## העתקות ליניאריות

**הגדרה:** העתקה ליניארית היא פונקצייה בין 2 מרחבים לינארית $f: R^n \to R^m$ שמקיים את התנאים הבאים עבור $u, v \in R^n$ :

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(av) = af(v)$

על מנת להוכיח שפונקצייה $f$ היא העתקה ליניארית יש להוכיח את 2 התנאים, ניתן גם כן להוכיח כי $f(u+av) = f(u) + af(v)$ במקום.

| |
|---|
| תכונה של העתקה: $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ |

כלומר אם $f\left(\vec{0}\right) \neq \vec{0}$ אז $f$ לא העתקה ליניארית .

אם העתקה ליניארית היא ממרחב $n$ למרחב $m$ אז ניתן לייצג את העתקה באמצעות מטריצה $A$ בסדר $m \times n$ ואז העתקה תפעל באופן הבא : $f(v) = A_f \cdot v$

דוגמא להעתקה ליניארית מ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{matrix} y \\ x+y \\ x \end{matrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

הרכבת 2 העתקות ליניאריות זה למעשה ההכפלה 2 המטריצות המיצגות

עבור העתקה $f: V \to W$ אזי:

<u>גרעין של העתקה ליניארית $kerf$: $\{u \in V \mid T(u) = 0\}$</u>

- כל וקטור $v \in V$ כך ש $kerf(v) = 0$
- הגרעין הוא תת מרחב של המרחב $V$
- העתקה $f$ היא חח"ע $\Leftrightarrow$ $kerf = \{0\}$

על מנת למצוא גרעין עבור העתקה $f$ :

1. נמצא את העתקה ע"י מטריצה מייצגת
2. נפתור את מערכת המשוואות של אותה המטריצה
3. הפתרונות זה בעצם הבסיס של הגרעין, היות וכל פתרון שמצאנו אזי הכפלה שלו במטריצה תביא אותנו לוקטור ה0, ולכן גם צירוף ליניארי של כל פתרון יביא אותנו לוקטור האפס.

<u>תמונה של העתקה ליניארית $imgf$ : $\{v \in W \mid \exists u \in V : T(u) = v\}$</u>

- קבוצת כל הוקטורים ב $W$ שניתן לקבל אותם כתוצאה מהעתקה ליניארית
- התמונה היא תת מרחב של הטווח $W$
- העתקה $f$ היא על $\Leftrightarrow$ $imgf = W$

על מנת למצוא תמונה עבור העתקה $f$ :

המרחב שפורש את $Imgf$ זה מרחב העמודות הבלתי תלויות ולכן נכניס את העמודות למטריצה בשורות, נדרג, כל השורות שאינם 0 זה הבסיס לתמונה

אם $f(v)$ היא ט"ל (טרנסופרמציה ליניארית $\equiv$ העתקה ליניארית ) חח"ע ועל, אזי קיימת $f^{-1}(v)$ כך ש $f\left(f^{-1}(v)\right) = v$ , על מנת למצוא את ההופכית של $f$ נבנה מטריצה $(f \quad | \quad I)$ ונדרג עד קבלת $(\mathrm{I} \quad | \quad f^{-1})$

משפט המימיידים: $dim(kerf) + dim(imf) = dim\,V$ עבור ט"ל $f: V \to W$

<u>בהינתן התרגיל מהסוג הבא:</u>

נתון $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ שמקיים $\begin{matrix} T(v_1) = w_1 \\ \vdots \\ T(v_n) = w_n \end{matrix}$ וצריך לקבוע האם קיימת העתקה לינארית שמקיימת את הנתון, ואם כן למצוא את העתקה ולקבוע האם היא יחידה.

**משפט:** יהיו $V, U$ מרחבים וקטורים
ויהי $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ בסיס של $V$
ויהי $\{u_1, u_2 \dots u_n\}$ וקטורים כלשהם ב $U$ אזי קיימת ט"ל יחידה $T: V \to U$ כך ש $\begin{matrix} T(v_1) = u_1 \\ \vdots \\ T(v_n) = u_n \end{matrix}$

1. נבדוק אם $v_1 \dots v_n$ בת"ל, כלומר נכניס למטריצה שורות את הוקטורים ונצמיד להם $\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$
2. אם יש שורת אפסים, אז נבדד את המשוואה שיצא לנו בצד, נפעיל ט"ל ונבדוק היא היא מתקיימת. אם היא לא מתקיימת אז יש סתירה, ולכן לא קיימת העתקה לינארית שמקיימת את הנתון. אם היא כן מקיימת, אז **נשלים** לוקטורים הבלתי תלויים עוד וקטורים בת"ל כך שלמרחב $V$ יהיה $n$ וקטורים, אולם נגיד כי העתקה היא **לא** יחידה כי יכולנו להשלים איזה וקטור שנרצה.
3. נכניס את את הוקטורים למטריצת **שורות** $\left(\begin{matrix} [\ w_1\ ] \\ \dots \\ [\ w_n\ ] \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ v_1\ ] \\ \dots \\ [\ v_n\ ] \end{matrix}\right)$ ונדרג עד $(A_T)^T \mid I$
4. נבצע בדיקה על הנתון

<u>עבור פולינומים :</u>

כל פולינום מהצורה $ax^2 + bx + c$ ניתן לביטוי ע"י וקטור מהצורה $(a, b, c)$ ולכן נעבור לצורה וקטורית

בהינתן $T(ax^2 + bx + c) = (a + c)x^2 + bx + c$ זה בתכלס $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש

$T(a, b, c) = (a + c, b, c)$ ואז פותרים רגיל

**הערכה כללית:**

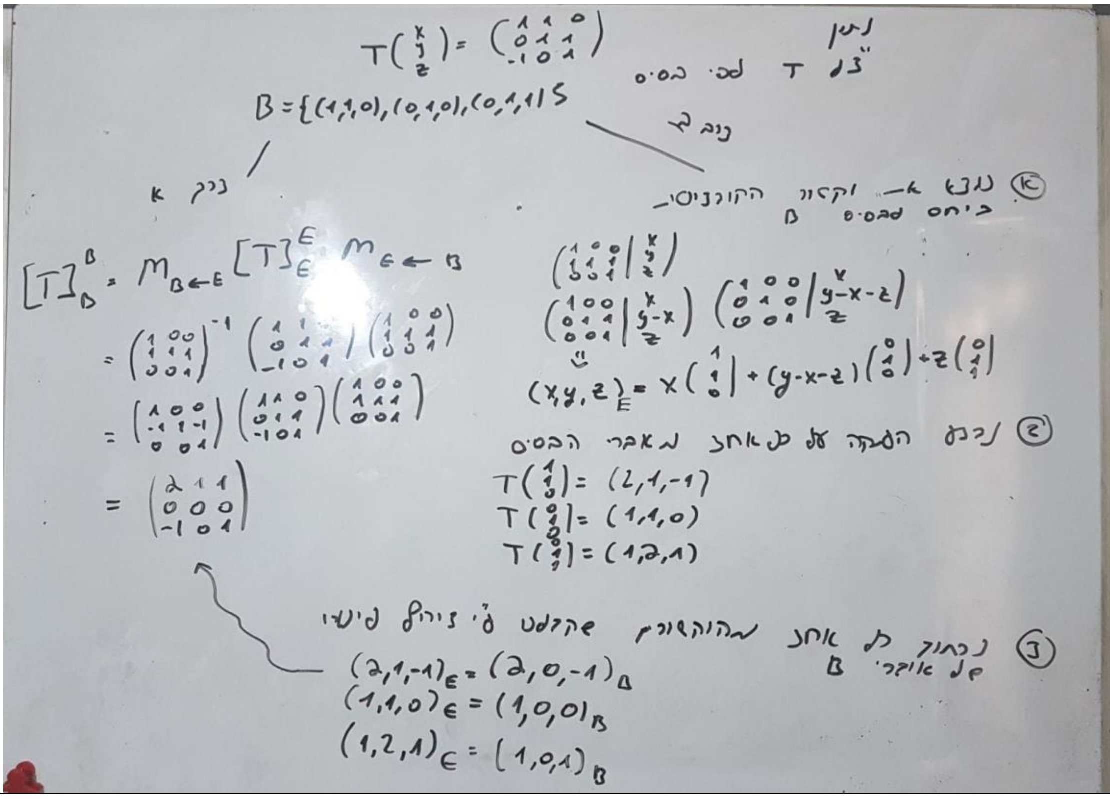
מטריצה של הפולינומים

$$\begin{matrix} x^2 - 7x - 2 & 3x^2 - 4 \\ 4x - 5 & -x^2 + 2x - 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{matrix} x^2 + \begin{matrix} -7 & 0 \\ 4 & 2 \end{matrix} x + \begin{matrix} -2 & -4 \\ -5 & -3 \end{matrix}$$

