偏微分方程课堂笔记

李赫

2018 春季

目录

1 课程简介 **4**

2 方程的建立与定解条件 **6**

2.1 质量守恒与连续性方程 6

2.2 动量守恒与弦振动方程 7

2.3 能量守恒与热传导方程 9

2.4 极小曲面及变分问题 11

3 波动方程 **14**

3.1 一阶偏微分方程的特征线方法 14

3.2 非齐次方程的解法 - Duhamel 原理 15

3.3 一般维数波动方程 Cauchy 问题的解法 17

3.4 Taylor 弦振动方程的解法 18

3.5 波的传播 19

3.6 波方程的唯一性和稳定性 20

3.6.1 Gronwall 不等式 21

3.6.2 能量方法 22

3.7 半无界问题的解法 23

3.8 高维波动方程的解法 25

3.8.1 球面平均法，$n = 3$ 为例 25

3.8.2 降维法，以 $n = 2$ 为例 27

3.9 Sturm-Liouville 问题 28

3.9.1 问题的提出 28

3.9.2 有解 λ 的必要条件 29

3.9.3 一些结论 29

3.9.4 定理 (3.18) 30

3.10 初边值问题的求解 31

3.10.1 初边值问题 31
3.11 初边值问题解的唯一性 35
3.11.1 能量守恒 35
3.11.2 能量方法 35
3.12 广义解 37
3.12.1 广义（弱）导数 37
3.12.2 广义解举例 38

4 热方程 **41**
4.1 Fourier 变换 41
4.1.1 定义 41
4.1.2 性质 42
4.2 Poisson 公式 44
4.2.1 Poisson 公式的推导 44
4.2.2 Poisson 核函数的性质 45
4.2.3 Poisson 公式的证明 46
4.3 广义函数 46
4.3.1 广义函数的定义 46
4.3.2 广义函数的运算 47
4.3.3 广义函数的导数 47
4.4 热方程的基本解 48
4.5 半空间的解 50
4.6 初边值问题的解法 50
4.6.1 一维情况 50
4.6.2 高维情况 52
4.6.3 无穷衰减性质 52
4.6.4 验证定律 52
4.7 极值原理和最大模估计 53
4.7.1 初边值问题 53
4.7.2 热球 54
4.7.3 平均值定理 55
4.7.4 极值原理 revisit 56
4.7.5 最大模估计 57
4.8 柯西问题 58
4.9 能量估计及其推论 60
4.9.1 初边值问题：$\Omega \in \mathbb{R}^n$ 为有界开集 60
4.9.2 Cauchy 问题：$Q = \mathbb{R}^n \times (0, T]$ 61

5 Poisson 方程 **63**
5.1 基本解 63
5.1.1 定义 63
5.1.2 形式推导 63
5.1.3 基本解的严格证明 65
5.1.4 Newman 问题有解的必要条件 66
5.2 Green 函数 67
5.2.1 Dirichlet 问题 67
5.2.2 Newman 问题 68
5.2.3 混合问题 68
5.2.4 Green 函数的性质 69
5.2.5 半空间中的 Green 函数 70
5.2.6 球形区域的 Green 函数 72
5.3 极值原理与最大模估计 (E. Hopf) 74
5.3.1 极值原理 74
5.3.2 极值原理之推论 76
5.3.3 最大模估计 77
5.4 能量估计 79

6 Homework **80**

1 课程简介

参考书籍. Textbook: 数学物理方程讲义. 姜礼尚，陈亚浙. 高教第三版，2007.

References:

(1) L.C.Evans, Partial Differential Equations (Part I)

(2) O.A.Olenik: 偏微分方程讲义，高教，2007.

课程信息. 简怀玉，理科楼 A412. Tel: 62772864. Email: *hjian@math.tsinghua.edu.cn*

助教：

(1) 涂绪山，18500325351. Email: *1347167157@qq.com*

(2) 朱晓鹏，15201519542. Email: *1303698364@qq.com*

期末考试：60%，作业：20%，期中（一次或两次）：20%.

定义 1.1. PDE: 含有未知多元函数及该函数的某些阶偏导函数。

例 1.2. 线性 PDE：关于未知函数及其偏导数均是线性。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，u 是定义在 Ω 上的函数，证明：

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, Du = \nabla u = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$$

$$D^2 u = [u_{x_i x_j}]_{n\times n}(\text{Hessian}), \triangle u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(\text{Laplace})$$

1. 波动方程：$u_{tt} - \triangle u = f(x,t)$

2. 热传导方程：$u_t - \triangle u = f(x,t)$

3. 平衡态：$\triangle u = f(x)$ (poisson)

4. 输运方程：$b^i(x,t), b(x,t), f(x,t)$ 已知，求 $u(x,t)$:

$$u_t + \sum_{i=1}^n b^i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) = f(x,t)$$

设 $[a^{ij}(x)]_{n\times n}$ 是 Ω 上的对称正定矩阵，$b^i(x), \zeta, f$ 已知，求

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + \zeta(x) u$$

1. 一般波动方程：$u_{tt} + Lu = f$

2. 一般热传导：$u_t + Lu = f$ (Kolmogrov)

3. 一般 poisson：$Lu = f$

例 1.3. 非线性方程：非线性 PDE

1. 极小曲面方程：$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\triangle u\|^2}}\right)=0$

2. 平均曲率流方程：$u_t-\sqrt{1+\|\triangle u\|^2}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\triangle u\|^2}}\right)=0$

3. Monge-Ampere 方程：$\det(D^2u)=f(x,u,Du)$

4. Gauss 曲率流：$u_t-\left[\frac{detD^2u}{(1+\|\nabla u\|^2)^{\frac{n+t}{2}}}\right]=0$, ($\alpha>0$ 已知)

5. Hamilton-Jacobi: $u_t+H(Du,x)=0$, $H:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 已知

6. 渗流方程：$u_t-\triangle u^m=0$

例 1.4. 非线性方程组：

1. 守恒律方程：$u_t+divF(u)=0$，其中 $u:\Omega\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 未知，$F:\mathbb{R}\to M_{n\times n}$ 已知

2. Navier-Stoke:

$$\begin{cases}u_t-\triangle u+uDu+Dp=0\\ divu=0\end{cases}$$

   其中 $u:\Omega\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}^n,P:\Omega\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 未知，

$$uDu=\left(\sum_{i=1}^n u^i\frac{\partial u}{\partial x_i}^1,\sum_{i=1}^n u^i\frac{\partial u}{\partial x_i}^2,...,\sum_{i=1}^n u^i\frac{\partial u}{\partial x_i}^n\right)$$

3. Schrodinger 方程：$iu_t+\triangle u=u\|u\|^p$，$p>0$ 已知，$u=u_1+iu_2:\Omega\times(0,+\infty)\to\mathbb{C}$ 未知

4. Ricci 流方程：在已知流形 M 上求一族度量 $q_{ij}(x,t)$,

$$\partial_t q_{ij}=-2R_{ij}+\frac{2}{n}\frac{\int_M Rd\mu}{\int_M d\mu}q_{ij}$$

   其中 $R_{ij}=F(D^2q_{ij}),R=q^{ij}R_{ij},\mu=\sqrt{det(q_{ij})}$

5. Clay-Problem: 当 $n=3$ 时，$u_0\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$，求一个 $u(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ 中满足 Navier-Stoke，且 $u|_{t=0}=u_0(x)$，求这样的解是否唯一?

6. Fields-Medal Problem: $f(x)$ 的值变号时，方程 $detD^2u=f(x)$ 是否有解?

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=f(x,y)$$

2 方程的建立与定解条件

2.1 质量守恒与连续性方程

以流体为例，$\forall D \subset \Omega, t_2 > t_1$,

$$\boxed{\text{D 在 } t_2 \text{ 时刻的质量}} - \boxed{\text{D 在 } t_1 \text{ 时刻的质量}} = \boxed{\text{通过 } \partial D \text{ 流入的质量（}t_1 \le t \le t_2\text{）}} + \boxed{\text{D 中的源产生的质量（}t_1 \le t \le t_2\text{）}} \tag{2.1.1}$$

设 $V(x,t): \Omega \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ 是流体在 x 处时刻 t 的流速（已知）。$\rho(x,t): \Omega \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是流体在 x 处时刻 t 的密度函数（未知）。$f(x,t): \Omega \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ 是流体在 x 处时刻 t 源的密度函数

$$\int_D \rho(x,t_2)\,\mathrm{d}x - \int_D \rho(x,t_1)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial D} \rho(x,t)\vec{V}(-\vec{n})\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \int_D f(x,t)\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}t \tag{2.1.2}$$

引理 2.1. 设 $f, g \in \mathbb{C}(\Omega)$，且任意方体或球均有

$$\int_D f\,\mathrm{d}x = \int_D g\,\mathrm{d}x$$

则 $f = g \text{ in } \Omega$

证明. $\forall x \in \Omega$

$$f(x) = \lim_{\mathrm{diam}D \to 0} \frac{1}{|D|} \int_D f(y)\,\mathrm{d}y \tag{2.1.3}$$

□

引理 2.2. (O-G 公式)：设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，且 $\partial\Omega$ 是分片 C^1 的，$\vec{V} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$，则

$$\int_\Omega div\vec{V}\,\mathrm{d}x = \oint_{\partial\Omega} \vec{V}\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{2.1.4}$$

推论 2.3. 设 Ω 同引理2.2，$u, v \in C^1(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega uv_{x_i}\,\mathrm{d}x = \oint_{\partial\Omega} uv(\vec{n} \cdot \vec{e_i})\,\mathrm{d}S - \int_\Omega vu_{x_i}\,\mathrm{d}x \tag{2.1.5}$$

证明. 在引理2.2中，令 $\vec{V} = u \cdot v \cdot e_i$

□

回到上面的问题，

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \int_D div(\rho\vec{V})\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \int_D f(x,t)\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}t$$

因为 D 任意，$t_2 > t_1$ 任意，所以由引理2.1，得到连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{V}) = f(x,t) \tag{2.1.6}$$

其中 $\vec{V} = (V^1, ..., V^3)$。再变换

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{V})\rho + \sum_{i=1}^n V^i(x,t)\rho_{x_i} = f(x,t) \tag{2.1.7}$$

当 $b^i = V^i, b = div(\vec{V})$ 时，为输运方程。

2.2 动量守恒与弦振动方程

牛顿第二定律:

$$F = ma \approx \frac{u(t+\triangle t)-u(t)}{\triangle t}, \qquad |\triangle t| << 1$$

$$\text{冲量: } F\triangle t \approx mu(t+\triangle t) - mu(t)$$

对于一个系统，$\forall t_2 > t_1$，有

$$\boxed{\begin{array}{l} t_2 \text{ 时刻的} \\ \text{动量} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{l} t_1 \text{ 时刻的} \\ \text{动量} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{在 } [t_1,t_2] \text{ 时间区间内} \\ \text{外力产生的冲量} \end{array}} \tag{2.2.1}$$

(1) **Taylor 弦振动方程（1715）**

对 $\forall[a.b] \subset [0,l]$ 和 $\forall t_2 > t_1$，式（2.2.1）左边为:

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x,t_2)\rho(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x,t_1)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

由外力产生的冲量为:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

由近似得

$$\begin{aligned} &\text{a 处张力: } -|T_a|\sin\alpha_a \approx -|T_a|\tan\alpha_a = -|T_a|\frac{\partial}{\partial x}u|_{x=a} \\ &\text{b 处张力: } -|T_b|\sin\alpha_b \approx -|T_b|\tan\alpha_b = -|T_b|\frac{\partial}{\partial x}u|_{x=b} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

因为振动是微小的，所以 $\alpha_a, \alpha_b \approx 0$。张力产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[|T_b|\frac{\partial}{\partial x}u(b,t) - |T_a|\frac{\partial}{\partial x}u(a,t)\right]\mathrm{d}t$$

设 $|T_a| = |T_b| = T_0$，则

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_a^b \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b\left(f(x,t) + T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (x,t)\in(0,l)\times(0,+\infty)$$

进一步假设 $\rho(x) = \rho_0$ 为常数，令 $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} > 0$, $F(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho_0}$，则 Taylor 弦振动方程为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x,t), \qquad x\in(0,l), t>0 \tag{2.2.3}$$

注：如果不为均匀细绳则为一般振动方程。

(2) **定解条件**

(i) 初始条件

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) & \text{已知} \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \psi(x) & \text{已知} \end{cases}$$

(ii) 边界条件

(a) Dirichlet 条件

$$\begin{cases} u(0,t) = q_1(t) \\ u(l,t) = q_2(t) \end{cases}$$

(b) Neuman 条件

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u(0,t) = q_1(t) \\ \frac{\partial}{\partial x} u(l,t) = q_2(t) \end{cases}$$

(c) 混合边界

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u|_{x=0} = q_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u|_{x=l} = q_2(t) \end{cases}$$

(3) **Euler 波方程**

二维情况：设 $\Omega \subset R^2$, $u = u(x,y;t)$ 满足

$$u_{tt} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x,y;t), \qquad (x,y;t) \in \Omega \times (0,+\infty) \tag{2.2.4}$$

三维情况：设 $\Omega \subset R^3$, $u = u(x,y,z;t)$ 满足

$$u_{tt} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(x,y,z;t), \qquad (x,y,z;t) \in \Omega \times (0,+\infty) \tag{2.2.5}$$

事实上，

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = T_0 \triangledown u \vec{n} \tag{2.2.6}$$

(4) **一般维数的波方程**

设 $\Omega \subset R^n$ 为开集，$n \geq 1$，$a > 0$ 为常数，$0 < T \leq +\infty$，$f(x,t)$ 是定义在 $\Omega \times (0,T)$ 上的函数。

$$\text{方程：} u_{tt} - a^2 \triangle u = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{2.2.7}$$

(a) 初始条件

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \psi(x) \qquad x \in \Omega \end{cases}$$

(b) Dirichlet 条件

$$u|_{\partial\Omega} = q_1(x,t), \qquad x \in \partial\Omega, 0 \leq t < T$$

(c) Neuman 条件

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = q_2(x,t)$$

(d) 混合边界

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u\right)|_{\partial\Omega} = q_3(x,t)$$

(5) **定解问题：带有定解条件的方程**

1. 初边值问题：$\partial\Omega$ 非空，对应三类边界条件分别有 Dirichlet 初边值问题，Newman 初边值问题和混合初边值问题。
2. Cauchy 问题：$\Omega = R^n$（$\partial\Omega$ 为空集）叫做初值问题。

(6) **齐次性：**

当 $f \equiv 0$ 时，为齐次方程；当 $q_i \equiv 0$ 时，为齐次边界条件。任何两个解的线性组合仍旧满足同一个方程（同一个边界条件），那么这样的方程（边界条件）是齐次的。

2.3 能量守恒与热传导方程

设 $\Omega \subset R^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 表示有热传导现象的物体。考虑其温度的变化情况。$u(x,t)$: $\Omega \times (0,T) \to R$ 未知，已知物体的密度函数 $\rho(x)$，热源强度函数 $f(x,t)$，比热系数 c，热传导系数 k。$\forall D \subset \Omega, \forall t_2 > t_1$，

$$\boxed{\text{D 在 } t_2 \text{ 时刻的热量}} - \boxed{\text{D 在 } t_1 \text{ 时刻的热量}} = \boxed{[t_1t_2]\text{ 时间区间内热交换产生的热量（出现在边界 } \partial\Omega \text{ 上）}} + \boxed{[t_1t_2]\text{ 时间区间内热源产生的热量}} \tag{2.3.1}$$

方程（2.3.1）的左端为

$$\int_D cu(x,t_2)\rho(x)\,\mathrm{d}x - \int_D cu(x,t_1)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

方程（2.3.1）的右端第二项为

$$\boxed{[t_1t_2]\text{ 时间区间内热源产生的热量}} = \int_{t_1}^{t_2}\int_D f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

方程（2.3.1）的右端第一项为

$$\int_{t_1}^{t_2}\oint_{\partial D} k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

进行整理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho c u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_D [f + div(\nabla(ku))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

因为 $div(\nabla(ku)) = k\triangle u$，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u) = k\triangle u + f$$
$$\Longrightarrow u_t - a^2\triangle u = f \tag{2.3.2}$$

where $a = \sqrt{\frac{k}{\rho x}}, \hat{f} = \frac{f}{\rho c}$

(1) 方程 $u_t - a^2\triangle = f(x,t)$ in $\Omega \times (0.T)$

(2) 定解条件

  (i) 边值条件

   (a) $u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = q_1(x,t)$

   (b) $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = q_2(x,t)$ on $\partial\Omega \times (0,T)$

   (c) $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = q_3(x,t)$

  (ii) 初始条件 $u(x,0) = \varphi(x), x \in \Omega$，$\Longrightarrow$ 定解问题（初边值问题，Cauchy 问题）

(3) 齐次性

(4) 平衡态 $f(x,t) = f(x)$，q_i 与 t 无关。$t \to 0$，$u(x,t) \to u(x)$，则 Poission 方程

$$-\triangle u = f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{2.3.3}$$

其中，边界条件为:

  (i) $u|_{\partial\Omega} = q_1(x)$ (Dirichlet);

  (ii) $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = q_2(x)$ (Neuman);

  (iii) $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = q_3(x)$ (混合)。

例 2.4. 通过变换 $u = v + w$，将下面关于 u 的问题转化为关于 v 的齐次方程和齐次边界条件。

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 1, u_x(l,t) = 2 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解：用 $u = v + w$ 代入，由题意，只需要 w 满足

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = f(x), & 0 < x < l, t > 0 \\ w(0,t) = 1, w_x(l,t) = 2 \end{cases}$$

由于 f 与 t 无关，可以设 $w = w(x)$，则

$$\begin{cases} -w_{xx} = f(x), & 0 < x < l \\ w(0) = 1 \\ w(1) = 2 \end{cases}$$

解出：

$$w(x) = 2x + 1 + \int_0^x \int_t^l f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$$

2.4 极小曲面及变分问题

在 $\mathbb{R}^3$ 中给一条闭曲线，

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = \psi(x(s), y(s)) \end{cases}$$

设闭曲线在 $x \circ y$ 平面上围成的区域为 D，求一个 $\mathbb{C}^1$ 曲面 Σ，满足：(a) Σ 以 l 为周界; (b) Σ 的面积最小。记

$$M_\psi := \left\{ v \in \mathbb{C}^1(\overline{D}) : v|_{\partial D} = \psi \right\} \tag{2.4.1}$$

因此面积：

$$J(u) = \mathrm{Area}(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \forall u \in M_\psi \tag{2.4.2}$$

任取 $v \in M_\psi$，$\forall \varpi \in \mathbb{C}^1(\overline{D})$，$\varphi|_{\partial D} = 0$，令 $j(t) = J(v + t\varphi), t \in R$。

(1) 必要性：如果 $v = u$ 是最小曲面，则 $j(t)$ 在 $t = 0$ 处一定取到最小值，i.e. $j'(0) = 0$

$$\begin{aligned} j'(t) &= \frac{d}{dt} \iint\limits_D \sqrt{1 + |\nabla v + t\nabla\varphi|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \frac{(\nabla v + \nabla t\varphi)\nabla\varphi}{\sqrt{1 + |\nabla v + t\nabla\varphi|^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

所以

$$\iint\limits_D \frac{\nabla v \nabla\varphi}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

又因为[1]

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}\varphi \right) = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right)\varphi + \frac{\nabla v \nabla\varphi}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}$$

和 Gauss 公式:[2]

$$\begin{aligned} \iint_D \mathrm{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}\varphi \right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \oint_{\partial D} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}\varphi \right) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \\ &= \oint_{\partial D} \left(\frac{\varphi}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S \\ &= 0, \qquad \left(\because \varphi\Big|_{\partial D} = 0 \right) \end{aligned}$$

[1]根据求导法则，$\mathrm{div}(vF) = \mathrm{div}(F)v + \nabla v \cdot F$，其中 F 是向量场，v 是标量函数。

[2]$\iiint_D \mathrm{div}(F)\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial D} F \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \oiint_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S$，其中 F 是向量场。

$$\therefore \iint\limits_D \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\right)\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{C}^2 \tag{2.4.4}$$

根据 φ 的任意性，我们得到 **MSE**: $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\right) = 0$ in D，$v|_{\partial D} = \psi$。

引理 2.5. 如果 $f \in \mathbb{C}(\Omega), \varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ 且 $\{x : \varphi(x) \neq 0\} \subset\subset \Omega\}$, 有 $\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x = 0$，则 $f \equiv 0$ in Ω。

证明. 反证：设 $f \not\equiv 0$，不妨设 $x_0 \in \Omega, f(x_0) > 0$。
由 f 的连续性，$\exists \varepsilon > 0$, s.t. $f(x) \geq \frac{f(x_0}{2} = \delta$，$B_\varepsilon(x_0) \subset\subset \Omega$，令

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\{\frac{1}{|x|^2-\varepsilon^2}\} & |x| < \varepsilon \\ 0 & |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

则 $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$，但是

$$\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{B_\varepsilon(x_0)} f\varphi \,\mathrm{d}x \geq \delta \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi \,\mathrm{d}x > 0 \quad \text{矛盾!}$$

□

(2) 充分性：设 $v = u$ 是 MSE 的解，
只需验证：$j''(t) \geq 0, \forall t \in R$，其中 $j(t) = J(u + t\varphi)$，

$$\because j''(t) = \int\limits_D \frac{|\nabla\varphi|^2(1+|\nabla u + t\nabla\varphi|^2) - |(\nabla u + t\nabla\varphi)\nabla\varphi|^2}{(1+(\nabla u + t\nabla\varphi)^2)^{3/2}} \geq 0$$

