קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיטו

שיעור 1 – חלוקה הוגנת וחלוקה ללא קנאה

חלוקה הוגנת של קרקע

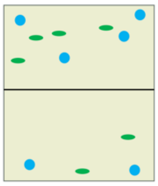
מטרה: פיתוח תהליכים מעשיים לחלוקה **הוגנת** על קרקע ועוגת יום-הולדת, לכל אחד מהמשתתפים יש חלק אותו הם מעדיפים יותר, צריך להגיע להסכמה שווה בעיני כל אחד מהמשתתפים.

פתרון: חלוקה שווה-שטח

בעיה: הקרקע לא **הומוגנית** – לחלקים שונים יש ערך שונה

פתרון: חלוקה שווה-ערך

בעיה: הערכות **סובייקטיביות** – לכל אחד יש העדפות שונות.

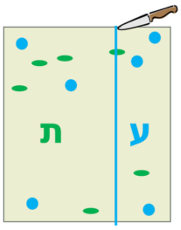


חלוקת עוגה בין שני ילדים

מטרה: לחלק עוגת יום-הולדת בין שני ילדים: **עמי ותמי**, כל ילד מעדיף סוכריות בצבע אחר.

פתרון: נחלק בעצמו

בעיה: אם אנחנו נחלק את העוגה בצורה שנראית לנו הוגנת – לא בטוח שזה יהיה הוגן בעיניהם



פתרון: לתת להם לחלק בעצמם

אלגוריתם:

עמי מחלק את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו (בשווי ½)
תמי בוחרת את החלק הטוב בעיניה
עמי מקבל את השאר

אלגוריתם "חתוך ובחר":

תכונות:

1. כל משתתף חושב שהחלקה שלו שווה לפחות ½ - חלוקה **פרופורציונלית** (proportional)
2. כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל האחרים – חלוקה **ללא קנאה** (envy free)

שאלה: האם אפשר להשיג את אותן תכונות כשיש יותר משני אנשים?

סימונים:

C – העוגה כולה
X_i - הפרוסה שקיבל משתתף i
V_i – פונקציית הערך של משתתף i

תכונות:

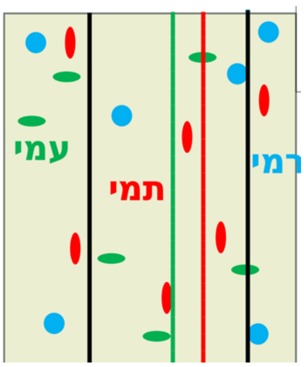
1. חלוקה **פרופורציונלית** – $\forall i,j \quad V_i(X_i) \geq \frac{V_i(C)}{n}$
2. חלוקה **ללא קנאה** - $\forall i,j \quad V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$

אבחנה:

חלוקה ללא-קנאה היא קשה לפחות כמו חלוקה פרופורציונלית.
הוכחה: אם חלוקה היא ללא קנאה, אז כל אחד חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו n החלקים.
לפי כלל שובך היונים, כל אחד חושב שהחלק שלו שווה לפחות $\frac{1}{n}$ מהשווי הכללי. כלומר החלוקה היא גם פרופורציונלית

נושא: חלוקת-עוגה פרופורצלנית

אלגוריתם "המפחית האחרון – Last Diminisher"



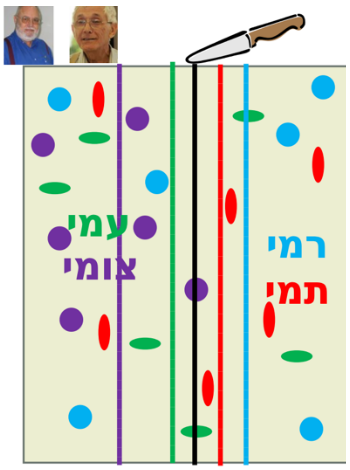
עמי מסמן $\frac{1}{n}$ בעיניו.
אם **תמי** חושבת שזה יותר מדי – היא מפחיתה ל-$\frac{1}{n}$ וכן **רמי** וכו'
האחרון שהפחית מקבל את החלק שסימן.
ממשיכים ברקורסיה

משפט: האלגוריתם "המפחית האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית
הוכחה: נניח שהערך העוגה שווה כולו ל-n. נוכיח שכל שחקן מקבל חלק שווה בעיניו לפחות 1.
נוכיח באינדוקציה על n
בסיס: שחקן אחד מקבל הכל
צעד: נניח ל-$n-1$ שחקנים אזי כל שחקן מקבל חלק שווה בעיניו לפחות 1,
כעת יש n שחקנים.
אחד מקבל חלק שווה בעיניו ל 1. נשארים $n-1$ שחקנים

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי [מהגיט]

עוברם, החלק שנמסר שווה לכל היותר 1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם לפחות $n-1$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1

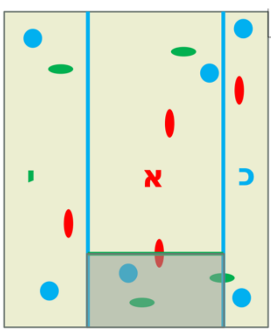
משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב- $O(n^2)$ שאילתות.
הוכחה: בכל סיבוב שחקן אחד יוצא – ולכן יש סה"כ n סיבובים
בכל סיבוב צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת
סה"כ $O(n^2)$ שאילתות
עבור כלכלנים – זה מספיק (לא צריך יעילות) ☺
אבל עבור מדעי המחשב – האם יש אלגוריתם מהיר יותר? ☹



<u>חלוקה פרופורציונלית מהירה:</u>
אלגוריתם אבן-פז:
כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי ½ בעיניו (**כחול**,**ירוק**,**סגול**,**אדום**)
חותכים את העוגה בחציון של הקווים (**שחור**)
שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו
מחלקים כל חצי ברקורסיה

בעיה: מה עושים כאשר n אי זוגי?
כל שחקן מחלק לשני חלקים ביחס של $\frac{n+1}{2} : \frac{n-1}{2}$
חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו $\frac{n-1}{2}$ קווים ובצד השני יהיו $\frac{n+1}{2}$ קווים
שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו
משפט: אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרופורצלנית – כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות $\frac{1}{n}$ מערך העוגה בעיניו.
הוכחה: נניח שהערך העוגה כולו n. נוכיח שכל שחקן מקבל חלק שווה בעיניו לפחות 1.
בסיס: שחקן אחד מקבל הכל
צעד: נניח שנכון לכל מספר שחקנים עד $n-1$. כעת יש n שחקנים.
כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק שווה בעיניו לפחות k ויש בו k שחקנים כאשר $k \in \{\frac{n}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$. לפי הנחת האינדוקציה, כל חלק מקבל לפחות 1.
משפט: אלגוריתם אבן-פז משתמש ב-$O(n \cdot logn)$ שאילתות
הוכחה: נעגל את n למעלה לחזקה הקרובה ביותר של 2.
הגדלנו אותו בפחות מ-2, עכשיו, בכל סיבוב גודל הקבוצות קטן פי 2.
לכן מספר הסיבובים הוא לכל היותר $\log_2(n)$
בכל סיבוב, שואלים כל שחקן שאילתה אחת ולכן סה"כ הסיבוכיות הינה $O(n \cdot logn)$
חלוקה פרופורציונלית מהירה
נניח שמותר לשאול את השחקנים שאילתות משני סוגים:
1. הערכה (Eval) – חישוב ערך של פרוסה נתונה
2. סימון (Mark) – סימון פרוסה עם ערך נתון
משפט: כל אלגוריתם לחלוקה פרופורצלנית צריך לפחות $\Omega(n \cdot logn)$ שאילתות מסוג זה (סה"כ $n!$ אפשריות סידור, הוכחה לפי עץ כמו במבנה)

