אוניברסיטת אריאל בשומרון

קורס מבנים דיסקרטיים למדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ

יכול להיות שיש טעויות! שימו לב

<u>סיכום – תורת הגרפים</u>

<u>מרצה: מירה</u>

סוג הגרף	סימון	כמות צלעות
גרף לא מכוון	$G = (V, E)$	$0 \le \lvert E\rvert \le \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
גרף מכוון	$D = (V, E)$	$0 \le \lvert E\rvert \le 2\binom{n}{2} = n(n-1)$
גרף ריק	N_n	0
גרף מלא/שלם/ קליקה	K_n	$\lvert E\rvert = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
גרף מסלול	P_n	$\lvert E\rvert = n - 1$
גרף המעגל	C_n	$\lvert E\rvert = n$
גרף הה קוביה	Q_n	$\lvert E\rvert = 2^n * \frac{n}{2}$
עץ	T_n	$\lvert E\rvert = n - 1$
יער	F_n	$\lvert E\rvert = n - 1$
גרף דו צדדי	$G = (V_1 \cup V_2, E)$	$0 \le \lvert E\rvert \le \frac{n^2}{4}$
גרף d רגולרי	אין סימון מיוחד	$\lvert E\rvert = \frac{dn}{2}$
גרף מישורי	אין סימון מיוחד	$\lvert E\rvert \le 3 * (\lvert V\rvert - 2)$ $n + f - m = 1 + \#d$

<u>משפטים כללים</u>

- $\sum_{v \in V} deg(v) = 2\lvert E\rvert$
  סיכום של כל הדרגות של הקודקודים בגרף שקול לספירת כל צלע פעמיים, כל צלע בגרף לא מכוון בין 2 קודקודים נספרת פעמיים גם בחישוב הדרך של קודקוד אחד וגם פעם שנייה בחישוב הדרגה של הקודקוד השני

- בגרף בעל $n \ge 3$ אם $\lvert E\rvert \ge \lvert V\rvert$ אזי יש מעגל
  הוכחה באינדוקציה על n
  בסיס : עבור $n=3$ נקבל כי גרף המשולש יש מעגל באורך 3
  הנחה: נניח כי הטענה נכונה עבור גרף עם n קודקודים ולפחות n צלעות
  צעד: נוכיח כי בגרף עם $n+1$ קודקודים יש מעגל, יתכנו 2 מקרים:
  1. מקרה א' – אם יש בG קודקוד שדרגו 1 נתבונן ב$G\text{-}\{x\}$, בגרף הזה יש $n\text{-}1$ קודקודים ולפחות $n\text{-}1$ צלעות ולכן קיים מעגל לפי הנחת האינדוקציה, נוסף בחזרה את הצלע ונקבל כי עדיין יש מעגל
  2. מקרה ב' – אין קודקוד שדרגו 1 ולכן כל קודקוד עם דרגה 2 לפחות, נתחיל לטייל בגרף ונלך במסלול כך שלא נחזור על עקבותינו, בגלל שהגרף סופי בסוף נגיע לקודקוד שכבר היינו בו ולכן יש מעגל

- יהי $G = (V, E)$ גרף אזי G קשיר או G' קשיר
  אם G קשיר אז סיימנו ולכן נניח כי G אינו קשיר, יהיו u,v 2 קודקודים בגרף G' ונראה כי קיים בינהם מסלול. אם u,v מחוברים בגרף G' אז סיימנו ולכן נניח כי הם לא מחוברים ולכן הם כן מחוברים ב G ולכן הן באותו רכיב קשירות אבל ידוע כי G לא קשיר ולכן קיים W כך שאין מסלול uw או vw ולכן בG קיים המסלול uw וwv ולכן קיים גם המסלול uwv ולכן u,v מחוברים במסלול ולכן G'קשיר

- $\#D \ge n - m$ כאשר $\#D$ מייצג את מספר רכבי הקשירות בגרף G
  הוכחה בהאינדוקציה על m
  בסיס האינדוקציה: בגרף עם n קודקודים ובלי קשתות יש n רכבי קשירות ולכן $n \ge n$
  הנחת האינדוקציה: נניח שבכל גרף עם n קודקודים ולכן היותר m צלעות אי השוויון מתקיים