（因为 $|ab| \leq |a||b|$），那么我们可以得到 $\forall\varphi \in \mathbb{C}^1(\overline{D})$，$\varphi = 0$ on $\partial\Omega$，有 $J(u+t\varphi)$ 在 $t = 0$ 处取得最小值

$$\Longrightarrow J(u+\varphi) \geq J(u), \quad \forall v \in M_\varphi$$

令 $\varphi = v - u$，

$$J(v) = J(u + (v-u)) \geq J(u)$$

例 2.6. Chapter 1-12. 求解变分问题，求 $u \in M := \{y(x) | y \in \mathbb{C}^1[0,1], y(1) = 0\}$ s.t.

$$J(u) = \min_{y \in M} J(y)$$

其中

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'(x))^2 \,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 y(x) \,\mathrm{d}x - y(0) \tag{2.4.5}$$

解：令 $j(t) = J(u + t\varphi)$，其中 $u \in M$（是最小的），$\varphi \in \mathbb{C}^1([0,1]), \varphi(1) = 0$ 是任意的。

$$\therefore j'(t) = \int_0^1 (u' + t\varphi')\varphi' - 2\int_0^1 \varphi \,\mathrm{d}x - \varphi(0)$$
$$j''(t) = \int_0^1 {\varphi'}^2 \geq 0$$

所以只要求 u s.t. $j'(0)=0$ 即可。

$$0=\int_0^1 u'\varphi'\,\mathrm{d}x-2\int_0^1\varphi\,\mathrm{d}x-\varphi(0),\qquad \forall\varphi\in\mathbb{C}^1([0,1]),\varphi(1)=0$$

$$\therefore 0=\big(u'(0)+1\big)\,\varphi(0)+\int_0^1(u''+2)\varphi\,\mathrm{d}x$$

所以我们可以得到

$$\begin{cases} u''+2=0 \text{ in } [0,1] \\ u(1)=0 \\ u'(0)=-1 \end{cases}$$

3 波动方程

考虑

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{3.0.1}$$

令 $v = \partial_t u + a\partial_x u$，则

$$\begin{cases} \partial_t v - a\partial_x v = f(x,t) \\ \partial_t u + a\partial_x u = v(x,t) \end{cases}$$

3.1 一阶偏微分方程的特征线方法

以线性方程为例，

$$au_t + B_1(x,t)\nabla_x u + b_1(x,t)u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

标准形式为

$$u_t + B(x,t)\nabla_x u + b(x,t)u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1.1}$$

idea：u 在曲线 $x = x(t)$ 上,$\overline{u} = u(x(t),t)$

$$\frac{d}{dt}\overline{u}(t) = u_t + \dot{x}(t)\nabla u(x,t)$$

Step 1：先求特征线

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = B(x,t) \\ x(0) = c, \quad c \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

解得

$$x = x(t,c) \tag{3.1.2}$$

Step 2：沿特征线方程（3.1.1）变为

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) + b(x(t,c),t)u(x(t,c),t) = 0 \tag{3.1.3}$$

解得

$$u = u(c,t) \tag{3.1.4}$$

Step 3：从（3.1.2）$c = c(x,t)$ 代入（3.1.4），得

$$u = u(x(x,t),t) = u(x,t)$$

即为所求。

例 3.1. 解一维的输运方程，其中 a 为常数，b, ρ_0 为 x 的已知函数。

$$\begin{cases} \rho_t + a\rho_x + b(x)\rho = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

解. 特征线

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \\ x(0) = c \end{cases} \implies x(t) = at + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

沿特征线问题转化为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho(at+c,t) + b(at+c)\ \rho(at+c,t) = 0 \\ \rho(c,0) = \rho_0(c) \end{cases}$$

解得

$$\ln\rho(at+c,t) - \ln\rho_0(c) = -\int_0^t b(as+c)\,\mathrm{d}s$$

$$\therefore \rho(at+c,t) = \rho_0(c)\exp\{-\int_0^t b(as+c)\,\mathrm{d}s\}$$

由特征线方程 $c = x - at$ 代入

$$\rho(x,t) = \rho_0(x-at)\exp\{-\int_0^t b(as+x-at)\,\mathrm{d}s\} \tag{3.1.6}$$

引理 3.2. 问题

$$\begin{cases} \rho_t + a\rho_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) \end{cases} \tag{3.1.7}$$

的解为 $\rho(x,t) = \rho_0(x-at)$，其中 $\rho_0 \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$。

引理 3.3. 方程 $\rho_t + a\rho_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$ 的通解为 $\rho(x,t) = f(x-at)$，其中 f 为任一可微函数。

3.2 非齐次方程的解法 - Duhamel 原理

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f(t) \\ v(0) = 0 \end{cases} \implies v(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t w(t,s)\,\mathrm{d}s \tag{3.2.1}$$

$$\forall s \geq 0, \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \\ v|_{t=s} f(s) \end{cases} \implies v = w(t,s) = f(s)$$

$$\therefore v(t) = \int_0^t w(t,s)\,\mathrm{d}s$$

引理 3.4. $\forall s \geq 0$，设 $u = w(x,t,s)$ 是问题

$$\begin{cases} u_t + P(D_x)u = 0, & x \in \mathbb{R}^m, t > 0 \\ u|_{t=s} = f(x,s) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

的解，则 $\overline{u}(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)\,\mathrm{d}s$ 是非齐次问题

$$\begin{cases} u_t + P(D_x)u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

的解，其中 $P(D_x)$ 是关于 x 的一个线性连续微分算子。

证明. $u|_{t=0} = 0$ 显然，又因为

$$\begin{aligned} \overline{u}_t &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t w(x,t,s)\,\mathrm{d}s \\ &= w(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}s \\ &= f(x,t) - \int_0^t P(D_x)w(x,t,s)\,\mathrm{d}s \\ &= f(x,t) - P(D_x)\int_0^t w(x,t,s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

□

引理 3.5. $\forall s \geq 0$，设 $u = w(x,t,s)$ 是问题

$$\begin{cases} u_{tt} + P(D_x)u = 0, & x \in \mathbb{R}^m, t > 0 \\ u|_{t=s} = 0, \quad u_t|_{t=s} = f(x,s) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

的解，则 $\overline{u}(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)\,\mathrm{d}s$ 是非齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt} + P(D_x)u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^m, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

的解，其中 $P(D_x)$ 是关于 x 的一个线性连续微分算子。

证明. $u_t|_{t=0} = 0$ 显然，

$$\overline{u}_t = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t w(x,t,s)\,\mathrm{d}s = w(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}w(x,t,s)\,\mathrm{d}s$$

$$\therefore \overline{u}_t|_{t=0} = 0 + 0 = 0$$

又因为

$$\begin{aligned} \overline{u}_{tt} &= 0 + \frac{\partial}{\partial t}w(x,t,s)|_{s=t} + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t,s)\,\mathrm{d}s \\ &= f(x,t) + \cdots \end{aligned}$$

□

3.3 一般维数波动方程 Cauchy 问题的解法

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \triangle u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.3.1}$$

从物理上，u 分解为三部分，$V \leftarrow f$，$W \leftarrow \varphi$，$Q \leftarrow \psi$。如果 V, W, Q 是下面三个问题的解

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 \triangle V = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ V|_{t=0} = V_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 \triangle W = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ W|_{t=0} = \varphi(x), W_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.3.3}$$

$$\begin{cases} Q_{tt} - a^2 \triangle Q = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ Q|_{t=0} = 0, Q_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.3.4}$$

则(3.3.1)的解为 $u = V+W+Q$。设(3.3.4)的解为 $Q(x,t) = M_\psi(x,t)$，则 $\forall s \geq 0$，$f_s(x) = f(x.s)$。

$$\begin{cases} \overline{Q}_{tt} - a^2 \triangle \overline{Q} = 0 \\ \overline{Q}|_{t=s} = 0, \overline{Q}_t|_{t=s} = f_s(x) \end{cases}$$

的解 $\overline{Q}(x,t) = Q(x, t-s) = M_{f_s}(x, t-s)$，则由 Duhamel 原理得，

$$V(x,t) = \int_0^t M_{f_s}(x, t-s) \, \mathrm{d}s$$

令 $W(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)$，则 $W|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)|_{t=0} = \varphi$

$$\begin{aligned} W_t|_{t=0} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\varphi(x,t)|_{t=0} = a^2 \triangle M_\varphi(x,t)|_{t=0} \\ &= a^2 \triangle M_\varphi(x,0) = a^2 \triangle(0) = 0 \end{aligned}$$

方程满足条件。

定理 3.6. 若 M_ψ, M_φ 在 $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ 上分别有连续二阶和三阶偏导数，而 M_{f_s} 在 $\{x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq s \leq t < +\infty\}$ 上有连续的二阶偏导，则（3.3.1）的解为

$$u(x,t) = M_\psi(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t) + \int_0^t M_{f_s}(x, t-s) \, \mathrm{d}s \tag{3.3.5}$$

定理 3.7. 若

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y|_{t=0} = y'|_{t=o} = 0 \end{cases} \tag{3.3.6}$$

的解为 $M_c(t)$，且 $M_{c_1}(t), M_{c_2}(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上分别有连续二阶和三阶导数，$M_{f^s}(x,t-s)$ 在 $\{t\geq 0, 0\geq s\leq t<+\infty\}$ 上有连续二阶偏导数，则 $\overline{y}(t)=\frac{d}{dt}M_{c_1}(t)+M_{c_2}(t)+\int_0^t M_{f^s}(x,t-s)\,\mathrm{d}s$ 是

$$\begin{cases}\overline{y}''+a\overline{y}'+b\overline{y}=0\\ \overline{y}|_{t=0}=c_1,\overline{y}'|_{t=o}=c_2\end{cases}\tag{3.3.7}$$

的一个解。

3.4 Taylor 弦振动方程的解法

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n, t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}\tag{3.4.1}$$

只需要求解

$$\begin{cases}w_{tt}-a^2w_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}^n, t>0\\ w|_{t=0}=0, w_t|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

$$\therefore w_{tt}-a^2w_{xx}=(\partial_t-a\partial_x)(\partial_t w+a\partial_w)$$

令 $v(x,t)=\partial_t w+a\partial_x w$，则

$$\begin{cases}\partial_t v-a\partial_x v=0\\ v|_{t=0}=\partial_t w|_{t=0}+a\partial_x w|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

由 lemma（3.2），特征线为 $x(t)=-at+c$，因此原问题化为

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}v(x(t),t)=0\\ v(x(0),0)=\psi(x)\end{cases}$$

由第一个式子知，$v(x(t),t)$ 与 t 无关，因此 $v(x(t),t)=v(x(0),0)=v(c,0)=\psi(x(0))$，$v(x,t)=\psi(x+at)$。则，

$$\begin{cases}\partial_t w+a\partial_x w=\psi(x+at), & x\in\mathbb{R}^n, t>0\\ w|_{t=0}=0\end{cases}\tag{3.4.2}$$

我们先解 $\forall s\geq 0$，

$$\begin{cases}\overline{w}_t+a\overline{w}_x=0, & x\in\mathbb{R}^n\\ \overline{w}|_{t=s}=\psi(x+as), & t\geq s\end{cases}\tag{3.4.3}$$

将 $t \to t-s$，则（3.4.3）的解为

$$\overline{w}(x,t,s) = \psi(x+as-a(t-s)) = \psi(x-a(t-2s))$$

则（3.4.2）的解为

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t \psi(x-a(t-2s))\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

由定理（3.6）可以得到（3.4.1）的解，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

定理 3.8. 令 $Q = \mathbb{R}\times(0,+\infty)$，$\overline{Q} = \mathbb{R}\times[0,+\infty)$，如果 $\varphi,\psi \in \mathcal{C}^2(Q)\cap\mathcal{C}^1(\overline{Q}), f \in \mathcal{C}^2(Q)$ 有界，则（3.4.4）给出的 $u(x,t) \in \mathcal{C}^2(Q)\cap\mathcal{C}^1(\overline{Q})$ 是（3.4.1）的解。式（3.4.4）又被称为达朗贝尔（*D'Alembert*）公式。

推论 3.9. 方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \tag{3.4.5}$$

的解为

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at) + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s \tag{3.4.6}$$

其中 F,G 是 $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ 上的任意函数。

推论 3.10. 若 $\varphi,\psi,f(\cdot,t)$ 关于 x 是以 l 为周期（或奇偶）函数，则（3.4.1）的解也是关于 x 是以 l 为周期（或奇偶）函数。

3.5 波的传播

设 $f \equiv 0$，

(1) $(x_0,t_0) \in Q$ 的决定区间 $[x_0-at_0, x_0+at_0]$

(2) 直线 $x = c \pm at$ 在 x_0 的波是沿着斜率为 $\pm\frac{1}{2a}$ 的直线传播，在沿直线上所有点的传播与 φ 一致，称 $x = c \pm at$ 为 Taylor 弦振动的特征线。

(3) 任给一个区间 $[c,d] \subset \mathbb{R}$，过 $(c,0)$ 做斜率为 $-\frac{1}{a}$ 的直线，过 $(d,0)$ 做斜率为 $\frac{1}{a}$ 的直线。$\Longrightarrow$ 无穷梯形，该梯形中任意一点的波都会受到初值在 $[c,d]$ 中值的影响。称该梯形为 $[c,d]$ 的影响区域。

例 3.11. Chaper 2-6. 试求解初值问题，

$$
\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \qquad x\in\mathbb{R}, t>ax \\ u|_{t=0}=u_0(x), u|_{t=ax}=u_1(x) \end{cases} \tag{3.5.1}
$$

其中 $a=\pm 1$。

解：设

$$
\begin{cases} \eta=t-ax \\ \xi=\lambda_1 t+\lambda_2 x \end{cases}
$$

使得 $u_{tt}-u_{xx}=u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}$。解得 $\lambda_1=a, \lambda_2=-1$。

令 $v(\eta,\xi)=u(x,y)=u(\frac{-\eta+a\xi}{1-a^2},\frac{\xi-a\eta}{1-a^2})$，

$$
\begin{aligned}
v_\xi &= u_x\frac{a}{1-a^2}+u_t\frac{1}{1-a^2} \\
v_{\xi\xi} &= u_{xx}(\frac{a}{1-a^2})^2+2u_{xt}\frac{a}{1-a^2}+u_{tt}(\frac{1}{1-a^2})^2 \\
v_{\eta\eta} &= u_{xx}(\frac{-1}{1-a^2})^2+2u_{xt}\frac{a}{1-a^2}+u_{tt}(\frac{-a}{1-a^2})^2
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow u_{tt}-u_{xx}=v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}=0
$$

所以原问题化为

$$
\begin{cases} v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}=0 \\ v(\eta,0)=u_0(-\frac{a}{1-a^2})\equiv\varphi(\eta) \\ v_\xi|_{\xi=0}=\frac{a}{1-a^2}u_0'(-\frac{a}{1-a^2})+\frac{1}{1-a^2}u_1(-\frac{a}{1-a^2})\equiv\psi(\xi) \end{cases} \tag{3.5.2}
$$

由 D'Alembert 公式

$$
v(\eta,\xi)=\frac{\varphi(\eta-\xi)+\varphi(\eta+\xi)}{2}+\frac{1}{2}\int_{\eta-\xi}^{\eta+\xi}\psi(s)\,\mathrm{d}s
$$

即

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)=v(at-x,t-ax) \\
=&\frac{1}{2}\left[\varphi((a+1)(t-x))+\varphi((a-1)(t+x))\right]+\frac{1}{2}\int_{(a-1)(t+x)}^{(a+1)(t-x)}\psi(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{3.5.3}
$$

3.6 波方程的唯一性和稳定性

$$
\begin{cases} u_{tt}-a^2\triangle u=f(x,t). \qquad x\in\mathbb{Q}:=\mathbb{R}^n\times(0,+\infty) \\ u|_{t=0}=\varphi(\Omega), u_t|_{t=0}=\psi(\Omega) \end{cases} \tag{3.6.1}
$$

3.6.1 Gronwall 不等式

.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \le Cg(t) + F(t), \qquad t \in [0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \frac{d}{dt}(e^{-ct}g(t)) \le e^{-ct}F(t) \\ & e^{-ct}g(t) \le g(0) + \int_0^t e^{-cs}F(s)\,\mathrm{d}s \\ \Longrightarrow \quad & g(t) \le e^{ct}g(0) + \int_0^t e^{c(t-s)}F(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

若 F 非减函数，

$$g(t) \le e^{ct}g(0) + (e^{ct} - 1)\frac{F(t)}{c}$$
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \le ce^{ct}g(0) + e^{ct}F(t)$$

定理 3.12. Gronwall 不等式. 若 g 在 $[0, +\infty)$ 上连续且满足

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \le Cg(t) + F(t), \qquad t \in [0, +\infty) \tag{3.6.2}$$

且 F 非减函数，则

$$g(t) \le e^{ct}g(0) + (e^{ct} - 1)\frac{F(t)}{c} \tag{3.6.3}$$
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \le ce^{ct}g(0) + e^{ct}F(t) \tag{3.6.4}$$

若 f 在 $[x_0 - r, x_0 + r]$ 中连续，则

$$\frac{d}{dr}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0 + r) - f(x_0 - r)$$

设 $n \ge 2$，$f \in \mathcal{C}(\overline{B(x_0, r)})$，

$$\frac{d}{dr}\int_{B(x_0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B(x_0,r)} f(s)\,\mathrm{d}S_x$$

由此得

$$\frac{d}{dr}\int_{B(x_0,t-ar)} f(x)\,\mathrm{d}x = -a\int_{\partial B(x_0,t-ar)} f(x)dS_x \tag{3.6.5}$$

3.6.2 能量方法

$$\mathcal{C}(x_0,t_0)=\left\{(x,t)\in\overline{Q},|x-x_0|<a(t_0-t)\right\}$$

瞬时能量:

$$E(t)=\int_{B(x_0,a(t_0-t))}u_t^2+a^2(|\nabla u|^2)\,\mathrm{d}x$$

记

$$K_\tau=\{(x,t)\in\mathcal{C}(x_0,t_0),0\le t\le\tau\}\,,\qquad(0<\tau<t_0)$$

$$\hat{E}(\tau)=\int_0^\tau E(t)\,\mathrm{d}t$$

显然 $\frac{d\hat{E}}{d\tau}=E(\tau)$。

定理 3.13. 设 $u\in\mathcal{C}^1(\overline{Q})\cap\mathcal{C}^2(Q)$ 满足方程（3.6.1），则 $\forall(x_0,t_0)\in Q,\forall 0<\tau<t_0$，均有

$$\max\left\{E(\tau),\hat{E}(\tau)\right\}\le e^\tau\left[\int_{B(x_0,at_0)}(\psi^2+a^2|\nabla u|^2)\,\mathrm{d}x+\int_{K_\tau}f^2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right]\tag{3.6.6}$$

证明. 在（3.6.1）两边同乘 u_t，$\forall 0<\tau<t_0$，

$$u_{tt}u_t-a^2\triangle u\ u_t=u_tf,\qquad\text{in }K_\tau$$

两边积分

$$\int_{K_\tau}u_{tt}u_t-\int_{K_\tau}a^2\triangle u\ u_t=\int_{K_\tau}u_tf$$

左边第一项:

$$\begin{aligned}\int_{K_\tau}u_{tt}u_t&=\int_0^\tau\left(\int_{B(x_0,a(t_0-t))}\frac{d}{dt}\frac{u_t^2}{2}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\tau\left(\frac{d}{dt}\int_{B(x_0,a(t_0-t))}\frac{u_t^2}{2}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t+a\int_0^\tau\int_{\partial B(x_0,a(t_0-t))}\frac{u_t^2}{2}\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t\\&=\int_{B(x_0,a(t_0-\tau))}\frac{u_t^2}{2}\,\mathrm{d}x-\int_{B(x_0,at_0)}\frac{\psi^2}{2}\,\mathrm{d}x+a\int_0^\tau\int_{\partial B(x_0,a(t_0-t))}\frac{u_t^2}{2}\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因为

$$\triangle u=div(\nabla u)$$

$$\nabla u\nabla u_t+u_t\triangle u=div(\nabla u\ u_t)$$

因此左边第二项

$$
\begin{aligned}
-\int_{K_\tau} a^2 \triangle u\ u_t &= -a^2 \int_0^\tau \left(\int_{B(x_0,a(t_0-t)} \triangle u\ u_t \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\
&= -a^2 \int_0^\tau \mathrm{d}t \left(\int_{B(x_0,a(t_0-t))} div(\nabla u\ u_t) \,\mathrm{d}x - \int_{B(x_0,a(t_0-t))} \nabla u \nabla u_t \,\mathrm{d}x \right) \quad \text{(变限积分求导)} \\
&= -a^2 \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_{\partial B(x_0,a(t_0-t))} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u_t \,\mathrm{d}S_x + a^2 \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_{B(x_0,a(t_0-t)} \frac{d}{dt} \frac{|\nabla u|^2}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= -a^2 \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_{\partial B(x_0,a(t_0-t))} \nabla u\ \vec{n}\ u_t \,\mathrm{d}S_x + \int_{B(x_0,a(t_0-\tau))} a^2 \frac{|\nabla u|^2}{2} \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{B(x_0,at_0)} a^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} \,\mathrm{d}x + a^3 \int_0^\tau \int_{\partial B(x_0,a(t_0-t))} \frac{|\nabla u|^2}{2} \,\mathrm{d}S_x
\end{aligned}
$$

因为

$$
|\nabla u\ \vec{n}\ u_t| \le \frac{a}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2a} |u_t \vec{n}|^2
$$

代入原式，根据 $2ab \le a^2 + b^2$

$$
\begin{aligned}
E(\tau) &\le E(0) + \int_{K_\tau} f u_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le E(0) + \int_{K_\tau} \frac{f^2}{2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{K_\tau} \frac{u_t^2}{2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\therefore\ \frac{d\hat{E}(\tau)}{dt} &\le E(0) + \int_{K_\tau} \frac{f^2}{2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \hat{E}(\tau)
\end{aligned}
$$

