```
w(T) = \sum_{e \in T} w(e) מציאת עץ פורש מינמלי: MST
                                                                                                                                                                                                                                O(V+E) חיפוש לעומק – DFS
                                        נכתב ע"י צבי מינץ
אוניברִסיטח
                                                                                                                                                                                             שימושים: מציאת מעגלים בגרף, מציאת רכבי קשירות, מיון
                                                                                                O(ElogE) און דליל נשתמש בגרף O(ElogE) און דליל
       אריאל
                    All Source– מציאת המסלול<u> הקצר <mark>מכל</mark> קודקוד</u>
                                                                                                                                              רעיון: מיער לעץ פורש
                                                                                                                                                                                                                             \overline{DFS-VISIT(u)}
                                 O(|V|^3) פלויד וורשל Floyd Warshall
                                                                                                                                                                                DFS(G):
                                                                                                                                                    A \leftarrow \emptyset 1. הגדר.
                                                                                                                                                                                                                             color[u] \leftarrow Gray
                                                                                                                                                                                 for each u \in V:
                                                                                                         2. חלק את כל הקודקודים לקבוצות: כל קודקוד
                                              קלט: מטריצת משקלים כאשר:
                                                                                                                                                                                     do\ color[u] \leftarrow white
                                                                                                                                                                                                                             time \leftarrow time + 1
                                                                                                                                                               בקבוצה
                                                                       (i,j) \notin E
                                                                                                                                                                                     \pi(u) \leftarrow null
                                                                                                                                                                                                                             d[u] \leftarrow time
                                                                                                                               3. מיין את הקשתות לפי משקל
                                         w(i,j) =
                                                                             i = i
                                                                                                                                                                                     time \leftarrow 0
                                                                                                                                                                                                                             for each v \in Adj[u]:
                                                                                                                       4. עבור על כל קשת לפי משקל עולה
                                                         w(i,j), (i,j) \in E
                                                                                                                                                                                for each u \in V:
                                                                                                                                                                                                                                  if\ color[v] = White
                                                                                                find(x) \neq find(y) אם (x, y) אבור קשת 4.1
                              D^{|\mathcal{V}|} מטריצת משקלים הקלה ביותר
                                                                                                                          union(x, y) 4.1.1
                                                                                                                                                                                     if\ color[u] = white
                                                                                                                                                                                                                                         \pi[v] \leftarrow u
  F.W(G):
                                                                                                                                                                                         DFS - VISIT(u)
                                                                                                                                                                                                                                          DFS - VISIT(v)
                                                                                                      A הוסף את הקשת לקבוצה 4.1.2
   for k = 1 to |V| do:
                                                                                                                                                                                                                             color[u] \leftarrow Black
                                                                                                              .םיים – סיים A אם A מכילה |V| קודקודים
              for i = 1 to |V| do:
                                                                                                                                                                                                                              f[u] \leftarrow time \leftarrow time + 1
                          for j = 1 to |V| do:
                                                                                                                               פרים Prim שימוש בגרף
                                                                                                                                                                                                      (קלט: גרף ללא מעגלים) O(V+E): מיון טופולגי
  D^{k}[i][j] \leftarrow min(D^{k-1}[i][j], d^{k-1}D[i][k] + d^{k-1}[k][j])
                                                                                                                                                                                    עבור כל f[v] עבור את אמני הסיום DFS(G) עבור כל
                                                                                                                              ("מתרחב") <mark>רעיון:</mark> מעץ לעץ פורש
                                                                                                                                       A = \{\}, Q \leftarrow V אתחל.
 Return D<sup>k</sup>
                                                                                                                                                                                    2. עבור כל קודקוד שסיים, הכנס אותו לראש הרשימה המקושרת
                                                                                                          \pi(u) \leftarrow \infty קבע u \in Q עבור כל קודקוד. 2
                                                                                                           key(u) \leftarrow \infty
       התא ה(i,j) במטריצה D^k מייצג את המסלול הקצר
                                                                                                                                                                                                                                 3. החזר את הרשימה המקושרת
                                         k ביותר בין i, j דרך קודקוד
                                                                                                                                                                                              O(V+E) SCC אלגוריתם למציאת רכבי קשירות חזקה
                                                                                                     key(s) ← 0 וקבע s ∈ Q בחר קודקוד רנדומלי 3.
     אם יש מעגל שלילי בגרף האלכסון לא יהיה רק אפסים
                                                                                                                                                                                     עבור כל f[v] עבור ל מנת לחשב את זמני הסיום DFS(G) עבור כל
                                                                                                                                               לא ריק Q לא ריק.
