<u>משפט</u>: V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$. $B=\{\vec{b_1},\vec{b_2},\dots,\vec{b_n}\}$ בסיס ל-V **אם ורק אם** לכל $\vec{w}\in V$ קיימת הצגה יחידה $\vec{w}=\alpha_1\cdot\vec{b_1}+\alpha_2\cdot\vec{b_2}+\dots+\alpha_n\cdot\vec{b_n}$, כאשר: $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$.

הגדרה: **<u>קואורדינטות לפי בסיס</u>**

V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $\vec{w}\in V$. קיימת הצגה יחידה מהצורה $\vec{w}=\alpha_1\cdot\vec{b_1}+\alpha_2\cdot\vec{b_2}+\dots+\alpha_n\cdot\vec{b_n}$, כאשר $B=\{\vec{b_1},\vec{b_2},\dots,\vec{b_n}\}$ בסיס של V. מתקיימת ההתאמה (העתקה) הבאה:

$$[\vec{w}]_B \quad\leftrightarrow\quad \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

<u>תכונות עיקריות של קואורדינטות לפי בסיס</u>:

עבור כל V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $B=\{\vec{b_1},\vec{b_2},\dots,\vec{b_n}\}$ ל-V מתקיים:

1. ההתאמה בין וקטור לקואורדינטות הבסיס היא חד חד ערכית ועל.
2. לכל $\vec{u}\in V,\vec{w}\in V$, מתקיים $[\vec{u}+\vec{w}]_B=[\vec{u}]_B+[\vec{w}]_B$.
3. לכל $\alpha\in\mathbb{F},\vec{w}\in V$, מתקיים $[\alpha\cdot\vec{w}]_B=\alpha\cdot[\vec{w}]_B$.

הגדרה **<u>מטריצת מעבר מבסיס B לבסיס C</u>:**

V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, $C=(\vec{c_1},\vec{c_2},\dots,\vec{c_n}),B=(\vec{b_1},\vec{b_2},\dots,\vec{b_n})$ שני בסיסים של V.

נסמן:

$$[I]_C^B=\left[[\vec{b_1}]_C\middle|[\vec{b_2}]_C\middle|\dots|[\vec{b_n}]_C\right]$$

$[I]_C^B$ – זו מטריצה $n\times n$. העמודה מספר j של $[I]_C^B$, היא עמודת קואורדינטות של $\vec{b_j}$ לפי בסיס C.

<u>תכונה עיקרית</u>: לכל $\vec{w}\in V$

$$[I]_C^B\cdot[\vec{w}]_B=[\vec{w}]_C$$

<u>תכונות</u>:

עבור כל V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, $C=(\vec{c_1},\vec{c_2},\dots,\vec{c_n}),B=(\vec{b_1},\vec{b_2},\dots,\vec{b_n})$ שני בסיסים של V מתקיים:

1. המטריצה $[I]_C^B$, היא הפיכה.
2. $[I]_B^C=([I]_C^B)^{-1}$.
3. אם D הוא גם בסיס של V אז מתקיים: $[I]_D^B=[I]_D^C\cdot[I]_C^B$.

הגדרה **<u>העתקה לינארית</u>:**

יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$ העתקה $T:V\to W$ נקראת לינארית אם:

1. לכל $\vec{u}\in V,\vec{v}\in V$ מתקיים: $T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$. (אדיטיביות)
2. לכל $\vec{u}\in V,\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים: $T(\alpha\cdot\vec{v})=\alpha\cdot T(\vec{v})$. (קומוטטיביות)

<u>תכונות מיידיות</u>:

1. יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל השדה $\mathbb{F}$. תהי $T:V\to W$ העתקה המקיימת את התכונה הבאה: $T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$ לכל $\vec{u}\in V,\vec{v}\in V$ אזי $T(\vec{0_V})=(\vec{0_W})$.
2. V,M מרחבים וקטוריים מעל השדה $\mathbb{F}$. $T:V\to W$. היא העתקה ליניארית **אם ורק אם** לכל $\vec{u},\vec{v}\in V,\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $T(\vec{u}+\alpha\vec{v})=T(\vec{u})+\alpha T(\vec{v})$.

<u>מסקנה</u>: אם $T:V\to W$ העתקה ליניארית אז $T(\vec{0})=\vec{0}$.

משפט: יהי U,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{Q}$, $T:V\to W$ העתקה, אם לכל $\vec{u},\vec{v}\in U$ מתקיים: $T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$. אזי T העתקה ליניארית.

משפט: אם $f:V\to W$, $f(\vec{0})=\vec{w}\neq\vec{0}$, אז f איננה העתקה ליניארית. תנאי זה הכרחי להעתקה ליניארית אך לא מספיק.

הפוך לא נכון.

הגדרה **אופרטור ליניארי**: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אופרטור ליניארי מוגדר כהעתקה ליניארית $T:V\to V$.

גרעין ותמונה של העתקה ליניארית

הגדרה **גרעין**:
V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$. $T:V\to W$ העתקה ליניארית, הגרעין של T מוגדר באופן הבא:

$$\ker T=\{\vec{u}\in V | T(\vec{u})=\vec{0}\}$$

הגדרה **תמונה**: V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$. $T:V\to W$ העתקה ליניארית, התמונה של T מוגדר באופן הבא:

$$\mathrm{Im}T==\{\vec{w}\in W | \exists\vec{u}\in V: T(\vec{u})=\vec{w}\}$$

טענה: $\ker T$ מהווה תת-מרחב ב-V.