令 $F = E(0) + \int_{K_\tau} \frac{f^2}{2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$，由 Gronwall 不等式

$$
\hat{E}(\tau) \le (e^\tau - 1) F(\tau) \tag{3.6.7}
$$

$$
E(\tau) \le e^\tau F(\tau) \tag{3.6.8}
$$

□

推论 3.14. 问题（3.6.1）的解在 $\mathcal{C}^1(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$ 中只有一个解，且解是稳定的。

3.7 半无界问题的解法

$Q_h = (0,+\infty) \times (0,+\infty), \overline{Q_h} = [0,+\infty) \times [0,+\infty),$

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & (x,t) \in Q_h \\
u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & x > 0 \\
u_x|_{x=0} = g(t), t > 0 & (\text{or } u|_{x=0} = g(t))
\end{cases} \tag{3.7.1}
$$

若 $u|_{x=0} = 0$，做奇延拓；若 $u_x|_{x=0} = 0$，做偶延拓。

解法

(1) 化为齐次边界条件

令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, s.t.

$$v_x|_{x=0} = 0 \Longleftrightarrow w_x|_{x=0} = g(t)$$

选择 $w(x,t) = +xg(t)(+f(t))$。

(2) 问题化为

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) - xg''(t) := f_1(x,t) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - xg(0) := \varphi_1(x), v_t|_{t=0} = \psi(x) - xg'(x) := \psi_1(x) \\ v_x|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{3.7.2}$$

(3) 将 f_1, φ_1, ψ_1 关于 x 做偶延拓。

(4) 解出（3.7.2），利用 D'Alebermt 公式。

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{\varphi}_1(x+at) + \hat{\varphi}_1(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \hat{\psi}_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-a(t-\xi)}^{x+a(t-\xi)} \hat{f}_1(s,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s$$

(5) 将 $u(x,t) = v(x,t) + xg(t)$ 限制在 Q_h 上，就得到（3.7.1）的解。

a) 当 $x \geq at$ 时，

$$u(x,t) = xg(t) + \frac{1}{2}\left(\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \cdots$$

b) $x < at$ 时，$\varphi_1(x-at) \longrightarrow \varphi_1(at-x)$，积分变成两部分。

(6) 相容性条件（在 0 点处有两个方向和条件，解的过程中无体现）：要求 $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_h}), \varphi'(0) = g(0), g'(0) = \psi'(0)$，

$$\begin{cases} u_{tx} = \psi'(x), u_{xt} = g'(t), u_x = \varphi'(x) \\ u_{xtt} - a^2 u_{xxx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \\ g''(0) - a^2\varphi'''(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad u \in \mathcal{C}^3 \end{cases} \tag{3.7.3}$$

定理 3.15. 设 $g, \psi \in \mathcal{C}^2[0,+\infty), \varphi \in \mathcal{C}^3[0,+\infty), f \in \mathcal{C}^1(\overline{Q_h})$，且满足相容性条件（3.7.3），则问题（3.7.1）存在唯一解 $\in \mathcal{C}^2(\overline{Q_h})$，$u(x,t) = v(x,t) + xg(t)$。

证明. (1) 验证

(2) 唯一性，Cauchy 问题有唯一性，但因为中间有奇偶延拓，不能说明延拓前解的唯一，完全类似定理（3.13）。

□

3.8 高维波动方程的解法

$\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$，

$$\begin{aligned}
u(x) &= \lim_{r\to 0^+} \int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{r\to 0^+} \int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y \frac{1}{|B(x,r)|} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|\partial B(x,r|} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S_y := I(x,r,u)
\end{aligned}$$

先求 $f(r) = I(x,r,u)$ 的表达式，再令 $r \to 0^+$，得到 $u(x)$。

3.8.1 球面平均法，$n = 3$ 为例

（适合所有 $n \geq 1$）

以 $n = 3$ 为例子，任取 $x \in \mathbb{R}^3, F \in \mathcal{C}^2(R^3)$，记 $I(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} F(y)\,\mathrm{d}S_y$，则有

$$\triangle_x(rI(r)) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rI(r)), \forall r > 0$$

下面我们来证明这个结论：

$$\begin{aligned}
r^2 I(r) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,r)} F(x+z)\,\mathrm{d}S_z \qquad (z = y - x) \\
&\xrightarrow{\text{对}r\text{积分}} \int_0^r S^2 I(S)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi}\int_{B(0,r)} F(x+z)\,\mathrm{d}z \\
&\xrightarrow{\text{对}x\text{求 Laplace}} \triangle_x \int_0^r S^2 I(S)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi}\int_{B(0,r)} \triangle_x F(x+z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_x \int_0^r S^2 I(S)\,\mathrm{d}S =& \frac{1}{4\pi}\int_{B(0,r)} \triangle_z F(x+z)\,\mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_{B(0,r)} \mathrm{div}_z \nabla_z F(x+z)\,\mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,r)} \nabla_z F(x+z)\vec{n}\,\mathrm{d}S_z \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,r)} \nabla_z F(x+z)\frac{\vec{z}}{|z|}\,\mathrm{d}S_z \\
\xlongequal{z=ry}& \frac{r^2}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \nabla_z F(x+ry)\frac{\vec{y}}{|1|}\,\mathrm{d}S_y, \quad (dS_z = r^2 dS_y) \\
=& \frac{r^2}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial}{\partial r} F(x+ry)\,\mathrm{d}S_y \\
=& r^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} F(x+ry)\,\mathrm{d}S_y \\
\xlongequal{z=x+ry}& r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} F(z)\,\mathrm{d}S_z\right) \\
=& r^2 \frac{\partial}{\partial r} I(r)
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \triangle_x r^2 I(r) \xlongequal{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} I(r)\right) = 2r\frac{\partial}{\partial r}I(r) + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}I(r)$$

$$\triangle_x r(I(r)) = 2\frac{\partial}{\partial r}I(r) + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}I(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(I(r)r)$$

则有

$$\triangle_x(rI(r)) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(I(r)r), \qquad \forall r > 0$$

考虑

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\triangle u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & t > 0 \end{cases} \tag{3.8.1}$$

由 Duhamel，可以设 $f, \varphi \equiv 0$，记 $I(r,t,x) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,\mathrm{d}y$，令 $w(x,t,r) = rI(x,r,t)$，

$$\begin{aligned} a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}w(x,t,r) =& a^2\triangle_x w(x,r,t) \\ =& a^2 r\triangle_x I(x,t,r) \\ =& \frac{a^2 r}{4\pi r^2}\triangle_x\int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,\mathrm{d}S_y \\ \xlongequal{y=x+z}& \frac{a^2 r}{4\pi r^2}\triangle_x\int_{\partial B(0,r)} u(x+z,t)\,\mathrm{d}S_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \ a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}w(x,t,r) =& \frac{a^2 r}{4\pi r^2}\int_{\partial B(0,r)} \triangle_x u(x+z,t)\,\mathrm{d}S_z \\ =& \frac{1}{4\pi r}\int_{\partial B(0,r)} u_{tt}\,\mathrm{d}S_z \\ =& [rI(x,t,r)]_{tt} = w_{tt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_{tt} - a^2 w_{rr} = 0$$

对问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\triangle u = f, & \text{in } \mathbb{R}^n \times^+ (0,+\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi, u_t|_{t=0} = \psi \end{cases} \tag{3.8.2}$$

只要求

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2\triangle v = 0 \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = \psi \end{cases} \tag{3.8.3}$$

令 $w(x,r,t)=rI(x,r,v(x,t))$，则 $t>0,r>0$，

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{rr}=0 \\ w|_{t=0}=0 \\ w_t|_{t=0}=rI(x,r,\psi) \\ w_{r=0}=\lim\limits_{r\to0+}u(x,r,v(\cdot,t))=\lim\limits_{r\to0+}\frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{\partial B(x,r)}v(r,t)\,\mathrm{d}S_y=0 \end{cases} \tag{3.8.4}$$

因此

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{rr}=0, \quad r>0,t>0 \\ w|_{t=0}=0, w_t|_{t=0}=rI(x,r,\psi) \\ w|_{r=0}=0 \end{cases} \tag{3.8.5}$$

由定理（3.15），对于半无界问题（3.8.5），因为 $r\to0^+$，可以认为 $0\le r\le at$:

$$\begin{aligned} w(x,r,t)&=\frac{1}{2a}\int_{at-r}^{at+r}\xi I(x,\xi,\psi)\,\mathrm{d}\xi \\ \therefore\quad v(x,t)&=\lim_{r\to0^+}I(x,r,v(\cdot,t)) \\ &=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{a}\frac{1}{2r}\int_{at-r}^{at+r}\xi I(x,\xi,\psi)\,\mathrm{d}\xi \\ &=\frac{1}{a}\xi I(x,\xi,\psi)\Big|_{\xi=at}=tI(x,at,\psi) \\ &=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{\partial B(x,at)}\psi(y)\,\mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

由 Duhamel 原理，问题（3.8.2）的解为

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{\partial B(x,at)}\varphi(y)\,\mathrm{d}S_y\right)+\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{\partial B(x,at)}\psi(y)\,\mathrm{d}S_y \\ &+\int_0^t\left(\frac{1}{4\pi a^2(t-s)}\iint\limits_{\partial B(x,a(t-s))}f(y,s)\,\mathrm{d}S_y\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.8.6}$$

3.8.2 降维法，以 $n=2$ 为例

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x,y) \end{cases} \tag{3.8.7}$$

令 $\overline{u}(x,y,z,t)=u(x,y,t)$，得到

$$\begin{cases} \overline{u}_{tt}-a^2(\overline{u}_{xx}+\overline{u}_{yy}+\overline{u}_{zz})=\overline{f} \\ \overline{u}|_{t=0}=\overline{\varphi},\quad \overline{u}_t|_{t=0}=\overline{\psi} \end{cases} \tag{3.8.8}$$

由（3.8.6）得到

$$\overline{u}(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(x,,y,z,at)}\overline{\varphi}(x_1,y_1,z_1)\,\mathrm{d}S_\xi\right)+\cdots \tag{3.8.9}$$

其中在上半球面上

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{r}{\sqrt{r^2-(x-x_1)^2)-(y-y_1)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因此

$$\iint\limits_{\partial B(x,y,z,r)}F(x,y)\,\mathrm{d}S_{xy}=2\iint\limits_{\Sigma(x,y,r)}F(x,y)\,\mathrm{d}S_{xy}=2\iint\limits_{\Sigma(x,y,r)}\frac{F(x,y)r}{\sqrt{r^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\left(\text{对 } z=\sqrt{r^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}\text{ 求导}\right)$$

因此问题（3.8.7）的解为

$$\begin{aligned}u(x,y,t)=&\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{\Sigma(at)}\frac{\varphi(x_1,y_1)}{\sqrt{(at)^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\right)\\&+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma(at)}\frac{\psi(x_1,y_1)}{\sqrt{(at)^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\\&+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left(\iint\limits_{\Sigma(a(t-s)}\frac{f(x_1,y_1,s)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\right)\,\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{3.8.10}$$

where

$$\Sigma(at)=\left\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2\middle||x_1-x|^2+|y_1-y|^2<(at)^2\right\}$$

定理 3.16. 设 $n=3$ 或 $n=2$，$\varphi\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^\varkappa),\psi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^\varkappa),f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\times[0,+\infty))$，则由（3.8.6）和（3.8.10）给出的 $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty))\cap\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\times[0,+\infty))$，且分别满足（3.8.2）和（3.8.7）。

3.9 Sturm-Liouville 问题

3.9.1 问题的提出

设 $k,p>0,q\geq 0$，$k\in\mathcal{C}^1[0,+\infty),p,q\in\mathcal{C}[a,b]$，求函数 $y(x)$ 和常数 λ，使得

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda p(x)y-q(x)y=0\\(-\alpha_1y'+\alpha_2y)\Big|_{x=a}=0,\quad(\beta_1y'+\beta_2y)\Big|_{x=b}=0\end{cases}\tag{3.9.1}$$

其中 α,β 是非负常数，$\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0,\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$。

3.9.2 有解 λ 的必要条件

定义 3.17. 若 (y,λ) 满足（3.9.1），且 y 不恒为 0，则称 λ 为（3.9.1）的一个**特征值**，y 为与 λ 对应的**特征函数**。

3.9.3 一些结论

(a) $\lambda \geq 0$，且若 $q(x)>0$，或者 $\alpha_2+\beta_2>0$，则 $\lambda>0$。特征值非负

将（3.9.1）同乘 y，再在 $[a,b]$ 上积分，由分部积分得

$$
\begin{aligned}
&ky'y\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b ky'^2 \,\mathrm{d}x + \int_a^b (\lambda p(x)-q(x))\, y^2 = 0 \\
\Longrightarrow &\lambda = \frac{1}{\int_a^b py^2 \,\mathrm{d}x}\left(\int_a^b (ky'^2+qy^2)\,\mathrm{d}x - ky'y\Big|_{x=b} + ky'y\Big|_{x=a}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\because \quad & \beta_1 y'(b) - \beta_2 y(b) = 0 \\
& \begin{cases} \beta_1 y'(b)y(b) - \beta_2 y^2(b) = 0 \\ \beta_2 y'(b)y(b) + \beta_1 y'^2(b) = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & y'(b)y(b) = -\frac{\beta_2 y^2(b) + \beta_1 y'^2(b)}{\beta_1+\beta_2} \leq 0
\end{aligned}
$$

且当 $q(x)>0$ 或者 $\beta_2+\alpha_2>0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda>0$

(b) 若 (y_i,λ_i) 是问题（3.9.1）的解，$(i=1,2)$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，特征函数正交：

$$
\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy_1}{dx}\right) + (\lambda_1 p(x) - q(x))y_1 = 0 \tag{3.9.2}
$$

$$
\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy_1}{dx}\right) y_2 + (\lambda_1 p(x) - q(x))y_1 y_2 = 0 \tag{3.9.3}
$$

Therefore,

$$
\begin{aligned}
&k(x)y_1'y_2\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left(k(x)y_1'y_2' + (\lambda_1 p - q)y_1y_2\right)\,\mathrm{d}x = 0 \\
\Rightarrow \quad & ky_1'y_2|_{x=b} - ky_1'y_2|_{x=a} + \lambda_1\int_a^b p(x)y_1y_2\,\mathrm{d}x - \int_a^b q(x)y_1y_2\,\mathrm{d}x - \int_a^b k(x)y_1'y_2' = 0
\end{aligned}
$$

对 y_1, y_2 互换位置，得到

$$
ky_2'y_1|_{x=b} - ky_2'y_1|_{x=a} + \lambda_2\int_a^b p(x)y_1y_2\,\mathrm{d}x - \int_a^b q(x)y_1y_2\,\mathrm{d}x - \int_a^b k(x)y_1'y_2' = 0
$$

上两式相减得到

$$
(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x = 0
$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以

$$
\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{正交}
$$

3.9.4 定理（3.18）

定理 3.18. 问题（3.9.1）有如下性质：

(i) 所有特征值 $\lambda \geq 0$，且当 $q(x)=0$ 或者 $\alpha_2+\beta_2>0$ 时，$\lambda>0$；

(ii) 不同特征值 $\lambda_i, i=1,2$ 对应的特征函数 $y_i(x), i=1,2$ 正交，i.e. 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则

$$\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.9.4}$$

(iii) 所有特征值构成可数集，按照大小排列为 $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$；

(iv) 若 $f \in L^2[a,b] = \left\{ f : \int_a^b f^2\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}$，

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_n X_n(x)$$

where

$$C_k = \frac{\int_a^b p(x)f(x)X_k(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)X_k^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

$X_n(x)$ 是 λ_n 对应的特征子空间的正交基，则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (f(x)-f_n(x))^2\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{平方收敛} \tag{3.9.5}$$

(v) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，且 $f^-(b)=f^+(a)$，则级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$ 绝对一致收敛。

证明. (iii)(v) 的证明，见彼得罗夫斯基《偏微分方程》，萧树铁等译。 □

注：如果问题（3.9.1）中边界条件换位 $y\Big|_{x=a} = y\Big|_{x=b}$，或者 $-\infty < y\Big|_{x=a}, y\Big|_{x=b} < +\infty$，以上定理也正确。

例 3.19. 习题 2-22(5). 求解特征值问题 $y''+\lambda y=0, 0<x<l, y'(0)=y'(l)+hy(l)=0(h>0)$.

解： 由定理（3.18），我们知道 $\lambda>0$。再由方程 ODE 对应的特征方程，$t^2+\lambda=0$。不妨设 $\lambda=\beta^2, \beta>0, \Rightarrow\ t=\pm\beta i$。

ODE 的解，$A\cos\beta x + B\sin\beta x$，再由边界条件 $B\cos\beta 0=0$ 得，$B=0$。因此，

$$-A\beta\sin\beta l + hA\cos\beta l = 0$$

$$\because A \neq 0, \tan\beta l = \frac{h}{\beta}$$

β 是方程 $\tan xl = \frac{h}{x}$ 的解，设 $\tan\beta l = \frac{h}{\beta}$ 的正解为 $\beta_1, ..., \beta_n$，则原问题解为（$\beta_i, \cos\beta_i x$）$i=1,2,...$。

3.10 初边值问题的求解

3.10.1 初边值问题

Fourier 方法，分离变量

(1) 齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}+cu=0, & 0<x<l, c\geq 0 \\ u(0,t)=u_x(l,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t\Big|_{t=0}=\psi(x), & 0\leq x\leq l \end{cases} \tag{3.10.1}$$

Step 1: 变量分离。

令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入（3.10.1），得到

$$T''X-a^2X''T+cTX=0$$
$$\frac{T''}{T}(t)=\frac{a^2X''-cX}{X}(x)=-\lambda$$

$$\begin{cases} T''+\lambda a^2T=0, & t>0 \\ X''+(\lambda-\frac{c}{a^2})X=0, & 0<x<l \end{cases} \tag{3.10.2}$$

$$\Rightarrow\ X(0)=0=\mathbb{X}'(l)$$

因此，

$$\begin{cases} \mathbb{X}''+(\lambda-\frac{c}{a^2})X=0, & 0<x<l \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases} \tag{3.10.3}$$

Step 2: 解 S-L 问题（3.10.3）

由定理（3.18），$\lambda-\frac{c}{a^2}>0$，设 $\lambda-\frac{c}{a^2}=\beta^2,\beta>0$

$$t^2+\beta^2=0\Rightarrow t=\pm\beta i$$

因此

$$X(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B\beta\cos\beta l=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta l=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \beta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2l} \end{cases}$$

$$\because B\neq 0, X_k(x)=\sin\beta_k x,\quad k=0,1,2,...$$

Step 3: 代入（3.10.2）

$$T_k(l)=A_k\cos\lambda_k t+B_k\sin\lambda_k t$$

求得

$$u_k(x,t)=\mathbb{X}(x)T_k(t),\quad k=0,1,2,...$$

此时已经满足（3.10.1）的前三个式子。

Step 4: （叠加）

求形如

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(x)T_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos\lambda_k t+B_k\sin\lambda_k t)\sin\beta_k(x) \tag{3.10.4}$$

的方程，满足初始条件，只需要

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\beta_k x=\varphi(x)\\ \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k B_k\sin\beta_k x=\psi(x)\end{cases}$$

只需要

$$\begin{aligned}A_k&=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\beta_k x\,\mathrm{d}x\\ B_k&=\frac{2}{\lambda_k l}\int_0^l\psi(x)\sin\beta_k x\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.10.5}$$

因此，（3.10.1）的解由（3.10.4）和（3.10.5）给出。

Step 5: 检验是解。

定理 3.20. 设 $\psi\in\mathcal{C}^3[0,l]$，$\varphi\in\mathcal{C}^2[0,l]$，且满足

$$\begin{cases}\varphi(0)=\psi(0)=\varphi''(0)=0\\ \varphi(l)=\psi'(l)=\psi'''(l)=0\end{cases} \tag{3.10.6}$$

则由（3.10.4）和（3.10.5）给出 $u\in\mathcal{C}^2[0,l]\times[0,\infty)$，且满足（3.10.1）。

注. $\forall f(x)\in L_2[0,l]$，可以按照特征函数 $\{X_n(x)\}$ 展开，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_nX_n(x)$$

$$C_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

(2) 把非齐次边界条件化为齐次

(a) $u(0,t)=q_1(t),u(l,t)=q_2(t)$。

引入辅助函数 $v(x,t)=u(x,t)+w(x,t)$，s.t.$w(0,t)=-q_1(t),w(l,t)=-q_2(t)$，

$$\Rightarrow\quad w(x,t)=-q_1(t)+\frac{q_1(t)-q_2(t)}{l}x$$

(b) $u(0,t)=q_1(t), u_x(l,t)=q_2(t)$。

令 $v(x,t)=u(x,t)+w(x,t)$，s.t. $w(0,t)=-q_1(t), w_x(l,t)=-q_2(t)$，

$$\Rightarrow \quad w(x,t)=-q_1(t)-q_2(t)x$$

(c) $u_x(0,t)=q_1(t), u_x(l,t)=q_2(t)$

令 $v(x,t)=u(x,t)+w(x,t)$，s.t. $w_x(0,t)=-q_1(t), w_x(l,t)=-q_2(t)$，用二次函数找出，即试图

$$w(x,t)=a(t)x^2+b(t)x+c(t)$$

$$\Rightarrow \quad a(t)=\frac{q_1(t)-q_2(t)}{2l}, b(t)=-q_1(t), c(t)=0$$

(d) 其他情形化为前 3 种情况

$$u_x+\alpha u=q(t)\longrightarrow (ue^{\alpha x})_x=q(t)e^{\alpha x}$$

step 1: 解对应的齐次方程对应的 S-L 问题，得到特征函数为 $\{\mathbb{X}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$（分离变量）

step 2: 令解为 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\mathbb{X}_n(x)$，则 $u(x,t)$ 仍旧满足边界条件。