<u>תרגילים מהסוג:</u> בהינתן העתקה $[T]_E^E$ מצא העתקה בבסיס $A = \{a_1, \dots, a_3\}$

| דרך ב' | דרך א' |
|---|---|
| 1. מצא את וקטור הקרודינטות ביחס לבסיס A<br>כלומר מצא את $(x,y,z) = f(x,y,z)\cdot a_1 + f(x,y,z)\cdot a_2 + f(x,y,z)\cdot a_3$<br>על מנת למצוא זאת, אנחנו מחפשים צירוף לינארי של וקטורי הבסיס $A$ ולכן נכניס את וקטורי הבסיס של $A$ כעמודות ונצמיד להם פתרון כללי. נדרג עד קבלת מטריצת היחידה<br>2. נפעיל את העתקה על כל אחד מעברי הבסיס<br>3. נבטא כל אחד מהוקטורים שקבלנו כצירוף לינארי של איברי הבסיס $A$, בשביל זה יש את וקטור הקורדינטות. נסמן את מקדם בצבע<br>4. המטריצה שקבלנו מהצבעים, נשחלף אותה. זו המטריצה המייצגת של העתקה בבסיס $A$ | $[T]_A^A = P_{A\leftarrow E}\cdot[T]_E^E\cdot P_{E\leftarrow A}$<br>כאשר $P_{E\leftarrow A}$ היא העמודות של בסיס $A$<br>כאשר $[T]_E^E$ היא העתקה הנתונה<br>כאשר $P_{A\leftarrow E}$ היא $(P_{E\leftarrow A})^{-1}$ |

**דוגמא לתרגיל:**



**הוכחות:**

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

**הוכחה:**

$f$ הינה ט"ל ולכן $T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)$ עבור כל $u_1,u_2 \in V$

נבחר $u_2 = -u_1$ ולכן נקבל כי $T(u_1-u_1)=T(u_1)-T(u_1) \to T(\vec{0})=\vec{0}$

העתקה $f$ היא חח"ע $\iff kerf = \{\vec{0}\}$

**הוכחה:**

יש צורך להוכיח גרירה דו כיוונית

<u>צד ראשון:</u> נניח כי $f$ הינה העתקה חח"ע ונוכיח כי $kerf = \{\vec{0}\}$

נניח בשלילה כי קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש $f(v) = 0$, ידוע כי עבור כל ט"ל מתקיים ש $f(0) = 0$

בסתירה להנחה כי $f$ חח"ע

<u>צד שני:</u> נניח כי $kerf = \{\vec{0}\}$ ונוכיח כי $f$ חח"ע

נניח כי $h(u) = h(v)$ צ"ל $u = v$

$$h(u) = h(v) \to h(u) - h(v) = 0$$

לפי תכונות של ט"ל מתקיים כי $h(u) - h(v) = h(u - v) = 0$

לפי ההנחה $kerh = \{0\}$ ולכן והקטור היחידי שמעביר ל0 הינו 0 ולכן $u - v = 0 \to u = v$

| |
|---|
| מרחב העמודות פורש את התמונה |

**הוכחה:**

<u>**טענת עזר:**</u>

תהי העתקה לינארית $h: V \to U, h(v) = Av$, כאשר $V$ מיוצגת לפי הבסיס $v_1, \dots, v_n$. אזי $h(v_i)$ שווה לעמודה ה$i$ של $A$.

**הוכחה:**

מכיוון ש- $v_i$ הוא וקטור מהבסיס, הוא מהצורה $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ כאשר ה-1 במקום ה$i$. לכן, אם $A$ מורכבת מהעמודות $c_1, \dots, c_n$, אזי:

$$h(v_i) = Av_i = 0c_1 + \cdots + 1c_i + \cdots + 0c_n = c_i$$

**נחזור לטענה המקורית:**

**העמודות של $A$ פורשות את התמונה של ההעתקה.**

**הוכחה:**

נבחר וקטור כלשהו מהתמונה: $w \in V, h(w) \in Im(h)$. נייצג אותו כצירוף לינארי:

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

נרצה להציג את $h(w)$ כצירוף לינארי של עמודות $A$:

$$h(w) = h(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)$$

$$= \alpha_1 h(v_1) + \cdots + \alpha_n h(v_n)$$

ולפי טענת העזר:

$$= \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n$$

משפט: יהיו $V, U$ מרחבים וקטורים
ויהי $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ בסיס של $V$
ויהי $\{u_1, u_2 \dots u_n\}$ וקטורים כלשהם ב $U$ אזי קיימת ט"ל יחידה $T: V \to U$ כך ש
$$\begin{matrix} T(v_1) = u_1 \\ \vdots \\ T(v_n) = u_n \end{matrix}$$

**הוכחה:**

הוכחה: נגדיר $T: V \to U$

יהי $v \in V$ ולכן $v = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$

נגדיר $T(v) = a_1 u_1 + \cdots a_n u_n$

נראה קיום, כלומר נראה שזו העתקה לינארית:

יהיו $v_1, v_2 \in V$ ולכן לכל אחד מהם יש הצגה עפ"י הבסיס של $V$ באופן הבא :

$$v_1 = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$$

$$\mathrm{v}_2 = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

ולכן $v_1 + \beta v_2 = (a_1 + \beta b_1) v_1 + \cdots (a_n + \beta b_n) v_n$

נשים לב כי :

$$T(v_1 + \beta v_2) = (a_1 + \beta b_1) u_1 + \cdots (a_n + \beta b_n) u_n$$

$$= a_1 u_1 + \cdots a_n u_n + \beta b_1 u_1 + \cdots + \beta b_n u_n = T(v_1) + \beta T(v_2)$$

**נוכיח יחודיות:**

נניח שקיימת העתקה $S: V \to U$ המקיימת
$$\begin{matrix} S(b_1) = u_1 \\ \vdots \\ S(b_n) = u_n \end{matrix}$$

יהי $v = a_1 b_1 + .. + a_n b_n$ ולכן :

$$S(v) = S(a_1 b_1 + .. + a_n b_n) = a_1 S(b_1) + \cdots a_n S(b_n) =$$

$$= a_1 T(b_1) + \cdots + a_n T(b_n) = T(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) = T(v)$$

מכאן $S = T$ ולכן $T$ יחידה.