מסקנה: אלגוריתם אבן-פז הוא הכי מהר שאפשר
<u>נושא: חלוקת-עוגה ללא קנאה</u>
חלוקה ללא קנאה היא קשה יותר מחלוקה פרופורציונלית. האלגוריתמים שראינו למעלה לא מבטיחים שלא תהיה קנאה - קל למצוא דוגמאות-הרצה שבהן מישהו מקנא באחרים. הבעיה של חלוקה ללא-קנאה הייתה פתוחה במשך שנים רבות, ולמעשה עדיין אין לה פתרון מושלם. אנחנו נראה כמה פתרונות חלקיים, לכל אחד יש יתרונות וחסרונות.
מה עושים כשנתקלים בבעיה קשה? מנסים קודם-כל למצוא פתרונות במקרים פרטיים.

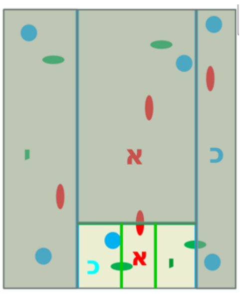


<u>חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים</u>
אלגוריתם Selfridge Conway:
כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו.
אם **א**, **י** מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו. אחרת:
י (נניח) מקצץ את החתיכה הטובה ביותר **ומשווה** לשניה בעיניו.

כעת, אנחנו בטוחים שקיימת חלוקה ללא קנאה. (למה? – גרף דו״צ)

א,**י**,**כ** בוחרים חתיכה. **י** חייב לבחור את זו שקיצץ, אם לא נבחרה קודם.

קבלנו חלוקה ללא קנאה, אבל עם שארית.



[**א** או **י** יבחרו את החתיכה המקוצצת: במקרה זה **א**׳ – כי **כ** יבחר חתיכה אחרת (שלא בחר את החתיכה המקוצצת) **י** מחלק את לשלוש חתיכות שוות בעיניו.
א, **כ**, **י** בוחרים חתיכה.

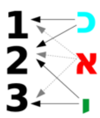
משפט: אלגוריתם סלפרידג׳-קונווי נותן חלוקה ללא קנאה – כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.

הוכחה: נבנה גרף דו״צ שבו:
הצמתים – **שחקנים** מצד אחד **וחתיכות** מצד שני
הקשתות – מכל שחקן לחתיכות הטובות בעיניו.
שידוך מושלם בגרף זה ≡ חלוקה **ללא קנאה**

(המקרה הקשה)  **או** (המקרה הקל) 

אחרי החלוקה הראשונה של **כ**׳ יש שני מקרים:
המקרה הקל – מבחינת **כ**׳ כל הפרוסות הן שוות ערך.
המקרה הקשה – מבחינת **א**׳ ו**י**׳ יש פרוסה אחת שהיא ״הטובה ביותר״. נניח שזו פרוסה מספר 3.

לאחר הקיצוץ של **י** הופך ל:



1. **כ** מעוניין ב2,1 (כי **י**׳ מקצץ את פרוסה 3, אז עכשיו 1,2 הן הטובות ביותר)
2. **י** מעוניין ב2,3 (כי **י**׳ קיצצה את 3 כך שתהיה שווה לפרוסה השנייה הטובה ביותר, נניח שזו 2)
3. **א** לא ידוע (יתכן שהוא עדיין חושב ש-3 תהיה הטובה ביותר ויתכן שלא)

בכל מקרה, לא משנה מה **א**׳ מצביע, קיים שידוך מושלם בגרף.
אפשר למצוא אותו ע״י בחירה לאחר ש**א**׳ יבחר את הפרוסה הטובה ביותר בעיניו.
י׳ יבחר את פרוסה 3 אם היא נשארה ואחרת את פרוסה 2, ל**כ**׳ בטוח תישאר פרוסה אחת טובה.

חלב ב (שארית ש**י**׳ קיצץ בעוגה 3): נניח ש-א לקח את החתיכה המקוצצת.
נשים לב שאחרי החלוקה הראשונה, ל**כ**׳ יש יתרון על מי שבחר את פרוסה 3 (הפרוסה המקוצצת).
נניח כי **י**׳ בחר את הפרוסה המקוצצת.
כיוון שהפרוסה **כ**׳ שווה כמו פרוסה 3 לפני הקיצוץ, הרי שעכשיו **כ**׳ לא יקנא ב**י**׳ בשום מקרה, גם אם היא תקבל הכל וכן אפשר לחלק את השארית באופן הבא:
אז **י** חותך: **א**, **כ**, **י** בוחרים.
א בוחר ראשון: ל-**י** יש שלוש חתיכות לבחור ו-**כ** לא יקנא ב-**א** אפילו אם **א** ייקח את הכל!

תמונת מצב:

1963: אלג׳ סלפרידג׳-קונווי ל-3 עם 5 שאילתות
1996: אלג׳ בראמס-טיילור. #שאילתות לא חסום.
1998: אלג׳ רוברטסון-ווב. #שאילתות לא חסום.
2000: אלג׳ פיקהורקו. #שאילתות לא חסום.
2009: משפט פרוקצ׳יה: #שאילתות לפחות n^2.
2015: אלג׳ עזיז-מקנזי ל-4. #שאילתות חסום (200)
2016: אלג׳ עזיז-מקנזי ל-n. #שאילתות חסום:

$$O(n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}})$$

עדיין לא ידוע כמה שאילתות באמת צריך – האם אפשר למצוא אלגוריתם הדורש n^2 שאילתות?

זה מעורר כמה שאלות:

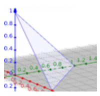
1. מה קורה כשיש 4 שחקנים או יותר?
2. מה אם רוצים שהפרוסות יהיו **קשירות** – כמו באלגוריתם ״המפחית האחרון״ ו״אבן הפז״?

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי [מהגיט](#)

נושא: חלוקת עוגה כמעט ללא קנאה עם פרוסות קשירות

הרעיון באלגוריתם זה הוא להסתכל על כל החלוקות הקשירות של עוגה.
נתחיל משלושה שחקנים.
נניח שהעוגה היא הקטע $[0,1]$
כל חלוקה קשירה של העוגה לשלושה קטעים, ניתן לייצג ע"י שלושה מספרים המייצגים את אורכי הקטעים.
סכום המספרים הוא 1.

שאלה: איך נראית קבוצת כל השלשות של מספרים החיוביים שסכומם הוא 1?