为使得其满足 $\quad \Box u=f(x,t), u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x)$，将 f,φ,ψ 按照 $\{\mathbb{X}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 展开

$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\mathbb{X}_n(x), \varphi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\mathbb{X}_n(x), \psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)\mathbb{X}_n(x)$，

代入 $\{\mathbb{X}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，解出 $\mathbb{X}_n(x)$。

例 3.21. 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+u=A, & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=-A, u_x(l,t)=0, & t>0 \\ u\Big|_{t=0}=0, u_t\Big|_{t=0}=Bx, & 0\le x\le l \end{cases} \tag{3.10.7}$$

解：令 $v(x,t)=u(x,t)+A$，则

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}+v=2A \\ v(0,t)=v_x(l,t)=0 \\ v\Big|_{t=0}=A, v_t\Big|_{t=0}=Bx \end{cases}$$

先解齐次方程对应的 S-L 问题，将 $v(x,t)=\mathbb{X}(x)T(t)$ 代入对应的齐次方程，

$$\begin{cases} T''\mathbb{X}-\mathbb{X}''T+\mathbb{X}T=0 \\ \mathbb{X}(0)=\mathbb{X}'(l)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T''}{T} = \frac{\mathbb{X}'' - \mathbb{X}}{\mathbb{X}} = -\lambda$$

由定理（3.18），$\lambda > 0$，$\lambda_n = 1 + \beta_n^2, \beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$。令 $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\mathbb{X}_n(x)$，代入

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n(x)\left(T_n''(t) + \lambda_n T_n\right) = 2A \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n(x) T_n(0) = A \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n(x) T_n'(x) = Bx \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \begin{cases} A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbb{X}_n(x), \\ A_n = \frac{2}{l}\int_0^l A \sin\beta_n x = \frac{4A}{(2n+1)} \\ B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathbb{X}_n(x), \\ B_n = \frac{2}{l}\int_0^l B_x \sin\beta_n x = \frac{(-1)^n 2Bl}{((2n+1)\pi)^2} \end{cases}$$

比较 $\mathbb{X}_n(x)$ 的系数

$$\begin{cases} T_n'' + \lambda_n T_n = 2A_n \\ T_n(0) = A_n, T_n'(0) = B_n \end{cases}$$

对应齐次方程特征方程：$\overline{\lambda}^2 + \lambda_n \overline{\lambda} = 0$。所以齐次方程

$$\overline{T}_n = C_1 \cos\sqrt{\lambda_n} t + C_2 \sin\sqrt{\lambda_n} t$$

方程的通解为

$$T_n(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda_n} t + C_2 \sin\sqrt{\lambda_n} t + \frac{2A_n}{\lambda_n}$$

再利用初始条件解得

$$T_n(x) = (A_n - \frac{2A_n}{\lambda_n}) \cos\sqrt{\lambda_n} t + \frac{B_n}{\lambda_n} \sin\sqrt{\lambda_n} t + \frac{2A_n}{\lambda_n}$$

因此原问题的解为

$$u(x,t) = -A + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n(x) T_n(t)$$

注. 如果齐次 ODE

$$T''(t) + a_1(t)T'(t) + a_2(t)T(t) = 0 \tag{3.10.8}$$

有两个线性无关解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$，则其对应的非齐次方程的通解为

$$T(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \int_0^t \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(s)} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{3.10.9}$$

常微分方程解法见 高等微积分教程（上），清华大学出版社. *p227-p229*。

3.11 初边值问题解的唯一性

3.11.1 能量守恒

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0 \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{3.11.1}$$

同乘 u_t，在 $[0,l] \times [0,T]$ 上积分，

$$\int_0^T \int_0^l (u_{tt}u_t - a^2 u_{xx}u_t + cuu_t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\begin{aligned} \because \quad \int_0^T \int_0^l u_{tt}u_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^l \frac{u_t^2(x,T)}{2}\,\mathrm{d}x - \int_0^l \frac{u_t^2(x,0)}{2}\,\mathrm{d}x \\ \int_0^T \int_0^l uu_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^l \frac{u^2(x,T)}{2}\,\mathrm{d}x - \int_0^l \frac{u^2(x,0)}{2}\,\mathrm{d}x \\ \int_0^T \int_0^l u_{xx}u_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left(u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l u_{xt}u_x\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^l \frac{u_x^2(x,T)}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{u_x^2(x,0)}{2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$(u_t\Big|_{x=0} = 0, u(0,t) = 0)$

令 $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(cu^2 + a^2u_x^2 + u_t^2\right)(x,t)\,\mathrm{d}x \Rightarrow E(T) = E(0), \forall T$，能量守恒。

引理 3.22. 设 $Q_T = [0,l] \times [0,T], V \in \mathcal{C}^2(Q_T)$ 满足

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} + cV = 0, \quad \mathrm{in} Q_T \tag{3.11.2}$$

$V(0,t) = V(l,t) = 0$ 或者 $V_x(0,t) = V_x(l,t) = 0$ 或者 $V_(0,t) = V_x(l,t) = 0$ 或者周期，则 $\forall t \in [0,T]$，均有 $E(t) = E(0)$，where

$$= 0E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(V_t^2 + a^2V_x^2 + cV^2\right)(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{3.11.3}$$

推论 3.23. 问题（3.11.1）如果将齐次换为 $f, q_1(t), q_2(t)$，其在 $\mathcal{C}^2\left([0.l] \times [0,+\infty)\right)$ 上的解是唯一的。

3.11.2 能量方法

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\triangle u + \sum b^i(x,t)u_{xi} + c(x)u = f(x,t), \quad \text{in } \Omega \times (0,t) \\ \alpha(x)u + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \partial\Omega \times (0,t) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{3.11.4}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界开，$\partial\Omega$ 分片属于 $\mathcal{C}^1$，$f, b^i, c, \alpha, \beta, \varphi, \psi$ 是已知函数。

设 $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0,T)) \cap \mathcal{C}^2(\Omega \times (0,T)), \forall 0 < s < T$，在两边同时乘 u_t，并在 $\Omega \times (0,s)$ 上积分。

$$\int_0^s \int_\Omega (u_{tt}u_t - a^2 \triangle u u_t + cuu_t) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_0^s \int_\Omega f u_t - \sum b^i u_{xi} u_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$

$$① = \int_0^s \int_\Omega u_{tt}u_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2(x,s) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x$$

$$\because \quad u_{tt}u_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2$$

$$② = -\int_0^s \int_\Omega a^2 \triangle u u_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = -a^2 \int_0^s \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \frac{a^2}{2} \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \,\mathrm{d}x$$

$$\because \quad \triangle u u_t = \mathrm{div}(\nabla u) u_t, \;\; \mathrm{div}(u_t \nabla u) = \mathrm{div}(\nabla u) u_t + \nabla u_t \cdot \nabla u$$

$$③ = \int_0^s \int_\Omega cuu_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} c \int_\Omega u^2(x,s) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} c \int_\Omega \varphi^2 \,\mathrm{d}x$$

因为 $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$，设

$$\Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega, \alpha(x) \neq 0\}$$
$$\Gamma_2 = \partial\Omega \backslash \Gamma_1$$

则 $\beta = 0$ on Γ_2，所以

$$\begin{aligned} ④ = -a^2 \int_0^s \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t &= -a^2 \int_0^s \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_t \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + a^2 \int_0^s \int_{\Gamma_2} u_t \left(\frac{\alpha}{\beta} u \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)^2 (x,s) \,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)^2 \mathrm{d}x \\ &+ \frac{a^2}{2} \int_{\Gamma_2} u^2(x,s) \frac{\alpha}{\beta} \,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{2} \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{\beta} \varphi^2 \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

设 $\alpha, \beta \geq 0$，则 ④ $\geq -c_1(\varphi)$，其中

$$c_1(\varphi) = \frac{a^2}{2} \left[\int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{\beta} \varphi^2 \,\mathrm{d}x \right]$$

再考虑右端

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_\Omega f u_t - \sum b^i u_{xi} u_t \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t &\leq \frac{1}{2} \int_0^s \int_\Omega u_t^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^s \int_\Omega f^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^s \int_\Omega u_t^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + c_2 \int_0^s \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

where $c_2 = (\sum_i \max \|b^i\|)^2$。

令 $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^s \int_\Omega u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2 + cu^2 \,\mathrm{d}x$，

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} E(t) \leq E(0) + c_1(\varphi) + \hat{c}_2 E(t) + \frac{1}{2} \int_0^s \int_\Omega f^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$

where

$$\hat{c}_2 = \begin{cases} 2, & c_2 \le a^2 \\ \max\{2, a^2\}, & c_2 > a^2 \end{cases}$$

所以

$$\frac{d}{dt}E(s) \le \hat{c}_2 E(s) + F(s)$$

where

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \hat{E}(0), \qquad \hat{E}(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\psi|^2 + c\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2\right)\,\mathrm{d}x$$

由 Gronwell 不等式，

$$\begin{aligned} E(s) &\le \hat{c}_2^{-1}\left(e^{\hat{c}_2 s - 1}\right)F(s), \quad \forall 0 < s < T \\ \Longrightarrow \quad \frac{d}{ds}E(s) &\le \hat{c}_2^{-1}\left(e^{\hat{c}_2 s - 1}\right)e^{\hat{c}_2 s}F(s) \end{aligned}$$

定理 3.24. 设 $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \times (0,T)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times (0,T))$ 是（3.11.4）的解，$\alpha(x), \beta(x), b^i(x,t)$ 是有界函数，且 $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0$，则 $\forall S \in (s,T)$ 均有

$$\int_\Omega \left[u_t^2(x,s) + a^2\left|\nabla u(x,s)\right|^2 + c(x)u^2(x,t)\right]\,\mathrm{d}s \le e^{\hat{c}_2 T}\left(\int_0^s \int_\Omega f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) + c_1(f) \\ + \int_\Omega \left(\psi^2 + a^2|\nabla\varphi|^2 + c(x)\varphi^2\,\mathrm{d}x\right) \tag{3.11.5}$$

where

$$c_1(\varphi) = a^2\left[\int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{\beta}\varphi^2\,\mathrm{d}S_x + \int_{\Gamma_1} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)^2\,\mathrm{d}S_x\right] \tag{3.11.6}$$

推论 3.25. 问题（3.11.4）在 $\mathcal{C}^2(\Omega \times [0,T)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ 中的解是唯一的。

3.12 广义解

3.12.1 广义（弱）导数

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ 称为多重指标，如果 α_i 是非负指数，记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$，

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = v, \text{ in } \Omega \Leftrightarrow \ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$

定义 3.26. 若 $u, v \in L^1_\alpha(\Omega)$，有

$$\int_\Omega v\varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{3.12.1}$$

则称 v 是 u 的 $|\alpha|$ 阶弱导数，记为 $v = D^\alpha u$。

(1) 基本性质

(i) 若 $D^\alpha u_i = v_i$，

$$\int_\Omega v\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (uv)D^\alpha\varphi$$

(ii)

$$\int v_i\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_iD^\alpha\varphi, \quad \varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

(iii) $v=\psi\in\Omega \Longrightarrow \varphi\psi\in\mathcal{C}_0^\infty$，

$$D(uv) = vDu + uDv$$

(2) 求法

求 $D^\alpha u \Leftrightarrow F\,\mathrm{d}V$ s.t.

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x$$

例 3.27. 求 $\mathbb{R}^n$ 中的函数 $u(x)=|x|^{-r}$ 的弱导数，$\frac{\partial u}{\partial x}, r\le n-1$。

解. $\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，令 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n.\varphi(x)\neq 0\}$，则

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |x|^{-r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega\backslash B_\epsilon(0)}|x|^{-r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\partial B_\epsilon(0)}\left(|x|^{-r}\varphi\right)(\vec{n}\vec{e}_i) - \int_{\Omega\backslash B_\epsilon(0)}\varphi\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{-r}\right) \quad \text{(分部积分)} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} - \int_{\Omega\backslash B_\epsilon(0)}\varphi\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{-r} \quad \text{(球面对称性)} \\
&= -\int_\Omega \varphi\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{-r}
\end{aligned}$$

所以可以解得

$$V = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{-r}, & x\neq 0 \\ \text{any value}, & x = 0 \end{cases} \tag{3.12.2}$$

3.12.2 广义解举例

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} + cu = f(x,t), \quad 0<x<l, t>0 \\ u(0,t) = q_1(t), u_x(l,t) = q_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{3.12.3}$$

对 $\forall T>0, \forall \xi \in \mathcal{C}^2(\overline{Q}_T)$, 将问题（3.12.3）的两边同时乘 ξ 并在 Q_T 上积分，

$$\int_{Q_T} [u_{tt} - a^2 u_{xx}]\xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{Q_T} cu\xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{Q_T} f\xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
① &= \int_{Q_T} [u_{tt} - a^2 u_{xx}]\xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^l u_t\xi\Big|_{t>0}^{T} \mathrm{d}x - \int_0^l \mathrm{d}x \int_0^T u_t\xi_t \,\mathrm{d}t - a^2 \int_0^T \mathrm{d}t u_x\xi\Big|_{x=0}^{l} + a^2 \int_0^T \mathrm{d}t \int_{)}^{l} u_x\xi_x \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^l \psi(x)\xi(x,0)\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^T q_2(t)\xi(l,t)\,\mathrm{d}t - \int_{Q_T} \left(u_t\xi_t - a^2 u_x\xi_x\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad (u \in \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)) \\
&= -\int_0^l \psi(x)\xi(x,0)\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^T q_2(t)\xi(l,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^l d\,\mathrm{d}tu\xi_t\Big|_{t=0}^{T} + \int_{Q_T} u\xi_{tt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad + a^2\int_0^T \mathrm{d}tu\xi_x\Big|_{x=0}^{l} - a^2\int_{Q_T} u\xi_{xx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^l \psi(x)\xi(x,0)\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^T q_2(t)\xi(l,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^T \varphi(x)\xi_t(x,0)\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^T q_1(t)\xi_x(0,t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{Q_T} u(\xi_{tt} - a^2\xi_{xx})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

令 $D(Q_T) = \left\{\xi \in \mathcal{C}^2(\overline{Q}_T) : \xi(x,T) = \xi_t(x,T) = \xi(0,t) = \xi_x(l,t) = 0, \forall (x,t) \in \overline{Q}_T\right\}$，令

$$I(\xi) = -\int_0^l \psi(x)\xi(x,0)\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^T q_2(t)\xi(l,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^T \varphi(x)\xi_t(x,0)\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^T q_1(t)\xi_x(0,t)\,\mathrm{d}t$$

(1) 定义

定义 3.28. 广义解.

对 $\forall T>0$，如果 $u \in \mathcal{C}(\overline{Q}_T)$ 满足

$$\int_{Q_T} \xi\left(u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + I(\xi) = \int_{Q_T} f\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad \forall \xi \in D(\overline{Q}_T) \tag{3.12.4}$$

则称 u 为问题（3.12.3）的广义解。(线性泛函的表示定理)

(2) 古典解是广义解

(3) 广义解是否唯一?

设（3.12.3）有两个广义解，u_1, u_2，令 $v = u_1 - u_2$，则

$$\int_{Q_T} v(\xi_{tt} - a^2\xi_{xx} + c\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + I(\xi) = 0, \quad \forall T>0, \forall \xi \in D(\overline{Q_T})$$

因此，$v=0$。$\forall g \in \mathcal{C}_0^\infty(Q_T)$，只需要找到 $\xi \in D(Q_T)$，s.t.

$$\begin{cases}
\xi_{tt} - a^2\xi_{xx} + c\xi = g, & \text{in } Q_T \\
\xi(0,t) = \xi_x(l,t) = 0 \\
\xi(x,T) = \xi_t(x,T) = 0
\end{cases}$$

令 $\tau \to T-t$，

$$\begin{cases} \xi_{tt} - a^2\xi_{xx} + c\xi = g, \quad \text{in } Q_T \\ \xi(0,t) = \xi_x(l,t) = 0 \\ \xi(x,0) = \xi_\tau(x,0) = 0, \quad g \in \mathcal{C}_0^\infty(Q_T) \end{cases}$$

因此，解存在。$\xi \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$

4 热方程

4.1 Fourier 变换

4.1.1 定义

定义 4.1. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则称

$$\hat{f}(x) = \mathcal{F}(f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ixy} \, \mathrm{d}y \tag{4.1.1}$$

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ixy} \, \mathrm{d}y \tag{4.1.2}$$

分别为 f 的 Fourier 变换和 Fourier 逆变换。

注.

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

$$|e^{-ixy}| = |e^{ixy}| = 1$$

由上述，$\hat{f}, \check{f}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上有定义。

问题：$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，如何定义 $\hat{f}$?

定理 4.2. Plancherel. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$，则有

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{4.1.3}$$

证明. 见 Evans.L.C. §4.3，（思路见反演公式。） □

推荐：E.M.Stein & Weiss. Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Space. Princeton University Press. 1975.

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，取 $\{f_k\} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$，s.t.

$$\begin{aligned} & \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \ (k \to 0) \\ \Longrightarrow \quad & \{f_k\} \text{ 是 } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ 中的基本列} \\ \Longrightarrow \quad & \{\hat{f}_k\}, \{\check{f}_k\} \text{ 是 } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ 中的基本列} \end{aligned}$$

定义 4.3.

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(x) \\ \check{f}(x) &= \lim_{k\to\infty} \check{f}_k(x) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

由定理（4.2）知，该极限与 f_k 选取无关。

4.1.2 性质

(1) 线性性质：若 $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$（或 $L^1(\mathbb{R}^n)$），$\lambda_i \in \mathcal{C}$。则

$$(\lambda_1 \widehat{f_1 + \lambda}_2 f_2) = \lambda_1 \hat{f}_1 + \lambda_2 \hat{f}_2, \quad \text{逆变换也成立} \tag{4.1.5}$$

(2) 导数性质：$f, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$（或 $L^2(\mathbb{R}^n)$），则

$$\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(y) = i y_j \hat{f}(y) \tag{4.1.6}$$

(3) 乘积性质：$f(x), f(x)x_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \hat{f}(y) = -i[\widehat{x_j f(x)}](y) \tag{4.1.7}$$

以及推论：

$$(\widehat{x_j^m f(x)})(y) = i^m \frac{\partial^m}{\partial y_j^m} \hat{f}(y) \tag{4.1.8}$$

(4) 平移性质：$a \in \mathbb{R}^n$，$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 或 $L^1(\mathbb{R}^n)$，

$$[f\widehat{(x-a)}](y) = e^{-iay} \hat{f}(y) \tag{4.1.9}$$

(5) 伸缩变换：$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$，$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 或 $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$[\widehat{f(kx)}](y) = \frac{1}{|k|^n} [\widehat{f(x)}](\frac{y}{k}) \tag{4.1.10}$$

(6) 对称性质：

$$(\check{\hat{f}}(x))(y) = \hat{f}(y) = (\check{f}(-x))(y) \tag{4.1.11}$$

(7) 变量分离：若 $f(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$，且 $f_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 或 $L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\hat{f}(x) = \prod_{j=1}^n \hat{f}_j(x_j) \tag{4.1.12}$$

(8) 卷积性质：$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，定义其卷积

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

则 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，且

$$\widehat{[f * g]} = \hat{f} \cdot \hat{g} \cdot (2\pi)^{n/2} \tag{4.1.13}$$

证明. (2)

先设 $f, \frac{\partial f}{\partial y_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $\exists r_k \to \infty$，s.t.

$$\int_{\partial B_{r_k}(0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y_j} \right| \to 0$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-n/2} \lim_{r_k\to\infty} \int_{\partial B_{r_k}(0)} \frac{\partial f}{\partial y_j}(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\lim_{r_k\to\infty} iy_j \int_{\partial B_{r_k}(0)} f(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_j} \hat{f}(y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(f(x) e^{-ixy} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) f(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x \\
&= -i[\widehat{x_j f(x)}](y)
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| \, \mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, \mathrm{d}x \leq +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\widehat{f * g}](x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g) e^{-ixy} \, \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \, \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) g(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(z) \, \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) e^{-ixy} \, \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(z) \, \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^n} f(Y) e^{-ix(Y+z)} \, \mathrm{d}Y \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{-ixz} \, \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^n} f(Y) e^{-ixY} \, \mathrm{d}Y \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \hat{f}(x) \hat{g}(x)
\end{aligned}$$

$\square$

定理 4.4. 反演公式. 若 $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$，$\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $u(x) = \check{\hat{u}}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$。

例 4.5. 设 $A, B > 0$, 求 $\left(\widehat{e^{-A|x|^2}}\right)$ 和 $\left(\widehat{e^{-B|x|^2}}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{e^{-A|x|^2}}\right) &= \left(\widehat{e^{-|x|^2}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{A}}\right)\left(\frac{1}{A}\right)^{n/2} \quad \text{(伸缩)} \\
&= A^{-n/2}\prod_{j=1}^{n}\left(\widehat{e^{-x_j^2}}\right)\frac{y_j}{\sqrt{A}} \quad \text{(变量分离)} \\
&= A^{-n/2}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{y_j}{\sqrt{A}}x_j} e^{-x_j^2}\,\mathrm{d}x_j\right) \\
&= (2\pi A)^{-n/2}\prod_{j=1}^{n} I\left(-\frac{y_j}{\sqrt{A}}, 1\right) \\
&= (2A)^{-n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4A}}
\end{aligned}
$$

where

$$
I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iab - bx^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{a^2}{4b}}, \quad (b > 0)
$$