טענה: $\mathrm{Im}T$ מהווה תת-מרחב ב-W.

הגדרה: עבור ההעתקה הליניארית $f:A\to B$, f היא **על** אם:

$$\mathrm{Im}(f)=B$$

הגדרה: עבור ההעתקה הליניארית $f:A\to B$, f היא **העתקה חד חד ערכית** אם:

$$a_1\neq a_2\to f(a_1)\neq f(a_2)$$

ניתן גם להגדיר באופן הבא:

הגדרה: עבור ההעתקה הליניארית $f:A\to B$, f היא **העתקה חד חד ערכית** אם:

$$f(a_1)=f(a_2)\to a_1=a_2$$

טענה: V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, $T:V\to W$ ליניארית. T חח"ע **אם ורק אם** $\ker T=\{\vec{0}\}$.

טענה: V,M מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, $T:V\to W$ ליניארית.
אם:

$$\mathrm{V}=span(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$$

אז:

$$\mathrm{Im}T=span\big(T(\vec{v_1}),T(\vec{v_2}),\dots,T(\vec{v_n})\big)$$

טענה: V,M מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, $T:V\to W$ ליניארית. אם $T(\vec{v_1}),T(\vec{v_2}),\dots,T(\vec{v_n})$ בלתי תלויים ליניארית ב-W, אז: $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}$ בלתי תלויים ליניארית ב-V.

טענה: V,M מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, $T:V\to W$ ליניארית. אם $T(\vec{v_1}),T(\vec{v_2}),\dots,T(\vec{v_n})$ בלתי תלויים ליניארית ב-W, אז: $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}$ בלתי תלויים ליניארית ב-V.

משפט הממדים:

משפט המימדים : V,W מרחבים וקטורים מימניד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, $T:V\to W$ העתקה ליניארית אזי :
$$\dim(\ker T)+\dim(\mathrm{Im}T)=\dim V$$

טענה (אחת מהמסקנות החשובות של משפט המימדים) : V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, (סופי) $\dim V+\dim W=n$. $T:V\to W$ העתקה ליניארית אזי : T חח"ע **אם ורק אם** T "על".

טענה : $T:V\to W$ העתקה ליניארית, V מימד סופי. T חח"ע אם ורק אם T "על" אם ורק אם V לא מימד סופי, הטענה לא נכונה.
יהי V מרחב סדרות ממשיות $V=\{(a_1,a_2\ldots)|a_i\in\mathbb{R}\}$

טענה : V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, V מימד סופי, $\dim V<\dim W$, $T:V\to W$ העתקה ליניארית. אזי T לא "על".

טענה : V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, W מימד סופי, $\dim V>\dim W$, $T:V\to W$ העתקה ליניארית. אזי T לא חח"ע.

טענה : V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, $B=\{\vec{b_1},\vec{b_2},\ldots,\vec{b_n}\}$ בסיס ל-V , $\vec{w_1},\vec{w_2},\ldots,\vec{w_n}\in W$, אזי קיימת העתקה ליניארית יחידה $T:V\to W$ כך ש : $T(\vec{b_i})=\vec{w_i}$ לכל $1\le i\le n$.

פעולות על העתקות ליניאריות:

V,W מררחבים וקטורים מעל השדה $\mathbb{F}$. $T:V\to W$, $S:V\to W$ העתקות ליניאריות.
הגדרת סכום של $T+S$: לכל $\vec{u}\in V$

$$T+S:V\to W$$
$$(T+S)(\vec{u})=T(\vec{u})+S(\vec{u})$$

הגדרת כפל בסקל : לכל $\alpha\in\mathbb{F}$

$$\alpha\cdot(T+S):V\to W$$
$$\big(\alpha(T+S)\big)(\vec{u})=\alpha\cdot(T+S)(\vec{u})$$

טענה : $T+S$ היא העתקה ליניארית.

טענה : $\alpha\cdot T$ היא העתקה ליניארית.

הגדרה : קבוצת כל העתקות הליניאריות מ-V ל-W מסומנות בדרך כלל $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ או $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}(V,W)$.

טענה : $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ביחס לפעולות חיבור וכפל בסקלר שהגדרנו.

הרכבת העתקות ליניאריות:

הגדרה : U,V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$

$$U\xrightarrow{T}V\xrightarrow{S}W\quad\begin{pmatrix}T:U\to W\\ S:V\to W\\ \text{ליניאריות}\end{pmatrix}$$
$$S\cdot T(\vec{u})=S\big(T(\vec{u})\big)$$

$$S \cdot T: U \to W$$

טענה : ההרכבה $S \cdot T$ היא הרכבה ליניארית עבור S, T העתקה ליניארית.

מטריצה מייצגת של העתקה ליניארית:

הגדרה : תהא U, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ בסיס ל-V, $C = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_k}\}$ בסיס ל-W. $T: V \to W$ העתקה ליניארית.

$$[T]_C^B = \left[\left[T\left(\overrightarrow{b_1}\right)\right]_C \middle| \left[T\left(\overrightarrow{b_2}\right)\right]_C \middle| \dots \middle| \left[T\left(\overrightarrow{b_n}\right)\right]_C \right]$$

$$[T]_C^B \cdot [\vec{u}]_B = [T(\vec{u})]_C$$

$[T]_C^B$ נקראת **מטריצה מייצגת** של העתקה T בבסיסים C, B.