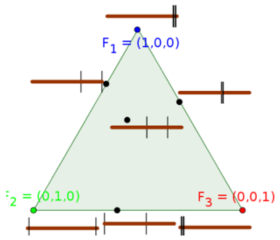
תשובה: משולש תחשבו על המרחב התלת-מימדי, ותדמיינו משולש שהקודקודיים שלו הם: $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$

לדוגמא עבור השלשה $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ כל אחד מקבל שליש מהעוגה, כאשר הראשון מקבל שליש מצד שמאל של העוגה.

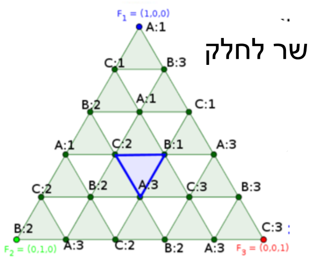
מה קורה כשמספר השחקנים שונה מ-3 ?
כשיש 2 שחקנים - מרחב החלוקות הוא **קטע** 1-ממדי במרחב 2-ממדי
כשיש 3 שחקנים - מרחב החלוקות הוא **משולש** 2 -ממדי במרחב 3-ממדי

כשיש 4 שחקנים - מרחב החלוקות הוא **טטראדר** 3-ממדי במרחב 4-ממדי

באופן כללי, כשיש n שחקנים - מרחב החלוקות הוא **סימפלקס** $n-1$-ממדי במרחב n-ממדי.
אז אוסף כל החלוקות הוא **סימפלקס**. כל נקודה בסימפלקס מייצגת חלוקה. עבור כל נקודה בסימפלקס, אנחנו יכולים לשאול כל אחד מהשחקנים **"איזה פרוסה אתה מעדיף - הימנית, האמצעית או השמאלית?".**
אם מצאנו **נקודה** שבה כל שחקן נתן תשובה אחרת - יש לנו **חלוקה ללא קנאה**!
למצוא נקודה כזאת זה מאד קשה, כי במשולש יש אינסוף נקודות. אבל אנחנו מחפשים חלוקה שהיא **"כמעט" ללא קנאה**. למשל, נניח שמדובר בחלוקת קרקע, ואנשים לא מתייחסים להבדלים של מילימטר אחד לכאן או לשם. אז מבחינתנו, חלוקה שהיא ללא קנאה "עד כדי מילימטר אחד", היא חלוקה מספיק טובה.



בכל נקודה בסימפלקס החלוקות, אפשר לשאול כל שחקן ״**איזה חתיכה אתה הכי רוצה?**״
התשובה היא מספר בין 1 ל-n, זה נראה כך:
כאשר כל פרוסה מייצגת ע״י מספר שונה.
חלוקה ללא קנאה ≡ נקודה שבה כל שחקן כותב מספר אחר.



חלוקה כמעט ללא קנאה ≡ סימפלקסון (זה כבר לא נקודה ולכן זה מקל על החישוב) שבו אפשר לחלק קודקוד לכל שחקן, כל שכל שחקן כותב על הקודקוד שלו מספר אחר.

אלגוריתם סימונים-סו (Su 1999):

1. נחלק את סימפלקס-החלוקות **לסימפלקסונים** קטנים (**המשולשים**), שאורך הצלע של כל אחד מהם מילמטר. התהליך הזה נקרא מישלוש. עכשיו יש לנו מספר **סופי** של נקודות שהם קודקודי הסימפלקסונים
2. נשייך כל קודקוד לאחד השחקנים, כל שבכל סימפלקסון, כל השחקנים מיוצגים.
3. עבור כל קודקוד, נשאל את השחקן שהקודקוד שייך לו ״איזה פרוסה אתה מעדיף – 1,2 או 3?״ ונסמן את מספר על הקודקוד
4. קבלנו תיווי של המישלוש. נמצא סימלקסון שבו כל התוויות שונות, **כל נקודה בסימפלקסון הזה מייצגת חלוקה ללא-קנאה עד כדי-מילמטר כמו שרצינו.**

איך אנחנו יודעים שתמיד קיים סימפלקסון שבו כל התוויות שונות?
לשם כך נלמד למה מפורסמת ושימושית מאד - הלמה של שפרנר (**Sperner's Lemma**)
הלמה הזאת מתייחסת **לסימפלקסים** בכל מספר של ממדים. היא אומרת ש:
אם בכל קודקוד ראשי ישנה תווית אחרת, ($(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$)
וגם בכל פאה – התוויות זהות לתווית שבקודקודי הפאה (כל בחירה תיהי אחת מהקצוות)
אז קיים מספר אי-זוגי של סיפלקסונים שבהם כל התוויות שונות, בפרט קיים לפחות אחד כזה.

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט

הגדרה: סימפלקס n מלא $\equiv$ עם n מספרים שונים $\equiv$ חלוקה כמעט-ללא-קנאה
הוכחה: אפשר להוכיח את הלמה הזאת באינדוקציה על מספר הממדים:
נוכיח באינדוקציה על n שקיים מספר אי-זוגי של סימפלקס-n-מלא.
בסיס:
אבחנה: התנאי של Sperner מתקיים כי תמיד כל שחקן מעדיף פרוסה לא ריקה
עבור $n=2$ נסתכל על הצלע בין F_1 ל-F_2.
המספרים מתחילים ב-1 ומסתיימים ב-2, ולכן מספר המעברים הוא אי-זוגי.
צעד:
נבחר סימפלקס $(n-1)$-מלא וניכנס דרכו.
הגענו לסימפלקס n, ישנם רק שתי אפשרויות:
1. הגענו לסימפלקס n מלא
2. יש עוד סימפלקס $(n-1)$-מלא, נצא דרכו ונמשיך לטייל בסוף, או שנגיע לסימפלקס n מלא, או שנצא החוצה דרך סימפלקס $(n-1)$-מלא אחר

לכן, יש גם מספר אי זוגי של סימפלקס n-מלאים.

לסיכום
אם עוברים עם שחקנים שהם "שמחים בחלקם" ורק רוצים לקבל את החלק **הפרופורציונלי** אז הבעיה פשוטה, ניתן להשיג זאת בזמן ריצה של $O(n \cdot logn)$ ועם פרוסות קשירות.
כאשר פרוסות קשירות זה אומר שבין כל החלקים ניתן להעביר קו אחד, כלומר כולם מחוברים.
אבל, אם השחקנים **קנאים**, המצב הרבה יותר קשה ולא קיים אלגוריתם סופי המבטיח לכולם פרוסות קשירות, אולם גם בלי ההבטחה של פרוסות קשירות אזי האלגורתמים דורשים זמן רב.
תמונת מצב:

שחקנים	חלוקה פרופורציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה ללא קנאה
2	2 שאילתות	2 שאילתות	2 שאילתות
3	$\Theta(n \log n)$	5	אינסוף!
4	$\Theta(n \log n)$	200	אינסוף!
n	$\Theta(n \log n)$	$\Omega(n^2)$ $O(n^{nnnnn})$	אינסוף!