4.2 Poisson 公式

4.2.1 Poisson 公式的推导

求

$$
\begin{cases}
u_t - a^2 \triangle u = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\
u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{cases}
\tag{4.2.1}
$$

两边对 $x \in \mathbb{R}^n$ 做 Fourier 变换，令

$$
\hat{u}(x,t) = (\widehat{u(y,t)})(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(y,t)\,\mathrm{d}y
$$

$$
\begin{cases}
\hat{u}_t - a^2 \sum_{j=1}^{n} (ix_j)^2 \hat{u} = \hat{f}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\
\hat{u}(x,0) = \hat{\varphi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(e^{a^2|x|^2 t}\hat{u}(x,t)\right) = \hat{f}(x,t)e^{a^2|x|^2 t} \\
\Longrightarrow\quad & e^{a^2|x|^2 t}\hat{u}(x,t) - \hat{\varphi}(x) = \int_0^t f(x,s)e^{a^2|x|^2 s}\,\mathrm{d}s \\
&\hat{u}(x,t) - \hat{\varphi}(x)e^{-a^2|x|^2 t} = \int_0^t \hat{f}(x,s)e^{-a^2|x|^2(t-s)}\,\mathrm{d}s \\
\therefore\quad & \hat{u}(x,t) = \hat{\varphi}(x)e^{-a^2|x|^2 t} + \int_0^t \hat{f}(x,s)e^{-a^2|x|^2(t-s)}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

由反演公式，

$$u(x,t)=\left[e^{-a^2|y|^2t}\hat{\varphi}(y)\right]\check{}(x)+\left[\int_0^t \hat{f}(y,s)e^{-a^2|y|^2(t-s)}\,\mathrm{d}s\right]\check{}(x)$$

且

$$\left[e^{-a^2|y|^2t}\hat{\varphi}(y)\right]\check{}=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)K(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\left[\int_0^t \hat{f}(y,s)e^{-a^2|y|^2(t-s)}\,\mathrm{d}s\right]\check{}=\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^t f(\xi,s)K(x-\xi,t-s)\,\mathrm{d}\xi$$

其中第二个式子利用了 Fubini 定理，且 $K(x,t)$ 是 Poisson 核。

$$K(x,t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ \left(\frac{1}{4\pi a^2t}\right)^{n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}, & t>0\end{cases}\tag{4.2.2}$$

因此 (4.2.1) 的解为

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)K(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi+\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^t f(\xi,s)K(x-\xi,t-s)\,\mathrm{d}\xi\tag{4.2.3}$$

称 (4.2.3) 为热方程的 Poisson 公式。

注.

$$\left[e^{-a^2|y|^2t}\right]\check{}=\left(\frac{1}{2a^2t}\right)^{n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\tag{4.2.4}$$

4.2.2 Poisson 核函数的性质

引理 4.6. (i) $K\in\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)\cup(-\infty,0)\right)$

(ii) $K_t-a^2\triangle K=0$ in $\mathbb{R}^n\times\{t\neq 0\}$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n}K(x,t)\,\mathrm{d}x=1,\quad t>0$

引理 4.7. 齐次方程解的性质：$f\equiv 0$。

(i) $\varphi(\cdot)$ 的奇偶性和周期性能够传导到解：

如果 $\varphi(-x)=\pm\varphi(x),\forall x\in\mathbb{R}^n$，那么 $u(-x,t)=\pm u(x,t),\forall x\in\mathbb{R}^n$;

如果 $\varphi(x+T)=\varphi(x),\forall x\in\mathbb{R}^n$，那么 $u(x+T,t)=u(x,t),\forall x\in\mathbb{R}^n$。

(ii) $\varphi(\cdot)$ 可积，具有指数增长，那么 $u\in\mathcal{C}^\infty$ 无穷光滑；

(iii) 若 $\varphi(\cdot)>0$ in $[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]$，$\varphi(\cdot)=0$ in $\forall x\in\mathbb{R}^n\backslash[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]$，那么 $u(x,t)>0,\forall x\in\mathbb{R}^n,t>0$

4.2.3 Poisson 公式的证明

定理 4.8. 设 $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\exists M, A, B \geq 0, Q > 0$，s.t.

$$|\varphi(x)| \leq Me^{A|x|^2+B|x|^{2-r}}, \quad x \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^{2.1}(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$$

且满足 $sptf = \{(x,t) : f(x,t) \neq 0\}$ 是有界集，则由 (4.2.3) 给出的 $u \in \mathcal{C}^{2.1}(\mathbb{R}^n \times (0, T_0))$，且满足

(i) $u_t - a^2 \triangle u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$

(ii) $\lim_{x \to x_0, t \to 0^+} u(x,t) = \varphi(x_0)$，$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

其中

$$T_0 = \begin{cases} +\infty, & A = 0 \\ \frac{1}{4a^2 A}, & A > 0 \end{cases}$$

4.3 广义函数

4.3.1 广义函数的定义

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

且

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

定义 4.9. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \mathrm{support}(\varphi)$ 是有界集$\}$，$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 按照函数的线性运算是一个线性空间，记为 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$（试验函数空间），$\varphi(\cdot)$ 称为试验函数。

设 $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 收敛于 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，如果

(i) $\exists r > 0$，s.t. $\mathrm{support}(\varphi)$ 和 $\mathrm{support}(\varphi_k) \subset B_r(0)$，$\forall k$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^n$，偏导数 $D^\alpha \varphi_k$ 在 $B_r(0)$ 中一致收敛于 $D^\alpha \varphi$

则 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 是一个线性拓扑空间。

定义 4.10. 如果 $F : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个线性连续泛函，则称 F 为广义函数。

称 F 为线性连续泛函，如果

(i) $\forall f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，有 $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$;

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 以及任意的 $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，如果 $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，则 $F(\varphi_k) \to F(\varphi)$

我们用对偶积 $\langle F, \varphi \rangle$ 表示 $F(\varphi)$，记 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上广义函数的全体。

4.3.2 广义函数的运算

(1) 线性运算

$F_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，$\lambda, \mu \in (\mathbb{R})$，则

$$\langle \lambda F_1 + \mu F_2, \varphi \rangle = \lambda \langle F_1, \varphi \rangle + \mu \langle F_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{4.3.1}$$

(2) 乘积

$\forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$，$F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，定义乘积 ψF：

$$\langle \psi F, \varphi \rangle = \langle F, \psi\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{4.3.2}$$

那么 $\psi F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$。

(3) 收敛性

设 $\{F_k\}, F \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n$，如果 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{k\to\infty} \langle F_k, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle \tag{4.3.3}$$

则称 $\{F_k\}$ 弱 * 收敛于 F，记为 $F_k \xrightarrow{*} F$。

定义 4.11. 若 $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \in \mathbb{R}^n$，定义 $\langle F(ax+b), \varphi \rangle = \langle F, \frac{1}{|a|^2}\varphi(\frac{x-b}{a})$，称为 F 的伸缩平移运算。

4.3.3 广义函数的导数

定义 4.12. 回忆 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), D^\alpha f = g$（广义弱导数）如果：

$$\int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{4.3.4}$$

对于 $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，定义 $\alpha-$ 阶偏导数为

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{4.3.5}$$

定理 4.13.

1. $\forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$，$D^\alpha F$ 存在且 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle \tag{4.3.6}$$

2. 广义函数的导数运算与普通函数一样：$\forall F_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \lambda_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$D^\alpha(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 D^\alpha F_1 + \lambda_2 D^\alpha F_2 \tag{4.3.7}$$

如果 $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \alpha \in\in \mathbb{Z}^n_+$，则

$$D^\alpha(\psi F) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} F \tag{4.3.8}$$

当 $\alpha = 1$ 时，

$$D^\alpha(\psi F) = FD^\alpha\psi + \psi D^\alpha F \tag{4.3.9}$$

对于 $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha(\psi F), \varphi\rangle &= -\langle \psi F, D^\alpha\varphi\rangle = -\langle F, \psi D^\alpha\varphi\rangle \\ &= -\langle F, D^\alpha(\psi\varphi) - \varphi D^\alpha\psi\rangle \\ &= \langle D^\alpha F, \psi\varphi\rangle + \langle F, \varphi D^\alpha\psi\rangle \end{aligned}\tag{4.3.10}$$

4.4 热方程的基本解

考虑

$$\begin{cases} u_t - a^2\triangle u = 0, & \text{in } Q \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x), & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}\tag{4.4.1}$$

$$\begin{cases} u_t - a^2\triangle u = f(x,t), & \text{in } Q \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x), & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}\tag{4.4.2}$$

解为

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\Gamma(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \mathrm{d}s \int_0^t f(\xi,s)\Gamma(x-\xi,t-s)\,\mathrm{d}\xi$$

其中

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}, & t > 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(x,t) \xrightarrow{t\to 0^+} \delta(x), \quad \Gamma(x-\xi,t) \xrightarrow{t\to 0^+} \delta(x-\xi)$$

令 $\Gamma(x,\xi,t) = K(x-\xi,t)$，则 $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，$\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(Q)$，且 $\Gamma_t - a^2\triangle_x\Gamma = 0$ in Q，且广义满足 $\Gamma(x,\xi,t) \xrightarrow{t\to 0^+} \delta(x-\xi)$。

定义 4.14. $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，$u(x,t) = u(x,\xi,t) \in \mathcal{L}^1_{loc}(Q)$ 且在广义函数意义下满足

$$\begin{cases} u_t - a^2\triangle u = 0, & \text{in } Q \\ u \xrightarrow{t\to 0^+} \delta(x-\xi) \end{cases}\tag{4.4.3}$$

则称 $u(x,\xi,t)$ 是齐次方程（4.4.1）的基本解。

注. 1. 基本解 $\Longrightarrow$ （4.4.1）解的表达式；

2. 基本解不一定唯一

$$\eta(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t^2}}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases} \tag{4.4.4}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta^{(k)}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases} \tag{4.4.5}$$

可以验证 $\lim\limits_{t\to 0^+}u(x,t)=0$，$u_t-\triangle u=0$ in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$，因此基本解不唯一。

3. 令 $\overline{\Gamma}(x,\xi,t,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)$ in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\times(0,\infty)$，满足 $\overline{\Gamma}\in\mathcal{C}^\infty(\{t\neq\tau\})$，$\Gamma_t=-\Gamma_\tau, t\neq\tau$，则

$$\begin{aligned}
&\triangle_x\overline{\Gamma}=\triangle_\xi\overline{\Gamma},\ t\neq\tau\\
\Longrightarrow\quad &\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma}=0,\ \forall t\neq\tau\\
&\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma}=\delta(x-\xi,t-\tau),\quad \text{in }\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\forall(\xi,\tau)\in Q
\end{aligned}$$

推论 4.15. $\forall(\xi,\tau)\in Q$，$\Gamma(x,\xi,t,\tau)$，且在广义函数意义下满足

$$\begin{cases}\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma}=\delta(x-\xi,t-\tau), & \text{in }Q,\forall(\xi,\tau)\\ \lim\limits_{t\to 0^+}\overline{\Gamma}=0\end{cases} \tag{4.4.6}$$

此处在广义函数意义下 $\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma}=\delta(x-\xi,t-\tau)$ 是指，对于 $\forall\varphi$ 有

$$\langle\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma},\varphi\rangle=\langle\delta(x-\xi,t-\tau),\varphi\rangle=\varphi \tag{4.4.7}$$

证明. 对于 $\forall\tau>0$, 当 $0<t<\tau,\overline{\Gamma}\equiv 0$, 我们可以推出 $\lim\limits_{t\to 0^+}\overline{\Gamma}=0$, 因此只需要证明 $\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(Q)$ 均有 $\langle\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma},\varphi\rangle=\varphi(x,t)$。

注意到 $\langle\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma},\varphi\rangle=\langle\overline{\Gamma},-\varphi_t-a^2\triangle_x\varphi\rangle$，因此

$$-\int_Q\overline{\Gamma}(x,\xi,t,\tau)\varphi_t(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-a^2\int_Q\overline{\Gamma}(x,\xi,t,\tau)\triangle_x\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\varphi(\xi,\tau)$$

即

$$\int_\tau^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\Gamma}(x,\xi,t,\tau)\left[-\varphi_t(x,t)-a^2\triangle_x\varphi(x,t)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\varphi(\xi,\tau)$$

左边式子为

$$\begin{aligned}
&\int_\tau^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\Gamma}(x,\xi,t,\tau)\left[-\varphi_t(x,t)-a^2\triangle_x\varphi(x,t)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
=&\lim_{\epsilon\to 0^+}-\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\Gamma}(x,\xi,t,\tau)\varphi(x,t)\Big|_{t=\tau+\epsilon}^{t=\infty}\,\mathrm{d}x+\int_{\tau+\epsilon}^\infty\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,t)\left[\overline{\Gamma}_t-a^2\triangle_x\overline{\Gamma}\right]\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{\epsilon\to 0^+}-\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\Gamma}(x,\xi,t,\tau)\varphi(x,t)\Big|_{t=\tau+\epsilon}^{t=\infty}\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\Gamma}(x,\xi,\tau+\epsilon,\tau)\varphi(x,\tau+\epsilon)\,\mathrm{d}x\\
=&\varphi(\xi,\tau)
\end{aligned}$$

□

定义 4.16. 一个定义在 $Q\times Q$ 上的函数 $u(x,\xi;t,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} u_t - a^2\triangle_x u = \delta(x-\xi, t-\tau), & \text{in } Q \\ \lim\limits_{t\to 0^+} u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.4.8}$$

称 u 为（4.4.2）的一个基本解。

4.5 半空间的解

(1) 齐次 Neuman 边值问题. $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,...,x_{n-1},x_n = (x',x_n) : x_n > 0\}$

$$\begin{cases} u_t - a^2\triangle u = f, & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x), & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0 \end{cases} \tag{4.5.1}$$

方法：做偶延拓

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x_n > 0 \\ f(x^s,t), & x_n < 0 \end{cases}, \quad \tilde{\varphi}(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t), & x_n > 0 \\ \varphi(x^s,t), & x_n < 0 \end{cases} \tag{4.5.2}$$

其中 $x^s = (x', -x_n)$。因此（4.6.1）在全空间的解为

$$\tilde{u}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-\xi,t)\tilde{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x-\xi,t-\tau)\tilde{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

将其限制在 $\mathbb{R}^n_+$ 上就得到（4.6.1）的解：

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_{\mathbb{R}^n_+} \left[K(x-\xi,t) - K(x-\xi^s,t)\right]\tilde{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n_+} \left[K(x-\xi,t-\tau) - K(x-\xi^s,t-\tau)\right]\tilde{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

(2) 齐次 Dirichlet 边值问题. 对 f,φ 作奇延拓。

(3) Robin 齐次边界条件

4.6 初边值问题的解法

4.6.1 一维情况

考虑方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t) = q_1(t),\ u_x(l,t) = q_2(t), & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in[0,l] \end{cases} \tag{4.6.1}$$

我们使用 Fourier 方法（分离变量）

Step 1. 化为齐次边界条件：

作 $u(x,t)=v(x,t)+w$, 解得 $w(x,t)=q_1(t)+xq_2(t)$，因此可以设 $q_1(t)=q_2(t)=0$。

Step 2. 令 $u(x,t)=T(t)\mathbb{X}(x)$，分离变量并代入原方程：

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\mathbb{X}''}{\mathbb{X}}=-\lambda$$

根据定理 (3.18)，$\lambda>0$，设 $\lambda=\beta^2,\beta>0$，因此得到

$$\mathbb{X}(x)=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$$

根据边界条件：

$$\begin{cases}\mathbb{X}(0)=0\\ \mathbb{X}_x(l)=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c_1=0\\ \cos\beta l=0\end{cases}$$

因此 $\beta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2l},k=0,1,2,...,\ \lambda_k=\beta_k^2$。对应的特征函数为 $\mathbb{X}_k(x)=\cos\beta_k x$

Step 3. 叠加原理（待定系数）

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos\beta_k x$$

代入原问题：

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k'+a^2\beta_k^2T_k(t)\right)\cos\beta_k x=f(x,t)\\ \sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)\cos\beta_k x=\varphi(x)\end{cases}\tag{4.6.2}$$

将 f,φ 关于 $\{\cos\beta_k x\}$ 展开，

$$f(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\cos\beta_k x,\quad f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cos\beta_k x\,\mathrm{d}x$$
$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\cos\beta_k x,\quad \varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\beta_k x\,\mathrm{d}x$$

因此问题化为求解常微分方程：

$$\begin{cases}T_k'+a^2\beta_k^2T_k=f_k(t)\\ T_k(0)=\varphi_k\end{cases}\tag{4.6.3}$$

可以解得

$$\begin{aligned}T_k(t)&=\left[\varphi_k+\int_0^t f_k(s)e^{(a\beta_k)^2s}\,\mathrm{d}s\right]e^{-(a\beta_k)^2t}\\ &=e^{-(a\beta_k)^2t}\varphi_k+\int_0^t e^{-(a\beta_k)^2(t-s)}f_k(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{4.6.4}$$

注. 1. Poisson 公式：设 $f\equiv 0$，$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}K(x-\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$，Poisson 公式按照 $\{\cos\beta_k x\}$ Fourier 展开得到结果同上式。

Poisson 公式 $\Longleftrightarrow$ 周期初边值问题的解。

2.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(a\beta_k)^2t}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\beta_k\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\cos\beta_k x \tag{4.6.5}$$

$$(f\equiv 0)\qquad =\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\cos\beta_k\xi\cos\beta_k x e^{-(a\beta_k)^2t}\right]\mathrm{d}\xi \tag{4.6.6}$$

经过计算：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\cos\beta_k\xi\cos\beta_k x e^{-(a\beta_k)^2t}=K(x-\xi,t)$$

4.6.2 高维情况

仍旧是 $u(x,t)=T(t)\mathbb{X}(x)$，

$$\begin{cases}\triangle\mathbb{X}+\lambda\mathbb{X}=0, & \mathbb{X}\in\Omega\\ \mathbb{X}\Big|_{\partial\Omega}=0,\ or\ \mathbb{X}+\frac{\partial\mathbb{X}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{4.6.7}$$

化为 Laplace 方程特征值问题。方法：求变分。

若 $\Omega=B_\rho(0)$，可以解得方程：$\mathbb{X}(x)=\gamma(\rho)\Theta(\theta)$，再分离变量。

若 $\Omega=[0,a]\times[0,b]\times\cdots$，可以得到许多 ODE。

4.6.3 无穷衰减性质

当 $f\equiv 0,q_i\equiv 0$，

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\int_0^l\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(a\beta_k)^2t}\varphi(\xi)\cos\beta_k\xi\cos\beta_k x\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\beta_0=\frac{\pi}{2l},\beta_k>\beta_0,\forall k>0$$

$\forall\beta\in(0,a\beta_0)$, $\Rightarrow\ \lim\limits_{t\to\infty}e^{-\beta^2t}u(x,t)=0$，因此 $u(x,t)$ 关于 t 是指数衰减的，且关于 x 是一致的。

4.6.4 验证定律

令 $Q=(0,l)\times(0,\infty),\overline{Q}=[0,l)\times[0,\infty)$，

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)\\ u(0,t)=q_1(t),\ u_x(l,t)=q_2(t)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases} \tag{4.6.8}$$

(i) 要求 $u \in \mathcal{C}^{2.1}(\overline{Q})$，必须

$$\begin{cases} q_1(0) = \varphi(0), \varphi'(t) = q_2(0) \\ q_1'(0) - a^2\varphi''(0) = f(0,0) \\ q_2'(l) - a^2\varphi'''(l) = f_x(l,0), \text{此条件波方程需要热方程不需要} \end{cases} \tag{4.6.9}$$

(ii) 只要求 $u \in \mathcal{C}^{2.1}(Q) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q})$，必须

$$q_1(0) = \varphi(0), \varphi'(l) = q_2(0)$$

(iii) 广义解。（4.6.5）级数需要收敛 $(\overline{Q})$。

定理 4.17. (i) 若 $f \equiv 0, q_i \equiv 0, \varphi \in \mathcal{C}^1([0,l])$，则（4.6.1）的解 $u \in \mathcal{C}^\infty((0,l) \times (0,\infty))$，且 $\forall \beta \in (0, (\frac{a\pi}{2l})^2)$，均有

$$\lim_{t\to\infty} e^{\beta t} u(x,t) = 0$$

$\forall x \in [0,l]$ 一致成立。

(ii) $\forall T > 0, f \in \mathcal{C}^2(\overline{Q}_T), \varphi \in \mathcal{C}^1([0,l]), q_i \in \mathcal{C}^1([0,l])$，且 $\varphi'(0) = q_2(0), q_1(0) = \varphi(0)$，则用分离变量法求出的解 u 满足

$$u(x,t) \in \mathcal{C}^{2.1}(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$$

在 $\overline{Q}_T$ 上满足（4.6.1），其中 $Q_T = (0,l) \times (0,T)$。

4.7 极值原理和最大模估计

4.7.1 初边值问题

考虑 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 为有界开集，$T > 0$, 证：$\Omega_T = \Omega \times [0,T]$，$\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \backslash \Omega_T$（抛物界面，即下底面 + 柱面），

$$u_t - a^2 \triangle u = f, \text{ in } \Omega_T;\ u\Big|_{\Gamma_T} = \varphi(x)$$

设 $u(x,t) \in \mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_T)$，

若在 $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ 取得极大值，$\Longrightarrow u(x,t_0)$ 在 x_0 处取得极大值，因此

$$\nabla u(x_0,t_0) = 0, \quad D^2(u(x_0,t_0)) = \left[u_{x_ix_j}(x_0,t_0)\right]_{n\times 1} \leq 0$$