הוכחה כי $ker(T)$ היא תת מרחב וקטורי

הוכחה:

על מנת להוכיח ש $\boldsymbol{ker(T)}$ היא תת מרחב וקטורי יש להוכיח 3 תכונות:

1. $0 \in \boldsymbol{ker(T)}$

**<u>הוכחה:</u>** $0 \in \boldsymbol{ker(T)}$ כי $T(0) = 0$

2. יהיו $u, v \in \boldsymbol{ker(T)}$ אזי $u + v \in \boldsymbol{ker(T)}$

**<u>הוכחה:</u>** ידוע כי $u, v \in \boldsymbol{ker(T)}$

נשים לב כי $T(u+v)=T(u)+T(v)=0+0=0$ ולכן $u+v\in\ker(T)$

3. יהיו $u\in \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{T}), a\in R$ אזי $au\in \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{T})$

**<u>הוכחה:</u>** ידוע כי $v\in \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{T})$ וכי $a\in R$ צ"ל $av\in\ker(T)$

נשים לב כי $T(av)=aT(v)=0$ ולכן $av\in\ker(T)$

| |
|---|
| הוכחה כי $Im(T)$ היא תת מרחב וקטורי |

**הוכחה:**

על מנת להוכיח ש $Im(T)$ היא תת מרחב וקטורי יש להוכיח 3 תכונות:

1. $0\in Im(T)$

**<u>הוכחה:</u>** $0\in Im(T)$ כי $T(0)=0$

2. יהיו $u,v\in Im(T)$ אזי $u+v\in Im(T)$

**<u>הוכחה:</u>** ידוע כי $u,v\in Im(T)$ ולכן $\exists u_1,\exists v_1\in U$ כך ש $T(u_1)=u\,,T(u_2)=v$

ולכן $T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)=u+v$ ולכן $u+v\in Im(T)$

3. יהיו $u\in Im(T), a\in R$ אזי $au\in Im(T)$

**<u>הוכחה:</u>** ידוע כי $v\in Im(T)$ ולכן $\exists u\in U$ כך ש $T(u)=v$

נשים לב כי $T(au)=aT(u)=av$ ולכן $av\in Im(T)$

| |
|---|
| משפט המימדים : עבור העתקה $f{:}\,V\to W$<br>$dim(kerf)+dim(kerf)=dimV$ |

**הוכחה:**

יהיו $V\supseteq\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס לגרעין, ו $\{T(u_1),T(u_2),\dots,T(u_l)\}$ בסיס לתמונה.

**נוכיח ש $\{\boldsymbol{v_1},\dots,\boldsymbol{v_k},\boldsymbol{u_1},\dots\boldsymbol{u_l}\}$ בת"ל**

יהא $a_1v_1+\cdots+a_kv_k+\beta_1u_1+\beta_lu_l=0$ צירוף לינארי. צ"ל כי $a_i=b_j=0$ עבור כל $\begin{matrix} i\in[k] \\ j\in[l]\end{matrix}$

נפעיל את $f$ ונקבל ש:

$$f(a_1v_1+\cdots+a_kv_k+\beta_1u_1+\beta_lu_l)=f(0)$$

ולכן

$$a_1f(v_1)+\cdots+a_kf(v_k)+\beta_1f(u_1)+\cdots+\beta_lf(u_l)=0$$

ידוע כי $v_1,\dots v_k\in Kerf$ ולכן $f(v_1)=f(v_2)=\cdots=f(v_k)=0$

ולכן נקבל כי :

$$\beta_1f(u_1)+\cdots+\beta_lf(u_l)=0$$

אבל $\{f(u_1)\dots f(u_l)\}$ מהווים בסיס לתמונה ובפרט הם בלתי תלויים לינארית ולכן $\forall j\in[l]\ b_j=0$

ולכן קבלנו ש $a_1v_1+\cdots+a_kv_k=0$ , אבל $\{v_1 \dots v_k\}$ הם בסיס לגרעין ולכן הם בת"ל ולכן $\forall i\in[k]\ a_i=0$ .

**נוכיח שהקבוצה $\{v_1,\dots v_k,u_1\dots u_l\}$ פורשת את $V$**

לכל $v\in V$ קיימים סקלרים $a_1\dots a_l\in\mathbb{F}$ כך ש $f(v)=a_1f(u_1)+\cdots+a_lf(u_l)$ היות ו$\{f(u_1)\dots f(u_l)\}$ מהווים בסיס לתמונה ולכן:

$$f\Big(\underbrace{v-a_1u_1-\cdots-a_lu_l}_{\to\in Kerf}\Big)=0$$

ומכאן $v-a_1u_1-\cdots-a_lu_l=\beta_1v_1+\beta_lv_k$ , נעביר אגף ונקבל כי

$$v=a_1u_1+\cdots+a_lu_l+\beta_1v_1+\beta_lv_k$$

כלומר ניתן להגיע לכל v ∈ V כצירוף לינארי של $\{v_1,\dots v_k,u_1\dots u_l\}$ ולכן קבוצה זו פורשת את $V$

בסך הכל הקבוצה $\{\underbrace{v_1,\dots v_k}_{dimKerf},\underbrace{u_1\dots u_l}_{dimImf}\}$ בת"ל ופורשת את $V$ ולכן מהווה בסיס ל-$V$

מכאן ש $dimkerf+dimImf=dimV$

**נושא הבא**

## מעבר בין בסיסים

**וקטור קורדינטות**

**הגדרה:** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $B=\{b_1\dots b_n\}$ בסיס ל V אזי לכל $v\in V$ ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של איבר הבסיס $B$ כך ש $v=\sum_{i=1}^n a_ib_i$ כך ש $a_i\in\mathbb{F}$ ווקטור המקדמים בצירוף הלינארי הוא $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, וקטור זה נקרא וקטור הקואורדינטות של וקטור $v$ בבסיס $B$ ומסומן $[v]_B$

על מנת למצוא וקטור קורדינטות מעל שדה $\mathbb{R}$ מעל מרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$ עבור הבסיס $B=\{b_1,b_2,b_3\}$

נרצה לייצג וקטור $v$ בבסיס הסטדנטי לפי בסיס $B$, כלומר מחפשים $a,\beta,\gamma$ כך ש :

$$v=a\cdot b_1+\beta\cdot b_2+\gamma\cdot b_3$$

כאשר $[v]_b=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$, **וקטור זה נקרא וקטור קורדינטות של בסיס $b$**

נבנה מטריצה ( B | $v$ ) כאשר $B$ הם וקטורי הבסיס בעמודות ואנחנו מחפשים את הפתרון למערכת המשוואות, כי הפתרון יהיה בדיוק $a,\beta,\gamma$

דרך נוספת היא להכניס את וקטורי הבסיס $B$ כעמודות ולהצמיד להם וקטור כללי $(x,y,z)$, נדרג את המטריצה למטריצת היחידה ונקבל , ואז נקבל כי

$$(x,y,z)=(\text{משוואה ראשונה})\cdot b_1+(\text{משוואה שנייה})\cdot b_2+(\text{משוואה שלישית})\cdot b_3$$

ולכן $[v]_b=(\text{משוואה ראשונה, משוואה שנייה, משוואה שלישית})$ עבור כל $v$

**מטריצת מעבר בין בסיסיים :**

מטריצת מעבר מבסיס $A$ לבסיס $B$ תסומן ב : $\mathrm{P_{B\leftarrow A}}$

לדוגמא אם וקטורי הבסיס של $B=\{b_1,b_2\}$ ווקטורי הבסיס של $A=\{a_1,a_2\}$ אזי מטריצת המעבר הינה $\mathrm{P_{B\leftarrow A}}=[[a_1]_b,[a_2]_b]$ ( $A$ לפי $B$ )

על מנת למצוא את מטריצת המעבר $\mathrm{P_{B\leftarrow A}}$ נבנה את המטריצה $(B\mid A)$ של **עמודות** ונדרג עד שנקבל $(I\mid \mathrm{P_{B\leftarrow A}})$

בתכלס אנחנו עושים הרבה פעולות חוזרות כי על מנת למצוא את $[a_1]_b$ אז נכניס את וקטורי הבסיס $b$ כעמודות ונצמיד אליהם את $a_1$ ואז נפתור את מערכת המשוואות, ואז נעשה שוב רק עבור $a_2$ וכו', ולכן ניתן לעשות זאת פעם אחת ע"י בניית מטריצה $A$ שמורכבת כעמודות.

- מטריצת המעבר מקיימת כי $\mathrm{P_{B\leftarrow A}}\cdot[\mathrm{v}]_{\mathrm{a}}=[v]_b$
- בנוסף המטריצה ההופכית למטריצה $\mathrm{P_{B\leftarrow A}}$ היא $\mathrm{P}_{A\leftarrow B}$ ומתקיים כי $(\mathrm{P_{A\leftarrow B}})=(\mathrm{P_{B\leftarrow A}})^{-1}$

תיהי ט"ל $T:U\to V$ ויהי $A$ בסיס ל-$U$ ו $B$ בסיס ל-$V$ אזי $[A_T]_A^B$ היא המטריצה המייצגת של הט"ל ממרחב $U$ בבסיס $A$ למרחב $V$ בבסיס $B$ ומתקיים כי :

$$[A_T]_A^B=P_{B\leftarrow E}\cdot[A_T]_E^E\cdot P_{E\leftarrow A}$$

**נושא הבא**

## ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

**הגדרה:** עבור מטריצה $A$ וקטור $v$ השונה מוקטור ה 0 המקיים $Av=\lambda v$ עבור סקלר $\lambda$ אשר נקרא הערך העצמי של $A$ ואז $v$ הינו הוקטור עצמי המתאים לערך עצמי $\lambda$ ונהוג להיות מסומן ב $v_\lambda$ .

