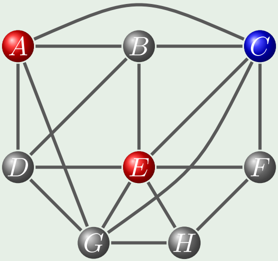


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

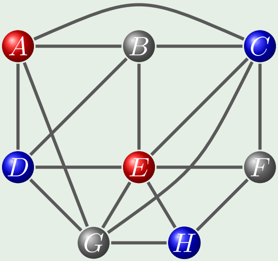


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

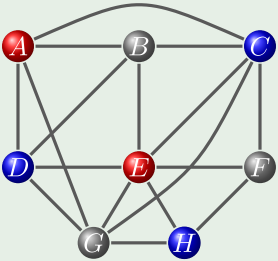


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

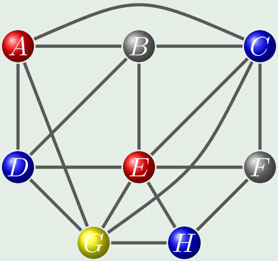


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.

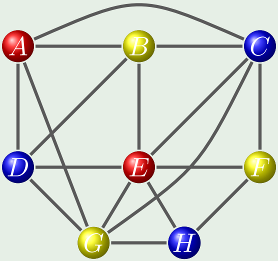


解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

Example 4.4

对下图着色.



解: 结点递减排序: E, C, G, A, B, D, F, H.

- 用红色对 E 及不相邻的结点 A 着色;
- 用蓝色对 C 及不相邻的结点 D, H 着色;
- 用黄色对 G 及不相邻的结点 B, F 着色;

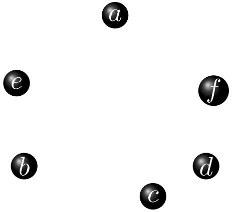
练习

六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

练习

六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

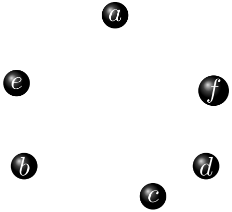
解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示.



练习

六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示. 从任一人出发, 该人与其它五人或认识, 或不认识.

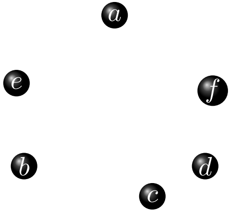


练习

六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示. 从任一人出发, 该人与其它五人或认识, 或不认识.

如两人认识, 则相应两点用红线相连, 否则, 用蓝线相连.



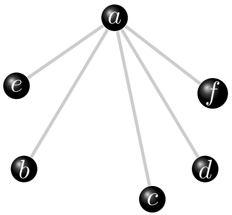
练习

六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示. 从任一人出发, 该人与其它五人或认识, 或不认识.

如两人认识, 则相应两点用红线相连, 否则, 用蓝线相连.

不失一般性, 考虑从 a 开始, 与其它五点可以有五条线相连.



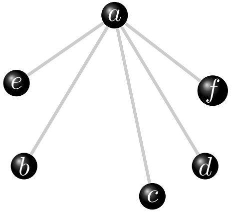
练习

六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示. 从任一人出发, 该人与其它五人或认识, 或不认识.

如两人认识, 则相应两点用红线相连, 否则, 用蓝线相连.

不失一般性, 考虑从 a 开始, 与其它五点可以有五条线相连. 那么五条线中必有 3 条会着上相同的颜色.



练习

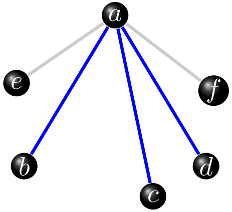
六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示. 从任一人出发, 该人与其它五人或认识, 或不认识.

如两人认识, 则相应两点用红线相连, 否则, 用蓝线相连.

不失一般性, 考虑从 a 开始, 与其它五点可以有五条线相连. 那么五条线中必有 3 条会着上相同的颜色.

假定 ab, ac, ad 为蓝色,



练习

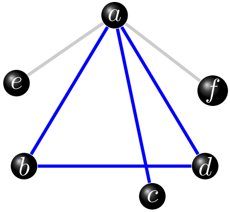
六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示. 从任一人出发, 该人与其它五人或认识, 或不认识.

如两人认识, 则相应两点用红线相连, 否则, 用蓝线相连.