因此 $\triangle u(x_0,t_0) \leq 0$。同理，$u(x_0,t)$ 在 t_0 处取得极大值，因此

$$\partial_t u(x_0,t_0) = 0,\ (t_0 < T), \quad \partial_t u(x_0,t_0) \geq 0,\ (t_0 = T)$$

$$\Longrightarrow\ u_t - a^2 \triangle u \geq 0$$

换言之，若 $u_t - a^2\triangle u < 0$, in Ω_T，则 u 不可能在 Ω_T 中取得极大值（包含最大值）。特别地

$$\max_{\Omega_T} u = \max_{\Gamma_T} u \tag{4.7.1}$$

定理 4.18. 设 $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2.1}(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$，满足

$$u_t - a^2 \triangle u \le 0, \text{ in } \Omega_T \tag{4.7.2}$$

则有:

(1)

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u \tag{4.7.3}$$

(2) **强极值原理.** 若存在 $(x_0, t_0) \in \Omega_T$，s.t. $u(x_0, t_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}_T}$，则

$$u(x,t) \equiv u(x_0, t_0), \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_{t_0} \tag{4.7.4}$$

证明. (1) 的证明：令 $V_\epsilon(x,t) = u(x,t) - \epsilon t, \epsilon > 0$，则

$$V_{\epsilon t} - a^2 \triangle V_\epsilon = u_t - a^2 \triangle u - \epsilon < 0$$

由（4.7.1），

$$\max_{\overline{\Omega}_T} V_\epsilon = \max_{\Gamma_T} V_\epsilon$$

令 $\epsilon \to 0^+$，得证。

(2) 的证明：主要使用平均值公式。

□

4.7.2 热球

取 $(x,t) \in \mathbb{R}^n_+$，称 $E(x,t;r) = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^n, s \le t, \text{ and } P(x,t,y,s) \ge \frac{1}{r^n}\right\}$ 为以 (x,t) 为中心的（抛物）热球，其中:

$$P(x,t,y,s) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4\pi a^2(t-s)}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}}, & s < t \\ 0, & s \ge t \end{cases} \tag{4.7.5}$$

因此由 $P(x,t,y,s) \ge \frac{1}{r^n}$ 可以得到:

$$t > s, \ |x-y|^2 \le 4a^2(t-s)\left\{n \ln r - \frac{n}{2} \ln[4\pi a^2(t-s)]\right\}$$

当 $s \to t^-$ 时，$y \to x$，必 $\exists s_0$，s.t. $s = s_0$ 时，$y = x$。

设 $E(r) = E(0,0;r), E(1) = E(0,0;1)$，体积:

(i)

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s = \int_{-\frac{1}{4\pi a^2}}^{0} \mathrm{d}s \frac{1}{s^2} \int_{B_{r(s)}(0)} y^2 \, \mathrm{d}y = 4a^2 \tag{4.7.6}$$

(ii) 令

$$\psi(y,s) = n\ln r - \frac{n}{2}\ln 4\pi a^2(-s) + \frac{|y|^2}{4a^2 s} \tag{4.7.7}$$

则 $\psi = 0 \text{ on } \partial E(r)$；

(iii) $\forall (x,t) \in \Omega_T, \exists r > 0$，s.t. $E(x,t;r) \subset \Omega_T$；

(iv) 令 $y' = \frac{y-x}{r}, s' = \frac{s-t}{r^2}$，则

$$E(X,t;r) \longrightarrow E(0,0;r) \tag{4.7.8}$$

且

$$\iint_{E(x,t;r)} \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = r^n \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = 4a^2 r^n \tag{4.7.9}$$

4.7.3 平均值定理

定理 4.19. 设 $u \in \mathcal{C}^{2.1}(\Omega)$，在 Ω_T 中满足 $u_t - a^2 \triangle u \le 0$，则 $\forall E(x,t;r) \in \Omega_T$ 有:

$$u(x,t) \le \frac{1}{4a^2 r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \tag{4.7.10}$$

证明. 令 $\phi(r) \triangleq \frac{1}{4a^2 r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$,则 $\lim\limits_{r\to 0} \phi(r) = u(x,t)$,因此只需要证明 $\phi'(r) \ge 0$。

不妨设 $x = 0, t = 0$，则

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{d}{dr}\left[\iint_{E(1)} u(ry, r^2 s)\frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\right]\frac{1}{4a^2} \\
&= \frac{1}{4a^2}\iint_{E(1)} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(ry, r^2 s) y_i \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s + \frac{1}{4a^2}\iint_{E(1)} u_t(ry, r^2 s) 2r \frac{|y|^2}{s}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4a^2 r^{n+1}}\iint_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(y,s) y_i \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s + \frac{1}{4a^2 r^{n+1}}\iint_{E(r)} u_t(y,s) 2 \frac{|y|^2}{s}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&:= A + B
\end{aligned}$$

因为

$$\psi_y = \frac{y}{2a^2 s} \tag{4.7.11}$$

$$\psi_s = -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4a^2 s^2} \tag{4.7.12}$$

并且 $\sum_{i=1}^n \psi_{y_i} y_i = \frac{|y|^2}{2a^2 s}$，所以我们可以得到

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[\sum_{i=1}^n u_{sy_i} y_i + n u_s\right] \psi \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s, \quad \text{固定 } s \text{ 对 } y \text{ 用分部积分（边界上 } \psi \text{ 为 } 0\text{）} \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[n u_s \psi + \left(\frac{|y|^2}{4s^2 a^2} + \frac{n}{2s}\right) \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i\right] \mathrm{d}y\,\mathrm{d}s, \quad \text{对 } s \text{ 用分部积分} \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(n u_s \psi + \frac{n}{2s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}s - A \\
&\geq -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(n a^2 \triangle_y u \psi + \frac{n}{2s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}s - A, \quad (u_t - a^2 \triangle_x u \leq 0)
\end{aligned}
$$

因此可以得到

$$
\begin{aligned}
\phi'(r) = A + B &\geq -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(a^2 \triangle_y u \psi + \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= 0, \quad \text{后一部分对 } y \text{ 用分部积分}
\end{aligned} \tag{4.7.13}
$$

□

注. 如果 $u_t - a^2 \triangle u = 0$，那么

$$
u(x,t) = \frac{1}{4a^2 r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s
$$

4.7.4 极值原理 revisit

利用定理（4.19）可以证明定理（4.18）的第二部分，

证明. 取 $r > 0$, s.t. $E(x_0, t_0; r) \subset \Omega_T$。

Step I. 根据定理（4.19），

$$
u(x_0, t_0) \leq \frac{1}{4a^2 r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s
$$

若 $\forall (y_0, s_0) \in E(x_0, t_0; r)$，$u(y_0, s_0) \leq u(x_0, t_0)$，那么我们能够得到，

$$
\frac{1}{4a^2 r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{4a^2 r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} u(x_0,s_0) \frac{|y-x_0|^2}{(s-t_0)^2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = u(x_0, t_0) \tag{4.7.14}
$$

因此 $u(y,s) = u(x_0, t_0)$ in $E(x_0, t_0; r)$。

Step II. 因为 Ω 连通，所以 $\forall (y_0, s_0) \in \Omega_{t_0}, s_0 < t_0$，

利用折线段 L 将 (x_0, t_0) 和 (y_0, s_0) 连接起来，再用有限热球将 L 覆盖，后一个的热球一定是前一个热球内部，对每一个热球仍用 Step I 可以得到

$$u(y_0, s_0) = u(x_0, t_0)$$

□

推论 4.20. 设 $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2.1}(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$，满足

$$u_t - a^2 \triangle u \geq 0, \text{ in } \Omega_T \tag{4.7.15}$$

则有:

(1)

$$\min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\Gamma_T} u \tag{4.7.16}$$

(2) **强极值原理.** 若存在 $(x_0, t_0) \in \Omega_T$，s.t. $u(x_0, t_0) = \min\limits_{\overline{\Omega}_T}$，则

$$u(x,t) \equiv u(x_0, t_0), \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_{t_0} \tag{4.7.17}$$

推论 4.21. 比较原理. 设 $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2.1}(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$，满足

$$u_{it} - a^2 \triangle u_i = f_i, \ (i = 1, 2) \ \text{ in } \Omega_T \tag{4.7.18}$$

如果 $f_1 \geq f_2$ in Ω_T，$u_1\Big|_{\Gamma_T} \geq u_2\Big|_{\Gamma_T}$，则 $u_1 \geq u_2$ in $\overline{\Omega_T}$。

证明. 令 $V = u_1 - u_2$，则

$$V_t - a^2 \triangle V = f_1 - f_2 \geq 0 \text{ in } \Omega_T$$

又因为 $V\Big|_{\Gamma_T} \geq 0$，因此由定理（4.18），

$$\min_{\overline{\Omega}_T} V = \min_{\Gamma_T} V$$

因此 $V \geq 0$ in $\overline{\Omega_T}$。 □

4.7.5 最大模估计

设 $Lu = u_t - a^2 \triangle u = f$ in Ω_T，令 $V_k = u - kt$，则

$$LV_k = Lu - k = f - k, \quad k_M = \sup_{\Omega_T} f^+, k_m = \inf_{\Omega_T} f^-$$

那么 $LV_{k_M} \leq 0$，

$$V_{k_M}(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} V\Big|_{\Gamma_T} \leq \max_{\Gamma_T} u, \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega_T}$$

同理，$LV_{k_m} \geq 0$，

$$V_{k_m}(x,t) \geq \min_{\Gamma_T} V\Big|_{\Gamma_T} \geq \min_{\Gamma_T} u, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega_T}$$

所以

$$T \inf_{\Omega_T} f^- + \min_{\Gamma_T} u \leq u(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} u + T \sup_{\Omega_T} f^+, \quad \forall (x,t) \in \Omega_T \tag{4.7.19}$$

定理 4.22. 最大模估计. 设 $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2.1}(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$，且 $u_t - a^2 \triangle u = f$ in Ω_T，则有 (4.7.19)。特别地，有

$$\max_{\Omega_T} |u| \leq \max_{\Gamma_T} |u| + T \sup_{\Omega_T} |f| \tag{4.7.20}$$

4.8 柯西问题

$Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T], \overline{Q}_T = \mathbb{R}^n \times [0,T]$，考虑问题

$$Lu := u_t - a^2 \triangle u \leq 0, \quad \text{in } Q_T \tag{4.8.1}$$

(1) 极值原理

定理 4.23. 设 $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2.1}(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$，满足（4.8.1），则有

(i) 如果 $\exists (x_0,t_0) \in Q_T$ s.t. $u(x_0,t_0) = \sup_{Q_T} u$，则

$$u \equiv u(x_0,t_0) \ \text{ in } \overline{Q}_{t_0} \tag{4.8.2}$$

(ii) 如果 u 满足条件 $E(A,B)$：$\exists A, B > 0$ s.t.

$$u(x,t) \leq AE^{B|x|^2}, \quad \forall (x,t) \in Q_T$$

则有

$$\sup_{Q_T} u = \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,0) \tag{4.8.3}$$

证明. (1) $\forall R > 0$，对于 u 在 $B(0,R) \times (0,T]$ 中，使用定理（4.18）的第二部分，可以得到

$$u \equiv u(x_0,t_0) \ \text{ in } B(0,R) \times (0,T]$$

再将 $R \to \infty$，得证。

(2) 令 $B_R = B(0,R)$，令

$$v(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi a^2 (T + \mu - t)}\right)^{n/2} e^{\frac{|x|^2}{4a^2(T+\mu-t)}}$$

μ 非常小，则易证 $Lv = 0$ in $Q_{\epsilon T}, \forall \epsilon > 0$。设 $w(x,t) = u(x,t) - \epsilon v(x,t)$，则 $Lw \leq 0$ in Q_T。

$$w\Big|_{\partial B_R \times (0,T)} \leq Ae^{BR^2} - \epsilon \left(\frac{1}{4\pi a^2 (T + \mu)}\right)^{n/2} e^{\frac{R^2}{4a^2(T+\mu)}} \tag{4.8.4}$$

Step 1. 取 $T_0+\mu=\frac{1}{8a^2B}$，则当 $T\le T_0$，有

$$w\Big|_{\partial B_R\times(0,T)}\le Ae^{BR^2}-\epsilon\left(\frac{1}{4\pi a^2T_0}\right)^{n/2}e^{2BR^2}$$

因此当 R 充分大的时候，显然有 $w\Big|_{\partial B_R\times(0,T)}\to-\infty$。

在 $\partial B_R\times(0,T)$，对 w 使用定理（4.18）的第一部分，可以得到 w 的极值在抛物界面中的下底面达到。

$$\max_{B_R\times(0,T)}w=\max_{\partial B_R\times(0,T)\cup(\mathbb{R}^n\times\{0\})}w\le\sup_{\mathbb{R}^n}u(x,0)\tag{4.8.5}$$

将 $R\to\infty$，得到 $\sup\limits_{Q_T}w\le\sup\limits_{\mathbb{R}^n}u(x,0)$，即

$$u(x,t)-\epsilon v(x,t)\le\sup_{\mathbb{R}^n}u(x,0),\quad\forall(x,t)\in Q_T$$

令 $\epsilon\to0^+$，得到

$$u(x,t)\le\sup_{\mathbb{R}^n}u(x,0),\quad\forall(x,t)\in Q_T\tag{4.8.6}$$

Step 2.（分层法.）当 $T>T_0$ 时，将 $[0,T]$ 分成 k 个区间：$[0,T_0],[T_0,2T_0],...,[(k-1)T_0,T]$，s.t. $T-(k-1)T_0<T_0$，在 $\mathbb{R}^n\times(0,T_0),\mathbb{R}^n\times(T_0,2T_0),...,\mathbb{R}^n\times((k-1)T_0,T)$ 上依次使用 Step 1 的结论。

□

推论 4.24. 设 $u(x,t)\in\mathcal{C}^{2.1}(Q_T)\cap\mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$，满足

$$Lu:=u_t-a^2\triangle u\ge0,\quad\text{in }Q_T$$

，则有

(i) 如果 $\exists(x_0,t_0)\in Q_T$ s.t. $u(x_0,t_0)=\inf\limits_{Q_T}u$，则

$$u\equiv u(x_0,t_0)\ \text{ in }\overline{Q}_{t_0}\tag{4.8.7}$$

(ii) 如果 $(-u)$ 满足条件 $E(A,B)$：$\exists A,B>0$ s.t.

$$u(x,t)\ge-AE^{B|x|^2},\quad\forall(x,t)\in Q_T$$

则有

$$\inf_{Q_T}u=\inf_{\mathbb{R}^n}u(x,0)\tag{4.8.8}$$

推论 4.25. 唯一性. 如果

$$u_t-a^2\triangle u=f,\quad\text{in }Q_T,\ u\Big|_{t=0}=\varphi\text{ in }\mathbb{R}^n\tag{4.8.9}$$

在空间 $\left\{u\in\mathcal{C}^{2.1}(Q_T)\cap\mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)\Big||u|\text{ 满足 }E(A,B)\right\}$ 中的解是唯一的。

4.9 能量估计及其推论

4.9.1 初边值问题：$\Omega \in \mathbb{R}^n$ 为有界开集

$$\begin{cases} u_t - a^2 \triangle u = f, & \text{in } \Omega_T \\ u = g, & \text{on } \partial\Omega \times [0, T) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi, & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases} \tag{4.9.1}$$

where $u \in \mathcal{C}^{2.1}(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), g \in \mathcal{C}^{2.1}(\overline{\Omega})$，古典解中极值原理与最大模估计，唯一。

令 $v = u - g$，则，

$$\begin{cases} v_t - a^2 \triangle v = f - g_t + a^2 \triangle g := F, & \text{in } \Omega_T \\ v = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0, T) \\ v\Big|_{t=0} = \varphi - g := \phi, & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases} \tag{4.9.2}$$

两边同乘 v，在 Ω_T 上积分，$(\forall t \in [0, T])$，则

$$\int_{\Omega_T} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right) - a^2 \triangle v \cdot v \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s = \int_{\Omega_T} F \cdot v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s &= \int_0^t \frac{d}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \frac{v^2}{2} \, \mathrm{d}x, \quad \text{求导和积分交换} \\ &= \int_\Omega \frac{v^2(x \cdot t)}{2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_\Omega \phi^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} -a^2 \int_{\Omega_t} \triangle v \cdot v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s &= -a^2 \int_{\Omega_t} \left(\mathrm{div}(\nabla v \cdot v) - |\nabla v|^2 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\ &= -a^2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} (\nabla v \cdot v) \vec{n} \, \mathrm{d}S_x \, \mathrm{d}s + a^2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\ &= a^2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s, \quad (v = 0 \text{ on } \partial\Omega) \end{aligned}$$

因此

$$\int_\Omega v^2(x, t) \, \mathrm{d}x + 2a^2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \leq \int_\Omega \phi^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega F^2 + v^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s$$

由 Cronwall，

$$\int_\Omega v^2(x, t) \, \mathrm{d}x \leq \int_0^t \int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s + \int_{\Omega_t} F^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s + \int_\Omega \phi^2 \, \mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_0^t \int_\Omega v^2(x, t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \leq (e^t - 1) \left[\int_{\Omega_t} F^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s + \int_{\Omega_t} \phi^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \right]$$

代入 (4.9.2)，由于 $\forall t\in[0,T)$，

$$\int_\Omega v^2(x,t)\,\mathrm{d}x+2a^2\int_{\Omega_t}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\le e^2\left[\int_{\Omega_t}F^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\int_\Omega\phi^2\,\mathrm{d}x\right]\tag{4.9.3}$$

又因为 $v=u-g$，

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x+2a^2\int_{\Omega_t}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\le 2\left[\int_{\Omega_t}F^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\int_\Omega\phi^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega g^2(x,t)\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_t}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right]\tag{4.9.4}$$

定理 4.26. 设 $u\in\mathcal{C}^{2,1}(\Omega_T)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$，则我们有能量估计 (4.9.4)。

注. 1. 边界条件 $u=g$ on $\partial\Omega\times[0,T]$ 可以换成 $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=g$ on $\partial\Omega\times[0,T]$；

2. 对广义解也成立；

3. 能量估计 $\Longrightarrow$ 解的唯一性；

4. 稳定性：设 $\{u_k\}_{k=0}^\infty\in\mathcal{C}^{2,1}(\Omega_T)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ 满足，

$$\begin{cases}u_{kt}-a^2\nabla u_k=f_k, & \text{in }\Omega_T\\ u_k=g_k, & \text{on }\partial\Omega\times(0,T)\qquad k=0,1,2,\dots\\ u_k\Big|_{t=0}=\varphi_k, & \text{in }\overline{\Omega}\end{cases}$$

如果 $f_k\to f_0$, $g_k\to g_0$, $\nabla g_k\to\nabla g_0$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, $\varphi_k\to\varphi_0$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$，则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_T}\left[|\nabla u_k-\nabla u_0|^2+|u_k-u_0|^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0\tag{4.9.5}$$

4.9.2 Cauchy 问题：$Q=\mathbb{R}^n\times(0,T]$

$$\begin{cases}u_t-a^2\triangle u=f, & \text{in }Q_T\\ u\Big|_{t=0}=\varphi\end{cases}\tag{4.9.6}$$

$u(x,t)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n),\nabla u\in\mathcal{L}^2(Q_T)$。记 $\mathcal{L}^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))=\left\{u\in\mathcal{L}^2(Q_T):u_{x_i}\in\mathcal{L}^2(Q_T),\ i=1,...,n\right\}$，两边同乘 u 在 Q_T 上积分，

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)-a^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\triangle u\cdot u=\int_{Q_t}f\cdot u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{2}\int_{Q_t}(f^2+u^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$A:=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u^2(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2\,\mathrm{d}x\right)$$

$$
\begin{aligned}
B :&= -a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \triangle u \cdot u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\
&= -a^2 \int_0^t \mathrm{d}s \lim_{k\to\infty} \int_{B_k(0)} \triangle u \cdot u \, \mathrm{d}x \\
&= -a^2 \lim_{k\to\infty} \int_0^t \mathrm{d}s \int_{\partial B_k(0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u \, \mathrm{d}x + a^2 \lim_{k\to\infty} \int_0^t \mathrm{d}s \int_{B_k(0)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因为，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} u^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_{\partial B_r(0)} u^2 \, \mathrm{d}s \\
&r \to \infty, \quad \int_{\partial B_r(0)} u^2 \, \mathrm{d}S_x \to 0 \\
\therefore \quad & -a^2 \lim_{k\to\infty} \int_0^t \mathrm{d}s \int_{\partial B_k(0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u \, \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

因此，

$$
B = a^2 \lim_{k\to\infty} \int_0^t \mathrm{d}s \int_{B_k(0)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \tag{4.9.7}
$$

定理 4.27. 设 $u \in \mathcal{C}^{2.1}(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{L}^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$，满足 (4.9.6)，则 $\forall t \in [0,t]$，有

$$
\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,t) \, \mathrm{d}x + 2a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \le e^t \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 \, \mathrm{d}x \right] \tag{4.9.8}
$$

注. 1. 问题 (4.9.6) 在 $\mathcal{C}^{2.1}(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{L}^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$ 中的解是唯一的；

2. 稳定性；

3. 弱解令 $E = \{u \in \mathcal{L}^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n)) : u_t \in \mathcal{L}^2(Q_T)\}$，称 $u \in E$ 为 (4.9.6) 的弱解，如果 $\forall \varphi \in E$，

$$
\int_{\Omega_t} \left(u_t \varphi + a^2 \nabla u \cdot \nabla \varphi \right) \, \mathrm{d}x = \int_{Q_t} f \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s
$$

且

$$
\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t) - \varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0
$$