חלוקה יעילה של משאבים (הרצאה 2)

הגדרות:
מצב א' נקרא **שיפור פארטו** של מצב ב' אם מצב א' **טוב יותר** לחלק מהמשתתפים **וטוב לפחות** באותה מידה לכל השאר

מצב נקרא **יעיל פארטו** אם לא קיים מצב אחר שהוא **שיפור פארטו** שלו (אי אפשר לשפר אף אחד ולהשאיר את השאר באותו מצב)

יעילות פארטו היא תנאי הכרחי לכך שהבחירה שהיא "נכונה" מבטח נקודה כלכלית.
אם בחרנו באפשרות לא יעילה פארטו – כנראה לא התמצאנו מספיק כדי להשביע את רצונם של המשתתפים

יעילות פארטו בחלוקת קרקע ועוגות
שאלה: האם האלגוריתם "חתוך ובחר" – חלוקת עוגה בין שני אנשים הוא תמיד מחזיר חלוקה **יעילה** פארטו?
תשובה: לא, נראה דוגמא נגדית:
נניח שבעוגה יש ארבעה איזורים והשחקנים מעריכים אותם לפי הטבלה הבאה:

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט

איזור:	**א**	**ב**	**ג**	**ד**
עמי:	2	0	0	2
תמי:	1	1	1	1

ונניח כי עמי חותך את העוגה בדיוק באמצע, בין פרוסה ב׳ לפרוסה ג׳.
תמי בוחרת את אחת הפרוסות, נניח את הפרוסה הימנית.
הערך של עמי הוא 2 ושל תמי הוא 2
זה לא יעיל, כי אם עמי היה חותך ביו א׳ ל-ב׳ או בין ג׳ ל-ד׳ אז הערך שלו היה עדיין 2, אבל הערך של תמי היה עולה ל-3, וזה **שיפור פארטו**.

דוגמא נוספת:

	פלדה	**נפט**	**עצים**
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	80

הערה: לאחר החלוקה, מסתכלים רק על החלק **הכתום** ולכן חלק יקבל פלדה + נפט וחלק יקבל עצים והחישוב ערך הוא לפי אחוזים על הכמות שקבלת כפול הערך האישי

תמי עמי

	פלדה	**נפט**	**עצים**
עמי:	0	19	50, 31
תמי:	20	0	49.5, 30.5

כאן קבלנו תוצאה לא יעילה היות והועלת היא (50,50.5) אבל אפשר לשפר ל-(59.5,60) (באופן לא קשיר)

משפט: אלגוריתם ״חתוך ובחר״ מחזיר תוצאה **יעילה פארטו** אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. העוגה חד ממדית
2. שני השחקנים רוצים רק חתיכות קשירות
3. לכל נקודה בעוגה יש ערך חיובי ממש
4. החותך חותך לשני חלקים שווים ולא ״מתחכם״

הוכחה: לפי תנאי 1+2 אז יש רק שתי אפשריות, או שהחותך משמאל והבוחר מימין או להפך
לפי תנאי 3, בסדר שנבחר אין שיפור פארטו
לפי תנאי 4, גם בסדר ההפוך אין שיפור פארטו.
הבעיה נוצרת כאשר השחקנים לא מעוניינים בחתיכות קשירות ולכל חלק יש ערך שונה בעיני כל משתמש,
לדוגמא:

חלוקה הוגנת היא פתרון קל, אבל לא **יעיל** כי לכל חפץ יש ערך אחר בעיני משתתף אחר
הערה: חלוקה הוגנת הכוונה לחלק כל משאב ל-2 או לכמות המשתתפים.

גם כן חלוקה יעיל פארטו זה קל (לתת הכל לשחקן אחד) אבל **לא הוגן. (דיקטטור)**

דרך אחת למצוא חלוקות יעילות-פארטו היא לפתור בעיית אופטימיזציה.

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט

צריך למצוא חלוקה שבה סכום הערכים של השחקנים הוא מקסימלי
הגדרה: חלוקה ממקסם סכום ערכים:

$$\max_{X} \sum_{i=1}^{n} V_i(X_i)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

משאב:	**דיסק**	**זיכרון**	**מעבד**
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	80

רואים שהאלגוריתם **לא הוגן כי נחלק לעמי את כל המעבד והזיכרון ולתמי את כל הדיסק** אבל האם הוא יעיל?

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו
הוכחה: נתונה חלוקה א׳ הממקסמת סכום ערכים
נניח בשלילה שחלוקה לא יעילה פארטו ולכן קיימת חלוקה ב׳ שהיא שיפור פארטו שלה, בחלוקה ב׳ לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א׳ ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
לכן בחלוקה ב׳ סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א׳ ממקסמת את סכום הערכים.
מסקנה: מצאנו חלוקה **יעילה אבל היא לא הוגנת**, החלוקה **לא פרופורציונלית עם קנאה.**

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את סכום של שורשי הערכים (ההמשך נכון לכל פונקציה f מונוטונית עולה) **כאשר כל משאב בנפרד – לא קשיר**

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sqrt{V_i(X_i)}$$

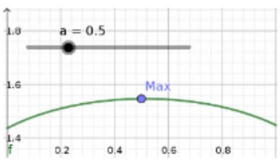
נסמן ב-x את האחזור שעמי מקבל מאזור השמאלי:

	דיסק	**זיכרון**	**מעבד**
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	80

נקבל כי נצטרך לפתור את:

$$\max \quad \sqrt{81x+19} + \sqrt{80(1-x)+20} \qquad s.t\ 0 \le x \le 1$$

נקבל כי ב-$x \sim 0.5$ ישנה נקודת מקסימום (אחוזים)



ולכן במקרה זה החלוקה היא **הוגנת** כי בשביל למצוא את x גזרנו ומצאנו נק׳ מקסימום.
כי פשוט ניתן לעמי את כל הזיכרון, לתמי את כל הדיסק ואז נסמן ב-x את החלק היחסי שמביאים מהמעבד לעמי
משפט: כל חלוקה ממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של ערכים היא יעילה פארטו
הוכחה: נתונה חלוקה א׳ הממקסמים סכום ערכים
נניח בשלילה שחלוקה לא יעילה פארטו ולכן קיימת חלוקה ב׳ שהיא שיפור פארטו שלה, בחלוקה ב׳ לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א׳ ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
כיוון שהפונקצייה עולה, בחלוקה ב׳ סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א׳ ממקסמת את סכום הערכים.

נפלאות דרכי האל, יצא הדבר כי:

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט

אם הפונקציה f היא לוגריתמית $f(V) = log(V)$
אז החלוקה לא רק **יעילה** אלא **גם ללא קנאה**!

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה ויעילה
הוכחה:

הוכחה: נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטיסימלית, Z.
התרומה שלה ל-$f(V_j(X_j))$ היא: *(חשבון אינפי 1)*

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה Z לשחקן *j* שהמכפלה הזאת עבורו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל-*j*:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של $f(V)$:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

כאשר *f* היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים *j,i*:

$$\mathbf{V_i(X_i) \geq V_i(X_j)}$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה! ***

משפט: לכל פונקצייה קעורה יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור
מסקנה: מקסימום מקומי של פונקצייה הוא גם מקסימום גלובלי כי היא קעורה
מסקנה מעשית: קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום

לסיכום:
ראינו שתמיד אפשר למצוא חלוקה שהיא:

- יעילה וללא קנאה (**לוגים**)
- קשירה וללא קנאה (**סימפלקסונים**)
- יעילה וקשירה (**דיקטטורה**)

שאלה: האם תמיד קיימת חלוקה **ללא קנאה יעילה וקשירה**?
<u>לא</u>, הנה דוגמה נגדית:

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3

קבלנו את המטריצה הבאה:

	יעיל פארטו	ללא קנאה	פרוסות קשירות
אלגוריתם סו והמשולשים	לא	כן	כן
מיקסום סכום לוגים	כן	כן	לא
דיקטטורה	כן	לא	כן

אוניברסיטת אריאל בשומרון

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב

נכתב ע"י צבי מינץ

מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט

נתקלנו בבעיה שחוזרת על עלמה הרבה בכלכלה, יש שלוש דרישות שאי אפשר למלא בו זמנית, צריך לבחור על מה לוותר, קשירות הגינות או יעילות.