מטריצה אופיינית: המטריצה $A-\lambda I$

פולינום אופייני: פוליינום אופייני של $A$ מסומן ע"י $p_a(\lambda)$ והוא פולינום התלוי במשנה $\lambda$ המתקבל מפתיחת $\det(A-\lambda I)$

על מנת למצוא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור המטריצה $A$

1. נבנה מטריצה אופיינית
2. נמצא את הפולינום האופייני עבור $p_a(\lambda)=0$
3. הפתרונות למשוואה הינם הערכים העצמים $(\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_n)$ כאשר לכל ערך עצמי $\lambda_i$ יש ריבוי אלגברי והוא החזקה של של אותו ערך עצמי, לדוגמא עבור הפולינום האופייני $(\lambda-3)^{100}=0$ אזי הריבוי האלגברי של $\lambda$ הוא 100
4. עבור כל $\lambda_i$ נמצא את הוקטור עצמי, על מנת למצוא את הוקטור עצמי נציב $\lambda_i$ במטריצה האופייני, ונפתור את מערכת המשוואות, הפתרון למערכת המשוואות הוא הוקטור עצמי, הריבוי הגאומטרי של וקטור עצמי הוא מספר הוקטורים העצמיים ששייכים לאותו ערך עצמי $\lambda_i$

נשים לב כי עבור כל $\lambda$ ערך עצמי, יש לפחות וקטור עצמי אחד, היות ולפתרון של המטריצה האופיינית עבור משוואה הומוגנית יש תמיד פתרון אחד לפחות, הפתרון הטרוואלי.

נשים לב כי לכל וקטור עצמי שהגיעו מתוך פתרון של מערכת משוואות הומגנית אז גם כן צירוף לינארי שלהם הוא גם כן וקטור עצמי ולכן מרחב עצמי הוא מרחב שמכיל את כל הצירופים הלינארית של הוקטורים עצמיים של ערך עצמי מסויים לדוגמא עבור $v_{\lambda_1}=(1,0,1)$ ו $v_{\lambda_2}=(2,2,2)$ אזי $V=sp\{(1,0,1),(2,2,2)\}$

ריבוי אלגברי של ערך עצמי הוא תמיד $\leq$ מריבוי גיאומטרי של ערך עצמי

וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית

**משפט קיילי המילטון:** כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה.

כלומר אם $p_a(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ אזי $(A - I)^2(A - 2I) = 0$

**שימוש במשפט קיילי המילטון:**

1. למצוא מטריצה הופכית , לדוגמא אם $(A - I)^2(A - 2I) = 0$ אז ניתן לפתוח את הסוגריים ואז למצוא $A \cdot f(A) = I$ ואז $f(A) = A^{-1}$

2. העלאה בחזקה, נמצא את $A^{300}$ עבור $A$ לא לכסינה

על מנת למצוא את $A^{300}$ נקח את $A^{300}$ ב $(A - I)^2(A - 2I)$ ואז נקבל כי

$$A^{300} = q * (A - I)^2(A - 2I) + r$$

כאשר $r \in [0,2]$ כי החזקה הכי גדולה במכפלה היא 3 והשארית היא עד אחד פחות

אבל ידוע כי $(A - I)^2(A - 2I) = 0$ ולכן נקבל כי $A^{300} = r$, במקום לעשות 300 מכפלות עשינו רק לכל היותר 2 העלאות בחזקה עם כפל בסקלרים.

הוכחת משפט קיילי המילטון

**הוכחה:**

ידוע כי $XadjX = (detX)I$ מלינארית 1

כאשר $\text{adj}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{j,i}|$

ובפרט:

$$(A - \lambda I)adj(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)\, I$$

נסמן $P_A(\lambda) = c_n\lambda^n + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$

צ"ל כי $P_A(A) = c_nA^n + \cdots + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0 = 0$

ידוע כי $(A - \lambda I)$ הינה מטריצה עם ע"ע עצמיים על האלכסון ולכן האלכסון של המטריצה המצורפת / צמודה של $(A - \lambda I)$ מכיל בתוכו פולינום ב $\lambda$ לדרגה לכל היותר $n - 1$ וזה כי (מחקנו שורה ומחקנו עמודה) וזה קורה לכל תא באלכסון.

קבלנו מטריצה של פולינומים ולכן נוכל לייצר את המטריצה של הפולינומים באופן הבא:

$$adj(A - \lambda I) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

כאשר של $i \in [1, n - 1]$ : $B_i$ היא מטריצה מסדר $n \times n$

כעת נסתכל על $(A - \lambda I)adj(A - \lambda I)$

$$(A - \lambda I)adj(A - \lambda I) = (A - \lambda I)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0) =$$

$$AB_0+(AB_1-B_0)\lambda+\cdots+(AB_{n-1}-B_{n-2})\lambda_{n-1}+(-B_{n-1})\lambda^n$$

כעת נסתכל על $\det(A-\lambda I)\,I$

$$\det(A-\lambda I)\,I=c_0I+c_1I\lambda+\cdots+c_{n-1}I\lambda_{n-1}+c_nI\lambda^n$$

אבל ידוע כי $(\mathrm{A}-\lambda I)adj(A-\lambda I)=\det(A-\lambda I)\,I$

ולכן

$$\begin{aligned} c_oI &= AB_0\\ c_iI:\forall i\in[1,n-1] &= (AB_i-B_{i-1})\\ c_nI &= -B_{n-1}\end{aligned}$$

נכפיל את 2 האגפים ב $A^i$ משמאל :

$$\begin{aligned} c_oI &= \color{red}{AB_0}\\ A^ic_iI:\forall i\in[1,n-1] &= A^i(\color{red}{AB_i-B_{i-1}})\\ A^nc_nI &= A^n-\color{red}{B_{n-1}}\end{aligned}$$

כעת נחבר את 2 המשוואות ונקבל כי האדום יצטמצם ולכן נקבל :

$$c_nA^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_1A+c_0I=0$$

שזה בדיוק מה שרצינו, הוכחנו כי $P_A(A)=0$

**נושא הבא**

## דמיון מטריצה ולכסון

**הגדרה:** עבור מטריצות $A,B$ אזי נאמר ש $A$ ו $B$ דומות ונסמן $A\sim B$

אם קיימת מטריצה $P$ **הופכית** כך ש: $A=PBP^{-1}$ או $AP=PB$

אם $A\sim B$ אז :

1. דמיון מטריצה הוא יחס שקילות
2. $|A|=|B|$
3. $tra(A)=tra(B)$
4. יש להן את אותו פילום אופייני, אותם ערכים עצמיים, אותם ריבויים אלגבריים ואותם ריבויים גיאומטריים
5. $A^n\sim B^n$

### מטריצה אלכסונית

**מוטבציה:** ידוע כי $A(v_1\mid v_2\mid\ldots\mid v_k)=(Av_1\mid Av_2\mid\ldots\mid Av_k)$

במידה ונמצא מטריצה $P$ כך ש $AP=PD$ כאשר $D$ אלכסונית, נוכל לחשב את $A^n$ באופן מהיר.