不失一般性, 考虑从 a 开始, 与其它五点可以有五条线相连. 那么五条线中必有 3 条会着上相同的颜色.

假定 ab, ac, ad 为蓝色,



1. 如果此时 bc, cd, bd 中有一条边为蓝色(比如 bd 边为蓝色), 则可构成一个蓝色三角形, 因而六人中有三人不认识;

练习

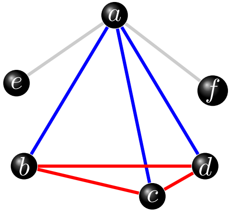
六人在一起, 或者三人互相认识, 或者三人彼此不认识.

解: 将 6 个人分别用平面上 a, b, c, d, e, f 六点表示. 从任一人出发, 该人与其它五人或认识, 或不认识.

如两人认识, 则相应两点用红线相连, 否则, 用蓝线相连.

不失一般性, 考虑从 a 开始, 与其它五点可以有五条线相连. 那么五条线中必有 3 条会着上相同的颜色.

假定 ab, ac, ad 为蓝色,

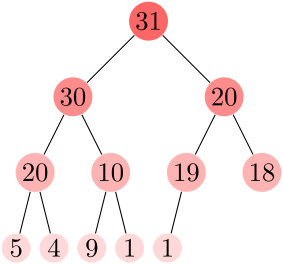


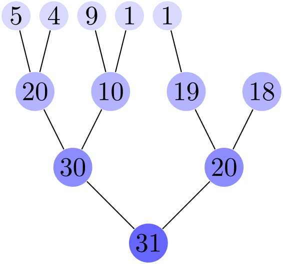
1. 如果此时 bc, cd, bd 中有一条边为蓝色(比如 bd 边为蓝色), 则可构成一个蓝色三角形, 因而六人中有三人不认识;
2. 如果此时 bc, cd, bd 全为红色, 则 b, c, d 彼此认识, 因而六人中有三人认识. □

树的概念

Definition 5.1

- 一个连通且无回路的无向图称为树(tree).
- 树中度数为 1 的结点叫树叶(leave);
- 度数大于 1 的结点叫分枝点(branched node)或内点.
- 如果一个无向图的每个连通分支是树, 则称为森林(forest).

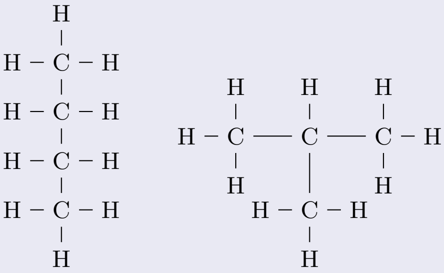




树的概念是亚瑟 · 凯莱[1] 提出的.

饱和碳氢化合物与树

英国数学家亚瑟 · 凯莱在 1857 年发明了树, 当时他试图列举饱和碳氢化合物 $\mathbf{C}_n\mathbf{H}_{2n+2}$ 的同分异构体.



(a) 丁烷　　(b) 异丁烷

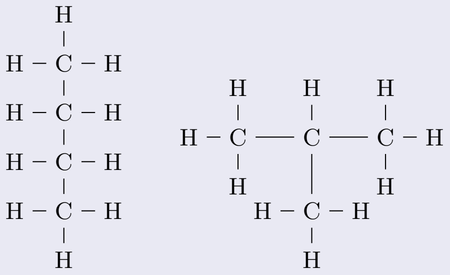
[1] Arthur Cayley (1821–1895) 17 岁进入剑桥三一学院学习, 1849 年获律师资格, 在其律师生涯中写下了超过 300 篇的数学论文. 1863 年返回剑桥任教职.

树的概念是亚瑟 · 凯莱[1] 提出的.

饱和碳氢化合物与树

英国数学家亚瑟 · 凯莱在 1857 年发明了树, 当时他试图列举饱和碳氢化合物 $\mathbf{C}_n\mathbf{H}_{2n+2}$ 的同分异构体.

左图为什么是树?