העמודה מספר j של $[T]_C^B$ היא עמודת קואורדינטות שך $T\left(\overrightarrow{b_j}\right)$ לפי בסיס C.

$[T]_C^B$ היא מטריצה היא מטריצה $k \times n$ כאשר :

$$\dim(V) = n$$
$$\dim(W) = k$$

תכונה עיקרית : לכל $\vec{v} \in V$ מתקיים : $[T]_C^B \cdot [\vec{v}]_B = [T(\vec{v})]_C$

הקשר בין תכונה עיקרית לבין מטריצת מעבר בין בסיסים : יהי $I: V \to V$ העתקת הזהות המוגדרת כך : לכל $\vec{v} \in V$ מתקיים $I(\vec{v}) = \vec{v}$. כאשר $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$, $C = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_n}\}$ בסיסים ל-V. אזי מתקיים :

$$[I]_C^B \cdot [\vec{v}]_B = [\vec{v}]_C$$

הרחבה : יהי $U_1, U_2, \dots, U_m$, וגם $T_1: U_1 \to U_2, T_2: U_2 \to U_3, \dots, T_{m-1}: U_{m-1} \to U_m$ העתקות ליניאריות כאשר B_i, בסיס ל-U_i.

$$[T_1 \circ T_2 \circ \dots \circ T_n]_{U_1}^{U_m} = [T_1]_{U_1}^{U_2} \cdot [T_1]_{U_2}^{U_3} \cdot \dots \cdot [T_1]_{U_{m-1}}^{U_m}$$

נוסחה : יהי $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ בסיס ב-$\mathbb{F}^n$, $C = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_k}\}$ בסיס ב-$\mathbb{F}^k$. E_n בסיס סטנדרטי ב-$\mathbb{F}^n$, E_k בסיס סטנדרטי ב-$\mathbb{F}^k$. אם T מפורשת אזי :

$$[T]_C^B = [I]_C^{E_k} \cdot [T]_{E_k}^{E_n} \cdot [T]_{E_n}^B$$

זוהי למעשה דרך קלה למציאת $[T]_C^B$, אם $[T]_C^B$ נתונה ונרצה למצוא את הייצוג בבסיסים הסטנדרטים אז :

$$[T]_{E_k}^{E_n} = [I]_{E_k}^C \cdot [T]_C^B \cdot [I]_B^{E_n}$$

תכונות נוספות של $[T]_C^B$:

1. חיבור : $S: V \to W, T: V \to W$ העתקות ליניאריות : $[T + S]_C^B = [S]_C^B + [T]_C^B$
2. כפל בסקלר : לכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $T: V \to W$ מתקיים : $\alpha \cdot [T]_C^B = [\ \alpha \cdot T]_C^B$
3. W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$

$$U \underset{\to}{^T} V \underset{\to}{^S} W \quad \begin{pmatrix} T: U \to W \\ S: V \to W \\ \text{ליניאריות} \end{pmatrix}$$

יהי B בסיס ל-U, C בסיס ל-V, D בסיס ל-W.

$$[T \cdot S]_D^B = [T]_D^C \cdot [S]_C^B$$

מסקנה 1 :

יהי העתקה ליניארית :

$$T: V_B \to W_{C,D}$$

כאשר B בסיס ל-V, C,D בסיסים שונים של W.

$$[T]_C^B = [I]_C^D \cdot [T]_D^B$$

<u>מסקנה 2</u>:

יהי העתקה ליניארי:

$$T: V_B \to W_{C,D}$$

כאשר B,H בסיס ל-V, C,D בסיסים שונים של W.

$$[T]_C^B = [I]_C^D \cdot [T]_D^H \cdot [I]_H^B$$

$$I_W \cdot T \cdot I_V = T$$

$$V \xrightarrow{I_V} V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{I_W} W$$

<u>הגדרה, אופרטור</u>: יהיה מרחב וקטורי V, וגם $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ ל-V, $[T]_B^B = \left[\left[T\left(\overrightarrow{b_1}\right)\right]_B \middle| \left[T\left(\overrightarrow{b_2}\right)\right]_B \middle| \dots \right]$, לעיטים מסומן $[T]_B$.

דמיון מטריצות:

<u>הגדרה</u>: אומרים שמטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ דומה למטריצה $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אם קיימת מטריצה הפיכה $C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש: $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$

<u>תכונה 1</u>: יחס הדמיון הוא יחס שקילות (רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי).

<u>תכונה 2</u>: אם A ו-B מטריצות דומות, אז $\det(A) = \det(B)$.

<u>הגדרה</u>: V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $\dim V$ סופי, $T: V \to V$ לינארית, B,C שני בסיסים של V.

$$B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$$

$$C = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_n}\}$$

מתקיים:

$$[T]_B^B = [I]_B^C \cdot [T]_C^C \cdot [I]_C^B$$

$$[T]_B^B = [I]_B^C \cdot [T]_C^C \cdot ([I]_B^C)^{-1}$$

<u>הגדרה (העתקה הפיכה)</u>: $T: V \to W$ הפיכה אם קיימת העתקה $S: W \to V$, כך ש: $S \circ T = I_U$, $T \circ S = I_W$. כלומר $S = T^{-1}$.