        במילוי במטריצה העמודה הk והשורה הk נשארת
                                                                                                                                                                                                                                                                      12 F V
                                                                                                                         (key לפי) u \leftarrow DeleteMin(Q)
                                 אות<u>ו דבר והאלכסון תמיד אפסים</u>
                                                                                                                                                                                                                                                      (G^T) חשב את .2
                                                                                                     A = A \cup (u, \pi(u)) אם אב של u לא null, אז
                                                                                                                                                                                     אבל בלולאה הפנימית, עבור על הקודקודים DFS(\hat{G}^T) 3.
            O((VE) + V((V + E)logV)) Johnson גונסון
                                                                                                                             u של v עבור כל קודקוד שכן
                                                                                                                                                                                                                                                     לפי זמני סיום יורד
                                                                                                                   w(u,v) < key(v) ו v \in Q אם
                                             h:V \to \mathbb{R}^+ נגדיר פונקציה
                                                                                                                                                                                   4. קבוצת הקודקודים בכל עץ ביער העומק הם רכיב קשירות נפרד
                                                                                                                                    \pi[v] \leftarrow u
                   w'(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v) כך ש
                                                                                                                                                                                                             ((u,v) סיווג קשתות בגרף (מדובר על קשת
                                                                                                                                  \leftarrow w(u,v)
                             באופן שבו 2 התנאים הבאים יתקיימו:
                                                                                                                                                                                                                                         oldsymbol{v} אם oldsymbol{v} לבן אז זוהי קשת
                                                                                                                                  לחלופין: (דרך משפט החתך)
                                        w'(u,v) \geq 0 עבור כל צלע.1
                                                                                                                                                                                                                                אם v אפור אז זוהי קשת אחורה
                                                                                                                                                   A = \{s\} 1.
              w'(p) = \delta'(v_1, v_k) \Leftrightarrow w(p) = \delta(v_1, v_k).2
                                                                                                                                                                                   אם v אחרת, אחרת, קשת d(u) < d(v) אם אם v
                                                                                                                              i = |V| - 1 עד i = 1 מוץ מ.2
                                             : גרף חדש כך שG' גרף חדש כך ש
                                                                                                                                                                                                                                              חוצה. (רק בגרף מכוון)
                                                                                                       מצא קשת (u,v) בעלת המשקל מינמלי 2.1
                                                     V' = V \cup \{s\}
                                                                                                                                                                                                   <u>טענה</u>: גרף הוא חסר מעגלים אם"ם אין קשתות אחורה
                                                                                                      u \in A, v \in V - A בחתך (A, V - A) בחתך
                                                                                                                                                                                        d(u) < d(v) < f(v) < f(u)משפט הסוגריים: יכול להיות
                                        E' = E \cup (s, v) \ for \ all \ v \in V
                                                                                                                              A את v לקבוצה 2.2
        h(v) = \delta(s, v) נריץ בלמן פורד על קודקוד s נריץ בלמן פורד על
                                                                                                                                                      A החזר את.
                                                                                                                                                                                        u אם"ם בזמן הגילוי של v צאצא אם המסלול הלבן: v
                                                    (u,v) \in E' געבור כל.3
                                                                                                                   Oig((E+V)logVig) : סיבוכיות: דרך ערמה
                     w'(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v) קבע
                                                                                                                               O(E + \hat{V}^2) בערמה:
                                                                                                                                                                                                                         מסלול לv שמורכב רק מצמתים לבנים
                                                   v \in V עבור כל קודוד.4
                                                                                                         \mathbf{O}(ElogV) ולכן עבור גרף צפוף |V| > |V| נקבל
                        קודקוד v קודקוד אורץ דיקטסטרה עבור
                                                                                                                                                                                                                                O(V+E) חיפוש לרוחב – BFS
                     \delta'(u,v) מקור על מנת למצוא את
                                                                                                Single Source מציאת המסלול הקצר מקודקוד מקור
          \delta(u,v) = \delta'(u,v) - h(u) + h(v) קבע 4.2
                                                                                                                                                                                        s שימושים: מציאת מרחקים בגרף לא ממושקל מקודקוד מקור
                                                                                                       \delta(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u,v) אי שיוון המשולש:
    F = \sum_{e \in (S \to \overline{S})} f(e) - \sum_{e} f(e) = \sum_{e} f(e) = \sum_{e} f(e) - \sum_{e} f(e) = \sum_{e} f(e) =
                                                                                                                                                                                     מימוש ע"י תור BFS
                                                                      זרימה בגרף
                                                                                                                                                                                                                                                        אתחל תור 0.
