שאלה ראשונה – אינדוקציה חלשה

הוכיחו כי $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$ עבור כל $n \in Z^+$

נוכיח באינדוקציה על n

בסיס: נבדוק את הטענה עבור $n = 1$, נשים לב כי אכן $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו כלומר $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n + 1$, כלומר צ"ל כי $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + 3n + 1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

לפי הנחת האינדוקציה

מכאן הטענה נובעת.

טענות חזקות יותר

התרגיל הבא מדגים עקרון חשוב, עקרון זה מראה לפעמים נצטרך להוכיח טענה חזקה יותר מאשר הטענה שאנחנו צריכים להוכיח.

שאלה שנייה – טענה חזקה יותר

נגדיר את הסדרה הבאה:

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 2a_{n-1} + n \quad \forall n \geq 1$$

הוכיחו כי $a_n \leq 2^{n+2}$ עבור כל $n \geq 0$

נוכיח באינדוקציה על n

בסיס:

נבדוק האם הטענה נכונה עבור $n = 0$ ונקבל כי $a_0 = 0 \leq 2^2 = 4$

ואכן הטענה נכונה עבור מקרה הבסיס.

צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו ונוכיח עבור $n + 1$

לפי הנחת האינדוקציה

$$a_{n+1} = 2a_n + (n+1) \leq 2 \cdot 2^{n+2} + (n+1) = 2^{n+3} + (n+1)$$

נשים לב כי נתקענו, נרצה להוכיח כי $2^{n+3} + (n+1) \leq 2^{n+3}$ אבל לא נוכל להמשיך.

ולכן נוכיח טענה חזקה יותר, נוכיח כי $a_n \leq 2^{n+2} - 2n$ וזה יגרור ש $a_n \leq 2^{n+2}$ שזוהי הטענה המקורית.

<u>טענה חזקה יותר:</u> נוכיח כי $\forall n \geq 1$ עבור $a_n \leq 2^{n+2} - 2n$

נוכיח באינדוקציה על n

<u>בסיס:</u> עבור $n = 0$ נקבל כי $a_0 = 0 \leq 2^2 = 4$

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו ונוכיח נכונות על $n+1$,

כלומר צ"ל כי $a_{n+1} \leq 2^{n+3} - 2(n+1)$

נשים לב כי :

לפי הנחת האינדוקציה

$$a_{n+1} = 2a_n + (n+1) \leq 2 \cdot (2^{n+2} - 2n) + n + 1 = 2^{n+3} - 3n + 1 \leq 2^{n+3} - 2(n+1)$$

עבור כל $n \geq 3$ המעבר האחרון נכון כי :

$$-3n + 1 \leq -2(n+1) \quad \rightarrow \quad 3n - 1 \geq 2n + 2 \quad \rightarrow \quad n \geq 3$$

ולכן נותר להראות כי הטענה נכונה עבור $n = 1,2$. (את $n = 0$ הראנו במקרה הבסיס)

נראה זאת באופן ידני: $a_1 = 1 \leq 2^3 - 2$ ו $a_2 = 4 \leq 2^4 - 4$

מכאן הטענה נובעת.

<u>שאלה שלישית – אינדוקציה חזקה/שלמה</u>

נגדיר את הסדרה הבאה :

$b_0 = 1,\ b_1 = 2, b_2 = 3,\ b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$ עבור כל $n \in Z^+$

הוכיחו כי $b_n \leq 2^n \quad \forall n \in N$

<u>הערה:</u> <u>לא נעשה בתרגול. נעשה תרגול הבא.</u>

נוכיח באינדוקציה שלמה על n

<u>בסיס:</u> עבור $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ נקבל כי $b_0 = 1 \leq 2^0 = 1$, $b_1 = 2 \leq 2^1 = 2$, $b_2 = 3 \leq 2^3 = 8$ ולכן הטענה מתקיימת

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה עבור כל המספרים **<u>עד</u>** n ונוכיח נכונות על $n+1$,

כלומר צ"ל כי $b_{n+1} \leq 2^{n+1}$

נשים לב כי :

$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1} + b_{n-2} \leq 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0.875 \cdot 2^{n+1} < 2^{n+1}$$

מכאן הטענה נובעת.