צעד האינדוקציה: יהיה G=(V,E) גרף עם n קודקודים ו-m+1 צלעות ויהי G-{x,y} בלי צלע {x,y} ב G , נקבל כי יש m צלעות ו-n קודקודים ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש לפחות n-m רכבי קשירות. נחזיר חזרה את הקשת ונקבל 2 מקרים, מקרה א' שהקשת היה מאותו רכיב קשירות ולכן כמות רכבי הקשירות לא השתנתה ועדיין n-m>n-(m+1) ולכן סיימנו, מקרה ב' שהקשת הייתה מ2 רכבי קשירות ולכן נקבל כי מספר רכבי הקשירות קטן באחד ולכין כמות רכבי הקשירות הינה לפחות n-m-1 שזה n-(m+1) כמו שהתבקש להוכיח.

הנחה	נתונים
נניח כי הגרף קשיר	• יש לפחות n-1 צלעות • בין כל {x,y} קיים מסלול
נניח כי הגרף אינו קשיר	• קיימים {x,y} שאין בינהם מסלול
נניח כי הגרף דו צדדי	• ניתן לחלק את הגרף ל2 קבוצות זרות כך שאין 2 קודקודים {x.y} מאותה קבוצה שיש בינהם צלע • אין מעגלים באורך אי זוגי
נניח כי יש מעגל	• כמות הצלעות היא לפחות ככמות הקודקודים
נניח כי גרף הוא N קובייה	• ההבדל בין כל 2 קודקודים המחוברים בצלע הוא בביט 1 • u,v מחוברים במסלול זוגי בינהם אם"ם יש בינהם הבדל במספר ביטים זוגי
נניח כי T עץ	• מתקיימות 2 מהאפשריות הבאות: 1. G קשיר 2. G חסר מעגלים 3. G בעל N קודקודים ו-n-1 צלעות
נניח כי הגרף מישורי	$n + f - m = 2$ $m \leq 3n - 6$

עצים + יער

הגדרות:

עץ הוא גרף לא מכוון קשיר וחסר מעגלים. עץ עם n קדקודים מכיל n-1 צלעות.

יהא G גרף עם n קדקודים, תנאי מספיק לכך ש- G הוא עץ, הוא קיום שניים מבין התנאים הבאים:

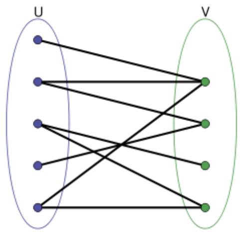
1. G קשיר.
2. G חסר מעגלים.
3. G מכיל n-1 צלעות.

בהינתן גרף לא מכוון G , תת-גרף פורש של G הוא תת-גרף שמכיל את כל קדקודי G.

עץ פורש של G הוא תת-גרף פורש של G שהוא עץ.

תרגילים **בכל גרף עם $n \geq 2$ יש לפחות 2 עלים**	יש להוכיח כי בכל עץ (בו $\lvert V \rvert \geq 2$) יש לפחות 2 עלים. יהי v קודקוד. נניח אנו מתחילים מ v ומטיילים על העץ כך שבכל שלב נעבור לקודקוד שכן מבלי לחזור על קודקוד פעמיים אזי התהליך יסתיים אחרי לכל היותר $\lvert V \rvert$ שלבים. כיוון שבגרף אין מעגלים בסוף התהליך נגיע לקודקוד בדרגה 1. כי לא יתכן שנגיע לקודקוד בדרגה ≤ 2 וביקרנו את כל שכניו – זה סותר את העובדה שבגרף אין מעגלים. כלומר מכל קודקוד ניתן להגיע לעלה. נבחר קודקוד v נגיע ממנו לעלה u. נתחיל כעת מהעלה u ונגיע לעלה חדש w. קבלנו שני עלים u ו w.