<u>הגדרה (העתקה הפיכה)</u>: T הפיכה אם קיימת העתקה $S: W \to V$ כך ש:

$$T \circ S = I, S \circ T = I$$

כלומר:

$$S\big(T(x)\big) = x : \forall x \in V$$

נסמן:

$$S = T^{-1}$$

<u>טענה</u>: יהי V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, ו-T העתקה ליניארית, $T: V \to W$. וקיימת עבורה העתקה הפיכה S אזי גם S היינה העתקה ליניארית.

<u>טענה</u>: T הפיכה אם ורק אם היא חח״ע ועל.

טענה: יהי V, W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, ו-T העתקה ליניארית, $T: V \to W$. יהי $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ בסיס ל-V, וגם $C = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_k}\}$ בסיס ל-W. אם T הפיכה, אז המטריצה $[T]_C^B$ הפיכה.

$$([T]_C^B)^{-1} = [T^{-1}]_B^C$$

איזומורפיזם של מרחבים וקטורים:

הגדרה: מרחבים וקטורים V, W מעל שדה $\mathbb{F}$, נקראים איזומורפיים אם קיימת העתקה $T: V \to W$ כך שהיא ליניארית, העתקה T זאת חח"ע ועל נקרת איזומורפיזם.

טענה: יהי V, W מרחבים וקטורים מממד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, $T: V \to W$ העתקה ליניארית חח"ע ועל. $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ בסיס ל-V אם ורק אם $\left(T(\overrightarrow{b_1}), \dots, T(\overrightarrow{b_n})\right)$ בסיס ל-W.

טענה: יהי U מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $\dim U = n$ איזומורפי ל-$\mathbb{F}^n$.

טענה: יהי V, W מרחבים וקטורים ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, V, W איזומורפיים אם ורק אם $\dim V = \dim W$.

טענה: יהי T העתקה לינארית, איזומורפית. T הינה יחס שקילות.

טענה: יהי U, V, W מרחהים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$,

$$U \to V \to W$$

$T: V \to W$ העתקה ליניארית איזומורפית, $S: U \to W$ העתקה ליניארית ואיזומורפית, אזי גם ההעתקה הליניארית $T \circ S: U \to W$ היא איזומורפית.

הגדרה (מרחב של עיניות סדורות): מרחב של עיניות סדורות מוגדר באופן הבא:

$$\mathbb{F}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) | \alpha \in \mathbb{F}\}$$

או

$$\mathbb{F}_{col}^n = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \middle| \ \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$$

טענה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $\dim V = n$. אזי V איזורמפי ל-$\mathbb{F}^n$.
אם U, V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ $\dim U = \dim V = n < +\infty$ (ממםד סופי) אזי U, V איזומורפיים.

טענה: V, W מרחבים וקטורים ממםד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$. $\dim W = k > 0, \dim V = n > 0$, אזי המרחבים $Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ ו- $M_{k \times n}(\mathbb{F})$ איזומורפיים.

ערכיים עצמיים ווקטורים עצמיים:

הגדרה (ערך עצמי): תהי $A \in M_{n \times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה. סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא ערך עצמי של A, אם קיים וקטור עמודה $\vec{v} \in \mathbb{F}_{col}^n$ שונה מווקטור ה-0, כך ש: $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.
במקרה זה $\vec{v}$ נקרא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ.

הגדרה (וקטור עצמי): $\vec{v} \neq \vec{0}$ נקרא וקטור עצמי של A אם הווקטורים $A \cdot \vec{v}, \vec{v}$ תלויים ליניארית.

מציאת ערכים ווקטורים של עצמיים של מטריצה נתונה:

משפט: $A \in M_{n \times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה, יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$.

הערה: 0 הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $\det(A)=0$.
ז"א A בלתי הפיכה.
0 אינו ערך עצמי של A אם ורק אם A הפיכה.

משפט: וקטורים עצמיים השייכים לערך עצמי λ הם פתרונות לא טריוויאליים של המערכת:

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

טענה: אם $A\in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ ו-$\lambda\in\mathbb{C}$ הוא שערך עצמי של A, אז גם $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A.

תכונות של ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים:

טענה (תכונה ראשונה): תהי $A\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה, $\vec{v}$ הוא ערך עצמי של A השייך לערך עצמי λ. אזי $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של מטריצה A^k השייך לערך עצמי λ^k לכל $k\in\mathbb{N}$.

טענה (תכונה שנייה): תהי $A\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה הפיכה, λ הוא ערך עצמי של A, $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ. אזי $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}, $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של A^{-1} השייך לערך עצמי של $\frac{1}{\lambda}$.

טענה (תכונה שלישית): $A\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ ערכים עצמיים של A, $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_k}$ וקטורים עצמיים של A השייכים לערך עצמי הנ"ל בהתאמה (ז"א $A\cdot\overrightarrow{v_1}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{v_1},A\cdot\overrightarrow{v_2}=\lambda_2\cdot\overrightarrow{v_2},\dots,A\cdot\overrightarrow{v_k}=\lambda_k\cdot\overrightarrow{v_k}$) אם $\lambda_i\neq\lambda_j$ אזי $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_k}$ בלתי תלויים ליניארית.