דוגמא אמת היא שבמבחנים במקום לתת לכולם 4 עשות שזה שליש מיום עבודה, אז נותנים 3 שעות לסטודנטים בלי הארכה וכמעט 4 שעות לסטודנטים עם הארכת זמן, זה קורה כי הנהלת האוניברסיטה העדיפה את ההגינות על פני היעילות, אם כי עדיף 4 שאלות לכולם אבל זה לא הוגן.

תזכורת: חלוקה הוגנת – ללא קנאה אשר גורר פרופורציונלי

הרצאה 3 – חלוקת דירה (נלקח מאראל סגל)

איך לקבוע את הקצאת החדרים ואת המחיר לכל חדר, כך שאפאחד מהשותפים לא יקנא?

ישנם שני דרכים:

העדפה קרדינליות – אנשים יודעים לתת ערך מספרי לכל חפץ

העדפה אורדינליות – אנשים יודעים להגיד מה הם מעדיפים, אבל לא יודעים להגיד מספר

המודל האורדינלי:

במודל האורדינמלי, אנחנו מניחים שכל אחד מהשותפים יודעי להגדיר עבור כל וקטור מחירים, איזה חדר הוא מעדיף בוקטור המחירים הזה. אנחנו מניחים שההעדפות מקיימות את התנאים הבאים:

1. החדרים הם **סבירים** – ולכן עבור כל וקטור מחירים שסוכומו כסכום של שכר הדירה הכולל, דייר מוכן לקבל לפחות חדר אחד
2. השותפים הם **עניים** – ולכן כל שותף מעדיף חדר בחינם על פני חדר בתשלום

עבור שני שותפים, יש פתרון פשוט לחלוקת החדרים:

1. שותף אחד מחליט מה יהיה המחיר של כל חדר
2. השותף השני בוחר חדר
3. ההשותף הראשון משלים

הפתרון הזה נותן חלוקה ללא קנאה – בדיוק כמו אלגוריתם "חתוך ובחר" לחלוקת עוגה.

נראה שאפשר להכליל את זה לשלושה שותפים או יותר

ניתן להשתמש באלגוריתם של סימונס-סו לחלוקת עוגה (האלגוריתם עם הסימפלקסונים)

נניח ששכר הדירה הכולל הוא 1, כל חלוקה של שכר דירה בין החדרים היא וקטור של מספרים בין 0 ל-1 שסכומם 1, אוסף כל הוקטורים האלה הוא סימפלקס. נבצע מישלוש של הסימפלקס ונחלק אותו לסימפלקסונים קטנים, נניח, בגודל של אגורה אחת. עבור כל וקטור מחירים שנמצא על קודקוד של המישלוש, נשאל את כל המשתתפים "איזה חדר אתה מעדיף?"

הנחת השותפים **העניים** אומרת שבכל קודקוד ראשי, כל שותף יבחר את אחת הפרוסות הריקות (אחת מn-1 החדרים שהמחיר שלו בקודקוד זה הוא 0), לדוגמא אם יש שלושה חדרים ושלשה שותפים, אז בקודקוד מספר 1 כל שותף יכתוב 2 או 3, מוכלל לכל שאר הקודקודים שבפינות, דבר זה בדיוק הפוך ממצב בעיית חלוקה העוגה.

אנו רוצים להשתמש בלמה של שפרנר, אבל לשם כך אנחנו צריכים להחליט איזה תוית תהיה על כל קודקוד ראשי – יש שתי אפשריות, אם נבחר בכל קודקוד מספר אחר, התווית על הצלעות יתאימו לתנאי של שפרנר, אפשר לבחור תוית באופן דומה גם כשיש n חדרים ו-n שותפים, ולכן הלמה של שפרנר מתקיימת, ולכן קיים סימפלקסון שכל שותף בוחר חדר אחר, חלוקה זו מייצגת חלוקה כמעט ללא קנאה.

החסרון המרכזי במודל האורדינלי הוא הנחת "הדיירים העניים". רוב השותפים לא בהכרח מעדיפים חדר בחינם על חדר בתשלום, לדוגמא מרתף בחינם או יחידת הורים בשקל.

ולכן הלמה של שפרנר לא מתקיימת, כדי להתמודד עם בעיה זו – נציג אלגוריתם המסתמך על **המודל הקרדינלי**.

המודל הקרדינלי:

במודל הקרדיני, כל אחד מהשותפים מייחס **ערך מספרי** לכל חדר, המשקף את סכום המירבי לחודש שהוא מוכן לשלם עבור אותו חדר, ההנחות הן:

1. החדרים עם **סבירים**
2. הדיירים הם **קוואזי לינאריים** – אם דייר חושב שחדר מסויים שווה x ושכר החדר הוא y אז התועלת היא x-y

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט
הנחות הקוואזי לינאריות בד״כ סותר את ״הנחת הדיירים העניים״ מהמודל האורדונלי, ולכן אלגוריתם סימונס-סו לא יעבוד.

הגינות ויעילות
כהכנה לאולגוריתם, נוכיח משפט שמקשר בין הגינות ליעילות בבעיית חלוקת החדרים
משפט: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים הוא מקסימלי
הוכחה: תיהי x השמת חדרים ללא קנאה, תהי y השמה אחרת כלשהי, לפי הגדרת קנאה:

$$V_i(X_i) - P_i(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל החדרים בין בין 1 ל-n ונקבל ונקבל לבסוף $\sum_i V_i(X_i) \geq \sum_i V_i(Y_i)$
מכאן: בשמה X סכום הערכים גדול לפחות כמו בהשמה Y

המשפט הזה נותן לנו כיוון לאלגוריתם למציאת חלוקה ללא קנאה, נעבוד בשני שלבים:
- **שלב א׳:** נמצא השמה של אנשים לחדרים, הממקסמת את סכום הערכים
- **שלב ב׳:** נקבע מחיר לכל חדר, כך שההשמה עם המחירים היא ללא קנאה

שלב א׳: מציאת השמה עם סכום ערכים מקסמלי:
נניח שיש n אנשים ו-n חדרים, כמה השמות שונות של אנשים לחדרים יש? התשובה היא !n, עבור n מספיק גדול זה לא מעשי, ולכן נראה כיצד ניתן לפתור זאת ביעלות.