גרף דו"צ



הוא גרף שבו ניתן לחלק את הקודקודים לשתי קבוצות זרות, כך שלא קיימת קשת בי ן שני קודקודים השייכים לאותה הקבוצה.

גרף דו-צדדי מלא הוא גרף דו-צדדי, אשר מכיל את כל הקשתות האפשריות.

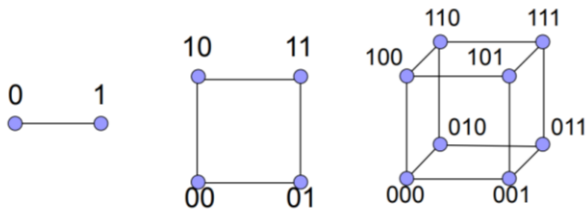
- כל עץ הוא גרף דו צדדי.
- יהי $G = (V, E)$, G הוא גרף דו צדדי אם"ם כל המעגלים בו בעלי אורך זוגי
- גרף הוא דו צדדי אם ורק אם הוא 2 צביע.

תרגילים גרף הקובייה Q_n הוא הגרף שקדקודיו הם כל הסדרות הבינאריות באורך n, ובין שני קדקודים יש צלע אם ורק אם הסדרות הבינאריות שהם מייצגים נבדלות בביט יחיד. צ"ל שגרף הקובייה Q_n דו-צדדי.	**פתרון 1:** נגדיר V1 להיות כל הקודקודים המייצגים סדרה עם מספר זוגי של אפסים נגדיר V2 להיות כל הקודקודים המייצגים סדרה עם מספר אי זוגי של אפסים כל קודקוד מייצג סדרה בינארית עם מספר זוגי או אי זוגי של אפסים ולכן $V1 \cap V2 = \emptyset,$ $V1 \cup V2 = VQn$ נראה שאין צלעות בגרף בין 2 קודקודים מאותה קבוצה, יהיו $u, v \in V(Qn)$ אם $u, v \in E$ אז הסדרה המיוצגת את u,v נפרדות בביט אחד בדיוק ולכן באותה הסדרות בהכרח מספר אי זוגי של אפסים ובשנייה מספר זוגי או להפך ולכן אחד הקודקודים נמצא בv1 והשני ב 2V **פתרון 2:** נראה כי כל המעגלים בגרף N קובייה הם באורך זוגי טענה: u,v בגרף הקובייה מחוברים במסלול באורך זוגי אם"ם הם נבדלים במספר זוגי של ביטים בסיס: m=1 כלומר המסלול הינו צלע (u,v) מהגדרת הגרף הקוביה u,v נבדלים בביט אחד כלומר מספר אי-זוגי של ביטים הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור מסלולים באורך m-1 נתובנן במסלול באורך m מv לu (v=v0,….Vm = u) המסלול בין v0 לVm-1 הוא באורך m-1 , נניח בה"כ כי m-1 זוגי ולכן לפי הנחת האינדוקציה v0 וVm-1 נבדלים במספר זוגי של ביטים ו Vm נבדל מVm-1 בביט אחד ולכן נבדל מV0 בK+1 או K-1 ביטיו כלומר מספר אי זוגי והיות ו m-1 זוגי הרי שm זוגי כנדרש כעת, נראה כי כל המעגלים בגרף הקובייה הם באורך זוגי יהא מעגל (V0…Vm) בגרף, אזי זהו מסלול מהקודקוד V0 לעצמו מכוון שכל קודקוד נבדל מעצבו ב0 ביטים הריי שאורך מסלול ממנו לעצמו עפ"י הטענה הינו זוגי מכאן שהגרף הקובייה הוא דו צדדי
יהי $G = (V, E)$, G הוא גרף דו צדדי אם"ם כל המעגלים בו בעלי אורך זוגי	יש להוכיח 2 צדדים **נניח כי G גרף דו צדדי ונוכיח כי כל המעגלים בו באורך זוגי** ניתן לחלק את קודקודי הגרף ל2 קבוצות זרות , 1V ו 2V כך שכל צלע מכילה קודקוד אחד מ 1V וקודקוד אחר מv2, נבחר מעגל כלשהו בגרף ונניח שU קודקוד כלשהו במעגל, בלי הגבת הכלליות נניח כי U שייך ל 1V ונתחיל לטייל במעגל. מכוון שG גרף דו צדדי כל כל צלע מובילה לקבוצה האחרת בגרף, במעגיל התחיל בקודקוד שנמצא בv1 ומסתיים בו ולכן מספר המעברים הוא זוגי כלומר אורך המעגל זוגי **נניח כי כל המעגל ב G הם באורך זוגי נוכיח כי הוא דו צדדי** נניח שהגרף קשיר כי אם לא ניתן להפעיל את ההוכחה הנ"ל על כל רכיב קשירות בנפרד, נבחר קודקוד כלשהו u ונגדיר 2 קבוצות: 1V קבוצה שהמרחק בין x לu זוגי ו2V קבוצה שהמרחק בין x לu אי זוגי, נוכיח שG הוא גרף דו צדדי. בה"כ נניח בשלילה שיש בגרף צלע ששני קודקודיה ב 1V ונסמן ב(x,y), אז לפי הגדרת 1V קיים מעגל בגרף שמתחיל ב U ומגיע דרך מסלול באורך זוגי