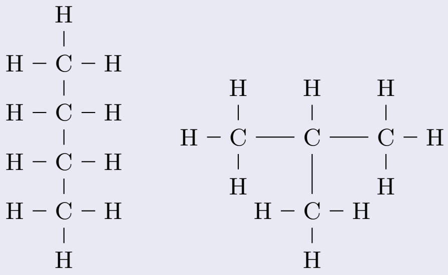
(a) 丁烷　　(b) 异丁烷

[1] Arthur Cayley (1821–1895) 17 岁进入剑桥三一学院学习, 1849 年获律师资格, 在其律师生涯中写下了超过 300 篇的数学论文. 1863 年返回剑桥任教职.

树的概念是亚瑟 · 凯莱[1] 提出的.

饱和碳氢化合物与树

英国数学家亚瑟 · 凯莱在 1857 年发明了树, 当时他试图列举饱和碳氢化合物 $\mathbf{C}_n\mathbf{H}_{2n+2}$ 的同分异构体.



(a) 丁烷　　(b) 异丁烷

左图为什么是树?

结点数:

$$v = n + (2n+2) = 3n+2$$

结点度数之和:

$$4 \times n + 1 \times (2n+2) = 6n+2$$

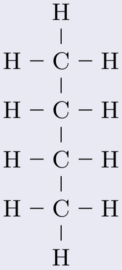
则边数 $e = 3n+1$.

[1] Arthur Cayley (1821–1895) 17 岁进入剑桥三一学院学习, 1849 年获律师资格, 在其律师生涯中写下了超过 300 篇的数学论文. 1863 年返回剑桥任教职.

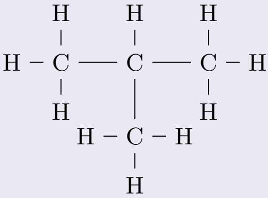
树的概念是亚瑟 · 凯莱[1] 提出的.

饱和碳氢化合物与树

英国数学家亚瑟 · 凯莱在 1857 年发明了树, 当时他试图列举饱和碳氢化合物 $\mathbf{C}_n\mathbf{H}_{2n+2}$ 的同分异构体.



(a) 丁烷



(b) 异丁烷

左图为什么是树?

结点数:

$$v = n + (2n+2) = 3n+2$$

结点度数之和:

$$4 \times n + 1 \times (2n+2) = 6n+2$$

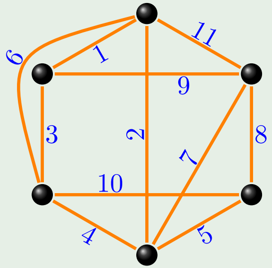
则边数 $e = 3n+1$. 因是连通图, 且 $e = v - 1$, 所以是树.

[1] Arthur Cayley (1821–1895) 17 岁进入剑桥三一学院学习, 1849 年获律师资格, 在其律师生涯中写下了超过 300 篇的数学论文. 1863 年返回剑桥任教职.

Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.

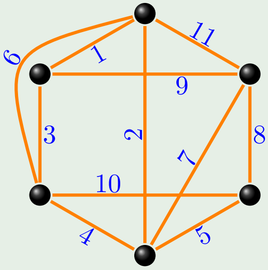


(a)

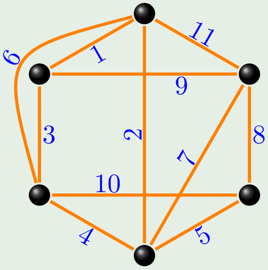
Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.



(a)

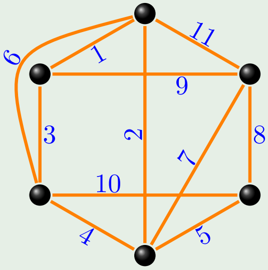


(b)

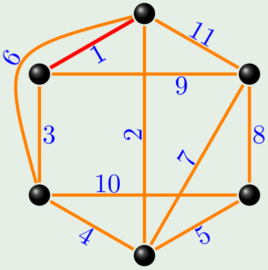
Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.



(a)

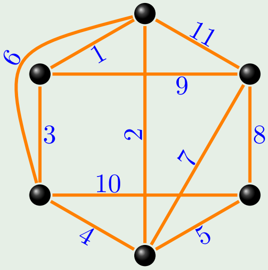


(b)

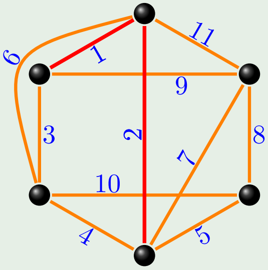
Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.



