קורס הסתברות – סמסטר ב' 2019 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ

אוניברסיטת אריאל בשומרון

מייל: zvimints@gmail.com

תוחלת $\mathbb{E}(X)$:
אם נבצע ניסוי פעמיים רבות התוצאות יתכנסו למספר מסוים (תוחלת)

הגדרה:

$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot\mathbb{P}(\omega) = \sum_k k\cdot\mathbb{P}(X=k)$

$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k\in S} f(k)\cdot P(X=k)$

$\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$ כאשר f היא **פונקצייה לינארית.**

תכונות (לינאריות התוחלת):

$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$ $\quad \mathbb{E}(c)=c \quad$ $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$

- **אם** X ו-Y ב"ת אז $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i\in S_X}\sum_{j\in S_Y} i\cdot j\cdot P(X=i, Y=j)$
- $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$
- $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X|A_i)\cdot\mathbb{P}(A_i)$ ובפרט $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$
- אם X נקבל ערכים **שלמים אי שליליים** אזי $\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>x)$
- אם מ"מ X נקבל ערכים בין a ל-b אזי $a\le\mathbb{E}(X)\le b$

טענה (מונטוניות התוחלת) אם $\mathbb{P}(X\le Y)=1$ אזי $\mathbb{E}(X)\le\mathbb{E}(Y)$

נוסחאות נוספות:

E(X+Y|Y=y)=E(X|Y=y)+y

E(X+Y|Y)=E(X|Y)+Y

E(XY|Y=y)=yE(X|Y=y)

E(XY|Y)=YE(X|Y)

הגדרה: יהי A מאורע עם הסתברות חיובית אז:

$$E(X|A)=\sum_x xP(X=x|A)$$

מקדם המתאם (ρ):
מדד לקשר ליניארי בין שני משתנים

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$$

טענה: $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$

טענה: $\rho(X+a,Y) = \rho(X,Y)$ לכל $a\in\mathbb{R}$

טענה: לכל $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ מתקיים $\rho(aX,Y) = \frac{a}{|a|}\rho(X,Y)$

טענה: $\rho(X,X)=1$ $\quad$ **טענה:** $\rho(X,Y)=0 \iff Cov(X,Y)=0$

טענה: $|\rho(X,Y)|\le 1$

טענה: $\rho(X,Y)=1 \iff \exists\, a>0, b\ s.t\ \mathbb{P}(Y=aX+b)=1$

$\rho(X,Y)=-1 \iff \exists\, a<0, b\ s.t\ \mathbb{P}(Y=aX+b)=1$

אם $X' = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ אזי $\mathbb{E}(X')=0, Var(X')=1$

אי שיוויונות להערכת הסתברות:

אי-שיוויון בול: $P(\bigcup_{k=1}^n A_k)\le\sum_{k=1}^n P(A_k)$

אי שיוון מרקוב: אם X משתנה מקרי **אי שלילי** אז:

$$\mathbb{P}(X\ge t)\le\frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

אי שיוון צ'בשב: יהי X משתנה מקרי כלשהו, אז:

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\ge t)\le\frac{Var(X)}{t^2}$$

אם $t=\lambda\sigma_X$ אז:

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\ge\lambda\sigma_X)\le\frac{1}{\lambda^2}$$

שונות $Var(X)$:
מדד לפיזור סביב התוחלת. כמה אנחנו מרוחקים מהתוחלת?

הגדרה: $Var(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$

הגדרה: סטיית התקן של X היא $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

תכונות של שונות:

- $Var(X)\ge 0$, $Var(X)=0 \iff P(X=\mathbb{E}(X))=1$
- $Var(aX+b) = a^2Var(X)$
- $Var(X\pm Y) = Var(X)\pm 2Cov(X,Y)+Var(Y)$
- $Var(c)=0$

שונות משותפת (Cov – Convariance):

אם X,Y משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית אזי $Cov(X,Y)$ סופי ו-:

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$

אם X,Y משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית אזי:

- מתאומים חיובית אם $Cov(X,Y)>0$ (שלילי רק עם הסימן >), כלומר ידיעה ש-X התרחב מגדילה את הסיכויים ש-Y התרחב ולהיפך.
- לא מתאומים אם $Cov(X,Y)=0$

X,Y ב"ת $\Rightarrow Cov(X,Y)=0$ $\qquad$ $Cov(X,Y)=0 \nRightarrow$ X,Y ב"ת

תכונות של שונות משותפת:

- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ ו- $Cov(X,X)=Var(X)$
- $Cov(X,a)=0$
- $Cov(aX,bY) = ab\cdot Cov(X,Y)$ ו- $Cov(aX,Y)=aCov(X,Y)$
- $Cov(X+Z,Y) = Cov(X,Y)+Cov(Z,Y)$
- $Cov(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m Cov(X_i,Y_j)$

משפט: יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ בעלי תוחלת סופית ויהי $X=\sum_{i=1}^n X_i$ אזי

$Var(X=\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)+2\cdot\sum_{1<i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$

אינדקטורים:

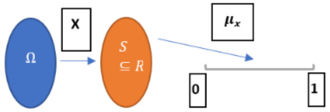
- $Cov(1_A(\omega),1_B(\omega)) = \mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- $Var(1_A(\omega)) = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A))$
- $\mathbb{E}(1_{A(\omega)}) = \mathbb{P}(A=1) = \mathbb{P}(A)$

משתנים מקריים

משתנה מקרי היא פונקצייה $X:\Omega\to S$ כאשר $S\subseteq R$

אינדקטור של מאורע $A\subseteq\Omega$ הוא: $1_A(\omega) = \begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$

התפלגות היא פונקצייה $\mu: S\to[0,1]$ כך שהקבוצה $\underbrace{\{x\in S:\mu(x)\neq 0\}}_{\text{התומך}}$ סופית או בת מנייה ו $\sum_{x\in S}\mu(x)=1$



ולכן כדי להראות ש- μ' היא **התפלגות** צ

1. μ' ממפה לערכים $[0,1]$
2. $\sum_{x\in S}\mu'(x)=1$
3. $\{x\in S:\mu'(x)\neq 0\}$ סופי או בן מנייה

התפלגות של משתנה מקרי X היא פונקצייה μ_x שמוגדרת:

$\forall x\in S: \mu_x(x) = \mathbb{P}(X=x)$ כאשר $\mathbb{P}(X=x) := \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x\})$

בדרך כלל נסמן עבור תומך של $\mu_{Y_1} = \{0,1,2\}$ אזי $Y_1\sim\begin{cases}0 & 4/9\\ 1 & 4/9\\ 2 & 1/9\end{cases}$

כאשר אגף ימין הם $\mu_{Y_1}(Y_1=i)$ עבור כל $i\in[3]$

X,Y הם משתנים מקריים זהים אם $\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(Y=x)$ עבור כל $x\in S$

עבור כל מאורע $A\subseteq\Omega$ מתקיים כי $1_A\sim\begin{cases}1, & \mathbb{P}(A)\\ 0, & 1-\mathbb{P}(A)\end{cases}$

הגדרה: לכל $i\in[1,n]$ יהי $X_i:\Omega\to S_i$ משתנה מקרי, נאמר ש $X_1,\dots,X_n$ **משתנים מקריים בלתי תלויים** אם לכל x_i עבור $i\in[1,n]$ מתקיים כי:

$\mathbb{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) = \prod_{i=1}^n\mathbb{P}(X_i=x_i)$

הגדרה: המשתנים המקריים X,Y **בלתי תלויים** אם **לכל** a,b מתקיים כי:

$\mathbb{P}(X=a,Y=b) = \mathbb{P}(X=a)\cdot\mathbb{P}(Y=b)$

התפלגות משותפת:

$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in S}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$

התפלגות **משותפת** $\Leftarrow$ התפלגות **שולית**

סכום של משתנים מקריים: (חוק ההסתברות השלמה)