השם הכללי של הבעיה זה בעיה שידוך עם משקל מקסימלי (Maximum Weight Matching)
הקלט לבעיה הוא גרף דו צדדי, הצמתים מחלוקים ל-2 קבוצות, וכל קשת מקשרת בין צומת בקבוצה א׳ לצומת בקבוצה ב׳.
לכל קשת בגרף של משקל חיובי, שידוך בגרף הוא אוסף של קשתות, כל שכל צומת נוגע בקשת אחת לכל היותר.
שידוך מושלם בגרף זה הוא שידוך שבו כל הצמתים משודכים – כל צומת נוגע בקשת אחת בדיוק – המשקל של שידוך כלשהו הוא סכום משקלי הקשתות המשתתפות בשידוך.
המטרה: למצוא שידוך מושלם, שהמשקל הכולל שלו הוא הגדול ביותר.

ישנם אלגוריתם רבים לפתרון בעיית השמה, אחד המפורסמים הוא האלגוריתם ההונגרי (קורס אלגורתמים 2 למצטיינים).
נפתור זאת בעזרת פתרון לינארי, כאשר הפתרון הוא להציג את הבעיה בעיה רציפה, ואז להוכיח שהפתרון הוא בדיד.

```
Maximize    Sum_{i,j}  w[i,j] * x[i,j]
Such that   For all i: Sum_j x[i,j] = 1  ; For all j: Sum_i x[i,j] = 1
            For all i,j:  1 ≥ x[i,j] ≥ 0
            For all i,j:  x[i,j] in Z
```

כל האילוצים מתאימים למשנים רציפים, פרט לאילוץ האחרון – האילוץ האחרון קובע שהמחירים צריכים להיות מספרים שלמים.
לפתור בעיה עם אילוץ של מספרים שלמים היא בעייה NP-קשה, אך בבעיה שלנו (במקרה המיוחד) ניתן לפתור את הבעיה בלי האילוץ האחרון והפתרון שנקבל יהיה שלם.
הערה: יש הוכחה בText2-cardinal למה אם לבעיה קיים פתרון מקסמלי, אז גם קיים פתרון מקסמלי שבו כל המשתנים הם ערכים שלמים.

שלב ב׳: קביעת מחירים
מצאנו השמה הממקסמת את סכום הערכים, אז אנחנו כבר יודעים איזה דייר לשים באיזה חדר, כדי להשלים את הפתרון אנחנו צריכים לקבוע מחיר לכל חדר – כך שההשמה תהיה ללא קנאה, בנוסף, אנחנו צריכים לוודא שהסכום המחירים מכסה את שכר הדירה.
נפתור זאת באמצעות בעיית אופטמזציה הבאה:

```
Minimize    Sum_i p[i]
Such that   For all i, j: w[d[i], i] - p[i] ≥ w[d[i], j] - p[j]
```

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי [מהגיט]

עכשיו נשאר רק לוודא שהסכום המחירים שווה למחיר הכולל של הדירה, אם הסכום קטן יותר או גדול יותר, פשוט מחלקים את ההפרש במספר החדרים ומוסיפים או מפחיתים לכל חדר את אותה כמות. החלקה עדיין נשארת ללא קנאה.

בעיית הטרמפיסט

אחת הבעיות במודל הקרדינלי היא, שהמחירים עלולים להיות שליליים. לדוגמה, נניח שהערכים הם:

	סלון	מרתף
דייר א	150	0
דייר ב	140	10

ומחיר הדירה הוא 100. ההשמה חייבת למקסם את סכום הערכים - לכן חייבים לשים את דייר א בסלון ואת דייר ב במרתף.

כדי שדייר ב לא יקנא, ההפרש במחירים חייב להיות לפחות 130. לכן המחיר של הסלון חייב להיות 115 והמחיר של המרתף מינוס 15. משלמים לדייר ב כדי שיגור במרתף!

הפתרון הזה לא מתקבל על הדעת - הדיירים בוודאי לא יסכימו לשלם למישהו כדי שיגור במרתף - הם יעדיפו לוותר על המרתף...

פתרון פשוט למקרה זה הוא להפוך את כל המחירים השליליים ל-0, ולחלק את היתרה בין השחקנים האחרים. הבעיה היא, שהפתרון יהיה עם קנאה. אבל, הדיירים היחידים שיקנאו יהיו הדיירים שמקבלים חדר בחינם.

האם אפשר למצוא פתרון שהוא גם ללא-קנאה וגם בלי טרמפיסטים? התשובה היא כן - הפתרון האורדינלי. אבל לפתרון האורדינלי יש בעיה אחרת - הוא מניח את הנחת "הדיירים העניים".

שוב הגענו ל"טרילמה" (דילמה משולשת): יש לנו שלושה פתרונות, כל פתרון מקיים שתי תכונות, ואין אף פתרון שמקיים את כל שלוש התכונות (דיירים לא-עניים, אין קנאה, אין טרמפיסטים).

הרצאה 4 – חלוקת הוגנת של חפצים בדידיים (נלקח מאראל סגל)

מטרה: חלוקה של חפצים בדידים – חפיצים שאי אפשר לחתוך, כמו בתים, תכשיטים וכו׳. העבודה שאי אפשר לחתוך אותם אומרים שקשה יותר להשיג **הגינות** מאשר בבעיה הריצפה של חלוקת עוגה וכו׳
ישנם כמה דרכים להתמודד עם בעיה זו:

1. שימוש בכסף כדי למנוע קנאה – ראינו דוגמא בבעיית **חלוקה שכר-דירה**
2. חיתוך מספר קטן של חפצים – **דוגמא** באלגוריתם "המנצח המתוקן" **(בהמשך)** שחותך לכל היותר חפץ יחיד ומצליח למנוע קנאה
3. הגינות מקורבת – על זה נדבר היום

חלוקה ללא קנאה מלבד 1

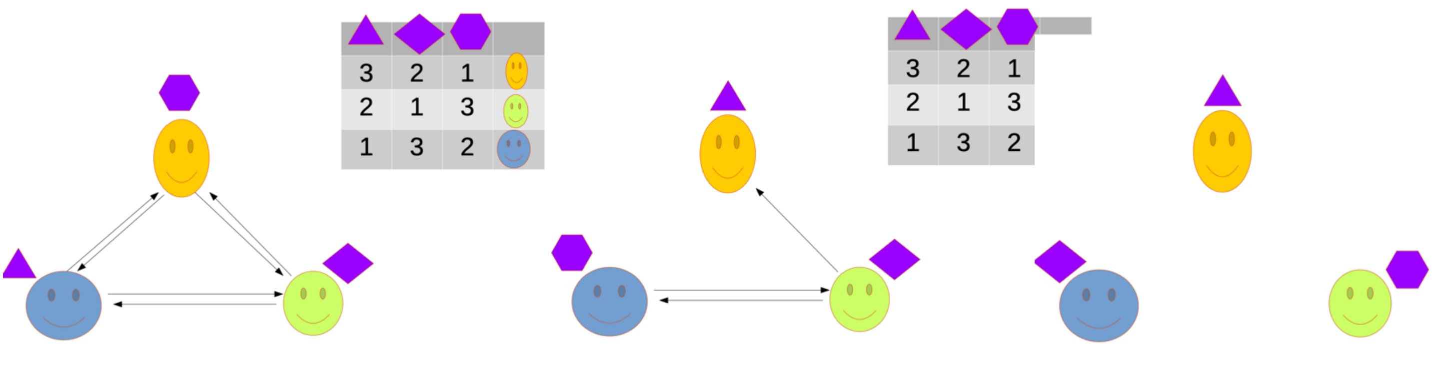
הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" או לחלופין EF1, אם לכל שני משתתפים א,ב אם מורידים מהסל של שחקן ב׳ חפץ אחד לכל היותר, אז שחקן א׳ לא יקנא בו.
המשמעות היא שרמת הקנאה היא הקטנה ביותר האפשרית, בהתחשב בעבודה שהחפיצים בדידים.