(a)

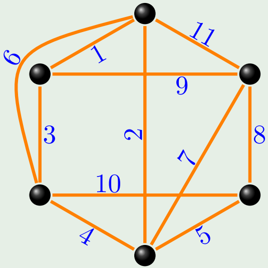


(b)

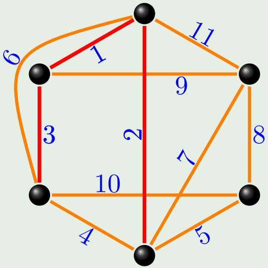
Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.



(a)

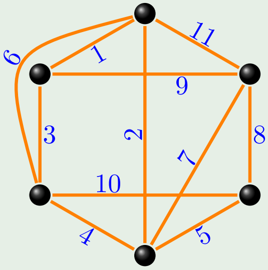


(b)

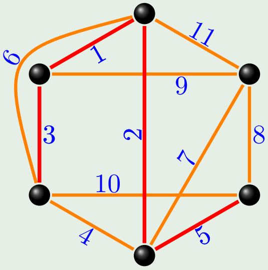
Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.



(a)

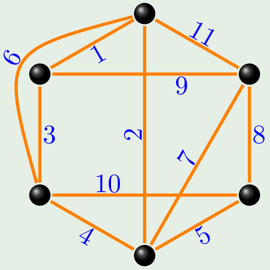


(b)

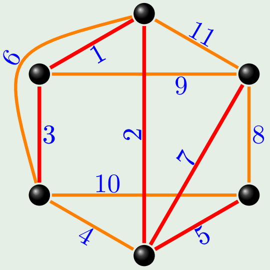
Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.



(a)

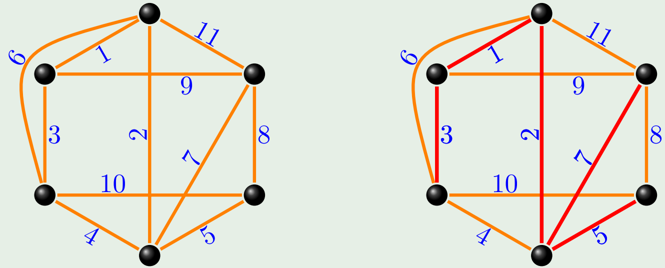


(b)

Example 5.2 (Kruskal 算法举例)

在下图中求最小生成树(方法 1).

图中有 6 个结点, 所以要选取 5 条边.

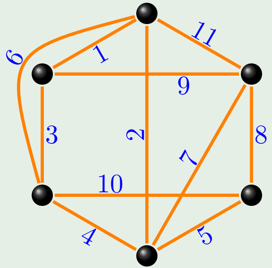


(a) (b)

(注意: 边权为 1, 2, 3 的边选取了之后, 边权为 6, 4 的边就不能选了. 否则构成回路.)

Example 5.3

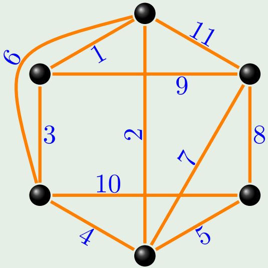
在下图中求最小生成树(方法 2).



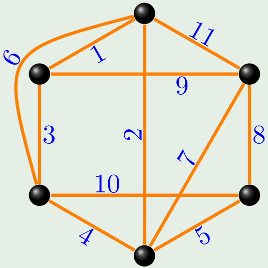
(a)

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).



(a)

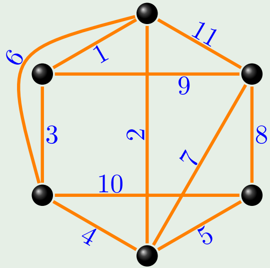


(b)

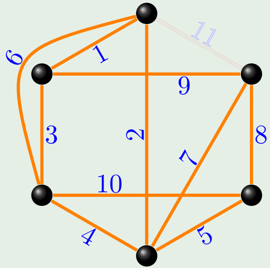
Kruskal 算法举例

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).



(a)

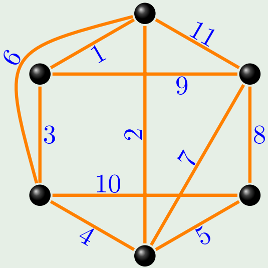


(b)

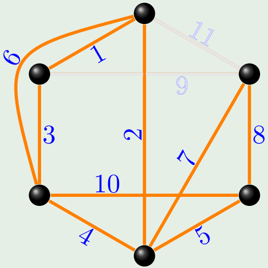
Kruskal 算法举例

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).