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{j=1}^k\mathbb{P}(X+Y=k\,|X=j)\cdot\mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=1}^k\mathbb{P}(Y=k-j)\cdot\mathbb{P}(X=j)$$

$$\mathbb{P}(X\ge a, Y\ge b) = \sum_{x=a}^{\infty}\sum_{y=b}^{\infty}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

טענה: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$

$$\begin{aligned}E[E[X|Y]] &= E\left[\sum_x x\cdot P(X=x|Y)\right]\\ &= \sum_y\left[\sum_x x\cdot P(X=x|Y=y)\right]P(Y=y)\\ &= \sum_x x\sum_y P(X=x|Y=y)\cdot P(\\ &= \sum_x x\sum_y P(X=x \text{ and } Y=y)\\ &= \sum_x x\cdot P(X=x)\\ &= E[X]\end{aligned}$$

𝔼 כללי

טענה

$$\sum_x\sum_y x\cdot\mathrm{P}(X=x,Y=y) = \sum_x x\sum_y\mathrm{P}(X=x,Y=y) = \sum_x x\cdot\mathrm{P}(X=x) = \mathrm{E}(X).$$

נתון	משפט
מאורעות בלתי תלוים	$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\|B)$
משתנים בלתי תלויים	$\mathbb{P}(X,Y)=\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)$ $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$
משתנה אי שלילי	$\mathbb{E}(X)=\sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>x)$ **אי שיוון מרקוב**

ממבחנים קודמים:

$$\sum_{t=1}^{\infty}t\cdot\mathbb{P}(X=t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=k}^{\infty}\mathbb{P}(X=t)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|N)) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}(X\,|N=n)\cdot\mathbb{P}(N=n)$$

דוגמא לתרגיל: קוביה הוגנת מוטלת n פעמיים, כל ההטלות ב"ת. יהי X מ"ק שסופק את כמות ההטלות עם התוצאות 2,3 ו-Y עם ההטלות 1,2 חשבו את Cov(X,Y)

פתרון: נשים לב כי $X,Y\sim Bin(n,\frac{1}{3})$ ולכן $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{n}{3}$, נגדיר לכל $i\in[1,n]$

$X_i = \begin{cases}1 \text{ if the outcome of the ith die roll is 2 or 3}\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$

$Y_i = \begin{cases}1 \text{ if the outcome of the ith die roll is 1 or 2}\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$

ולכן $X=\sum_{i=1}^n X_i$ ו- $Y=\sum_{i=1}^n Y_i$ ולכן:

$$Cov(X,Y) = Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{i=1}^n Cov(X_i,Y_i) = \sum_{i=1}^n Cov(X_i,Y_i)$$

כי X_i,Y_j ב"ת כאשר $i\neq j$ בגלל שהם תלויים על הטלות שונות שהם לפי ההנחה בלתי תלויות, ולכן $Cov(X_i,Y_j)=0$ כאשר $i\neq j$.

נשים לב כי:

$$Cov(X_i,Y_i) = \mathbb{E}(X_i\cdot Y_i)-\mathbb{E}(X_i)\cdot\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{P}(X_i=1,Y_i=1)-\mathbb{P}(X_i=1)\cdot\mathbb{P}(Y_i=1)$$
$$=\mathbb{P}(\text{the outome of the ith die roll is }2)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \dots\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\mathbb{P}(X=k)\\ &= \mathbb{P}(X=1)\\ &+ \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=2)\\ &+ \mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=3)\\ &+ \mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=4)\\ &+\cdots\end{aligned}$$

Now, try summing vertically instead of horizontally. The sum of the first column will be

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>0).$$

הסבר ל:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>x) = \sum_{x=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\ge x)$$

הכלה והדחה

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset\neq\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|I|-1}\mathbb{P}(\cap_{i\in\mathcal{J}} A_i)$$

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i^c) = \sum_{\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|\mathcal{J}|}\mathbb{P}(\cap_{i\in\mathcal{J}} A_i)$$

טענה: $\cap_{i\in\emptyset} A_i = \Omega$ **טענה:** $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e}$