קורס מבנים דיסקרטיים למדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ

	ל x ואחר כך ממשיך ל y ע"י המסלול של הצלע יחידה (אורך 1) וחוזר ל u דרך מסלול באורך זוגי, מעגל זה באורך אי זוגי בסתירה להנחה שאין מעגלים באורך אי זוגי

<u>n-קוביה</u> - הצמתים מייצגים מחרוזות בינארית באורך n. שני צמתים מחוברים אם הם נבדלים בביט 1 בדיוק.

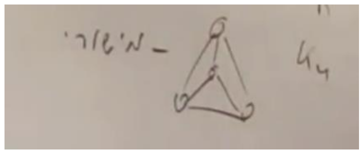


גרף n קובייה

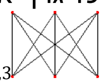
- אם n זוגי אז יש מעגל אוילר אם n אי זוגי גדול מ1 אז אין מעגל אוילר
- יש מעגל ומסלול המילטון
- גרף n קובייה הוא גרף דו צדדי

גרף מישורי

•משפט ארבעת הצבעים: כל גרף מישורי הוא 4 – צביע.



<u>הגדרה:</u> גרף G יקרא מישורי אם ניתן לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות תחתכנה

- כל גרף אשר מכיל את תתי הגרף K_5 או $K_{3,3}$ בהכרח לא מישורי
- $K_{3,3}$ 
- K_5 

<u>נוסחת אוילר:</u> יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי קשיר אזי $|V| - |E| + f = 2$ כאשר f מייצג את כמות הפאות בגרף המישורי (כולל הפאה שבחוץ)

הוכחת נוסחאת אוילר: הוכחה באינדוקציה על m

<u>בסיס:</u> היות ואנחנו עושים אינדוקציה על גרף אנחנו מניחים על $|E| = |V| - 1$ ונקבל גרף קשיר עם $n - 1$ צלעות וn קודקודים וזהו עץ. מספר הפאות בעץ הוא f=1 ולכן נקבל כי

$$|V| - |E| + f = n + (n - 1) + 1 = n - n + 2 = 2$$

<u>הנחת האינדוקציה:</u> נניח כי נוסחת אוילר מתקיימת לכל גרף מישורי עם n קודקודים וm צלעות ונוכיח נכונות עבור גרף מישורי קשיר עם n קודקודים וm+1 צלעות

<u>צעד האינדוקציה:</u> יהיה $G = (V, E)$ גרף מישורי קשיר עם n קודקודים וm+1 צלעות, עבור גרף עם כמות קודקודים גדולה ב1 מכמות הצלעות סיימנו היות וזה עץ ולכן נניח כי $|E| \geq |V|$ ולכן יש בו מעגל, היות ו G גרף מישורי ניתן לייצר אותו ע"י יצוג מישורי ולכן נמחק מהיצוג המישורי צלע שנמצאת על המעגל, היוצג שנותן הוא עדיין יצוג מישורי בעל f' פאות של גרף G' עם $n' = n$ ו $m' = m - 1$ צלעות ולכן לפי ההנחת האינדוקציה נקבל כי כמות $n' + f - m' = 2$. כאשר נחזיר את הצלע נשאר עם