(a)

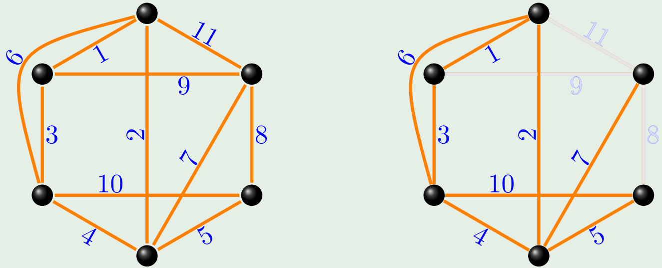


(b)

Kruskal 算法举例

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).

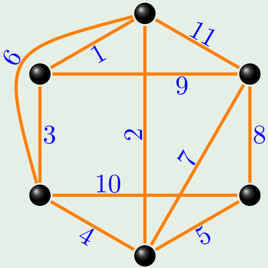


(a) (b)

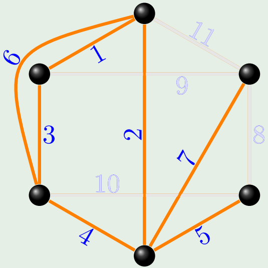
Kruskal 算法举例

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).



(a)

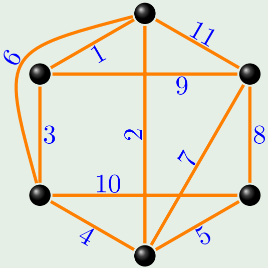


(b)

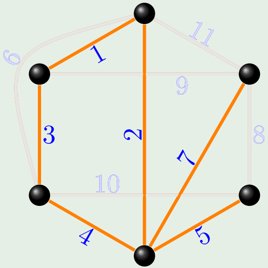
Kruskal 算法举例

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).



(a)

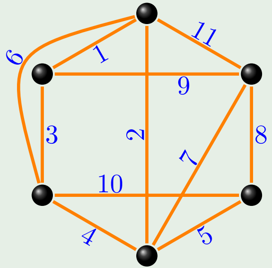


(b)

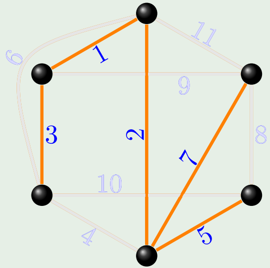
Kruskal 算法举例

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).



(a)

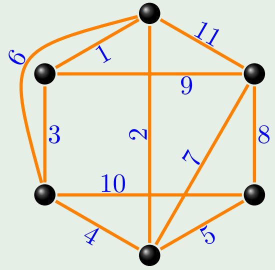


(b)

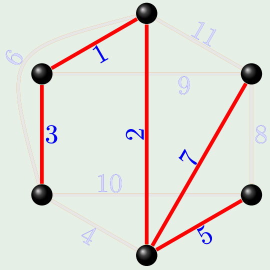
Kruskal 算法举例

Example 5.3

在下图中求最小生成树(方法 2).



(a)



(b)

根树的两种画法

根树可以有树根在上或树根在下两种画法, 它们是同构的.

根树的两种画法

根树可以有树根在上或树根在下两种画法, 它们是同构的.