<u>דרך פתרון כללית ע"י הכלה והדחה:</u>

1. מגדירים מאורע A_i עבור $i \in [a,b]$ אשר זהו המאורע שאנחנו מחפשים או המשלים שלו.
2. $\mathbb{P}(\cap_{i\in\mathcal{J}} A_i) = \frac{|\cap_{i\in\mathcal{J}} A_i|}{|\Omega|}$ אם המרחב הסתברות אחיד
3. נשתמש בהכלה והדחה על מנת לחשב את $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i^c)$ או את $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ ע"י אחת הנוסחאות, נקבל כי:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\emptyset\neq\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{|\mathcal{J}|-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{J}} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\cdot(\text{פתרון של } 2)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \sum_{\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{|\mathcal{J}|}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{J}} A_i\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\cdot(\text{פתרון של } 2)$$

מאורעות - הסתברות מותנת

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\cdot\mathbb{P}(B)$$

Bavce

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(A_n \mid \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A \mid B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_2 \mid B_i\cap A_1)\cdot\mathbb{P}(B_i \mid A_1)$$

A,B **בלתי תלויים** $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$

A,B **בלתי תלויים** $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$

מאורעות $A_1,\dots,A_n$ נקראים **<u>בלתי תלויים</u>** אם לכל תת קבוצה $I\subseteq\{1,\dots,n\}$ כך ש $|I|\geq 2$ מתקיים $\mathbb{P}(\cap_{i\in I} A_i) = \Pi_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$
<u>או</u> $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} B) = \Pi_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B)$ עבור $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$

מאורעות A,B הם **Conditional Independence** אם בהינתן מאורע C כך ש $\mathbb{P}(C) > 0$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(A\cap B \mid C) = \mathbb{P}(A|C)\cdot\mathbb{P}(B|C)$$