כי $A^{\mathrm{n}}=PD^nP^{-1}$, $D$ הא מטריצה אלכסונית ולכן $D=\begin{matrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{matrix}$ ולכן אנחנו מחפשים מטריצה

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{P}=\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & Av_2 & Av_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1v_1 & x_2v_2 & x_3v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

מכאן הגיע המוטבציה להגדיר ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה, כי רצינו למצוא וקטור

$v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$ ומכאן הגיע הטענה שעמודות המטריצה של $P$ הן וקטורים עצמיים של מטריצה והערכים העצמיים של המטריצה הם האלכסון של המטריצה האלכסונית.

$$Av = \lambda v$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

כדי שלמשווה האחרונה יהיה פתרון לא טרוואלי, נדרוש שהמטריצה $(A - \lambda I)$ תיהיה לא הפיכה כלומר נדרוש כי $\det(A - \lambda I) = 0$

ולכן **מטריצה אופיינית :** $A - \lambda I$

**פולינום אופייני :** $P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$

**ערכים עצמיים :** פתרון של הפולינום האופייני $P_A(\lambda) = 0$

ולכן אחרי שמוצאים את הערכים העצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ מוצאים את הוקטורים העצמיים ע"י הצבת הערכים העצמיים במשוואה $(A - \lambda I)v = 0$ ונפתור את מערכת המשוואות ההומגנית, מהדרישה ש $(A - \lambda I)$ תיהיה לא הפיכה ישנם אינסוף פתרונות ל $v$ ולכן דרגת החופש תיהיה לפחות 1

**הגדרה:** מטריצה אלכסונית היא מטריצה שכל האיברים בה חוץ מהאלכסון הם 0

נאמר שמטריצה $A$ היא לכסינה או ניתנת לליכסון אם קיימת מטריצה אלכסונית $D$ שדומה לה, כלומר קיימת מטריצה $P$ הפיכה גם ש $A = PDP^{-1}$

- מטריצה $A$ מסדר $n$ ניתנת ללכסון אם ורק אם סכום כל הריבויים הגיאומטריים שלה שווה ל $n$
- מטריצה A מסדר $n$ לכסינה אם ל$A$ יש $n$ ערכים עצמיים כי לכל ערך עצמי יש לפחות וקטור עצמי אחד
- מטריצה $A$ ניתנת ללכסון אם ורק אם הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו

באופן כללי, מטריצה היא לכסינה **אם ורק אם** הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניאריים, והריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לזה של הריבוי הגאומטרי. מכיוון שהריבוי הגאומטרי לעולם קטן או שווה מן הריבוי האלגברי, התנאי האחרון שקול לתנאי הבא: סכום הריבויים הגאומטריים של כל הערכים העצמיים שווה למימד המטריצה.

**הערה:** תמיד קיימת מטריצה $P^{-1}$ היות ולכל וקטור עצמי השייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל ולכן העמודות לא תלוייות לינארית ולכן $\det(P) \neq 0$ ולכן $P$ הפיכה

**שימוש בלכסון מטריצות:**

נניח שנתונה לנו המטריצה $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$

ואנחנו רוצים לחשב את $A^{300}$

אז איך נעשה זאת ? במידה ו $A$ לכסינה אז נעשה את השלבים הבאים, אם **לא** אז נשתמש בקיילי המילטון.

1. נמצא את הערכים העצמיים של מטריצה $A$
2. נמצא את הוקטורים העצמיים של מטריצה $A$ עבור כל ערך עצמי
3. נבנה מטריצה אלכסונית $D$ שעל האלכסון הראשי שלה מופעים הערכים העצמיים של המטריצה $A$ לא משנה באיזה סדר, אולם ברגע שבחרנו סדר נבנה את מטריצה $P$ בהתאם
4. נבנה מטריצה $P$ כך שכל עמודותיה הם הווקטורים העצמיים שמתאים לערכים העצמיים במטריצה $D$
5. שלב האחרון, בגלל ש $A=PDP^{-1}$ אזי $A^{300}=PD^{300}P^{-1}$ ולכן נחשב זאת, נשים לב כי $D$ היא האלכסונית ולכן $D^{300}=\forall d_{i,j}\in D:\ do\ d_{i,j}=d_{i,j}^{300}$

**הוכחות:**

| דמיון מטריצה הוא יחס שקילות |
| --- |

**הוכחה:**

יש צורך להוכיח:

1. רפלקסיבי

הוכחה: $A=PAP^{-1}$ עבור $P=I$

2. סימטרי

נניח כי $A=PBP^{-1}$ צ"ל כי $B=MAM^{-1}$

נשים לב כי אם נכפיל את צד שמאל ב $P^{-1}$ וצד ימין ב $P$

נקבל כי $P^{-1}AP=B$ ולכן עבור $M=P^{-1}$

3. טרנזטיבי

נניח ש $A\sim B$ ו $B\sim C$ אז $A\sim C$

ידוע כי $\begin{matrix}B=PAP^{-1}\\ C=MBM^{-1}\end{matrix}$ ולכן $C=MPAP^{-1}M^{-1}=(MP)A(MP)^{-1}$

| $\boldsymbol{|A|=|B|}$ |
| --- |

**הוכחה:**

ידוע כי $A\sim B$ ולכן $B=PAP^{-1}$ ולכן $|B|=|PAP^{-1}|=|P||A||P^{-1}|=|A|$

הוכחה על $|P||P-1|=1$ - כאן

| $\boldsymbol{tra(A)=tra(B)}$ |
| --- |

**הוכחה:**

$$tra(A) = tra(PBP^{-1}) = \frac{tra(PP^{-1}B)}{trace\ property} = tra(B)$$

יש להן את אותו פילום אופייני, אותם ערכים עצמיים, אותם ריבויים אלגבריים ואותם ריבויים גיאומטריים

**הוכחה:**

יהיו מטריצות $A \sim B$, המקיימות: $B = PAP^{-1}$.

נתבונן בפולינום האופייני של $B$:

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |PAP^{-1} - \lambda I|$$

$$= |PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}| = |P(A - \lambda I)P^{-1}|$$

$$= |P| \cdot |A - \lambda I| \cdot |P^{-1}| = |P| \cdot |A - \lambda I| \cdot \frac{1}{|P|}$$

$$= |A - \lambda I| = P_A(\lambda)$$

מכיון שהפולינום האופייני שווה, גם כאשר נבדוק את הפתרונות של:

$$P_B(\lambda) = P_A(\lambda) = 0$$

נקבל תשובות זהות, המייצגות את הערכים העצמיים, עם ריבוי אלגברי זהה.

**טענת עזר:** עבור ערך עצמי $\lambda$ של $A, B$. אם $v$ הוא הע"ע המתאים של $A$, אזי $Pv$ הוא הע"ע המתאים של $B$.

**הוכחה:** נניח כי $Av = \lambda v$. נשקול את $B(Pv)$

$$B(Pv) = PAP^{-1}(Pv) = PAv = P\lambda v = \lambda(Pv)$$

לכן, לכל ו"ע ב$A$ נוכל למצוא גם ו"ע ב$B$. ומכאן שהריבוי הגיאומטרי שווה.

$$\boldsymbol{A^n \sim B^n}$$

**הוכחה:**

$$A = PBP^{-1}$$

ולכן $A^n = (PBP^{-1})^n = PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P) \dots . P^{-1} = PB^nP^{-1}$

ריבוי אלגברי של ערך עצמי הוא תמיד $\leq$ מריבוי גיאומטרי של ערך עצמי

**הוכחה:**

תהי $A$ מטריצה $n \times n$, עם ע"ע $\lambda_1$, שיש לו ר"ג $k$. (נחפש את הר"א של $\lambda$).

כלומר, קיימים $k$ ו"ע בת"ל $v_1 \dots v_k$, המקיימים:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_1 v_2$$

$$\vdots$$

$$Av_k = \lambda_1 v_k$$

נגדיר מטריצה $P$ הפיכה, ש$k$ העמודות הראשונות שלה הן $v_1 \dots v_k$.

נגדיר $B = P^{-1}AP, A \sim B$.

מכיוון ש$I = P^{-1}P$. לכן עבור $c_i$, העמודה ה$i$ של $P$, נקבל:

$$e_i = P^{-1}c_i$$

ובפרט, לפי העמודות שהרכיבו את $P$, עבור $1 \le i \le k$ מתקיים:

$$e_i = P^{-1}v_i$$

$$\lambda_1 e_i = P^{-1}(\lambda_1 v_i)$$

באופן דומה, העמודה ה$i$ של $AP$, עבור $1 \le i \le k$, תהיה $Av_i = \lambda_1 v_i$.