注. 能量不等式可能会用到 Young 不等式，

$$
\begin{aligned}
&|ab| = |a\epsilon \cdot \frac{b}{\epsilon}|^2 \le \frac{\epsilon^2 a^2 + \frac{b^2}{\epsilon^2}}{2}, \forall \epsilon > 0 \\
&|ab| \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}
$$

5 Poisson 方程

Poisson 方程的应用:

(1) 热方程（波方程）的稳态: $t \to \infty, u_t \to 0, u_{tt} \to 0$

$$-\triangle u = f$$

(2) Dirichlet 问题

$$\min_u \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + f(x)u \right) \mathrm{d}x$$

(3) 热电（磁）现象模拟，调和函数，

$$-\triangle u = 0$$

5.1 基本解

5.1.1 定义

定义 5.1. 如果 $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$，$\Gamma(x,\xi)$ 作为 x 的函数，满足

$$-\triangle \Gamma(x,\xi) = \delta(x-\xi), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

则称 $\Gamma(x,\xi)$ 为 Poisson 方程的一个基本解。

5.1.2 形式推导

δ 函数: 单位点热源的温度分布

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} q \,\mathrm{d}\vec{s} \\ &= -\int_{\partial B_\epsilon(0)} \nabla w_\epsilon \,\mathrm{d}\vec{s} \\ &= -\int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial w_\epsilon}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{\partial w_\epsilon}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial B_\epsilon(0)} \cdot |\partial B_\epsilon(0)| \\ &= -\epsilon^{n-1} w_n \cdot \frac{\partial w_\epsilon}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial B_\epsilon(0)} \end{aligned}$$

其中

$$w_n = |\partial B_1(0)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$
$$\text{where } \ \Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} \,\mathrm{d}x$$

其中 w_n 为 n 维单位球球面面积。并且 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$，

注：n 维球球面面积为 $r^{n-1}w_n$，球的体积为

$$V=\int_0^r t^{n-1}w_n\,\mathrm{d}t=\frac{r^n}{n}w_n \tag{5.1.1}$$

因此可以得到

$$\begin{cases}-\triangle w_\epsilon=0,\ \text{in}\ \mathbb{R}^n\backslash B_\epsilon(0)\\ \frac{\partial w_\epsilon}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial B_\epsilon(0)}=\frac{-1}{\epsilon^{n-1}w_n}\end{cases} \tag{5.1.2}$$

要找到 $w_\epsilon(x)=w_\epsilon(|x|)$，（关于球面对称）

令 $w_\epsilon(x)=F(r),r=|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$，则 $w_{\epsilon x_i}=F'(r)\frac{x_i}{r}$，$w_{\epsilon x_ix_i}=F''(r)\frac{x_i^2}{r^2}+F'(r)\frac{r-\frac{x_i^2}{r}}{r^2}$，因此

$$\triangle w_\epsilon=F''(r)+F'(r)\frac{(n-1)r^2}{r^3}=F''(r)+F'(r)\frac{n-1}{r}$$

因此，

$$\begin{cases}f'(r)+\frac{n-1}{r}f(r)=0, & r>\epsilon\\ f(r)\Big|_{r=\epsilon}=-\frac{1}{w_n\epsilon^{n-1}}\end{cases} \tag{5.1.3}$$

令 $f(r)=F'(r)$，$\frac{f'(r)}{f(r)}=-\frac{n-1}{r}$，因此可以得到

$$\begin{aligned}&\ln f(r)=\ln r^{1-n}+c\\ \Longrightarrow\ &f(r)=cr^{1-n}=F'(r)\end{aligned}$$

积分，得到

$$F(1)=\begin{cases}c_2\ln r+c, & n=2\\ c_nr^{2-n}+c, & n>2\end{cases}$$

令 $c=0$，得到

$$\begin{cases}c_2=-\frac{1}{2\pi}\\ c_n=\frac{1}{(n-2)w_n}\end{cases}$$

因此

$$w_\epsilon(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2\\ \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)w_n}, & n\geq 3\end{cases}\xrightarrow{\epsilon\to 0}w(x) \tag{5.1.4}$$

因此我们可以解得

$$\Gamma(x,\xi)=w(x-\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, & n=2\\ \frac{1}{(n-2)w_n|x-\xi|^{n-2}}, & n\geq 3\end{cases} \tag{5.1.5}$$

5.1.3 基本解的严格证明

引理 5.2. (i) $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，$\Gamma(x,\xi)$ 作为 x 的函数 $\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$；

(ii) $-\triangle_x\Gamma(x,\xi)=0$，$x\neq\xi$。

不妨设 $\xi=0$，则

$$-\triangle\Gamma(x)=\delta(x),\Gamma(x)=\Gamma(x,0)$$

i.e.

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\triangle\varphi\cdot\Gamma\,\mathrm{d}x=\varphi(0),\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)\tag{5.1.6}$$

注. Green 公式：由高斯公式

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{F}\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\vec{F}\vec{n}\,\mathrm{d}s\tag{5.1.7}$$

令 $\vec{F}=\nabla v\cdot u$，因此得到 Green 公式

$$\int_\Omega(\triangle v\cdot u+\nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}u\cdot\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s\tag{5.1.8}$$

引理 5.3. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界，$\partial\Omega$ 分片属于 $\mathcal{C}^1$，$u,v\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega(u\triangle v-v\triangle u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}s\tag{5.1.9}$$

取 $R>0$，s.t. $\mathrm{spt}(\varphi)\in B_R(0)$，(5.1.6) 的左端：

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\triangle\varphi\cdot\Gamma\,\mathrm{d}x=-\int_{B_R(0)}\triangle\varphi\cdot\Gamma\,\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{B_R(0)\setminus B_\epsilon(0)}\triangle\varphi\cdot\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$$

而

$$\begin{aligned}-\int_{B_R(0)\setminus B_\epsilon(0)}\triangle\varphi\cdot\Gamma(x)\,\mathrm{d}x&\xlongequal{\text{Lemma(5.2)}}\int_{B_R(0)\setminus B_\epsilon(0)}(\varphi\cdot\triangle\Gamma-\triangle\varphi\cdot\Gamma)\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{Lemma(5.3)}}\int_{\partial B_R(0)}\left(\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}}-\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}s+\int_{\partial B_\epsilon(0)}\left(\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}_\Gamma}-\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_\Gamma}\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中大球里挖掉小球的边界，外球的外法向和内球的内法向；$\vec{n}_\Gamma$ 指向原点。又因为，

$$-\int_{\partial B_\epsilon(0)}\Gamma\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_\Gamma}\mathrm{d}s=\begin{cases}\dfrac{\ln\epsilon}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_\Gamma}\mathrm{d}s, & n=2\\[2ex]-\dfrac{1}{(n-2)w_n\epsilon^{n-2}}\displaystyle\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_\Gamma}\mathrm{d}s, & n\geq3\end{cases}$$

当 $\epsilon\to0^+$ 时，

$$-\int_{\partial B_\epsilon(0)}\Gamma\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_\Gamma}\mathrm{d}s=\begin{cases}\dfrac{\ln\epsilon}{2\pi}\epsilon w_n\varphi_x(0)\longrightarrow0, & n=2\\[2ex]-\dfrac{1}{(n-2)w_n\epsilon^{n-2}}w_n\epsilon^{n-1}\varphi_x(0)\longrightarrow0, & n\geq3\end{cases}$$

再考虑到，

$$\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}_\Gamma}\right|_{\partial B_\epsilon(0)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\epsilon} = \dfrac{1}{|\partial B_\epsilon|}, & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)w_n}\dfrac{(2-n)}{|x|^{n-1}}\displaystyle\sum_i \frac{x_i^2}{|x_i|^2} = \frac{1}{\epsilon^{n-1}w_n} = \frac{1}{|\partial B_\epsilon|}, & n \geq 3 \end{cases}$$

因此，令 $R \to \infty, \Gamma \to 0$，则

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^n} \triangle\varphi \cdot \Gamma \, \mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}_\Gamma} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{|\partial B_\epsilon|} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \varphi(x) \, \mathrm{d}S_x \\ &= \varphi(0) \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

定理 5.4. $\Gamma(x,\xi)$ 在广义函数的定义下，满足

$$-\triangle_x \Gamma(x,\xi) = \delta(x-\xi), \quad \forall x-\xi \in \mathbb{R}^n \tag{5.1.11}$$

$\forall \xi \in \Omega$，$\forall u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$。用 $B_\epsilon(\xi)$ 代替 $B_\epsilon(0)$，Ω 代替 $B_k(0)$，u 代替 φ，$\Longrightarrow$

定理 5.5. 设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 有界开集，$\partial\Omega$ 分片属于 $\mathcal{C}^1$，$u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$，则 $\forall \xi \in \Omega$，有

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} \right) \mathrm{d}S_x - \int_\Omega \triangle u \cdot \Gamma(x,\xi) \, \mathrm{d}x \tag{5.1.12}$$

5.1.4 Newman 问题有解的必要条件

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.13}$$

根据定理 (5.5)，该问题的解为

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} \left[\Gamma\varphi - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} \right] \mathrm{d}S_x + \int_\Omega f\Gamma \, \mathrm{d}x \tag{5.1.14}$$

再考虑

$$\begin{cases} -\triangle u + \lambda u = f, & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.15}$$

其中 $f, \varphi, r \in \mathbb{R}$ 已知。

定义 5.6. 当 $f=0, \varphi=0$ 时，式 (5.1.15) 的解 u_λ 满足 $-\triangle u + \lambda u = 0$ in Ω, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$。如果 $u_\lambda \neq 0$，则称 u_λ 为与 (5.1.13) 对应齐次问题的特征函数，λ 为特征值。

由 Green 公式，

$$\Longrightarrow \int_{\Omega} (u\triangle u_\lambda - u_\lambda \triangle u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial u_\lambda}{\partial \vec{n}} - u_\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \mathrm{d}S_x$$
$$\Longrightarrow \int_{\Omega} f u_\lambda \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u_\lambda \varphi \,\mathrm{d}S_x = 0$$

定理 5.7. 问题 (5.1.15) 在 $\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ 中有解的必要条件是：对于任意满足 $-\triangle u+\lambda u=0$ in Ω, $u\Big|_{\partial\Omega}=0$ 的 $u_\lambda\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$，均有

$$\int_{\Omega} f u_\lambda \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u_\lambda \varphi \,\mathrm{d}S_x = 0 \tag{5.1.16}$$

该条件也是充分的。

5.2 Green 函数

5.2.1 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & \text{in } \Omega \\ u = \varphi, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.1}$$

取 $g(x,\xi)\in\mathcal{C}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ s.t. $g\Big|_{\partial\Omega}=-\Gamma(x,\xi)$, $\forall\xi\in\Omega$，且 $-\triangle_x g=0$ in $\Omega\times\Omega$，对于 u,g 使用 Green 公式，得到

$$\int_{\Omega}(g\triangle u - u\triangle_x g)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}g - \frac{\partial g}{\vec{n}}u\right)\mathrm{d}x \tag{5.2.2}$$

所以结合定理 (5.5)

$$0 = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}g - \frac{\partial g}{\vec{n}}u\right)\mathrm{d}x - \int_{\Omega} g\triangle u\,\mathrm{d}x$$
$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\vec{n}} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}S_x - \int_{\Omega}\triangle u\cdot\Gamma(x,\xi)\,\mathrm{d}x \tag{5.2.3}$$

再利用 $\cdot\ g\Big|_{\partial\Omega}=-\Gamma(x,\xi)$

$$u(\xi) = -\int_{\Omega}\triangle u G(x,\xi)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial n_x}(x,\xi)\,\mathrm{d}S_x \tag{5.2.4}$$

其中

$$G(x,\xi)=g(x,\xi)+\Gamma(x,\xi)$$

定义 5.8. 如果 $g\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$‘′ 满足

$$\begin{cases} -\triangle_x g = 0, & \forall x,\xi\in\Omega \\ g\Big|_{x\in\partial\Omega} = -\Gamma(x,\xi), & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.5}$$

则称 $G(x,\xi)=g(x,\xi)+\Gamma(x,\xi)$ 为问题 (5.2.1) 的 Green 函数。

注：根据调和函数的性质（最大值和最小值在边界达到），Green 函数是唯一的。

定理 5.9. 问题 (5.2.1) 在 $\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ 中如果有解，则解的表达式一定由式 (5.2.4) 给出，其中 G 为问题 (5.2.1) 的 Green 函数。

5.2.2 Newman 问题

考虑问题 (5.1.13)

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

解为

$$u(\xi)=\int_{\Omega} f(x)G(x,\xi)\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\varphi(x)G(x,\xi)\,\mathrm{d}S_x \tag{5.2.6}$$

定义 5.10. 如果 $g\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ 满足

$$\begin{cases} -\triangle_x g = 0, & \forall x,\xi\in\Omega \\ \left.\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in\Omega} = -\Gamma(x,\xi), & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.7}$$

则称 $G(x,\xi)=g(x,\xi)+\Gamma(x,\xi)$ 为问题 (5.1.13) 的 Green 函数。

5.2.3 混合问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi_1, & \text{on } \Gamma_1 \\ u = \varphi_2, & \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \tag{5.2.8}$$

定义 5.11. 如果 $g\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ 满足

$$\begin{cases} -\triangle_x g & = 0,\ \forall x,\xi\in\Omega \\ \left.\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma_1} & = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} \\ \left. g\right|_{\Gamma_2} & = -\Gamma \end{cases} \tag{5.2.9}$$

则称 $G(x,\xi)=g(x,\xi)+\Gamma(x,\xi)$ 为问题 (5.2.8) 的 Green 函数。

5.2.4 Green 函数的性质

我们以 Dirichlet 为例，介绍 Green 函数的性质。

定理 5.12. Poisson 方程的 Dirichlet 问题的 Green 函数满足

(i) $\triangle_x G(x,\xi)=0, \forall x\neq\xi\in\Omega$，$-\triangle_x G=\delta(x-\xi), \forall x,\xi\in\Omega$；

(ii) $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}(x,\xi)\,\mathrm{d}S_x=-1, \forall\xi\in\Omega$，并且 $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{G(x,\xi)}{\Gamma(x,\xi)}=1$，$\forall\xi\in\Omega$；

(iii) $\forall\eta,\xi\in\Omega$，$\eta\neq\xi$，均有 $G(\xi,\eta)=G(\eta,\xi)$；

(iv)

$$0<G(x,\xi)<\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{\mathrm{diam}(\Omega)}{|x-n|}, & n=2\\ \\ \dfrac{1}{(n-2)w_n|x-\xi|^{n-2}}, & n\geq 3\end{cases} \tag{5.2.10}$$

证明. (i) 因为 $G(x,\xi)=g(x,\xi)+\Gamma(x,\xi)$，并且 $\triangle_x g=0$ in Ω。

$$-\triangle_x\Gamma=\delta(x-\xi),\ \ \triangle_x\Gamma=0, x\neq\xi$$

(ii) $u\equiv 1$，则

$$\begin{cases}-\triangle u=0\\ u\Big|_{\partial\Omega=1}=\varphi\end{cases}$$

当 $u\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$，

$$1=-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S_x$$

因为 $\forall\xi\in\Omega$，

$$|g(x,\xi)|\leq\max_{x\in\partial\Omega}|\Gamma(x,\xi)|\leq C(\xi),\ \forall x\in\Omega \tag{5.2.11}$$

(iii) 取 $u(x)=G(x,\eta)$，$\Gamma(x)=G(\xi,x)$，令 $\Omega_\epsilon=\Omega\backslash\{B_\epsilon(\xi)\cup B_\epsilon(\eta)\}$，则

$$\int_{\Omega_\epsilon}(v\triangle u-u\triangle v)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega_\epsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}v-\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}u\right)\mathrm{d}S_x \tag{5.2.12}$$

令 $\epsilon\to 0^+$ 即证。

(iv) 任取 $\xi\in\Omega$（固定，考虑 x 的函数），因为

$$\begin{cases}-\triangle_x g=0, & \forall x,\xi\in\Omega\\ g\Big|_{x\in\partial\Omega}=-\Gamma(x,\xi), & \text{on }\partial\Omega\end{cases}$$

所以可以得到

$$g(x,\xi) < -\Gamma(x,\xi)\Big|_{x\in\partial\Omega} \leq \begin{cases} \frac{\ln \operatorname{diam}(\Omega)}{2\pi}, & n=2 \\ 0, & n\geq 3 \end{cases} \tag{5.2.13}$$

由此可以推出上界。

因为调和函数 $G(x,\xi)$ 在外边界恒为 0，在内边界，(调和函数一定在边界达到极值，如果在内部达到极值，那么这个调和函数一定是常数。)

$$g(x,\xi)\Big|_{x\in\partial B_\epsilon(\xi)} + \Gamma(x,\xi)\Big|_{x\in\partial B_\epsilon(\xi)} > 0$$

当小球半径缩小的时候，趋向于奇点，因此在内边界值很大，所以最小值在外边界取得，为 0。

□

考虑问题:

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f, \text{ in } \Omega \\ u\Big|_{\partial\Omega} &= \varphi \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

的解为

$$u(\xi) = \int_\Omega G(x,\xi)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x,\xi)\varphi(x)\,\mathrm{d}S_x \tag{5.2.15}$$

where

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \Gamma(x,\xi) + g(x,\xi) \\ \Gamma(x,\xi) &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)w_n|x-\xi|^{n-2}}, & n\geq 3 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

并且

$$g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}), \text{ s.t.}$$
$$\begin{cases} \triangle_x g(x,\xi) = 0, & \forall x,\xi\in\Omega \\ g\Big|_{x\in\partial\Omega} = -\Gamma(x,\xi), & \forall \xi\in\Omega \end{cases}$$

5.2.5 半空间中的 Green 函数

令 $\overline{\xi}$ 是 ξ 关于 $x_n=0$ 的对称点，即若 $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$，则 $\overline{\xi}=(\xi_1,...,\xi_{n-1},-\xi_n)$。则 $g(x,\xi)=-\Gamma(x,\overline{\xi})$ 为 $\mathbb{R}_n^+$ 的 Green 函数。

下面验证是解。

定理 5.13. 设 $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_n^+)$。对于 $\forall \alpha > 0$，$\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_n^+)$，则

$$u(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} G(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\mathbb{R}_n^+} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x,\xi)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_n^+ \tag{5.2.17}$$

是问题

$$\begin{aligned} -\triangle u(\xi) &= f(\xi), \text{ in } \mathbb{R}_n^+ \\ u\Big|_{\partial\mathbb{R}_n^+} &= \varphi \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

的古典解。其中 G 由 (5.2.16) 给出。

证明. **(i)** 证明 $-\triangle u(\xi) = f(\xi)$，

$$\begin{aligned} \triangle_\xi I_1 &= \int_{\mathbb{R}_n^+} \triangle_\xi G(x,\xi) f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (G(x,\xi) = -\delta(x-\xi)) \\ &= -f(\xi) \\ \triangle_\xi I_2 &= -\int_{\partial\mathbb{R}_n^+} \frac{\partial}{\partial n_x}(\triangle_\xi G)\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

(ii) 证明：$\forall \rho_0 \in \partial\mathbb{R}_n^+ = \mathbb{R}_{n-1}$，$\lim\limits_{\xi\to\rho_0} I_1 = 0$，趋向于边界时为 0。

$\because G(x,\xi) \xrightarrow{\xi\to\rho_0} 0$，$\therefore \lim\limits_{\xi\to\rho_0} I_1 = 0$。

再证明

$$-\lim_{\xi\to\rho_0} \int_{\partial\mathbb{R}_n^+} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x,\xi)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(\rho_0)$$

以 $n \geq 3$ 为例子，

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_x} &= \frac{1}{(n-2)w_n}\left[\frac{(-n+2)\frac{x_n-\xi_n}{|x-\xi|}}{|x-\xi|^{n-1}} - \frac{(-n+2)(x_n+\xi_n)}{|x-\overline{\xi}|^n}\right] \\ &= -\frac{2\xi_n}{w_n|x-\xi|^n}, \text{ when } x \in \partial\mathbb{R}_n^+, x_n = 0 \end{aligned}$$

因此，

$$I_2(\xi) = \frac{2\xi_n}{w_n}\int_{\mathbb{R}_{n-1}} \frac{\varphi(x)}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x$$

并且

$$\frac{2\xi_n}{w_n}\int_{\mathbb{R}_{n-1}} \frac{1}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x = 1$$

那么

$$\begin{aligned} |I_2(\xi) - \varphi(\rho_0)| &\leq \frac{2\xi_n}{w_n}\int_{\mathbb{R}_{n-1}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(\rho_0)|}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}_n^+ \\ &= \frac{2\xi_n}{w_n}\int\limits_{|x-\rho_0|\geq\frac{\delta}{2}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(\rho_0)|}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{|x-\rho_0|\leq\frac{\delta}{2}} \frac{\xi_n|\varphi(x)-\varphi(\rho_0)|}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
B &= \int\limits_{|x-\rho_0|\le\frac{\delta}{2}} \frac{\xi_n|\varphi(x)-\varphi(\rho_0)|}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x \\
&\le w_{n-1}\int_0^{\delta} \frac{\xi_n r^{n-1}}{(x-\xi')^2+\xi_n^2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \longrightarrow 0 \\
A &= \frac{2\xi_n}{w_n}\int\limits_{|x-\rho_0|\ge\frac{\delta}{2}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(\rho_0)|}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{w_n}\int\limits_{|x-\rho_0|\ge\frac{\delta}{2}} \frac{\xi|\varphi(x)-\varphi(\rho_0)|}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{4\|\varphi\|}{w_n}\xi_n\int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \frac{r^{n-2}w_{n-1}}{r^n}\,\mathrm{d}r \longrightarrow 0, \quad \text{最大模估计}
\end{aligned}
$$

□

注. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，保角变换能够通过变换变成半平面或者单位圆的区域如 Green 函数构造出来。