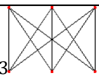
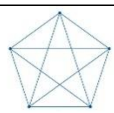
היצוג המקורי של המישור G (מספר הפאות גדל ב1 כי פאה אחת נחתכה ב2 ע"י הוספת הצלע) ולכן נקבל כי $n+f-m\ =$ $n'\ +\ f'+1-(m'+1)\ =\ n'+f-m'\ =\ 2$

משפט: יהיו $G=(V,E)$ גרף מישורי קשיר עם $n\geq 3$ קודקודים וm צלעות אזי $m\leq\ 3(n-2)$

הוכחה: אם $n=3$ ו$m\leq 3$ סיימנו כי אז המשוואה תמיד נכונה. נסתכל על גרף עם $n>3$ נסמן ב T_f להיות מספר הצלעות הגבולות בפאה F ונשים לב כי $T_f\geq 3$ היות והמעגל הקטן ביותר הוא באורך 3, מכיוון שכל צלע גובלת בלכל היותר 2 פאות כל צלע נספרת לכל היותר פעמיים בסכום $2m\geq\sum_F T_f$ (צד ימין סופר פעמיים את כמות הצלעות ושמאל שמאל סופר את הצלעות מבחינת הפאות) מכוון $T_f\geq 3$ נקבל כי $\sum_F T_f\geq\ 3f$ ולכן קבלנו $2m\ \geq\ 3f\ \rightarrow\ f\ \leq\ \frac{2m}{3}$ ולכן אם נציב בנוסחת אוילר נקבל כי $2=n+f-m\leq n+2/3m-m->m\leq 3(n-2)$

להוכיח כי G גרף מישורי	להפריך כי G גרף מישורי
• לצייר • להראות ש K3,3 או K5 לא מוכל בו	• להניח כי G מישורי ואז להראות ש n+f-m=2 לא מתקיים • להראות שלא מתקיים m<3n-6ש • **משפט**: **בכל גרף מישורי** *G=(V,E)* **יש קודקוד בעל דרגה לכל היותר** *5*. כלומר להראות שבגרף מישור כל הקודקודים בעלי דרגה לפחות 6

תרגילים -האם המשפט ההפוך נכון? כלומר, האם כל גרף *G* קשיר עם *n≥3* קודקודים ו- *m* צלעות המקיים *m ≤ 3(n-2)* הוא מישורי?	לא! המשפט לא עובד בכיוון ההפוך רק אם גרף מישורי אז הוא מקיים את האי שיוון. היות ואנחנו יכולים לקחת גרף K5 לדוגמא ולהוסיף לו כמה קודקודים שאנחנו רוצים ובסוף ליצור סוג של עיפיון כזה (ככה זה נראה בסרטוט) . אולם אם גרף לא מקיים את המשוואה אז הוא בהכרח לא מישורי
-הוכיחו את המשפט הבא: יהי *G* גרף מישורי קשיר חסר משולשים עם *n≥3* קודקודים ו- *m* צלעות. אזי *m ≤ 2(n-2)*	אם $n=3$ ו$m\leq 3$ סיימנו כי אז המשוואה תמיד נכונה. נסתכל על גרף עם $n>3$ נסמן ב Tf להיות מספר הצלעות הגבולות בפאה F ונשים לב כי $Tf\geq 4$ היות והמעגל הקטן ביותר הוא באורך 4, מכיוון שכל צלע גובלת בלכל היותר 2 פאות כל צלע נספרת לכל היותר פעמיים בסכום $2m\geq\sum_F Tf$ מכוון $Tf\geq 4$ נקבל כי $\sum_F Tf\geq\ 4f$ ולכן קבלנו $2m\ \geq\ 4f\ \rightarrow$ $f\ \leq\ \frac{m}{2}$ ולכן אם נציב בנוסחת אוילר נקבל כי $2=n+f-m\leq n+m/2-m->m\leq 2(n-2)$
-מה קורה אם הגרף לא קשיר?	אם הגרף לא קשיר אז כמות הצלעות רק קטנה יותר, ואז צריך לחלק לרכבי קשירות ולפתור רגיל $n\ +\ f\ -\ m\ =\ 1+k$ הוכחה: יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי לא קשיר, נתובן בכל רכיב בנפרד, והיו $C_1..C_k$ רכיבי הקשירות של G, מכוון ש G מישורי כל רכיב קשיר מישורי בפני עצמו, נסמן ב N_i להיות מספר הקודקודים ברכיב ה i, נסמן ב M_i להיות מספר הצלעות ברכיב ה i, נסמן ב F_i להיות מספר הפאות ברכיב ה i ונפעיל על כל רכיב את נוסחאת אוילר נקבל כי $N_i\ +\ F_i\ -\ M_i\ =\ 2$ $\sum_{i=1}^{k} N_i\ +\ F_i\ -\ M_i\ =\ 2k$ $=N\ -\ M\ +F$ $+\ (\text{פאה חיצונית})K=-1-$ $>\ N\ -\ F\ +\ M\ =\ 1\ +k$
-האם גרף ה-n קוביה הוא מישורי?	גרף n קוביה הוא גרף דו צדדי ולכן הוא לא בהכרח מישורי