חוק ההסתברות השלמה עבור $B_1,..B_n$ מאורעות זרים ואיחודם שווה לΩ

שם ההתפלגות	התפלגות $\mathbb{P}$	תוחלת $\mathbb{E}$	שונות Var	דוגמא
אחידה $U(S)$ או $U(a,b)$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{\lvert S\rvert}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ **הוכחה:** נוסחא ← התפלגות אחידה ← ולהשתמש בנוסחא $\sum_{k=a}^{b} k = \frac{(b+a)\cdot(b-a+1)}{2}$	$Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ **<u>הוכחה:</u>** נרצה להזיז לקטע $(1,n)$. נגדיר משתנה מקרי $Y = X-a+1$ ונסמן $n = b-a+1$ לנוחות, נשים לי כי מתקיים $Var(X) = Var(Y+a-1) = Var(Y)$ ולכן מספיק להוכיח כי $Var(Y) = \frac{n^2-1}{12}$ נשים לב כי $Y\sim U(1,n)$	הטלת קובייה הוגנת כעת, נחשב תחילה את $\mathbb{E}(Y^2)$: $\mathbb{E}(Y^2) = \sum_y y^2\cdot\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{k=1}^{n} k^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ כעת נחשב את $Var(Y)$: $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12}\cdot[4n+2-3n-3] = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$
ברנולי $Ber(p)$ תומך: k=0,,k=1	$\mathbb{P}(X=1) = p$ $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$	$\mathbb{E}(X) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0 = p$	$Var(X) = p(1-p)$ הוכחה: $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x\in S} x^2\mathbb{P}(X=x) = p$ ו-$\mathbb{E}(X)^2 = p^2$	הטלת מטבע
בינומית $Bin(n,p)$ תומך: $k\in[0,n]$ טענה: $\mathbb{P}(X\leq k) = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ **<u>טענה:</u>** יהיו $X_1,\dots,X_n$ **<u>משתנים מקריים בלתי תלויים</u>** כך ש $X_i\sim Ber(p)$ לכל $i\in[1,n]$ ויהי $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ אזי $S_n\sim Bin(n,p)$	$\mathbb{E}(X) = np$ $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,b(k;n,p) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k q^{(n-1)-k} = np\sum_{k=0}^{n-1} b(k;n-1,p) = np.$	$Var(X) = np(1-p)$ **הוכחה:** יהי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר כל X_i התפלגויות ברנולי בלתי תלויות ולכן: $Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{(i=1)}^{n} Var(X_i) = nVar(X_1) = n(1-p)p$ **הוכחה:** יהי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר כל X_i התפלגויות ברנולי בלתי תלויות ולכן: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{(i=1)}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1) = np$	# עץ ב-n הטלות בלתי תלויות **<u>הוכחה כי $Bin(n,p)$ היא התפלגות:</u>** 1. נשים כי התומך בגודל $n+1$ ולכן סופי. 2. נשים לב כי $\mathbb{P}(X=k)\geq 0$ ולכן $\mathbb{P}(X=k)\in[0,1]$ (נראה $\sum_k\mathbb{P}(X=k) = 1$) 3. נראה כי $\sum_k\mathbb{P}(X=k) = 1$: $\sum_k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 1^n$
גאומטרית $Geom(p)$ תומך: $k\in[1,\infty)$	$P(X=k) = p\cdot(1-p)^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ **הוכחה:** נוסחא ← להחליף k ל- k $+1$ ואז לפתוח סוגריים. לבסוף לקבל $\mathbb{E}(X) = (1-p)\cdot\mathbb{E}(X)+1$ כאשר 1 מתקבל מסכום על התומך	$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$ **הוכחה:** $\sum_{m=0}^{\infty} m^2\cdot(1-p)^m\cdot p + 2\mathbb{E}(X) - 1$ $(1-p)\cdot\sum_{m=1}^{\infty} m^2\cdot(1-p)^{m-1}\cdot p + \frac{2}{p} - 1$ $(1-p)\cdot\mathbb{E}(X^2) + \frac{2-p}{p},$	# הטלת מטבע עם הסתברות p לעץ עד לפעם הראשונה שיצא עץ $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty}(k^2-2k+1)\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p + \sum_{k=1}^{\infty} 2k\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p - \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p + 2\mathbb{E}(X) - 1$
היפרגאומטרית $Hyp(N,D,n)$ תומך: $max\{0,n+D-N\}\leq k\leq D$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathbb{E}(X) = n\cdot\frac{D}{N}$ **הוכחה:** בעזרת $\binom{D}{N} = \frac{D}{N}\binom{D-1}{N-1}$ ולהוציא מהסיגמא $\frac{nD}{N}$	$Var(X) = D\cdot n\cdot(N-D)\cdot\frac{(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}$ **הוכחה:** בעזרת טריק $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2-X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$	# הכדורים האדומים מכד עם N כדורים כאשר D מהם אדומים ובוחרים n כדורים בלי החזרה כאשר $\mathbb{E}(X^2-X) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \cdots$ ומשתמשים ב$\binom{D}{N}$ פעמיים כדי לצמצם את $k(k-1)$
פואסון $Poisson(\lambda)$ תומך: $k\in[0,\infty)$	$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ אם מגרילים באופן אחיד $\pi\in S_n$ ומסמנים ב-X את מס' נק' השבת של π אז $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X=k) = e^{-1}\cdot\frac{1}{k!}$, כלומר כש $n\to\infty$ אזי $X\sim Poi(1)$.	$\mathbb{E}(X) = \lambda$ **הוכחה:** נוסחא ← $e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ ← טור	$Var(X) = \lambda$ **הוכחה:** בעזרת אותו **טריק** $\mathbb{E}(X^2-X) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdot\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda^2\cdot\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda^2,$	לתמורה יש בדיוק k נק' שבת עבור המספרים $1,\dots,n$ **<u>משפט הגבול הפואסוני:</u>** תהי $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של הסתברויות, כך ש $\lim_{n\to\infty} n\cdot p_n = \lambda$ לאיזשהו $\lambda > 0$ ממשי אזי ההתפלגות הבינומית $Bin(n,p_n)$ שואפת להתפלגות $Poi(\lambda)$, כלומר לכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$
בינומית שלילית $NB(r,p)$ תומך: $k\in[n,\infty)$ טענה(מצגת 8): אם המשתנים המקריים $X_1,\dots X_r\sim Geon(p)$ ובלתי תלויים אזי $X = \sum_{i=1}^{r} X_i\sim NB(r,p)$	$\mathbb{P}(X=n) = \binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$ $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=r}^{\infty} n\cdot\mathbb{P}(X=n) = \cdots = \frac{r}{p}\underbrace{\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}p^{r+1}(1-p)^{n-r}}_{=1\to NB(r+1,p)} = \frac{r}{p}$	$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ **הוכחה:** בעזרת אותו **טריק** $\frac{r(r+1)}{p^2}\cdot\sum_{m=r+2}^{\infty}\binom{m-1}{(r+2)-1}\cdot p^{r+2}\cdot(1-p)^{m-(r+2)}$ $\frac{r^2+r}{p^2},$	נטיל מטבע עם הסתברות p לעץ עד שנקבל עץ r פעמיים, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. נסמן ב-X את מס' ההטלות הכולל. $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{n=r}^{\infty} n(n+1)\cdot\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r} = r(r+1)\cdot\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1}{r+1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r} = \frac{r(r+1)}{p^2}\cdot\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1}{r+1}\cdot p^{r+2}\cdot(1-p)^{n-r}$