טענה: אם A,B מטריצות דומות[1], אז $\det(A-\lambda\cdot I)=\det(B-\lambda\cdot I)$.

לכסון מטריצה:

הגדרה: תהי $A\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה. אומרים ש-A ניתנת ללכסון (לַכְסִינָה) אם A דומה למטריצה אלכסונית[2] מסוימת.
זאת אומרת קיימת מטריצה אלכסונית $D\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$, וקיימת מטריצה אלכסונית $P\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$. כך ש:

$$A=P\cdot D\cdot P^{-1}$$

הגדרה: יהי $A\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ ערכים עצמיים של A, $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_k}$ וקטורים עצמיים של A השייכים לערך עצמי הנ"ל בהתאמה (ז"א $A\cdot\overrightarrow{v_1}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{v_1},A\cdot\overrightarrow{v_2}=\lambda_2\cdot\overrightarrow{v_2},\dots,A\cdot\overrightarrow{v_k}=\lambda_k\cdot\overrightarrow{v_k}$).
נגדיר:

$$P=[\overrightarrow{v_1}\mid\overrightarrow{v_2}|\dots|\overrightarrow{v_n}],D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$$

מתקיים השוויון:

$$A\cdot P=P\cdot D$$

משפט: תהי $A\in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה. A ניתנת ללכסון, D מטריצה אלכסונית, P מטריצה הפיכה. אזי $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$ אם ורק אם $A\cdot P=P\cdot D$.

---

[1] תזכורת: מטריצות A,B ריבועיות, $n\times n$, נקראת דומות אם $A=C\cdot B\cdot C^{-1}$ עבור מטריצה C מסדר $n\times n$ מסוימת הפיכה.

[2] תזכורת: מטריצה אלכסונית היא מטריצה של כל רכיבה שווים ל-0 מלבד האלכסון הראשי שלה, כלומר, במטריצה האלכסונית A לכל $a_{ij}=0\in A$ לכל $i\neq j$.

משפט: מטריצה $A \in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$, לכסינה אם ורק אם קיימים ל-A n וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית.

טענה: תהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{F}]$ מטריצה, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ערכים עצמיים של A $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$ אזי A לכסניה.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה ליניארית.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית. $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא ערך עצמי של T אם קיים $\vec{v} \neq \vec{0} \in V$, כך ש: $T(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ במקרה זה $\vec{v}$ נקרא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי של λ.

הגדרה נוספת:

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית. $\vec{v} \neq \vec{0} \in V$ נקרא וקטור עצמי של T, אם $\vec{v}, T(\vec{v})$ תלויים ליניארית.

משפט: העתקה T ניתנת ללכסון כאשר קיים ל-V, בסיס המורכב מווקטורים עצמיים של T.

הפולינום האופייני (characteristic polynomial):

הגדרה: תהי A, מטריצה $n \times n$. וגם I מטריצת היחידה $n \times n$, הפולינום האופייני מוגדר באופן הבא:

$$\mathcal{X}_A(x) = \det(x \cdot I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

הגדרה: ריבוי (ריבוב) של השורש של הפולינום בהנחה ש: $a_i \neq a_j$. הריבוי של a_j הוא k_j.

משפט **ביג'ו**: אם $p(\alpha) = 0$ אז $p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$.

הגדרה **ריבוי אלגברי**: יהי A מטריצה $n \times n$ מעל $\mathbb{C}$, $\mathcal{X}_A(x) = \det(x \cdot I - A)$. הריבוי האלגברי של הערך העצמי של λ (של A). הוא הריבוי של λ כשורש של $\mathcal{X}_A(x)$.

מסקנה: מכפלת הערכים העצמיים בהתחשב בריבויים האלגבריים שלהם היא:

$$(-1)^n \det(A) = (-1)^{\sum_{i=1}^{m} k_i} (\lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda_2)^{k_2} \cdot (\lambda_3)^{k_3} \cdot \dots \cdot (\lambda_m)^{k_m}$$

מסקנה: עקבה של המטריצה:

$$\mathrm{Trace}(A) = k_1 \cdot \lambda_1 + k_2 \cdot \lambda_2 + \dots + k_m \cdot \lambda_m$$

משפט: אם A, B מטריצות דומות אז ל-$\mathcal{X}_A(x) = \mathcal{X}_B(x)$.

מסקנה: יהי A, B מטריצות דומות. λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם λ הוא ערך עצמי של B.

הגדרה (הפולינום האופייני של העתקה T): יהי V מרחב וקטורי מימד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$. $T: V \to V$, העתקה ליניארית. $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ בסיס ל-V. הפולינום האופייני של העתקה T:

$$\mathcal{X}_T(x) - \det(x \cdot I - [T]_B^B)$$

הגדרה **מרחב עצמי**: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$. $T: V \to V$ העתקה ליניארית. לכל λ, נגדיר:

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in V | T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$$

משפט: אם λ, הוא לא ערך עצמי של T, אז $V_\lambda = \{\vec{0}\}$

משפט: אם λ הוא ערך עצמי של T, V_λ היא קבוצת כל הווקטורים העצמיים השייכים לערך עצמי λ, וגם $\vec{0}$.