הערה: כאשר "העוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה ללא קנאה EF.
האם כשהחפצים בדידים תמיד קיימת חלוקה EF1? התשובה היא **כן**.
נציג את האלגוריתם הבא למציאת חלוקה כזאת - אלגוריתם מעגלי קנאה

אלגוריתם מעגלי קנאי:

1. נותנים את החפץ לשחקן שאף אחד לא מקנא בו
2. אם אין כזה, סימן שיש מעגל קנאה, ולכן:
   a. מחליפים סלים במעגל בניגוד הקנאה
   b. מבצעים את 2 עד שאין מעגלים ואז חוזרים ל-1.

דוגמת ריצה: (שמאל לימין) – **מעגל של 2 גם כן נחשב.**



קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט

משפט: אם יש m חפצים ו- n שחקנים אזי זמן הריצה של האלגוריתם **"מעגלי הקנאה"** הוא $O(m \cdot n^3)$
הוכחה:
מציאת מעגל ניתן לביצוע ע"י אלגוריתם DFS בסיבוכיות של $O(n^2)$
כל חפץ מוסיף לכל היותר $n-1$ קשתות
לכל היותר נוספות $(n-1) \cdot m$ ולכן לכל היותר יש להסיר $\frac{m(n-1)}{2}$ מעגלים
למצוא כל מעגל לוקח $O(n^2)$ ולכן סה"כ נקבל $O(m \cdot n^3)$

משפט: בכל שלב האלגוריתם, החלוקה הנוכחית היא EF1
הוכחה: החלוקה ההתחלתית (הריקה) היא EF1. נוכיח שכל צעד משאיר את החלוקה EF1
מסירת חפץ לשחקן שלא מקנאים בו, אולי גורמת לשאר השחקנים לקנא בו, אבל רק עד כדי חפץ 1.
הסרת מעגל משפרת את התועלת של השחקנים במעגל, ולא משנה את אוסף הסלים. ולכן, אם החלוקה הייתה EF1 אז היא גם כן תישאר EF1 גם אחרי הסרת המעגל.

משפט: אלגוריתם מעגלי קנאה עלול להחזיר תוצאה שאינה יעילה פארטו.
הוכחה: נניח שמחלקים 4 אבנים יקרות:

	אודם	ברקת	יהלום	ספיר
א	**10**	0	**1**	2
ב	0	**10**	2	**1**

כשמחלקים את החפצים מימין לשמאל, א' מקבל אודם ויהלום, ב' מקבל ברקת וספיר.
החלוקה לא יעילה פארטו – היה עדיף לתת ל-א' את אודם וספיר ול-ב' את ברקת ויהלום.

תזכורת: כאשר "העוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה ללא קנאה EF.
תזכורת: כאשר "העוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה ללא קנאה EF ויעילה
תזכורת: כאשר "העוגה" רציפה – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה.

<u>חלוקה ללא קנאה מלבד 1 וגם יעילה</u>
משפט: מסתבר (גילו ב2016) שעבור חפצים **בדידים** – חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא EF1 ויעילה פארטו.
הוכחה: במצגת.

לבסוף נרצה לפתור את הבעיה הבאה:

$$V_{i,g} = \text{Value of good } g \text{ to player } i.$$

$$x_{i,g} = \text{quantity of good } g \text{ given to player } i.$$

אנחנו רוצים לפתור בעיית אופטימיזציה:

Maximize $\quad \text{sum}_i \log(\text{sum}_g (x_{i,g} * V_{i,g}))$
such that for all g: $\quad \text{sum}_i\, x_{ig} = 1$

כאשר ה- $x_{i,g}$ רציפים, זה קל. כאשר ה- $x_{i,g}$ בדידים, זה קשה!

במאמר מ-2016 (ראו "מקורות", וראו גם במצגת) ישנו טריק המאפשר לפתור בעיה זו בזמן סביר, כאשר כל אחד מהערכים מוגבל למספר בין 1 ל-1000. כיוון שממשק-המשתמש באתר שלהם (http://www.spliddit.org/apps/goods) ממילא מאפשר להכניס רק ערכים בין 1 ל-1000, האלגוריתם עובד על כל קלט מציאותי.

יש כאן דרך חשיבה מעניינת: אם מסתכלים על הבעיה כבעיה תיאורטית בלבד, ומנסים לפתור אותה לכל הקלטים האפשריים - זה מאד קשה. אבל אם מסתכלים עליה כבעיה מעשית, ומנסים לפתור אותה רק עבור הקלטים שבני-אדם בפועל מזינים לאלגוריתם - הבעיה נעשית פתירה!

אוניברסיטת אריאל בשומרון

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיטט

<u>גישה שונה:</u> חיתוך מספר קטן של חפצים.
הפתרון זה מקובל להשאיר חלק מהחפצים בבעלות משותפת, לדוגמא אם יש שני יורשים ושלוש דירות, אז כל אחד יקבל דירה והדירה השלישית תיהיה משותפת כשאחוזי הבעלות יקבעו לפי השווי של הדירות האחרות.

כיוון ששיתוף הוא דבר יקר ולא נוח, אנחנו רוצים לשתף כמה שפחות, והשאלה היא – **מהו המספר הקטן ביותר של חפצים שצריך לשתף, על-מנת להשיג חלוקה הוגנת ויעילה?**

נציג אלגוריתם אשר פותר חלוקה הוגנת בין שני אנשים, אשר מצליח לשתף **חפץ אחד** לכל היותר – המינימום האפשרי בחפצים בדידים.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שותפים *(למשל: דונאלד ואיוואנה)*.
- m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת.
- כל שותף מייחס ערך באחוזים לכל נושא.

האתגר הינו – להחליט מי יקבל כל חפץ כל ש:

1. לא תהיה קנאה
2. התוצאה תהיה יעילה פארטו
3. נצטרך לחתוך חפץ אחד לכל היותר

ניסיון ראשון: אחד מחלק, השני בוחר.

- אין קנאה; חפץ אחד נחתך; אבל לא יעיל פארטו.

דונאלד:	**20**	**30**	20	30
איוואנה:	30	10	**40**	**20**

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שהכי רוצה אותו.

- יעיל פארטו, אף חפץ לא נחתך; אבל יש קנאה.

דונאלד:	10	**30**	**30**	**30**
איוואנה:	**40**	20	18	16

ניסיון שלישי: מיקסום מכפלת הערכים.

- אין קנאה; יעיל פארטו;
  אבל - לא ברור כמה חפצים נחתכים.
  - עלול לגרום לכך שיהיה שיתוף במספר רב של חפצים – דונאלד ואיוואנה לא יוכלו להיפרד..

<u>אלגוריתם "המנצח המתוקן":</u>

א. סדר חפצים בסדר עולה של היחס *דונאלד/איוואנה*.