                                                                                             \overline{Relaxation(u, v, w(u, v))}
                                                                                                                                                                                                                                             2. הכנס את s לתוך התור
                                                      זרימה מקיימת 2 תנאים:
                                                                                                                                                                                                                                color[n] = white
                                                          0 \le f(e) \le c(e).1
                                                                                             if (d[v] > d[u] + w(u, v)) then:
                                                                                                                                                                                                                                                        3. אתחל מערך
                                                                                                                                                                                                                                    \pi[n] = null
                                   \sum_{e \in E^- v} f(e) = \sum_{e \in E^+ v} f(e) .2
                                                                                                                   d[v] = d[u] + w(u, v)
                                                                                                                                                                                                                                    dist[n] = \infty
    חתך מינימלי של רשת זרימה הוא חתך כזה שהקיבולת שלו
                                                                                                               O((V+E)logV) דיקסטרה Dijkstra
                                                                                                                                                                                                                                         color[s] = grey
                                  מינימלית מבין כל החתכים של הרשת.
  c\left(S,\overline{S}
ight) = \sum_{e\in S	o \overline{S}}c\left(e
ight) משפט זרימה מקסמלית – חתך מינמלי
                                                                                                                                                                                                                                            \pi[s] = null אתחל.
                                                                                                                                     קלט: גרף ממושקל אי שלילי
                                                                                                                                                                                       מימוש ע"י DFS
                                                                                                                                                                                                                                             dist[s] = 0
                                                                                                                                                                                            מחסנית
                                                                                             \overline{D}ijkstra(G,s)
             גודל הזרימה המקסימאלית ברשת שווה לקיבול החתך
                                                                                                                                                                                                                                             :כל עוד Q לא ריק בצע.
                                                                 המינימלי ברשת.
                                                                                              for each v \in V
                                                                                                                                                                                                                                                v \leftarrow Q.pull().6
                                                                                                                                                                                                                                         v של u של 7.
                                         <u>שלושת התנאים הבאים שקולים:</u>
                                                                                             d[v] = \infty, \pi[v] = null
                                                                                                                                                                                                                                  color[u] = white אם. 8
                               היא זרימה מקסמלית ברשת זרימה f.1
                                                                                              d[s] = 0, S = \emptyset, Q = V, \pi[s] = null
                                                                                                                                                                                                                          color[u] = gray .9
     2. הגרף השיורי של רשת הזרימה עבור הזרימה f לא מכיל
                                                                                                                                                                                                                                   \pi[u] = v קבע. 10
                                                                     מסלולי שיפור
                                                                                                                                                                                                                      dist[u] = dist[v] + 1 קבע.
       |f| = c(\chi) כמות הזרימה שווה לקיבול של חתך כלשהו 3.
                                                                                                             u \leftarrow ExtractMin(Q)
                                                                                                                                                                                                                                  Q ל u ל רכנס את u ל
                                                             \chi = (V_s, V_t) עבור
                                                                                                             S = S \cup \{u\}
                                                                                                                                                                                  FFT(n,a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1},\omega)
                                                                                                                                                                                  if n = 1 return P = y = a_o
                                                                                                             for each v \in Adj[u]
                                                                                                                                                                                                                                                               n = 1
                         רשת זרימה G ופונקציית זרימה f המוגדרת עליה מגדירים לכל קשת
                                   שתי קשתות אנטי מקבילות עם קיבול שיורי f\left(e
ight)
                                                                                                                            Relaxation(u, v, w(u, v))
                                        .c(e)-f(e) שורי (u,v) עם קיבול שיורי
                                                                                                                                                                                  y^{even} \leftarrow FFT\left(\frac{n}{2}, a_0, a_2, a_4, \dots, a_{n-2}, \omega^2\right)
                                                                                                                  O(V \cdot E) בלמן פורד Bellman-Ford
                                              f(e) עם קיבול שיורי (v,u) קשת אחורית
                                                                                                                                                                                                      \left(\frac{n}{2}, a_1, a_3, a_5 \dots, a_{n-1}, \omega^2\right)
                            הגרף השיורי G, הוא אוסף כל הקשתות עם קיבול שיורי חיובי
                                                                                              Bellman - Ford(G, s)
                f^* = Max Flow - O(|E|f^*) FORD-FULKERSON
                                                                                             for each v \in V
                                                                                                                                                                                                          \frac{1}{2} – 1 do:
 for each edge (u, v) \in G.E
                                                                                              d[v] = \infty, \pi[v] = null
                                                                                                                                                                                               y_i = y_i^{e\overline{ven}} + x y_i^{odd}
      (u, v).f = 0
                                                                                              d[s] = 0
                                                                                                                                                                                              y_{i+\frac{n}{2}} = y_i^{even} - x y_i^{odd}
 while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
                                                                                              for i = 1 to |V| - 1
      c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } p\}
                                                                                                            for each (u, v) \in E
      for each edge (u, v) in p
            if (u, v) \in E
                                                                                                                         Relaxation(u, v, w(u, v))
                                                                                                                                                                                  return y
                  (u, v).f = (u, v).f + c_f(p)
                                                                                              for each (u, v) \in E
                                                                                                                                                                                                                      \omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1}
