



Det Natur- og Biovidenskabelige Fakultet



Symbolske udtryk

Torben Ægidius Mogensen

PoP 10102016



Regneudtryk i variabelen x

Vi kender regneudtryk i en variabel fra gymnasiematematikken. Vi kan beskrive sådanne rekursivt:

- Et udtryk kan være variabelen x .
- Et udtryk kan være en konstant $c \in \mathbb{R}$.
- Et udtryk kan være to udtryk adskilt af $+$.
- Et udtryk kan være to udtryk adskilt af $-$.
- Et udtryk kan være to udtryk adskilt af \cdot (gange).
- Et udtryk kan være to udtryk adskilt af en brøkstreg.
- Et udtryk kan være et udtryk opløftet til en potens p .
- Et udtryk kan være funktionen \sin anvendt på et udtryk.
- Et udtryk kan være funktionen \cos anvendt på et udtryk.
- Et udtryk kan være funktionen \log anvendt på et udtryk.
- Et udtryk kan være e opløftet til en potens angivet med et udtryk.
- Et udtryk kan være et udtryk omgivet af parenteser.

Eksempel: $\frac{\sin x}{\cos x} + (x + 1)^2$



Representation af udtryk med rekursiv type

```
type expr = X
  | Const of float
  | Plus of expr * expr
  | Minus of expr * expr
  | Times of expr * expr
  | Divide of expr * expr
  | Power of expr * float
  | Sin of expr
  | Cos of expr
  | Log of expr
  | Exp of expr
  | Paren of expr
```

$\frac{\sin x}{\cos x} + (x + 1)^2$ repræsenteres som

Plus (Divide (Sin X, Cos X),
Power (Paren (Plus (X, Const 1.0)), 2.0))



Udregning af udtryk

```
let rec eval e x =  
  match e with  
  | X -> x  
  | Const c -> c  
  | Plus (e1, e2) -> (eval e1 x) + (eval e2 x)  
  | Minus (e1, e2) -> (eval e1 x) - (eval e2 x)  
  | Times (e1, e2) -> (eval e1 x) * (eval e2 x)  
  | Divide (e1, e2) -> (eval e1 x) / (eval e2 x)  
  | Power (e, p) -> (eval e x) ** p  
  | Sin e -> sin (eval e x)  
  | Cos e -> cos (eval e x)  
  | Log e -> log (eval e x)  
  | Exp e -> exp (eval e x)  
  | Paren e -> eval e x
```

Eksempel: `eval ee 2.0` \rightsquigarrow 6.814960137, hvor `ee` er udtrykket fra før.



Konvertering til \LaTeX -formler

```
let rec toLaTeX e =  
  match e with  
  | X -> "x"  
  | Const c -> sprintf "%g" c  
  | Plus (e1, e2) -> toLaTeX e1 + "+" + toLaTeX e2  
  | Minus (e1, e2) -> toLaTeX e1 + "-" + toLaTeX e2  
  | Times (e1, e2) -> toLaTeX e1 + "\\cdot " + toLaTeX e2  
  | Divide (e1, e2) ->  
    "\\frac{" + toLaTeX e1 + "}{ " + toLaTeX e2 + "}"  
  | Power (e, p) -> toLaTeX e + sprintf "^%g" p  
  | Sin e -> "\\sin " + toLaTeX e  
  | Cos e -> "\\cos " + toLaTeX e  
  | Log e -> "\\log " + toLaTeX e  
  | Exp e -> "e^{ " + toLaTeX e + "}"  
  | Paren e -> "(" + toLaTeX e + ")"
```

Eksempel: $\text{toLaTeX } ee \ 2.0 \rightsquigarrow$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + (x+1)^2$$



Symbolsk differentiering

$h(x)$	$h'(x)$
x	1
c	0
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$



Symbolisk differentiering i F#

```
let rec ddx e =  
    match e with  
    | X -> Const 1.0  
    | Const c -> Const 0.0  
    | Plus (e1, e2) -> Plus(ddx e1, ddx e2)  
    | Minus (e1, e2) -> Minus (ddx e1, ddx e2)  
    | Times (e1, e2) ->  
        Paren (Plus (Times (ddx e1, e2), Times (e1, ddx e2)))  
    | Divide (e1, e2) ->  
        Divide(Minus (Times (ddx e1, e2), Times (e1, ddx e2)),  
                Power (e2, 2.0))  
    | Power (e, p) ->  
        Paren (Times (Times (Const p, Power (e, p-1.0)), ddx e))  
    | Sin e -> Paren (Times (Cos e, ddx e))  
    | Cos e -> Paren (Times (Minus (Const 0.0, Sin e), ddx e))  
    | Log e -> Paren (Times (Divide (Const 1.0, e), ddx e))  
    | Exp e -> Paren (Times (Exp e, ddx e))  
    | Paren e -> Paren (ddx e)
```