5.2.6 球形区域的 Green 函数

$B_a(x_0)=\left\{x\in\mathbb{R}^n,|x-x_0|<a^2\right\},y=\frac{x-x_0}{a}$，$\Longrightarrow B_1(0)$ 单位球。

(1) 单位球

我们希望：$g\Big|_{\partial B_1(0)}=-\Gamma(x,\xi)$，即 $\Gamma(x,\overline{\xi})=\Gamma(x,\xi)$，$\forall x\in\partial B_1(0)$。其中 $\overline{\xi}$ 为 ξ 关于单位球面的共轭点。

以上需要 $|x-\xi|=|x-\overline{\xi}|$，距离。考虑

$$g(x,\xi)=-\Gamma(cx,c\overline{\xi}),\forall|x|=1$$

我们只需要寻找 c。

$$\Gamma(cx,c\overline{\xi})=\Gamma(x,\overline{\xi})\ \Leftrightarrow|x-\xi|=|cx-c\overline{\xi}|$$

又因为 $\overline{\xi}=\frac{\xi}{|\xi|}\frac{1}{|\xi|}$，因此

$$
\begin{aligned}
|x-\xi|&=c\left|x-\frac{\xi}{|\xi|^2}\right|,\ \forall|x|=1 \\
\Leftrightarrow\ |x-\xi|^2&=c^2\left|x-\frac{\xi}{|\xi|^2}\right|^2 \\
\Leftrightarrow\ |x|^2-2|x\xi|+|\xi|^2&=c^2\left(|x|^2-\frac{2|x\xi|}{|\xi|^2}+\frac{1}{|\xi|^2}\right)
\end{aligned}
$$

其中，$|x|=1$ 在单位球面上。因此，$B_1(0)$ 的格林函数为

$$G(x,\xi)=\Gamma(x,\xi)-\Gamma\left(x|\xi|,\frac{\xi}{|\xi|}\right) \tag{5.2.19}$$

(2) $\Omega=B_a(x_0)$

接下来我们再考虑 $\Omega = B_a(x_0)$，

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(x), \text{ in } B_a(x_0) \\ u\Big|_{\partial B_a(x_0)} = \varphi(x) \end{cases}$$

作 $y = \frac{x-x_0}{a}$，因此 $B_a(x_0) \to B_1(0)$，令 $v(y) = u(x) = u(ay+x_0)$，可以得到

$$\begin{cases} -\triangle v(y) = a^2 f(ay+x_0) \\ v\Big|_{\partial B_1(0)} = \varphi(ay+x_0) \end{cases}$$

由 Poisson 公式，$\Rightarrow$

$$v(\xi) = a^2 \int_{B(0)} G(y,\xi) f(ay+x_0)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial G(y,\xi)}{\partial \vec{n}_y} \varphi(ay+x_0)\,\mathrm{d}S_y$$

对于 $\forall y \in B_a(x_0)$，有

$$\begin{aligned} u(y) =& a^{2-n} \int_{B_a(x_0)} \Gamma\left(\frac{x-x_0}{a}, \frac{y-x_0}{a}\right) - \Gamma\left(\left|\frac{y-x_0}{a}\right| \frac{x-x_0}{a}, \frac{y-x_0}{|y-x_0|}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\ & - a^{2-n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial n_x} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

定理 5.14. 设 $f \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{B_a(x_0)})$，则对于某个 $\alpha > 0$，$\varphi \in \mathcal{C}(\partial B_a(x_0))$，则由式 (5.2.20) 给出的 $u(y) \in \mathcal{C}^2(B_\alpha(x_0)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{B_\alpha(x_0)})$，并且满足 (5.2.16)。

(3) 半球 $B_a^+(x_0) \cap \{x_n > 0\}$

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(x), \text{ in } B_a(x_0) \\ u\Big|_{x_n=0} = \varphi_1(x), \quad \text{or } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi_1(x) \\ u\Big|_{\partial B_a(x_0) \cap \{x_n>0\}} = \varphi_0(x) \end{cases}$$

Green 函数：构造标准区域，其他区域向该区域靠。

Step 1: 作变换将 φ_1 化为零（齐次）

Step 2: 作奇（偶）延拓变成 $B_a(0)$ 上的问题

Step 3: 用定理 (5.14) 再将表达式限制在半球上

(4) 圆盘上的 Poisson 公式，将 (5.2.20) 写成球坐标形式

以 $n=2$ 为例，令 $x_0 = 0$，$x = (r\cos\alpha, r\sin\alpha), y = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$，则

$$\Gamma(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \ln(r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha-\theta))$$

并且

$$\Gamma\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right)-\Gamma\left(|y|\frac{x}{a^2},\frac{y}{y}\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\rho^2r^2+a^4-a^2\rho r\cos(\alpha-\theta)}{a^2[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)]}\right)$$

那么

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\Gamma\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right)-\Gamma\left(|y|\frac{x}{a^2},\frac{y}{y}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi a}\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\alpha-\theta)}$$

考虑 $\mathrm{d}x=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}S_x=r\,\mathrm{d}\alpha$，那么

$$\begin{aligned}u(y)=u(\rho,\theta)=&\frac{1}{4\pi}\int_0^a r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\ln\left[\frac{\rho^2r^2+a^4-2\rho a^2\cos(\alpha-\theta)}{a^2[\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\alpha-\theta)]}\right]f(r,\alpha)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\\&+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\alpha-\theta)}\varphi(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\end{aligned}\tag{5.2.21}$$

5.3 极值原理与最大模估计 (E. Hopf)

5.3.1 极值原理

$$Lu=-\triangle u+\sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}+c(x)u\tag{5.3.1}$$

其中 $\Omega\in\mathbb{R}^n$ 是开集，$b^i(x),c(x)$ 是定义在 Ω 上的已知函数。设 $x_0\in\Omega$, $u(x_0)$ 取到极大值，$u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$，由此

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\nabla u(x_0)=0,\ -\triangle u(x_0)\geq 0\\&\Rightarrow Lu(x_0)\geq c(x_0)u_0\end{aligned}$$

声明 5.15. 如果 $Lu<0$ in Ω，且 $c(x)=0$，则 u 在 Ω 中不可能取到正的极大值。由此可以知道

$$\max_{\overline{\Omega}}u\leq\max_{\partial\Omega}u^+$$

其中 $u^+(x)=\max\{u(x),0\}$, $u^-(x)=\min\{u(x),0\}$

定理 5.16. E. Hopf (1927) 弱极值定理. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集，并且 $\{b^i\}_{i=1}^n$ 中至少有一个函数在 Ω 中有界，且 $c(x)\geq 0$，$u\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$，则

(i) 如果 $Lu\leq 0$ in Ω，则

$$\max_{\overline{\Omega}}u\leq\max_{\partial\Omega}u^+$$

(ii) 如果 $Lu\geq 0$ in Ω，则

$$\min_{\overline{\Omega}}u\geq\min_{\partial\Omega}u^-$$

证明. 令 $v(x)=u(x)+\epsilon e^{ax_n}$，不妨设 $b_n(x)$ 有界，则

$$Lv=Lu+\epsilon e^{ax_n}\le \epsilon e^{ax_n}(-a^2+ab_n(x)+c(x))$$

因为 $b_n(x),c(x)$ 在 Ω 中有界，因此取 $a>>1$ 时，有

$$-a^2+ab_n(x)+c(x)<0,\ \text{in}\ \Omega$$

因此 $\forall a>0, Lv<0$ in Ω。由声明知:

$$\max_{\overline{\Omega}} v\le \max_{\partial\Omega} v^+$$

令 $\epsilon\to 0^+$，

$$\max_{\overline{\Omega}} u\le \max_{\partial\Omega} u^+$$

再令 $u=-v$，即可以证明 (ii)。 □

引理 5.17. Hopf 边界引理. 设 b^i, c 在 Ω 中有界 $(i=1,...n)$，且 $c(x)\ge 0$ in Ω，如果 $u\in\mathcal{C}^1(\overline{B_a(y)})\cap\mathcal{C}^2(B_a(y))$ 满足

(i) $Lu\le 0$ in Ω

(ii) $\exists x_0\in\partial B_a(y)$ s.t. $u(x_0)\ge 0, u(x)\le u(x_0)$ in $B_a(y)$

则对任意单位向量 $\vec{v}$, 只要它与 $\partial B_a(y)$ 在 x_0 处的外单位法向量夹角 $<\frac{\pi}{2}$, 则一定有 $\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(x_0)>0$。

证明. idea: $v(x)=u(x)+w(x)$，我们希望 $v(x)\le v(x_0)$，并且 $\frac{\partial w}{\partial \vec{v}}(x_0)<0$，则

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{v}}(x_0)\ge 0 \implies \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(x_0)\ge \frac{-\partial w}{\partial \vec{v}}>0$$

不妨设 $y=0$，$w=e^{-\delta|x|^2}-e^{-\delta a^2}$，满足 $\frac{\partial w}{\partial \vec{v}}<0$。再令 $v(x)=u(x)+\epsilon w(x)-u(x_0)$，其中 ϵ,δ 待定。

于是我们得到，$v\Big|_{|x|=a}=u(x)\Big|_{|x|=a}-u(x_0)\le 0$，

$$\max_{|x|=\frac{a}{2}}(u(x)-u(x_0))=A<0$$

因此可以取 $\epsilon_0>0$ s.t. $v(x)\Big|_{x=\frac{a}{2}}<0$，$\forall 0<\epsilon<\epsilon_0$。并且，

$$\begin{aligned}
Lv&=Lu+\epsilon Lw\\
&\le \epsilon\left(\sum_{i=1}^n b^i(x)x_i(2\delta)\right)-\left(-2\delta x_i e^{-\delta|x|^2}\right)\\
&\le \epsilon\left(\sum_{i=1}^n b^i(x)x_i(2\delta)+2\delta n-2\delta^2|x|^2+c(x)\right)e^{-\delta|x|^2}-\epsilon c(x)e^{-\delta|x|^2}\\
&<0,\ \text{if}\ \delta>>1
\end{aligned}$$

根据定理 (5.16)，$v(x) \le \max_{\Omega} v^+ = 0$，$v(x_0)=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \vec{v}} \ge 0$。又因为，如果夹角小于 $\frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\partial w}{\partial \vec{v}} = -\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \cos(\vec{n},\vec{v}) = 2are^{-ar^2}\cos(\vec{n},\vec{v}) > 0$$

则 $\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(x_0) > 0$。 □

定理 5.18. 强极值定理.

设 b^i, c 都在 Ω 中有界，$c(x) \ge 0$，$u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$，则

(i) 如果 $Lu \le 0$ in Ω，且 $\exists x_0 \in \Omega$，s.t. $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \ge 0$，则

$$u \equiv u(x_0)$$

(ii) 如果 $Lu \ge 0$ in Ω，且 $\exists x_0 \in \Omega$，s.t. $u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u \le 0$，则

$$u \equiv u(x_0)$$

证明. 只需要证明 (i)。令 $\{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$，则显然 E 不为空。

只需要证明 E 是 Ω 的相对闭集和开集，（则 E 只能为 Ω 或者 $\emptyset$，因为 E 非空，所以 $E=\Omega$。）

用连续函数的定义，E 只能为 Ω 或者 $\emptyset$，因为 E 非空，相对闭集成立。只要证 E 是 Ω 中的开集，因为 Ω 是开集，所以只要证明对于 $x \in E, \exists r > 0$ s.t. $B_r(x) \subset \Omega$。

若不存在，即存在 $\hat{x} \in B_r(x)$ s.t. $\hat{x} \in (\Omega \backslash E) \cap B_r(x)$，设 $d = |x - \hat{x}|$，则存在 $x_0 \in E$，s.t. $d = |\hat{x} - x_0|$，考虑 $B_d(\hat{x})$，$u(x_0) > u(x'), \forall x' \in B_d(\hat{x})$，由 Hopf 边界引理，$\frac{\partial u(x_0)}{\vec{v}} > 0$。

但是另一方面，$\nabla u(x_0) = 0$，因为 $x_0 \in E$，所以矛盾。 □

5.3.2 极值原理之推论

推论 5.19. 极值原理推论.

1. Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \Omega \\ u = \varphi, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.3.2}$$

在 $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ 上的解是唯一的（弱极值原理）。

2. 比较原理

$$\begin{cases} Lu \le Lv, & \text{in } \Omega \\ u \le v, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.3.3}$$

则 $u \le v$ in $\overline{\Omega}$。

3. b^i, c 都在 Ω 中有界，$c(x) \geq 0$，$u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$，并且 Ω 满足内球条件，则 Newman 问题

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.3.4}$$

在空间 $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ 上的任意两个解最多只相差一个常数。

证明. 只证明 (3)。

对任意两个解，u_1, u_2，则 $\max\limits_{\overline{\Omega}}(u_1 - u_2)$ 和 $\max\limits_{\overline{\Omega}}(u_2 - u_1)$ 至少有一个 ≥ 0，不妨设 $\max\limits_{\overline{\Omega}}(u_1 - u_2) \geq 0$。

令 $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$，若存在 $x_0 \in \Omega$，s.t. $v(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} v$，则 $v \equiv v(x_0)$ 为常数。

否则，$\exists x_0 \in \partial\Omega$，s.t. $v(x) < v(x_0), \forall x \in \Omega$。取 $B_r(\hat{x}) \subset \Omega$，s.t. 该球与边界 $\partial\Omega$ 相切于 x_0。由 Hopf 引理，$\frac{\partial v}{\partial \vec{v}}(x_0) > 0$，但是，

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{v}}(x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(x_0) = 0$$

矛盾。 □

5.3.3 最大模估计

记 $Ku = -\triangle u + c(x)u$

(1) Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Ku = f, & \text{in } \Omega \\ u = \varphi, & \text{on } \Omega \end{cases} \tag{5.3.5}$$

目标：找到 $Z(x) = c(f, \varphi, \Omega)$ s.t. $|u(x)| \leq Z(x), \forall x \in \overline{\Omega}$。即 $Z(x) \pm u(x) \geq 0$，这可以由定理 (5.16) 推出，即 $K(Z \pm u) \geq 0, Z \pm u\Big|_{\partial\Omega} \geq 0$。

我们来构造 $Z(x)$，

$$Z(x) = \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + C_1 \sup_{\Omega} |f| (d^2 - |x - x_0|^2) \tag{5.3.6}$$

其中 x_0 取定，$d = \text{diam}(\Omega)$，$C_1 \geq 0$ 待定。

$$\begin{aligned} KZ &= C_1 \sup_{\Omega} |f| (+2n) + c(x) Z \\ &\geq 2nC_1 \sup_{\Omega} |f| \\ &\geq \sup_{\Omega} |f| \end{aligned}$$

如果我们取 $C_1 = \frac{1}{2n}$。因此，$K(Z \pm u) \geq \sup\limits_{\Omega} |f| \pm f(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$，又因为 $Z \pm u\Big|_{\partial\Omega} \geq 0$，所以 $Z \pm u \geq 0$ in $\overline{\Omega}$。

定理 5.20. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界，$c(x)\geq 0$ 有界函数，$u\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ 是问题 (5.3.5) 的解，则

$$|u(x)|\leq\sup_{\partial\Omega}|\varphi|+\frac{d^2}{2n}\sup_{\Omega}|f|,\quad\forall x\in\overline{\Omega}\tag{5.3.7}$$

其中 $d=\mathrm{diam}(\Omega)$。

(2) 混合问题

$$\begin{cases}Ku=f, & \text{in }\Omega\\ \frac{\partial u}{\partial\vec{n}}+\alpha(x)u=\varphi, & \text{on }\Omega\end{cases}\tag{5.3.8}$$

其中 $\alpha(x)\geq\alpha_0>0$ 为了简化，不妨设原点在 Ω 中。

$$Z(x)=\frac{1}{2n}\sup_{\Omega}|f|(d^2-|x|^2)+C_1\tag{5.3.9}$$

C_1 给定，则 $KZ(x)=\sup\limits_{\Omega}|f|$，同上知 $K(Z\pm u)\geq\sup\limits_{\Omega}|f|\pm f(x)\geq 0$。只要找到 C_1，使得 $Z\pm u\Big|_{\overline{\Omega}}\geq 0$。

令 $w(x)=Z(x)\pm u(x)$，根据弱极值定理知，$w(x)$ 的负最小值在边界上取得，设为 x_0，$w(x_0)<0$。则根据强极值原理，$\frac{\partial w}{\partial\vec{n}}<0$，则

$$\frac{\partial w}{\partial\vec{n}}(x_0)+\alpha(x_0)w(x_0)\leq\alpha_0 w(x_0)<0$$

另一方面，我们需要

$$\frac{\partial w}{\partial\vec{n}}+\alpha(x)w(x)\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial Z}{\partial\vec{n}}+\alpha(x)Z(x)\pm\varphi(x)\geq 0$$

因此只需要 C_1 满足 $\frac{\partial Z}{\partial\vec{n}}+\alpha(x)Z(x)\geq\sup\limits_{\Omega}|\varphi|$ on $\partial\Omega$。

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial\vec{n}}+\alpha(x)Z(x)&=\frac{1}{2n}\sup_{\Omega}|f|(-2\vec{x}\cdot\vec{n})+\frac{\alpha}{2n}\sup_{\Omega}|f|(d^2-|x|^2)+\alpha(x)C_1\\ &\geq\frac{1}{2n}\sup_{\Omega}|f|(-d^2-1)+\alpha_0C_1\geq\sup_{\Omega}|\varphi|\end{aligned}$$

因此可以取

$$C_1=\frac{1}{\alpha_0}\left[\sup_{\Omega}|\varphi|+\frac{d^2+1}{2n}\sup_{\Omega}|f|\right]\tag{5.3.10}$$

因此我们可以推出在 x_0 处的矛盾，这样 $w(x)$ 就不存在负最小值。因此，$Z\pm u\Big|_{\overline{\Omega}}\geq 0$。

定理 5.21. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界，$c(x)\geq 0$ 有界函数，$\alpha(x)\geq\alpha_0>0$，$u\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ 是问题 (5.3.8) 的解，则

$$\begin{aligned}|u(x)|&\leq\frac{1}{\alpha_0}\left[\sup_{\Omega}|\varphi|+\frac{d^2+1}{2n}\sup_{\Omega}|f|\right]+\frac{d^2}{2n}\sup_{\Omega}|f|\\ &\leq C\left[\sup_{\Omega}|\varphi|+\sup_{\Omega}|f|\right]\end{aligned}\tag{5.3.11}$$

其中 $d = \mathrm{diam}(\Omega)$,

$$C = \max\left\{\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{2n}\left(\frac{d^2+1}{\alpha_0} + d^2\right)\right\} \tag{5.3.12}$$

5.4 能量估计

$$\begin{cases} -\triangle u + c(x)u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \Omega \end{cases} \tag{5.4.1}$$

引理 5.22. Friedrichs 不等式. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界，$u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$，且 $u = 0$ on $\partial\Omega$，则

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \le d^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \tag{5.4.2}$$

其中 $d = \mathrm{diam}(\Omega)$。

证明. 不妨设 $\Omega \subset \{0 \le x_i \le d\}$，则 $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$。

$\forall y = (y_n, y')$ 有

$$u(y) = \int_0^{y_n} \frac{\partial u}{\partial y_n}(t, y') \,\mathrm{d}t$$

则

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}y \le$$

□

6 Homework

作业 1. 第一周. 3 月 11 日交：教材 Chapter 1, 1 & 2.

作业 2. 第二周. 3 月 11 日交：教材 Chapter 1, 6,9,13,14,15,16.

作业 3. 第二周. 3 月 11 日交：教材 Chapter 2, 3(1)(4)。

作业 4. 第三周. 3 月 18 日交：教材 Chapter 2, 1,4,8.

作业 5. 第三周. 3 月 18 日交：教材 Chapter 2, 9 & 13.

作业 6. 第四周. 3 月 25 日交：教材 Chapter 2, 10 & 12.

作业 7. 第四周. 3 月 25 日交：教材 Chapter 2, 19 & 21.

作业 8. 第五周. 4 月 1 日交：教材 Chapter 2, 22(2)(4).

作业 9. 第五周. 4 月 1 日交：教材 Chapter 2, 23(3)(4), 25, 26(3)(4).

作业 10. 第六周. 4 月 8 日交?：教材 Chapter 2, 28
补充习题：求 $\mathbb{R}^n$ 中的函数 $u(x) = |x|^{-r}$ 的弱导数，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, r < n$。

作业 11. 第七周. 4 月 15 日交：教材 Chapter 2, 29

作业 12. 第七周. 4 月 15 日交：教材 Chapter 3, 1(1)(4), 2(2)(6), 3(1)

作业 13. 第八周. 4 月 22 日交：教材 Chapter 3, 4

作业 14. 第八周. 4 月 22 日交：教材 Chapter 3, 5(3,5), 6(1,3), 7(3)

作业 15. 第九周. 4 月 29 日交：教材 Chapter 3, 8(1,3)

作业 16. 第十周. 5 月 6 日交：教材 Chapter 3, 9(1,5), 10(2)

作业 17. 第十一周. 5 月 13 日交：教材 Chapter 3, 13,18,19,20,21

作业 18. 第十二周. 5 月 20 日交：教材 Chapter 3, 23

作业 19. 第十二周. 5 月 20 日交：证明 Lemma(5.2)(ii)

作业 20. 第十三周. 5 月 27 日交：教材 Chapter 4, 1, 3, 4, 5, 6, 8

作业 21. 第十四周. 6 月 3 日交：教材 Chapter 4, 14, 15, 19, 20, 21

作业 22. 第十五周. 6 月 10 日交：教材 Chapter 4, 24, 25, 32, 33

作业 23. 第十六周. 6 月 17 日交：教材 Chapter 4, 31, 34, 36