מכיוון שהגדרנו את $B$ להיות:

$$B = P^{-1}(AP)$$

לכן העמודה ה$i$ של $B$, עבור $1 \le i \le k$, תהיה:

$$P^{-1}(\lambda_1 v_i) = \lambda_1 e_i$$

כלומר: $k$ העמודות הראשונות של מטריצה $B$ נראות כך:

$$\begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \end{matrix}$$

לכן, הפולינום האופייני של $B$ יכיל את $(\lambda - \lambda_1)^k$. כלומר, יש ל$\lambda_1$ ר"א לפחות $k$.

מכיוון ש- $A \sim B$, תכונה זו נכונה גם למטריצה $A$.

| וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית |
|---|

**הוכחה:**

תהי $A$ מטריצה ריבועית. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ע"ע שונים. ויהיו $v_1, \dots, v_k$ ו"ע בהתאמה.

(כלומר: $Av_i = \lambda_i v_i$).

<u>נוכיח באינדוקציה על $k$.</u>

<u>בסיס:</u> $k=1$. וקטור יחיד הוא בת"ל.

<u>צעד:</u> נניח עבור קבוצת וקטורים בגודל $k-1$, ונוכיח עבור קבוצה בגודל $k$ שהיא בת"ל:

נחפש את הפתרונות למשוואה(1): (נרצה להראות שקיים רק פתרון טריוויאלי)

$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k=0$$

נכפול את משוואה (1) ב$\lambda_1$, ונקבל(2):

$$\alpha_1\lambda_1 v_1+\cdots+\alpha_k\lambda_1 v_k=0$$

נכפול את משוואה (1) ב$A$, ונקבל(3):

$$\alpha_1 Av_1+\cdots+\alpha_k Av_k=0$$

$$\alpha_1\lambda_1 v_1+\cdots+\alpha_k\lambda_k v_k=0$$

נחסר בין משוואה (2) למשוואה (3), ונקבל:

$$\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)v_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_1-\lambda_k)v_k=0$$

לפי הנחת האינדוקציה, קיים רק פתרון טריוויאלי לכל $2\le i\le k$:

$$\alpha_i(\lambda_1-\lambda_i)=0$$

מכיוון שהע"ע שונים, נקבל לכל $2\le i\le k$:

$$\alpha_i=0$$

נציב במשוואה (1), ונקבל:

$$\alpha_1 v_1=0$$

מכיוון ש$v_1$ הוא ו"ע, לכן $v_1\neq 0$. ובהכרח גם $\alpha_1=0$.

| |
|---|
| $A$ הפיכה אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה שונים מ0 |

**הוכחה:**

**תזכורת: אם למערכת המשוואות $Ax=0$ יש פתרון טרוואלי בלבד אז $A$ הפיכה**

**משפט 1.** $\lambda = 0$ ערך עצמי של $A$ אם ורק אם $A$ איננה הפיכה.

*הוכחה.* $\boxed{\Leftarrow}$ נניח $\lambda = 0$ הוא ע"ע של $A$. זאת אומרת שקיים וקטור $0 \neq v$ שעבורו $Av = 0$. נסמן

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נוכל להגיד שלפיכך

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n = 0 \end{cases}$$

היא מערכת הומוגנית (בת $n$ משוואות מ-$n$ נעלמים). למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, ולכן $A$ אינה הפיכה.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$A$ אינה הפיכה. נתבונן במערכת $Av = 0$. יש לה פתרון לא טריוויאלי $v \neq 0$, ולכן מתקיים $Av = 0 = 0 \cdot v$, זאת אומרת ש-$\lambda = 0$ הוא ע"ע של $A$.

$\square$

*הערה 2.* $A$ איננה הפיכה אם ורק אם $\det(A) = 0$.

**משפט 2.** $\lambda \in \mathbb{F}$ *הוא ערך עצמי של מטריצה* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *אם ורק אם* $\det(\lambda I - A) = 0$.

*הוכחה.* $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ע"ע של $A$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$Av = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$\lambda v - Av = 0$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$(\lambda I - A)v = 0$ $\Leftrightarrow$ המטריצה $\lambda I - A$ אינה הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$.

$\square$

**נושא הבא**

## מכפלה פנימית

מכפלה פנימית בין 2 וקטורים תסומן ב $\langle u, v\rangle$ והיא פונקצייה המחזירה סקלר ומקיימת את התכונות הבאות:

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ כאשר $\overline{\langle u, v\rangle}$ מסמן את הצמוד של $\langle u, v\rangle$ ב– $\mathbb{C}$, אם השדה הוא ממשי אין חשיבות
2. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
3. $a \cdot \langle u, v\rangle = \langle a \cdot u, v\rangle = \langle u, a \cdot v\rangle$
4. $\langle v, v\rangle \geq 0$ עבור כל $v$ ו $\langle v, v\rangle = 0$ אם ורק אם $v = \vec{0}$

כדי להוכיח שפונקציית היא מכפלה פנימית, צריך להוכיח שהיא מקיימת את התכונות

**נורמה** של וקטור מוגדר ב $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
הערה: $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$

אם הנורמה של $v$ שווה ל-1 אז נגיד שהוא וקטור מנורמל

אם נרצה לנרמל וקטור אזי $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$

**מכפלה פנימית עבור מטריצות :** $tra(A \times B^t)$

**מכפלה פנימית עבור פונקציות :** $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\cdot\bar{g}$

**מכפלה פנימית סטדנרטית:** $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

**הערה:** במכפלה הפנימית הסטדנרטית $\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot cos\theta$ כאשר $\theta$ היא הזווית בינהם

**אי – שיוון קושי שוורץ :** $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|$
אם $u,v$ תלויים לינארית אז $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$

**אי – שיוון המשולש :** $\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$

**אורתוגנליות :** נאמר ש2 וקטורים $u,v$ הם אותוגנליים אם המכפלה הפנימית שלהם היא 0 כלומר $\langle u,v\rangle = 0$

נאמר שבסיס הוא **בסיס אורתוגנאלי** אם **כל** זוג וקטורים בו אורתוגנאליים אחד לשני, ואם כל הוקטורים הם מנורמלים אז נאמר שהבסיס הוא **אורתונרמאלי** .

**תהליך גרם שמידט**
**קלט:** בסיס $U$
**פלט:** בסיס חדש ל $U$ אשר הינו בסיס אורתוגונלי
**תהליך:**
נתון וקטורים $\{u_1,u_2 \dots u_n\}$ וקטורים בת"ל אשר מהווים בסיס ל $U$
- נגדיר $v_1 = u_1$
- נגדיר $v_2 = u_2 - \frac{\langle v_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1$
- נגדיר $v_3 = u_3 - \frac{\langle v_3,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1 - \frac{\langle v_3,v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\cdot v_2$
- לכל $i \in [1,n]$ אזי $v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\langle v_i,v_j\rangle}{\|v_j\|^2}\cdot v_j$

במידה ונרצה בסיס אורתונרמאלי, ננרמל כל בסיס בבסיס אורתוגנאלי.