$\binom{n}{k}$ – לבחור k אנשים מתוך n **בלי** חזרות **ובלי** חשיבות לסדר, שקול חישובית ל- $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{k+n-1}{k}$ - מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n **עם** חזרות **ובלי** חשיבות לסדר, ניתן להסתכל על בעיית $x_1+x_2+\cdots x_n = k$ או לחלופין לשים k כדורים ב n תאים.

זהות פסקל

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

טענה: $\binom{D}{N} = \frac{D}{N}\binom{D-1}{N-1}$

<u>בינום של ניוטון:</u>

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},$$

עם חשיבות לסדר **ועם** חזרות - $(\text{אפשריות})^{\text{כמות}}$

<u>סכום סדרה הנדסית:</u>

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

<u>סכום סדרה חשבונית:</u>

$$S_\infty = a_1\cdot\frac{\overbrace{q^n}^{\to 0}-1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

<u>טורים</u>: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$\sum_{i=1} i^2 = \frac{\quad}{6}$$

$$\mathbf{E}(X) = \sum_a P(X=a)a = \sum_a\sum_i P(X=a|A_i)P(A_i)a = \sum_i P(A_i)\sum_a aP(X=a|A_i) = \sum_i P(A_i)\mathbf{E}(X|A_i).$$

אם X הוא משתנה מקרי המוגדר על מרחב Ω, ו- $A\subset\Omega$ הוא מאורע בעל הסתברות חיובית, אפשר להגדיר את המשתנה המותנה $X|A$, שההסתברויות שלו הן $P(X=x\,|\,A) = \frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)}$. המשתנה הזה מתקבל מצמצום ההתפלגות של המשתנה X אל המאורע A, כלומר, משינוי מרחב ההתפלגות על ידי הוספת הנחה ש- A אירע.

משפט: משפט ההסתברות השלמה

נניח ש- A מאורע כלשהו, ונניח ש- $B_1,\dots,B_n$ מאורעות זרים המקיימים $\bigcup_k B_k = \Omega$. אז

$$\mathbb{P}(A) = \sum_k\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k) = \sum_k\mathbb{P}(A\cap B_k)$$

הסתברות השלמה:

זו אכן התפלגות כי התומך בן מנייה (תת קבוצה של $\mathbb{N}$) ו $\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}\geq 0$ עבור כל $n\geq r$ טבעי. ניתן להוכיח כי $\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r} = 1$ ע"י הוכחה באינדוקציה על r ש- $\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}\cdot(1-p)^{n-r} = p^{-r}$ ושימוש בזהות פסקל

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

נכתב ע"י צבי מינץ
zvimints@gmail.com