משפט: V_λ, מהווה תת מרחב ב-V.

הגדרה הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי: יהי V מרחב וקטורי, מימד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$, $T: V \to V$ העתקה ליניארית. אם λ, הוא ערך עצמי של T, המספר $\dim V_\lambda$ נקרא "הריבוי הגאומטרי" של λ.

טענה: יהי V מרחב וקטורי, מימד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$, $T: V \to V$ העתקה ליניארית, $\lambda \neq \mu$. אז $V_\lambda \cap V_\mu = \{\vec{0}\}$.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי, מימד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$, $T: V \to V$ העתקה ליניארית, λ ערך עצמי של העתקה ליניארית T.

$a(\lambda)$ – יסמן את הריבוי האלגברי של λ.

$g(\lambda)$ – יסמן את הריבוי הגאומטרי של λ.

הערה: $a(\lambda), g(\lambda) \in \mathbb{N}$

טענה: יהי V מרחב וקטורי, מימד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$, $T: V \to V$ העתקה ליניארית, λ ערך עצמי של העתקה ליניארית T. מתקיים:

$$1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$$

משפט: יהי V מרחב וקטורי מימד סופי מעל שדה $\mathbb{C}$, $T: V \to V$ העתקה ליניארית אזי T לכסינה (זאת אומרת קיים בסיס ל-V המורכב מהווקטורים עצמיים של T). אם ורק אם עבור כל ערך עצמי λ של T מתקיים:

$$g(\lambda) = a(\lambda)$$

צורה קנונית של ג'ורדן:

הגדרה צורה קנונית של ג'ורדן: יהי A מטריצה $n \times n$ מעל $\mathbb{C}$.

$$J = \begin{bmatrix} [B_1] & & 0 \\ & [B_2] & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [B_k] \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

כל מטריצה A דומה ל-J מסויימת. כלומר $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$.

משפט: המטריצות A ו- B דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ג'ורדן.

משט קיילי-המילטון:

משפט: יהי A מטריצה $n \times n$, $f_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אז $\mathcal{X}_A(A) = 0$.

טענת עזר א': יהי מטריצה $C \in M_{k\times m}[\mathbb{F}]$, אם עבור כל $\vec{v} \in \mathbb{F}^n_{\text{col}}$ מתקיים $C \cdot \vec{v} = \vec{0}$ אז: $C = 0_{k\times m}$.

טענת עזר ב': תהי $X \in M_{k\times k}[\mathbb{F}]$, $Y \in M_{m\times m}[\mathbb{F}]$, $Z \in M_{k\times m}[\mathbb{F}]$, אז:

$$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} X & Z \\ \hline 0_{m\times k} & Y \end{array}\right]_{(k+m)\times(k+m)}\right) = \det(X)\cdot\det(Y)$$

<u>טענת עזר ג':</u>

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -\alpha_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -\alpha_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x-\alpha_k \end{bmatrix}\right) = x^k - \alpha_{k-1}\cdot x^{k-1} - \alpha_{k-2}\cdot x^{k-2} - \dots - \alpha_1\cdot x - \alpha_0$$

מרחב מכפלה פנימית.

מרחב וקטורי שיש בו מכפלה פנימית

<u>הגדרה **מרחב מכפלה פנימית**:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F}$ הוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.
ה פונקציה $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle : V\times V\to\mathbb{F}$ נקראת "מכפה פנימית" (או מכפלה סקלרית) אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. $\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle \vec{u},\vec{w}\rangle + \langle \vec{v},\vec{w}\rangle \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$.
2. $\langle \alpha\vec{v},\vec{w}\rangle = \alpha\cdot\langle \vec{v},\vec{w}\rangle \forall \vec{w},\vec{v}\in V \wedge \alpha\in\mathbb{F}$.
3. $\langle \vec{v},\vec{w}\rangle = \overline{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle} \forall \vec{w},\vec{v}\in V$.
4. $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle \geq 0 \forall,\vec{v}\in V$. $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 0 \forall,\vec{u}\in V$ אם ורק אם $\vec{u}=\vec{0}$.

תכונות מידיות:

1. $\langle \vec{u},\vec{v}+\vec{w}\rangle = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{u},\vec{w}\rangle \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$.
2. $\langle \vec{v},\alpha\cdot\vec{w}\rangle = \bar{\alpha}\cdot\langle \vec{v},\vec{w}\rangle \forall \vec{w},\vec{v}\in V \wedge \alpha\in\mathbb{F}$.
3. $\forall \vec{u}\in V : \langle \vec{0},\vec{u}\rangle = \vec{0}$.

נורמה:

<u>הגדרה **נורמה**:</u> יהי V מרחב מכפלה פנימית. נורמה של $\vec{u}\in V$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u},\vec{u}\rangle}$$

<u>תכונות מידיות:</u>

1. $\|\vec{u}\|\geq 0$.
2. $\|\vec{u}\| = \vec{0}$ אם ורק אם $\vec{u}=\vec{0}$.
3. $\forall\alpha\in\mathbb{F}\wedge\vec{u}\in V : \|\alpha\cdot\vec{v}\| = |\alpha|\cdot\|\vec{u}\|$.