**הערה:** $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

**הוכחות:**

$$(\|\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v}\|)^2 \le \|\boldsymbol{u}\|^2 \pm 2\boldsymbol{Re}(\langle u,v\rangle) + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

**הוכחה:**

$$(\|\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v}\|)^2 = \langle u\pm v, u\pm v\rangle = \langle u,u\rangle \pm \langle u,v\rangle \pm \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$\le \|\boldsymbol{u}\|^2 \pm 2\boldsymbol{Re}(\langle u,v\rangle) + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

$$(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|)^2 + (\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|)^2 = 2(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$$

**הוכחה:**

$$(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|)^2+(\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|)^2=\|\boldsymbol{u}\|^2+\boldsymbol{2Re}(\langle u,v\rangle)+\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{u}\|^2-\boldsymbol{2Re}(\langle u,v\rangle)+\|\boldsymbol{v}\|^2$$
$$=\boldsymbol{2}(\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2)$$

**אי שיוון קושי שוורץ** $|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|\le\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|$

**הוכחה:**

נתבונן על המכפלה הפנימית הבאה, נשים לב כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$0\le\langle u-tv,u-tv\rangle\le\langle u,u\rangle-2t\langle u,v\rangle+t^2\langle v,v\rangle$$

נציב $t=\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$ (ניתן להגיע לערך זה ע"י גזירה לפי $t$ והשוואה ל-0 )

ונקבל כי $0\le\langle u,u\rangle-\frac{2t\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle}+\frac{t\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle}$

נעשה מכנה משותף ונקבל : ( אי שיוון לא התהפך היות ומכפלה פנימית תמיד אי שלילית )

$$0\le\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle-\langle u,v\rangle^2$$

ולכן $\langle u,v\rangle^2\le\|u\|\|v\|$, נוציא שורש ונקבל $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$

**אי – שיוון המשולש :** $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\le\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$

**הוכחה:**

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$$
$$\le\|u\|^2+\|u\|\|v\|+\|v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2\to\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$$

**הסבר** תהליך גרם שמידט
קלט : $\{u_1,\dots,u_n\}$
פלט: $\{v_1,\dots v_n\}$

**הסבר:**

נגדיר וקטור $v_1=u_1$

נגדיר $v_2=u_2-\alpha v_1$

נרצה ש- $v_2$ כך ש $v_2\perp v_1$

ולכן נרצה ש $\langle v_1,v_2-av_1\rangle=0$

כלומר $\langle v_1,v_2\rangle-a\langle v_1,v_1\rangle=0$ ולכן $a=\frac{\langle v_1,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}$

עבור $v_3=u_3-av_1-bv_2$ ונמשיך את התהליך, נמצא את $a,b$ כמו שעשינו קודם ולכן זה מוגדר ככה

**מכפלה פנימית עבור פונקציות :** $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f\cdot g$

**הוכחה:**

על מנת להראות כי $\langle f,g\rangle$ מכפלה פנימית היא צריכה לקיים את 4 התנאים הבאים:

1. $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$

הוכחה: $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\cdot g = \int_0^1 g\cdot f = \langle g,f\rangle$

2. $\langle f+h,g\rangle = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$

$$\langle f+h,g\rangle = \int_0^1 (f+h)\cdot g = \int_0^1 fg+gh = \int_0^1 f\cdot g + \int_0^1 h\cdot g = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$$

3. $\langle kf,g\rangle = k\langle f,g\rangle$

$$\langle kf,g\rangle = \int_0^1 kf\cdot g = k\int_0^1 f\cdot g = k\langle f,g\rangle$$

4. $\langle f,f\rangle \geq 0$ ו $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f=0$

הוכחה: $\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2 \geq 0$ ו $\int_0^1 f^2 = 0 \Leftrightarrow f=0$

## מכפלה פנימית עבור מטריצות : $tra(A\times B^t)$

**הוכחה:**

קודם כל נזכר בתכונות העקבה ( $trace$ ) :

1. $tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$
2. $tr(kA) = ktr(A)$
3. $tr(A^T) = tr(A)$

על מנת להוכיח כי $\langle A,B\rangle = tra(A\times B^t)$ יש צורך להראות את 4 התכונות הבאות:

1. $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$

הוכחה: $\langle A,B\rangle = tr(B^TA) \underbrace{=}_{3} tra(B^TA)^T = tra(A^TB) = \langle B,A\rangle$

2. $\langle A+C,B\rangle = \langle A,B\rangle + \langle C,B\rangle$

הוכחה: $\langle A+C,B\rangle = tra\big(B^T(A+C)\big) = tra(B^TA+B^TC) = tra(B^TA)+tra(B^TC) =$ $\langle A,B\rangle + \langle C,B\rangle$

3. $\langle kA,B\rangle = k\langle A,B\rangle$

הוכחה: $\langle kA,B\rangle = tra(B^TkA) = ktra(B^TA) = k\langle A,B\rangle$

4. $\langle A,A\rangle \geq 0$ ו $\langle A,A\rangle = 0 \Leftrightarrow A=0$

הוכחה: $\langle A,A\rangle = tra(A^TA) =$

$$A^TA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\langle A,A\rangle$$

$$= trA^TA$$

$$= \left(a_{11}^2+a_{21}^2+\dots+a_{m1}^2\right)+\left(a_{12}^2+a_{22}^2+\dots+a_{m2}^2\right)+\dots+\left(a_{1n}^2+a_{2n}^2+\dots+a_{mn}^2\right) \geq 0$$

$$\langle A,A\rangle = 0 \Leftrightarrow A=0$$

יהי $\boldsymbol{V}$ מרחב מכפלה פנימית, יהי $U \subseteq V$ תת מרחב
יהי $u_1 \dots u_k$ בסיס ל $U$
יהי $v \in V$
אם $v \perp u_i$ עבור כל $i \in [1,k]$ אז $v$ אורתוגונלי **לכל** הוקטורים ב $U$

**הוכחה:**

יהי $w \in U$

נניח ש – $\begin{matrix} v \perp u_1 \\ \vdots \\ v \perp u_k \end{matrix}$ צ"ל כי $v \perp w$

קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_k$ כך ש:

$$w = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k$$

$$f(v,w) = f(v, a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) = a_1 f(v,u_1) + \cdots a_k f(v,u_k) = 0$$

ולכן $v \perp w$

אם $v_1, \dots, v_n$ שונים מ0 והם אורתונגליים אחד לשני אז הם בת"ל

**הוכחה:**

נניח ש $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ צ"ל ש $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

נפעיל מכפלה פנימית של עם כל $v_i$ כאשר $i \in [1,n]$

ונקבל כי $f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, v_i) = a_1 f(v_1, v_i) + \cdots + a_i f(v_i, v_i) + \cdots + a_n f(a_n v_i) =$
$a_i f(v_i, v_i)$ היות ו $f(v_i, v_i) \neq 0$ כי $v_i \neq 0$ נקבל כי $a_i = 0$

בגלל שזה נכון לכל $i \in [1,n]$ נקבל כי $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

יהי $U \subseteq V$ אז $dimU + dimU^{\perp} = dimV$

**הוכחה:**

**<u>נחסום מלמעלה:</u>**

ניקח בסיס אורתוגונלי ל$U$: $u_1 \dots u_k$.

ניקח בסיס אורתוגונלי ל$U^{\perp}$: $v_1 \dots v_n$.

מכיוון שבחרנו בסיסים אורתוגונליים, לכל $i,j$ מתקיים: $u_i \perp u_j, v_i \perp v_j$.

לפי הגדרת בסיס משלים אורתוגונלי, מתקיים גם: $u_i \perp v_j$.

לפי המשפט הקודם, וקטורים אורתוגונליים הם בת"ל. לכן:

$$\dim(span\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}) = n + k$$

ומכיוון שכל הוקטורים האלו מוכלים ב$V$:

$$dimU + dimU^{\perp} = k + n \leq dimV$$

**<u>נחסום מלמטה:</u>**

נוסיף ל$U$ שהגדרנו למעלה, עוד $m$ וקטורים בת"ל עד שנקבל בסיס ל$V$. לכן:

$$dimV = k + m = dimU + m$$

נפעיל גם על הוקטורים שהוספנו תהליך גרם-שמידט. נקבל:

$$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m$$

מכיוון שהבסיס אורתוגונלי, לכל $i, j$ מתקיים: $u_i \perp v_j$, אזי לפי טענת העזר:

$$\{v_1, \dots, v_m\} \in U^{\perp}$$

ומכיוון שוקטורים אלה הם בת"ל, מתקיים:

$$\dim(span\{v_1, \dots, v_m\}) = m \leq dimU^{\perp}$$

נציב במשוואה שהתחלנו ממנה, ונקבל:

$$dimV \leq dimU + dimU^{\perp}$$

מצירוף שני החסמים, הטענה מוכחת.

$$(V^{\perp})^{\perp} = V$$

**הוכחה:**

שלב א' : נוכיח כי $V \subseteq (V^{\perp})^{\perp}$

יהי $x \in V$ צ"ל כי $x \in (V^{\perp})^{\perp}$

$x \in V$ ולכן $x$ אורתוגנלי לכל הוקטורים ב $V^{\perp}$

ולכן $x \in (V^{\perp})^{\perp}$

שלב ב': נוכיח כי $(V^{\perp})^{\perp} \subseteq V$

לפי משפט המימדים מתקיימות שתי הטענות:

$$dimV + dimV^{\perp} = dimU$$

$$dimV^{\perp} + dim(V^{\perp})^{\perp} = dimU$$

נחסר בין המשוואות ונקבל:

$$dimV = dim(V^{\perp})^{\perp}$$

טענת עזר: אם $A \subseteq B$ וגם $dimA = dimB$, אז $A = B$.