ב. אתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.

ג. העבר חפצים לאיוואנה לפי הסדר, עד ש:

(1) הסכום של דונאלד שווה לסכום של איוואנה, **או** -

(2) יש חפץ אחד שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.

ראו גליון אלקטרוני מצורף winner.ods.

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

הוכחה: יהי r יחס-הניקוד של החפץ האחרון שהועבר מדונאלד לאיוואנה (r>1). [היחס הגדול ביותר].
נכפיל את הניקוד של איוואנה ב-r.
עכשיו בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי שנותן לו ניקוד מירבי. מכאן - החלוקה הסופית ממקסמת את הסכום: $r^*v_i + v_d$.

כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים, היא יעילה פארטו. ***

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: לשני השותפים ניקוד שווה.

אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. ***

אוניברסיטת אריאל בשומרון

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב

נכתב ע"י צבי מינץ

מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי מהגיט

סיכום עד הרצאה 5 כולל:

שיעור ראשון – חלוקה הוגנת וחלוקה ללא קנאה

- **אלגוריתם "חתוך ובחר"** אלגוריתם חלוקה עוגה בין שני ילדים (לתת להם לחלק בעצמם ואז השני בוחר)

חלוקה **פרופורציונלית** $\forall i,j \quad V_i(X_i) \geq \frac{V_i(C)}{n}$

חלוקה **ללא קנאה** $\forall i,j \quad V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$

חסרון:

2 אנשים בלבד

חלוקה פרופרציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה	יעיל פארטו
✓	✓	✓	**רק אם**: העוגה חד מימדית, שני השחקנים רוצים חתיכות קשירות ולכל נקודה בעוגה יש ערך חיובי ממש, בנוסף החותך לא "מתחכם"

- **אלגוריתם "המפחית האחרון"** – אלגוריתם לחלוקה פרופרציונלית ליותר מ-2 אנשים.

חלוקה פרופרציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה	יעיל פארטו
✓			

חסרון:

סיבוכיות: $O(n^2)$

- **אלגוריתם "אבן-פז"** – שיפור מבחינת יעילות של אלגוריתם "המפחית האחרון" בסיבוכיות $O(n \cdot logn)$

חלוקה פרופרציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה	יעיל פארטו
✓			

הערה: אלגוריתם אבן-פז הוא הכי מהיר שאפשר

חסרון:

עם קנאה

חלוקה לא רציפה

קיים מצב שהוא שיפור פארטו

- **אלגוריתם "Selfridge Conway"** – אלגוריתם ללא קנאה ל-3 שותפים

חלוקה פרופרציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה	יעיל פארטו
✓	✓		

חסרון:

3 אנשים בלבד ולא קשיר

הערה: כל אלגוריתם ליותר מ-4 שחקנים נכון לעכשיו לוקח סיבוכיות רבה.

עבור 3 – 5 שאילתות

עבור 4 – 200 שאילתות

עבור n כללית – סיבוכיות $O(n^{n^{5}})$

- **אלגוריתם סימונס-סו** – עם הסימפלקסונים (שימוש בלמה Sperner על מנת לדעת שיש מספר א"ז של סימפלקסונים שבהם כל התוויות שונות)

חלוקה פרופרציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה	יעיל פארטו
✓	**כמעט ללא קנאה**	✓	

נקבל את התמונה הבאה:

שחקנים	חלוקה פרופורציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה ללא קנאה
2	**חתוך ובחר**	2 שאילתות	
3	**אבן-פז** $\Theta(n \log n)$	**Selfridge Conway** 5	אינסוף!
4		200	
n		$\Omega(n^2)$ $O(n^{nnnnn})$	

שיעור שני – חלוקה יעילה של משאבים

הגדרה של שיפור פארטו ויעיל פארטו

משפט: ניתן ליצור חלוקה יעילה וקשירה ע״י דיקטטורה

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו
אומנם, החלוקה היא יעילה אבל **לא הוגנת** - לא פרופרציונלית עם קנאה

משפט: אם הפונקציה היא לגורמתית אז היא **יעילה פארטו וללא קנאה**

סה״כ קבלנו את התמונה הבאה:

	יעיל פארטו	ללא קנאה	פרוסות קשירות
אלגוריתם סו והמשולשים	לא	כן	כן
מיקסום סכום לוגים	כן	כן	לא
דיקטטורה	כן	לא	כן

שיעור שלישי – חלוקת דירה

המודל האורדינלי – הנחות הם:

1. החדרים סבירים
2. השותפים עניים – מעדיף תמיד חינם (**החסרון במודל**)

המודל הקרדינלי – הנחות הם:

1. החדרים הם סבירים
2. הדיירים הם **קוואזי לינאריים** – מסתכלים על התועלת (שווי של החדר בעיניו פחות השכר דירה)

המודל האורדינלי:

- אלגוריתם עבור 2 שותפים (אחד מחלק מחיר לחדר, השני בוחר והראשון משלים)
- אלגוריתם עבור יותר מ-3 שותפים: בעזרת סימונים-סו (הסימפלקסונים)
  כאשר נניח שהשכר דירה הוא 1, וכל חלוקה של שכר דירה בין החדרים הוא מספר בין 0 ל-1 שסכומם 1

המודל הקרדינלי:

משפט: בכל השמה ללא קנאה, הסכום הערכים בחדרים שלהם הוא מקסמלי
ניתן למצוא אלגוריתם לחלוקה ללא קנאה באופן הבא:

שלב א׳: נמצא השמה של אנשים לחדרים, הממקסמת את סכום הערכים
שלב ב׳: נקבע מחיר לכל חדר, כך שההשמה עם המחירים היא ללא קנאה

כאשר שלב א׳ הוא בעצם הבעיה של שידוך עם משקלי מקסמלי (נפתר ע״י אלגוריתם ההונגרי)
כאשר שלב ב׳ זה בעצם קביעת מחיר לכל חדר – כך שההשמה תהיה ללא קנאה כך שסכום המחירים מכסה את שכר הדירה.

חסרון: המחירים עלולים להיות שליליים (טרמפיסט)

שיעור רביעי – חלוקה הוגנת של חפצים בדיידים

חלוקה ללא קנאה פרט לחפץ אחד (EF1):

1. נותנים את החפץ לשחקן שאף אחד לא מקנא בו
2. אם אין כזה, סימן שיש מעגל קנאה, ולכן:
   a. מחליפים סלים במעגל בניגוד הקנאה
   b. מבצעים את 2 עד שאין מעגלים ואז חוזרים ל-1.

סיבוכיות: $O(m \cdot n^3)$
חסרון: יכול להחזיר חלוקה שהיא לא יעילה פארטו

חלוקה ללא קנאה פרט לחפץ אחד (EF1) וגם **יעילה פארטו**

קורס אלגוריתמים כלכליים – סמסטר א' 2020 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ
מבוסס על ההרצאות של אראל סגל-הלוי [מהגיט]

פתרון ע״י חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם כן EF1 וגם כן יעילה פארטו
חסרון: בעיית NP-קשה.

אלגוריתם: אלגוריתם אשר פותר חלוקה הוגנת בין שני אנשים, אשר מצליח לשתף **חפץ אחד** לכל היותר