<table>
<tr>
<td>יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי קשיר כך שאורך המעגל המינמלי ב G הוא S הוכיחו כי
$|E| \leq (s/s - 2) * (|V| - 2)$</td>
<td>אם $n = 3$ ו$m \leq 3$ סיימנו כי אז המשוואה תמיד נכונה.
נסתכל על גרף עם $n > 3$
נסמן ב Tf להיות מספר הצלעות הגבולות בפאה F ונשים לב כי $Tf \geq s$ היות והמעגל הקטן ביותר הוא באורך s,
מכיוון שכל צלע גובלת בלכל היותר 2 פאות כל צלע נספרת לכל היותר פעמיים בסכום $\sum_F \mathrm{T}f$ מכוון $2m \geq \sum_F \mathrm{T}f$
$Tf \geq s$ נקבל כי $\sum_F \mathrm{T}f \geq sf$ ולכן קבלנו $2m \geq sf \rightarrow$
$\frac{2\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \geq f$ ולכן אם נציב בנוסחת אוילר נקבל כי
$2 = n + f - m \leq n + 2\mathrm{m/s} - m \rightarrow \mathrm{m} \leq \mathrm{s/s} - 2 * (\mathrm{v} - 2)$</td>
</tr>
<tr>
<td>• הוכחה ש  $K_{3,3}$ אינו מישורי</td>
<td>נניח בשלילה כי $K_{3,3}$ הוא כן מישורי ולכן מתקיים ש n+f-m = 2 , נשים לב כי כמות הקודקודים הינה 6 וכמות הצלעות היא 9
ולכן לפי נוסחת אוילר יש 5 פאות לכל פאה יש לפחות 3 צלעות וכל צלע יכולה להשתתף בלכל היותר 2 צלעות ולכן נקבל כי
מספר הצלעות הממוצע הינו 2m/5 = 3.6 ולכן חייבת להיות פאה עם לכל הפחות 3 צלעות ולכל היותר 3 צלעות ולכן קבלנו שיש פאה עם 3 צלעות וזה סתירה לכך ש 3,3K הוא גרף דו צדדי (לא קיים בו מעגלים באורך אי זוגיים)
<u>או במילים אחרות</u>
• נניח בשלילה כי הגרף מישורי
• נמצא כי f=5 לפי נוסחת אוילר
• ידוע כי $2m \geq \sum_F T(f)$ כאשר T(f) מסמן את מספר הצלעות שחסומות ע"י פאה f
• נציב m=9
• בסכום יש חמישה איברים (F) ולכן הממוצע הוא 3.6 ולכן קיימית לפחות פאה אחת אשר חסומה ע"י 3 צלעות וזה לא אפשרי היותר ובגרף דו צדדי אין מעגלים באורך אי זוגי</td>
</tr>
<tr>
<td>• הוכחה ש  K_5 אינו מישורי</td>
<td>מספר קודקודים : 5
מספר צלעות : 5 מעל 2 סה"כ 10
ולכן לא מתקיים כי :
$10 \leq 3 * (5 - 2) = 9$</td>
</tr>
<tr>
<td>**<u>משפט</u>: בכל גרף מישורי *G=(V,E)* יש קודקוד בעל דרגה לכל היותר *5*.**</td>
<td>כלומר במילים אחרות בכל גרף מישורי יש קודקוד שהדרגה שלו במקסימום היא 5 ולכן אם נגיד קבלנו גרף ואין קודקוד שדרגתו לכל היותר 5 אז הוא **לא** מישורי