לפי מה שהוכחנו בכיוון הראשון נקבל:

$$V = (V^{\perp})^{\perp}$$

## מציאת בסיס ל $W \cap U$

בסיס עבור המרחב $W \cap U$ ניתן לקבל כך: לייצג את כל אחד מהבסיסים ע"י מערכת משוואות, להכניס את המשוואות למטריצת שורות ולדרג, הפתרון למערכת המשוואות זה הבסיס לחיתוך.

## מציאת בסיס ל $W + U$

בסיס עבור המרחב $W + U$ ניתן לקבל כך: נאחד את האיברים בבסיסים $B_1, B_2$, ונקבל קבוצה פורשת עבור $W + U$. כעת ננפה מתוכה אוסף בת"ל.

## בסיס למשוואות

1. להכניס את המקדמים של הוקטורים למטריצת **עמודות**
2. להכניס וקטור כללי של פתרונות $\begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix}$
3. לדרג את המטריצה, לאחר קבלת שורת האפסים המשוואה אשר מייצגת את את U הינה מערכת המשוואות אשר נותנת פתרון יחיד לדוגמא: $\langle 0|0|x3 - 2x2 + x1\rangle$
4. לרשום את הפתרון בצורה

U = { $\begin{matrix} \boldsymbol{x1} \\ \boldsymbol{x2} \\ \boldsymbol{x3} \end{matrix} \in \boldsymbol{R^3} \mid \boldsymbol{x3} - 2x2 + x1 = \boldsymbol{0}$ ( אם יש משוואה אחת ומדברים על $R^3$ אז ב Span יש $3 - \#Func = 2$ )

## משוואה לבסיס

1. להכניס את המקדמים של הוקטורים למטריצת **שורות**
2. לדרג את המטריצה
3. כל משתנה שהוא חופשי ( אין לו איבר מוביל נסמן ב s,t וכו' )
4. נציג את הפתרון בצורה הבאה $\begin{matrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{matrix} * t + \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} * s$ הוקטורים שקבלנו הם מהווים בסיס אשר מייצג את U
5. לרשום את הפתרון בצורה $U = span\{(2,3,4),(1,-5,3)\}$

**הערה**: וקטור כללי מU הוא מהצורה $U = (2s + t, 3s - 5t, 4s + 3t)$

**טענה:** $A$ היא מטריצה אורתוגונלית אם ורק אם $AA^T = I$

הוכחה:

נניח כי $A$ מורכבת מהשורות $r_1, .., r_n$ המהוות בסיס אורתונורמלי ל$\mathbb{R}^n$.

נתבונן במטריצה שמתקבלת מהכפלת $AA^T$: התא ה$i, j$ יהיה $\langle r_i, r_j\rangle$.

מכיוון שהשורות אורתונורמליות, בתאים שאינם על האלכסון הראשי, בהם $i \neq j$, נקבל $\langle r_i, r_j \rangle = 0$.
בתאים על האלכסון הראשי, נקבל $\langle r_i, r_i \rangle = 1$. מכאן, $AA^T = I$.

(**מסקנה:** $A^T = A^{-1}$ אם"ם $A$ היא מטריצה אורתוגונלית.)

**למה:** אם $A$ היא מטריצה אורתונגלית אז גם העמודות של $A$ מהוות בסיס אותוגנלי ל-$\mathbb{R}^n$

הוכחה:

לפי הטענה הקודמת: $AA^T = I$. לכן $A^T A = I$, וגם מתקיים: $A^T (A^T)^T = I$.

ולפי הטענה הקודמת, $A^T$ היא מטריצה אורתונורמלית.

**טענה**: אם $A, B$ הן מטריצות אורתונגונליות אז גם $AB$ היא גם מטריצה אורתונגלית

לפי הנתון: $A^T = A^{-1}$ ו $B^T = B^{-1}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$$

**טענה:** אם $A$ אורתוגונלית אז $detA = \pm 1$

הוכחה:

לפי הנתון: $A^T = A^{-1}$, ולכן: $|A^T| = |A^{-1}|$.

נוכל להחליף את שני הצדדים לפי שקילויות: $|A| = \frac{1}{|A|}$, נעביר אגף: $|A|^2 = 1$. לכן $|A| = \pm 1$.

**טענה:** אם $A$ אורתוגונלית, ויהיו וקטורים $u, v$, אז: $\langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

הוכחה:

נשתמש בהגדרה של מכפלה סקלרית: $\langle u, v \rangle = v^T u$.

$$\langle Au, Av \rangle = (Av)^T Au = v^T A^T Au$$

ולפי תכונה של מטריצה אורתוגונלית:

$$= v^T A^{-1} Au = v^T u = \langle u, v \rangle$$

**מסקנות**: אם $A$ אורתוגונלית:

א. $\|v\| = \|Av\|$
ב. אם $v \perp u$ אז $Au \perp Av$.

הגדרה: **העתקה לינארית אורתוגונלית:**

העתקה לינארית $f(v) = Av$, כאשר $A$ היא מטריצה אורתוגונלית, נקראת העתקה לינארית אורתוגונלית.

הגדרה: **מטריצה אוניטרית**

המטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ נקראת מטריצה אוניטרית אם השורות שלה מהוות בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{C}^n$.

**טענה:** $A$ היא מטריצה אוניטרית אם ורק אם $AA^* = I$

**טענה:** אם $A$ אוניטרית אז $|detA| = 1$

הוכחה:

לפי הנתון: $A^{-1} = A^*$, ולכן: $det(A^{-1}) = det(A^*)$

נשים לב כי $det(A*) = \overline{det(A^T)} = \overline{det(A)}$

לכן: $\overline{det(A)} = \frac{1}{det(A)}$. נעביר אגף, ונקבל: $det(A) \cdot \overline{det(A)} = 1$

ניתן לראות כי $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. ולכן $|det(A)|^2 = 1$.

**המפשט הספקטרלי:** תהי $A$ מטריצה ממשית סימטרית $(A = A^T)$, אזי:

א. כל הערכים העצמיים של $A$ הם ממשיים.
ב. קיימים $n$ וקטורים עצמיים אורתוגונליים אחד לשני.

**הגדרה:** המרטיצה המרוכבת $A$ נקראת הרמיטית, אם $A = A^*$

(מטריצה שעל האלכסון הראשי שלה ישנם מספרים מרוכבים, אינה הרמיטית)

**הרחבת המשפט הספקטרלי:** תהי $A$ מטריצה מרוכבת הרמיטית $(A = A^*)$, אזי:

א. כל הערכים העצמיים של $A$ הם ממשיים.
ב. קיימים $n$ וקטורים עצמיים אורתוגונליים אחד לשני.

הוכחה לתכונה א': (לתכונה ב' לא הוצגה הוכחה בשיעור)

תהי מטריצה $A$ הרמיטית, עם ערך עצמי $\lambda$ ווקטור עצמי $v$. כלומר, $Av = \lambda v$.

$$\langle v, Av\rangle = (Av)^* v = v^* A^* v$$

ולפי ההגדרה של מטריצה הרמיטית:

$$= v^* Av = v^* \lambda v = \lambda v^* v = \lambda\langle v, v\rangle$$

מצד שני:

$$\langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

לכן:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

ומכיוון ש-$v$ הוא וקטור עצמי, לכן $v \neq 0$, ולפי תכונות של מכפלה פנימית, גם $\langle v, v\rangle \neq 0$. לכן:

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

ולכן בהכרח $\lambda \in \mathbb{R}$.