אי-שוויון קושי-שוורץ:

<u>הגדרה:</u> יהי V מרחב מכפלה פנימית $\mathbb{C}$. לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$, מתקיים: $|\langle \vec{u},\vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$.

זוויות בין וקטורים:

<u>הגדרה **זווית בין וקטורים**:</u> יהי V מרחב מכפלה וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$. אם $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$, הזווית בין $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ היא θ, $0\leq\theta\leq\pi$, כך ש:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

<u>הגדרה **אורתוגונליים**:</u> יהי V מרחה מכפלה וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$, $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}\in V$ נקראים אורתוגונליים (נצבים, מאונכים) אם $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 0$.

על פי ההגדרה הזאת $\vec{0}$ אורתוגונלי לכל וקטור ב-V.

משפט **אי-שוויון המשולש** : יהי V מרחה מכפלה וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$, $\vec{v},\vec{u}\neq\vec{0}\in V$, אז :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$$

<u>הגדרה :</u> משוואה כללית (קנונית) של ישר במישור $\mathbb{R}^2$:
$$Ax+By+C=0$$

<u>הגדרה :</u> משוואת מישור קנונית ב-$\mathbb{R}^3$ הוא
$$Ax+By+Cz+D=0$$

<u>טענה :</u> יהי V מרחב מכפלה וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$ כך ש : $\overrightarrow{v_i}\neq\vec{0}$ לכל i, $1\leq i\leq n$ ו-$\langle\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_j}\rangle=0$ לכל $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$ אזי הווקטורים $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$ בלתי תלויים ליניארית.

בסיס אורתוגונלי, ובסיס אורתונורמלי.

<u>הגדרה **בסיס אותוגונלי** :</u> יהי V מרחב מכפלה וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ מימד סופי. בסיס $B=\{\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\dots,\overrightarrow{b_n}\}$ של V נקרא בסיס אורתוגונלי אם $\langle\overrightarrow{b_i},\overrightarrow{b_j}\rangle=0$, לכל $1\leq i,j\leq n$, כך ש $i\neq j$.

<u>הגדרה **בסיס אורתונורמלי** :</u> יהי V מרחב מכפלה וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ מימד סופי. $B=\{\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\dots,\overrightarrow{b_n}\}$ בסיס אורתוגונלי של V. אם $\|\overrightarrow{b_i}\|=1$ לכל $1\leq i\leq n$, אז הבסיס B נקרא בסיס אורתונורמלי.

תהליך אותוגונליזציה של גרם-שמידט:

<u>משפט תהליך גרם-שמידט :</u> יהי $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_n}\in V$ בלתי תלויים ליניארית. אזי קיימים $\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\dots,\overrightarrow{b_n}\in V$ כך ש :
$\langle\overrightarrow{b_i},\overrightarrow{b_j}\rangle=0$ לכל $i\neq j$.
$$\mathrm{Span}(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\dots,\overrightarrow{b_k})=\mathrm{Span}(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_k})$$
לכל $1\leq k\leq n$, $k\in\mathbb{N}$.

<u>הגדרה :</u> יהי $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}$, כך ש : $\vec{b}\neq\vec{0}$. נסמן את ההיטל של וקטור $\vec{a}$ על וקטור $\vec{b}$:
$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle\vec{b},\vec{b}\rangle}\cdot\vec{b}$$

<u>טענה :</u> ההיטל $\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle\vec{b},\vec{b}\rangle}\cdot\vec{b}$ שומר על מכפלה פנימית, זאת אומרת :
$$\langle\vec{b},\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}\rangle=\langle\vec{b},\vec{a}\rangle$$

<u>מסקנה :</u> במרחב מכפלה פנימית מממד סופי קיים בסיס אורתונורמלי.

משלים אורתוגונלי, משלים ניצב:

<u>הגדרה :</u> יהי V מרחב מכפלה פנימית, W תת מרחב ב-V. המשלים האורתוגונלי של W מוגדר כך :
$$W^{\perp}=\{\vec{v}\in V|\forall\vec{w}\in W:\ \langle\vec{v},\vec{w}\rangle=0\}$$

<u>טענה :</u> $W^{\perp}$ הוא תת מרחב ב-V.

<u>הגדרה **סכום ישר** :</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. U_1,U_2 תתי מרחבים ב-V. אומרים ש :
$$U_1\oplus U_2=V$$
אם
$$U_1+U_2=V$$
$$U_1+U_2=\{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{u_1}\in U_1,\overrightarrow{u_2}\in U_2\}$$
וגם

$$U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$$

<u>טענה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, W תת מרחב ב-V, אזי:
$$W \oplus W^{\perp} = V$$

<u>טענה</u>: יהי V מרחב מכפלה וקטורי ממד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$. W תת-מרחב ב-V. אז:
$$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

הגדרה הטלה מאונכת (Orthogonal projection).

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממד סופי, W תת מרחב ב-V. קיימת העתקה ליניארית יחידה $P_W: V \to V$ שמקיימת את התכונות הבאות:
1. $\ker(P_W) = W^{\perp}$.
2. $\mathrm{Im}(P_W) = W$.
3. לכל $\vec{w} \in W$ מתקיים $P_W(\vec{w}) = \vec{w}$.
4. $P_W \circ P_W = P_W$ (כלומר $P_W^2 = P_w$).