Example 6.1

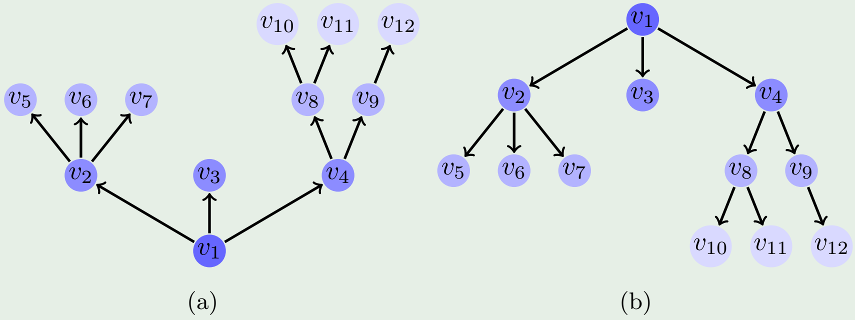
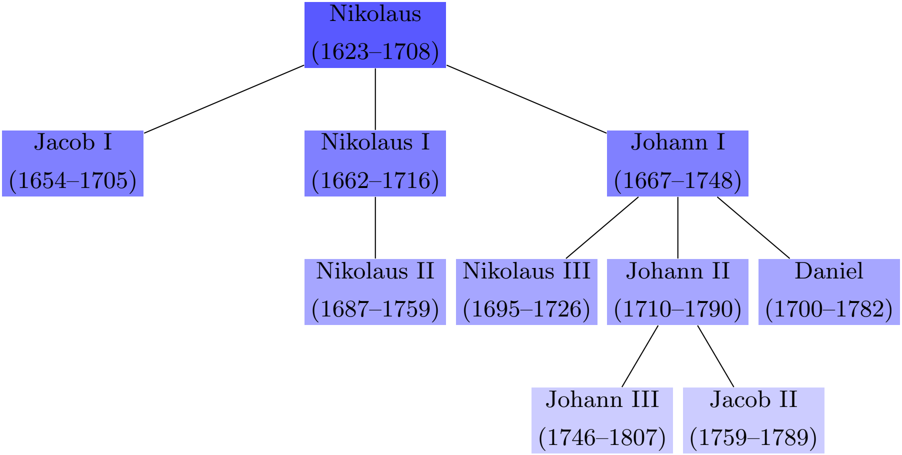


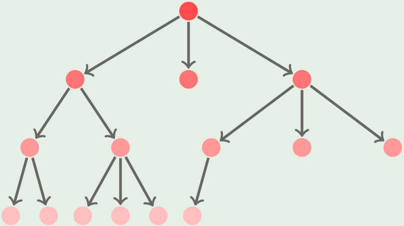
图 (a) 是根树的自然表示法.

伯努利家族[2]的族谱图

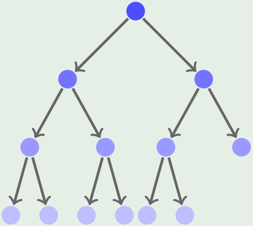


[2]著名的瑞士数学家家族. 见: E.T. 贝尔《数学精英》P.152, 商务印书馆.

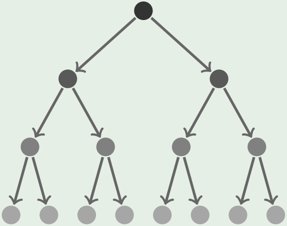
Example 6.2



(a) 三叉树



(b) 完全二叉树

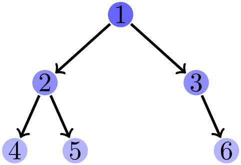


(c) 正则二叉树

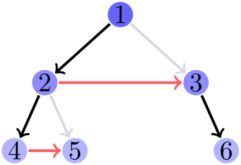
有序树写为对应的二叉树

任何一颗有序树都可以改写为一颗对应的二叉树, 方法如下:

1. 删除始于每个结点除最左边的一个分枝外的其余分枝; 在同一层次中的兄弟结点之间用自左到右的有向边连接.
2. 对某个结点, 直接位于该结点下面的结点作为左儿子. 位于同一水平线上与该结点右邻的结点作为右儿子.
3. 改写之后的树根仅有一个儿子, 规定是左儿子.



(a)

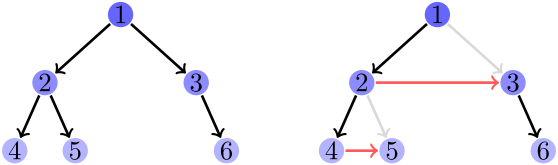


(b)

有序树写为对应的二叉树

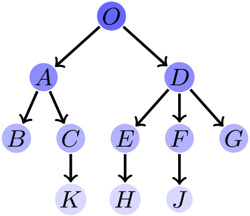
任何一颗有序树都可以改写为一颗对应的二叉树, 方法如下:

1. 删除始于每个结点除最左边的一个分枝外的其余分枝; 在同一层次中的兄弟结点之间用自左到右的有向边连接.
2. 对某个结点, 直接位于该结点下面的结点作为左儿子. 位于同一水平线上与该结点右邻的结点作为右儿子.
3. 改写之后的树根仅有一个儿子, 规定是左儿子.