            else (v, u).f = (v, u).f - c_f(p)
                                                                                                                        if(d[v] > d[u] + w(u, v))
                                                                                                                                                                                                                                       w_n^{n+k} = w^k
                                                                                                                                                                                                                       \omega_n^{\frac{n}{2}} = -1
                                                                                                                                                                                                       (\omega_n^k)^j = 0
                                            O(|V| \cdot |E|^2). Edmonds-Karp
                                                                                                                               return "No Solution"
                                 1. אורך המסלול מs לv לא יכול לרדת
                                                                                                  אינווראינטה: לאחר האיטרציה הk של הלולאה
             \simבל קשת יכולה להיות קשת קריטית לכל היותר^{|\mathcal{V}|}
                                                                                                  החיצונית, כל קודקוד עם מרחק מקודקוד המקור
                                                                                                                                                                                                        \omega_1^2[-1]
     for each edge (u,v) \in E[G]
do f[u,v] \leftarrow 0
                                                                                                                                                                                           \omega_1^1[i]
                                                                                                                                                                                                                        \omega_1^3[-i]
                                                                                                                                                                                                                                                                       Vandermonde
                                                                                                 באורך לכל היותר k מכיל בתוכו את הערך הנכון.
                                                                                                                                                                                         \omega_{2}^{1}[-1]
                                                                                                                                                                                                        \omega_2^2[1]
                                                                                                                                                                                                                        \omega_2^3[-1]
  3 while a path p from s to t is found by BFS, in the
                                                                                                                                                                                         \omega_3^1[-i]
                                                                                                                                                                                                        \omega_3^2[-1]
                                                                                                                                                                                                                         \omega_3^3[i]
          residual network do c_f(p) \leftarrow \min \{ c_f(u,v) : (u,v) \text{ is in } p \}
                      for each edge
                                     edge (u,v) in p (u,v) \in E[G]
                                                                                                                                                                        135
                                                                                                             0
                                                                                                                                45
                                                                                                                                                    90
                                                                                                                                                                                             180
                                                                                                                                                                                                                  225
                                                                                                                                                                                                                                      270
                                                                                                                                                                                                                                                           315
                                      then f[u,v] \leftarrow
                                                                                                                                                                                               -1
                                     else f[u,v] \leftarrow f[v,u] - c_f(p)
                                                                                                                         +i
                                                                                                                                                                    +i
                                                                                                                                                                                                               - i
                                                                                                                                                                                                         \sqrt{2}
                                                                                                                                                                                                                   \sqrt{2}
  O(VlogV ) מינמלי \sum_{i=0}^{\Sigma} l_i w_i עץ הופמן: מחפשים
                                                                             הוכחת נכונות לאלגורתמים חמדני:
                                                                                                                                                                <u>עם</u> משקלים
שליליים
                                                                  נכונות תת המבנה האופטמל
                                                                                                                      O(E \cdot f^*)
                                                                                                                                      משקולות אי
                                                                                                                           שליליים,
אחרת |V|
דיקסטרה
                                                                                                                                               717
                                                                       1. נכונות הבחירה החמדנית
                                                                                    cos
                                                                                                                                                                                ξ,
                                                                                                                                                                                                                                                                   מרחקים
גרף <u>לא</u>
ממושקל
                                                                                                                                                                        שליליים
                                                                                                                                                                            מעגלים
                                                                                                                                                                                                    מעגלים
                                                                                                           6 3 b
                                                                                  \frac{2k\pi}{n}
                                                                                                                                   Johnson
All S
O([V]<sup>2</sup>log
+ [V][E])
                                                                                                                                                                                                            MST
O(Elogi
                                                                                                                                                                                                                         O(Elog)
                                                                                                                                                                                                       DIJKSTRA
                                                                                                                                                                                                                     KRUSKAL
                                                                                                                                                                                                                                                                       0 (V +
                                                                                                             FULKERS
                                                                                                                                                                           N-FORD
                                                                                                                                                                                                                                                               טופולגי
         right(z) \leftarrow y \leftarrow Extract - Min(Q)
         insert(Q,z)
 return Extract - Min(Q)
```