Eksempel på symbolsk differentiering

ddx ee \rightsquigarrow

Plus

(Divide

(Minus

(Times (Paren (Times (Cos X,Const 1.0)),Cos X),
Times (Sin X,Paren (Times (Minus (Const 0.0,Sin X),
Const 1.0))))),

Power (Cos X,2.0)),

Paren

(Times

(Times (Const 2.0,Power (Paren (Plus (X,Const 1.0)),1.0)
Paren (Plus (Const 1.0,Const 0.0))))))

Svarende til

$$\frac{(\cos x \cdot 1) \cdot \cos x - \sin x \cdot (0 - \sin x \cdot 1)}{\cos x^2} + (2 \cdot (x + 1)^1 \cdot (1 + 0))$$



Simplificering af udtryk (ukomplet)

```
let rec simplify e =  
  match e with  
  | Plus (e1, Const 0.0) -> simplify e1  
  | Plus (Const 0.0, e2) -> simplify e2  
  | Plus (Const a, Const b) -> Const (a + b)  
  | Plus (e1, e2) -> Plus (simplify e1, simplify e2)  
  | Minus (e1, Const 0.0) -> simplify e1  
  | Minus (Const a, Const b) -> Const (a - b)  
  | Minus (e1, e2) -> Minus (simplify e1, simplify e2)  
  | Times (e1, Const 0.0) -> Const 0.0  
  | Times (Const 0.0, e2) -> Const 0.0  
  | Times (e1, Const 1.0) -> simplify e1  
  | Times (Const 1.0, e2) -> simplify e2  
  | Times (Const a, Const b) -> Const (a * b)  
  | Times (e1, e2) -> Times (simplify e1, simplify e2)  
  | Divide (Const 0.0, e2) -> Const 0.0  
  | Divide (e1, Const 1.0) -> simplify e1  
  | Divide (e1, e2) -> Divide (simplify e1, simplify e2)  
  | Power (e, 1.0) -> simplify e  
  | Sin e -> Sin (simplify e)  
  | Cos e -> Cos (simplify e)  
  | Log e -> Log (simplify e)  
  | Exp e -> Exp (simplify e)  
  | Paren X -> X  
  | Paren (Const c) -> Const c  
  | Paren e -> Paren (simplify e)  
  | _ -> e
```



Gentagen simplificering

`ddx ee` \rightsquigarrow

$$\frac{(\cos x \cdot 1) \cdot \cos x - \sin x \cdot (0 - \sin x \cdot 1)}{\cos x^2} + (2 \cdot (x + 1)^1 \cdot (1 + 0))$$

`simplify (ddx ee)` \rightsquigarrow

$$\frac{(\cos x) \cdot \cos x - \sin x \cdot (0 - \sin x)}{\cos x^2} + (2 \cdot (x + 1) \cdot (1))$$

`simplify (simplify (ddx ee))` \rightsquigarrow

$$\frac{(\cos x) \cdot \cos x - \sin x \cdot (0 - \sin x)}{\cos x^2} + (2 \cdot (x + 1) \cdot 1)$$

`simplify (simplify (simplify (ddx ee)))` \rightsquigarrow

$$\frac{(\cos x) \cdot \cos x - \sin x \cdot (0 - \sin x)}{\cos x^2} + (2 \cdot (x + 1))$$



Itereret simplificering

Vi kan gentage simplificering indtil, der ikke sker ændringer:

```
let rec simplifyMax e =  
  let se = simplify e  
  if se = e then e  
  else simplifyMax se
```

`simplifyMax (ddx ee) \rightsquigarrow`

$$\frac{(\cos x) \cdot \cos x - \sin x \cdot (0 - \sin x)}{\cos x^2} + (2 \cdot (x + 1))$$

Der er stadig flere muligheder for simplificering, f.eks.

$$\begin{array}{lll} (\cos x) & \rightsquigarrow & \cos x \\ +(2 \cdot (x + 1)) & \rightsquigarrow & +2 \cdot (x + 1) \\ -\sin x \cdot (0 - \sin x) & \rightsquigarrow & +\sin x \cdot \sin x \end{array}$$