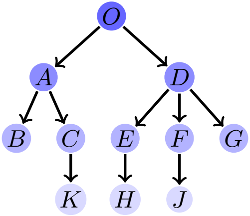


(a) (b)

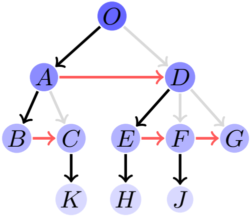
下页是一个例子...



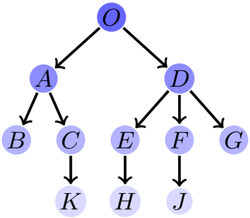
(a)



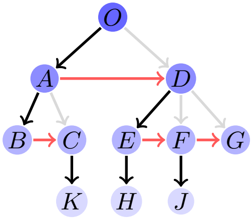
(a)



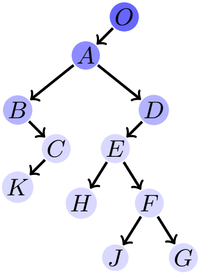
(b)



(a)



(b)



(c)

Example 6.3

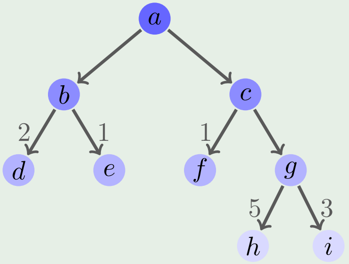


Figure: 带权二叉树 T

$$
\begin{aligned}
w(T) &= \sum_{i=1}^{t} w_i L(w_i) \\
&= 2 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 3 \\
&= 32
\end{aligned}
$$

Theorem 6.4

任意一棵二叉树对应一个前缀码.

Theorem 6.4

任意一棵二叉树对应一个前缀码.

证: 给定一棵二叉树, 从每个分枝点出发, 将左枝标为 0, 右枝标为 1, 则每片树叶对应一个 0 和 1 组成的序列, 该序列是从树根到该树叶的通路上各边标号组成的.

显然, 没有一片树叶对应的序列是另一片树叶对应序列的前缀. 所以任意一棵二叉树对应一个前缀码.

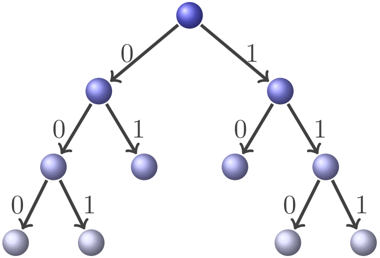


Figure: 带权二叉树 T

Example 6.5

试用有向图描述下列问题的解:

某人 m 带一条狗 d, 一只猫 c 和一只兔子 r 过河. m 每次游过河时只能带一只动物, 而没人管理时, 狗与兔子不能共处, 猫和兔子也不能共处. 问 m 怎样把三个动物带过河去?

Example 6.5

试用有向图描述下列问题的解:

某人 m 带一条狗 d, 一只猫 c 和一只兔子 r 过河. m 每次游过河时只能带一只动物, 而没人管理时, 狗与兔子不能共处, 猫和兔子也不能共处. 问 m 怎样把三个动物带过河去?

提示: 用结点代表状态, 状态用序偶 $\langle S_1, S_2\rangle$ 来表示, 这里 S_1, S_2 分别是左岸、右岸的人和动物的集合, 例如初始状态为 $\langle\{m, d, c, r\}, \varnothing\rangle$.

解: 注意到不能出现集合 $\{d, r\}$, $\{c, r\}$, 描述上述问题的有向图如下

$$
\begin{tikzcd}
 & & \langle\{m,d,c,r\},\ \varnothing\rangle \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & \langle\{c,r\},\ \{m,d\}\rangle & \langle\{d,c\},\ \{m,r\}\rangle \arrow[d] & \langle\{d,r\},\ \{m,c\}\rangle \\
 & & \langle\{m,d,c\},\ \{r\}\rangle \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \langle\{d\},\ \{m,r,c\}\rangle \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \langle\{c\},\ \{m,r,d\}\rangle \arrow[d] \\
\langle\{d,m\},\ \{r,c\}\rangle & \langle\{d,m,r\},\ \{c\}\rangle \arrow[d] & \langle\{d,m,c\},\ \{r\}\rangle & \langle\{c,m,r\},\ \{d\}\rangle \arrow[d] \\
 & \langle\{r\},\ \{c,d,m\}\rangle \arrow[d] & & \langle\{r\},\ \{c,d,m\}\rangle \arrow[d] \\
 & \langle\{r,m\},\ \{c,d\}\rangle \arrow[d] & & \langle\{r,m\},\ \{c,d\}\rangle \arrow[d] \\
 & \langle\varnothing,\ \{m,d,c,r\}\rangle & & \langle\varnothing,\ \{m,d,c,r\}\rangle
\end{tikzcd}
$$