<u>שיטת הריבועים הפחותים</u>: יהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ למשוואה הבאה:
$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$
יש פתרון רק כאשר: $\vec{b} \in \mathrm{col}\,(A)$.

פירוק QR (QR Decomposition):

<u>טענה</u>: תהי $A \in M_{k\times n}[\mathbb{R}]$, $\mathrm{rank}(\mathrm{col}(A)) = n$. קיימות מטריצות Q, R כך ש: $A = Q \cdot R$. העמודות של Q הן בסיס אורתוגונלי ל-$\mathrm{col}(A)$, R היא מטריצה ריבועית משולשית עליונה עם רכיבים חיוביים באלכסון הראשי.

איזומורפיזם במרחבי מכפלה פנימית.

<u>הגדרה</u>: יהי V, W מרחבי מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $T: U \to V$ איזומורפיזם מרחבי מכפלה פנימית אם:
1. T ליניארית.
2. T חח"ע.
3. T על.
4. לכל $T(\vec{u_1}), T(\vec{u_2}) \in V, \vec{u_1}, \vec{u_2} \in V$ מתקיים: $\langle T(\vec{u_1}), T(\vec{u_2})\rangle_V = \langle \vec{u_1}, \vec{u_1}\rangle_U$.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$, $\dim V = n$. אזי V איזומורפית ל-$\mathbb{C}^n$ או $\mathbb{R}^n$ (בהתאמה) עם מכפלה סטנדרטית.

<u>משפט</u>: יהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, לכל $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n_{col}$ מתקיים:
$$\langle A \cdot \vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^T \cdot \vec{y}\rangle$$

<u>משפט</u>: יהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, מטריצה משוכלפת (כלומר $A^T = A$) אזי לכל לכל $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n_{col}$ מתקיים:
$$\langle A \cdot \vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A \cdot \vec{y}\rangle$$

<u>משפט</u>: יהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, מטריצה משוכלפת (כלומר $A^T = A$), λ הוא ערך עצמי של A, אזי: $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>משפט</u>: יהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, אם $A \cdot \vec{y} = \mu \cdot \vec{y}$, $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$, לכל $\lambda \neq \mu$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, אז: $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$.

העתקה צמודה והעתקה צמודה לעצמה:

<u>הגדרה **העתקה צמודה**</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימי ת ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$, תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית. העתקה צמודה ל- T , תסומן T^*, ומוגדרת כך:

$$T^*: V \to V$$

כך שלכל $\vec{u}, \vec{v} \in V$ מתקיים:

$$\langle T(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, T^*(\vec{v}) \rangle$$

<u>הגדרה:</u> העתקה T נקראת צמודה לעצמה אם $T = T^*$. זאת אומרת:

$$\langle T(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, T(\vec{v}) \rangle$$

לכל $\vec{u}, \vec{v} \in V$

<u>משפט:</u> יהי $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ בסיס אורתונורמלי ל-V, ו-$T: V \to V$ העתקה ליניארית כאשר T^*, העתקה צמודה. מתקיים:

$$[T^*]_B^B = ([T]_B^B)^T$$

העתקה צמודה לעצמה המיוצגת על ידי מטריצה סימטרית לכל בסיס אורתונורמלי.

העתקה אורתוגונלית, ומטריצה אורתוגונלית:

<u>הגדרה **העתקה אורתוגונלית**</u>: יהי V מרחב וקטורי מממד סופי, מעל שדה $\mathbb{R}$. העתקה ליניארית $T: V \to V$ נקראת אורתוגונלית אם לכל $\vec{u}, \vec{v} \in V$ מתקיים:

$$\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

<u>הערות:</u>

- העתקה אורתוגונלית שומרת על הנורמה של הווקטורים.
- העתקה אורתוגונלית שומרת על המרחקים הין הווקטורים.
- העתקה אורתוגונלית שומרת על הזוויות של הווקטורים.

<u>משפט:</u> יהי T, העתקה אורתוגונלית. לכל $\vec{u} \in V$ מתקיים: $\|T(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.

טענה: $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ אם ורק אם $\|T(\vec{w})\| = \|\vec{w}\|$, לכל $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \in V$.

<u>הגדרה **מטריצה אורתוגונלית**</u>: יהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ נקראת מטריצה אורתוגונלית אם $A^T \cdot A = I$ (במילים אחרות $A^{-1} = A^T$).

<u>משפט:</u> העתקה אורתוגונלית מיוצגת על ידי העתקה אורתוגונלית על ידי מטריצה אורתוגונלית בכל בסיס אורתוגונלי.

<u>משפט:</u> יהי $T: V \to V$ העתקה אורתוגונלית, $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ בסיס אורתוגונלי ל-V, אזי המטריצה $[T]_B^B$ היא מטריצה אורתוגונלית.

<u>משפט:</u> אם T העתקה אורתוגונלית ו-λ הוא ערך עצמי של T, אזי $|\lambda| = 1$.

משפט ספקטרלי:

משפט: יהי $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$, $A = A^T$, אז קיימת מטריצה $D \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ אלכסונית, ומטריצה $P \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ אורתוגונלית כך ש:

$$A = P \cdot D \cdot P^T$$