- **הערה:** נשים לב כי יש צורך באינדוקציה **חזקה** היות ואם נשתמש באינדוקציה חלשה, לא נוכל להכליל את הטענה עבור b_{n-1} , b_{n-2}

<u>לסיכום:</u>

<u>אינדוקציה רגילה</u>	**<u>אינדוקציה שלמה (חזקה)</u>**
<u>מוכיחים:</u> 1. שלב בסיס S(0) 2. לכל $n \in N$, **אם** S(n) מתקיים **אז** גם $S(n+1)$ **<u>מסקנה:</u>** לכל $n \in N$ S(n) מתקיים	**<u>מוכיחים:</u>** 1. שלב בסיס S(0) 2. לכל $n \in N$, **אם** S(0),S(1)...S(n) מתקיים **אז** גם S(n+1) **<u>מסקנה:</u>** לכל $n \in N$ S(n) מתקיים
<u>אופן פעולת האנדוקציה</u> 1. בשלב הבסיס הוכחנו נכונות עבור 0 2. שלב הצעד גרר את 1, ואז 1 גרר את 2 וכו' .. $0 \to 1$ $1 \to 2$ $2 \to 3$ $\dots$ $n \to n+1$	**<u>אופן פעולת האנדוקציה</u>** 1. בשלב הבסיס הוכחנו נכונות עבור 0 שלב הצעד גרר מ0 את 1, ומ0 ו 1 את 2, ו0,1,2 את 3 וכו' .. $0 \to 1$ $0,1 \to 2$ $0,1,2 \to 3$ $\dots$ $0,1,2 \dots, n \to n+1$
<u>פורמט כתיבה:</u> **1. לרשום על מה מוכיחים** **נוכיח באינדוקציה על n** **2. נוכיח את שלב הבסיס S(0)** **נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=0$** **3. נניח כי $S(n)$ מתקיים ונוכיח נכונות עבור $S(n+1)$** **צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו ונוכיח כי הטענה נכונה עבור $n+1$** **כאשר נעזרים בהנחת האינדוקציה יש צורך לציין זאת "לפי הנחת האינדוקציה מתקיים..."**	**<u>פורמט כתיבה:</u>** **1. לרשום על מה מוכיחים** **נוכיח באינדוקציה על n** **2. נוכיח את שלב הבסיס S(0)** **נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=0$** **3. נניח כי הטענה מתקיימת עבור $S(0), S(1) \dots S(n)$ ונוכיח נכונות $S(n+1)$ מתקיים** **צעד: נניח כי הטענה נכונה <u>עבור כל המספרים עד</u> n ונוכיח כי הטענה נכונה עבור $n+1$** **כאשר נעזרים בהנחת האינדוקציה יש צורך לציין זאת "לפי הנחת האינדוקציה מתקיים..."**

<u>הערה:</u> ישנם טענות אשר לא מתחילות מ$n=0$ ולכן מקרה הבסיס הוא לאיבר הקטן ביותר אשר עליו צריך להוכיח את הטענה

מספרי פיבונאצ'י

הסדרה הרקורסיבית המפורסת ביותר היא כנראה של פיבונאצ'י שהופיעה לראשונה בספרו ב-1202.

סדרת פיבונאצ'י מוגדרת באופן הבא:

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

- כלומר מנוסחת הנסיגה נקבל את הסדרה הבאה: ... $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144$

סדרת פיבונאצ'י **<u>המורחבת</u>** מוגדרת באופן הבא:

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

- כלומר מנוסחת הנסיגה נקבל את הסדרה הבאה: ... $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144$
- נשים לב שבסדרה זו f_0 מוגדר.