(注: 第 3 层中, 右侧的讨论应与左侧同, 为方便计略去.)

Leonhard Euler

Euler (1707~1783) 生于 Basel, 卒于圣彼得堡. 瑞士数学家, 贡献遍及数学各领域, 是数学史上最伟大的数学家之一, 也是最多产的数学家.

据统计他一生共写下了 886 本书籍和论文, 其中分析、代数、数论占 40%, 几何占 18%, 物理和力学占 28%, 天文学占 11%, 弹道学、航海学、建筑学等占 3%, 彼得堡科学院为了整理他的著作, 足足忙碌了四十七年.

Leonhard Euler

Euler (1707~1783) 生于 Basel, 卒于圣彼得堡. 瑞士数学家, 贡献遍及数学各领域, 是数学史上最伟大的数学家之一, 也是最多产的数学家.

据统计他一生共写下了 886 本书籍和论文, 其中分析、代数、数论占 40%, 几何占 18%, 物理和力学占 28%, 天文学占 11%, 弹道学、航海学、建筑学等占 3%, 彼得堡科学院为了整理他的著作, 足足忙碌了四十七年.

Leonhard Euler

欧拉可以在任何不良的环境中工作. 他顽强的毅力和孜孜不倦的治学精神, 使他在双目失明以后, 也没有停止对数学的研究, 在失明后的 17 年间, 他还口述了几本书和 400 篇左右的论文.

Euler 一生都是在科学院度过. 首先是在俄国的圣彼得堡科学院, 1733 年, 26 岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授. 1740 年后则在柏林科学院待到 59 岁. 1766 年接受凯瑟琳女皇二世邀请, 离开柏林, 再次前往圣彼得堡, 一直到他过世(1783年).

欧拉可以在任何不良的环境中工作. 他顽强的毅力和孜孜不倦的治学精神, 使他在双目失明以后, 也没有停止对数学的研究, 在失明后的 17 年间, 他还口述了几本书和 400 篇左右的论文.

Euler 一生都是在科学院度过. 首先是在俄国的圣彼得堡科学院, 1733 年, 26 岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授. 1740 年后则在柏林科学院待到 59 岁. 1766 年接受凯瑟琳女皇二世邀请, 离开柏林, 再次前往圣彼得堡, 一直到他过世(1783年).

Leonhard Euler

Euler 公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

这是关于三角函数最漂亮的公式之一, 同时也是三角函数与复数间的桥梁. 若令 $\theta = \pi$, 则有

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

欧拉还创设了许多数学符号, 例如 π (1736年), i (1777年), e (1748年), sin 和 cos (1748年), tan (1753年), Δx (1755年), Σ (1755年), $f(x)$ (1734年) 等.

返回

Leonhard Euler

Euler 公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

这是关于三角函数最漂亮的公式之一, 同时也是三角函数与复数间的桥梁. 若令 $\theta = \pi$, 则有

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

欧拉还创设了许多数学符号, 例如 π (1736年), i (1777年), e (1748年), sin 和 cos (1748年), tan (1753年), Δx (1755年), Σ (1755年), $f(x)$ (1734年) 等.

返回

Leonhard Euler

Euler 公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

这是关于三角函数最漂亮的公式之一, 同时也是三角函数与复数间的桥梁. 若令 $\theta = \pi$, 则有

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

欧拉还创设了许多数学符号, 例如 π (1736年), i (1777年), e (1748年), sin 和 cos (1748年), tan (1753年), Δx (1755年), Σ (1755年), $f(x)$ (1734年) 等.

返回

Thank you!

AUTHOR: HUANG Zheng-hua

ADDRESS: School of Mathematics & Statistics
Wuhan University
Wuhan, 430072, China

EMAIL: huangzh@whu.edu.cn