הוכחה: יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי, צריך להוכיח כי קיים קודקוד שדרגתו לכל היותר 5. נשים לב כי הדרגה הממוצעת של כל קודקוד הינה
$\frac{\sum deg(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$
ידוע כי בגרף מישורי $|E| \leq 3(|V| - 2)$
ולכן נקבל כי
$\frac{\sum deg(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|} \leq \frac{6|V| - 12}{|V|} \leq 6 - \frac{12}{|V|}$
בגלל שהדרגה הממוצעת בגרף קטנה ממש 6 אזי קיים קודקוד עם דרגה קטנה ממש מ6 ולכן לכל היותר 5</td>
</tr>
</table>

כל גרף מישורי הוא 6 צביע	הוכחה באינדוקציה על מספר הקודקודים **<u>בסיס:</u>** עבור $n < 7$ הגרף צביע (נצבע כל קודקוד בצבע שונה) **<u>הנחה:</u>** נניח כי גרף מישורי בעל n-1 קודקודים הוא 6 צביע **<u>צעד:</u>** נראה נכונות כי גרף מישורי בעל n קודקודים הוא 6 צביע • לפי משפט הקודם בגרף יש קודקוד שדרגתו היא לכל היותר 5 • נסתכל על הגרף $G \setminus \{x\}$ נשים לב כי גרף זה הוא עדיין מישורי ובעל n-1 קודקודים ולכן הוא 6 צביע לפי ההנחה • נצבע את כל הקודקודים ב G לפי הצביעה של $G \setminus \{x\}$ ואת x בצבע שונה משכניו – יש כזה כי יש 6 צבעים ולו יש פחות מ6 שכנים

<u>צביעה של גרפים – 04/06/18</u>

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון
צביעת G בKצבעים כאשר $1 \leq k \leq |V|$ היא פונקציה $c:V-> 1,2,..,k$
כך שלכל $u, v \in E$ מתקיים $c(u) \neq c(v)$
גרף שיש לו צביעה בKצבעים נקרא K צביע והוא גם $K+1$.. צביע
משפטים

- כל גרף דו צדדי הוא 2 צביע
- K_n הוא K צביע
- Q_n הוא 2 צביע (גרף הקובייה)

נסמן ב $\Delta(G)$ את הדרגה המקסמלית בגרף

נסמן ב $\delta(G)$ את הדרגה המנמלית בגרף

מס צביעה: $x(G)$ את המספר המנמאלי של צבעים שצריך כדי לצבוע את הקודקודים של G באופן תקין

אזי $x(G) \leq \Delta(G) + 1$

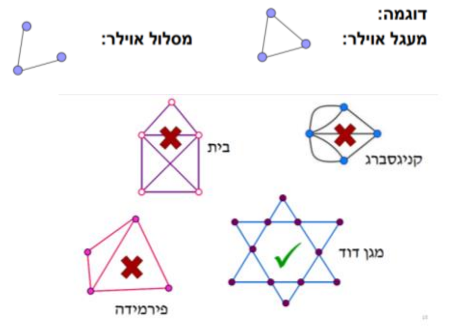
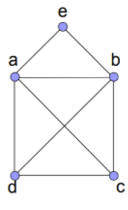
הוכחה:

יהי $v \in V$ קודקוד מדרגה $\Delta(G)$, נצבע את v בצבע שונה מכל שכניו, כעת נמשיך את התהליך עבור כל קודקוד שלא צבענו, תהליך זה יוביל לצביעה תקינה שכן יש לנו $\Delta(G) + 1$ צבעים אבל הדרגה המקסמלית היא $\Delta(G)$ ולכן עבור כל קודקוד שנתובנן בו יש צבע שאף שכן שלו לא צבוע בו ולכן נוכל לצבוע בצבע זה את הקודקוד.

<u>מעגל אוילר/מסלול אוילר</u>

יהי $G = (V, E)$ גרף

- מסלול אוילר הוא מסלול לא בהכרח פשוט שעובר בכל **צלע** בגרף בדיוק פעם אחת
- מעגל אוילר הוא מעגל לא בהכרח פשוט שעובר בכל **צלע** בגרף בדיוק פעם אחת

 	 יש מסלול אוילר • בית של אוילר – להתחיל מקודקוד בעל דרגה אי זוגית לקודקוד בעל דרגה אי זוגית

קורס מבנים דיסקרטיים למדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ

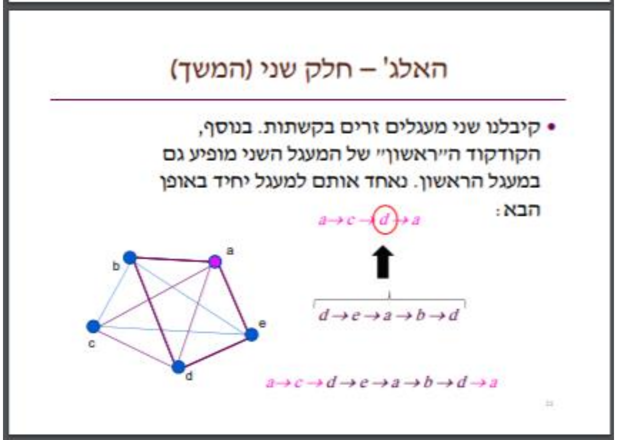
משפטים: יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר אזי:
יש ב G מעגל אוילר ↔ כל הדרגות בG הינם זוגיות

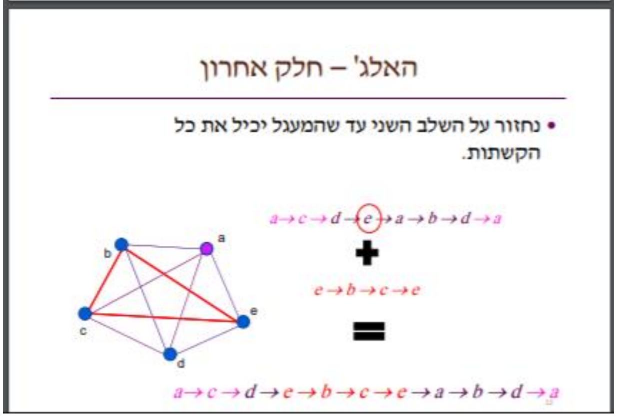
הוכחה:

הוכחה: יש צורך להוכיח 2 כיוונים

<u>כיוון ראשון:</u> יהי G מעגל אוילר צ"ל כי כל הדרגות בG הינם זוגיות
יהי $v\ \in V$ קודקוד כלשהו במעגל, כל מעבר של המעגל דרך קודקוד v הוא דרך שתי הצלעות שונות זו מזו ומהצלעות של המעברים האחרים לכן דרגתו של v היא זוגית
אם v הוא הקודקוד הראשון במעגל אז סופרים 1 ביציאה הראשונה ממנו ו2 בכל פעם שעוברים דרכו ולבסוף 1 כשחזורים אליו בסיום.

<u>כיוון שני:</u> נניח שכל הדרגות של הקודקודים ב G בעלי דרגה זוגית צריך להוכיח כי G מעגל אוילר
יהי $u(1) \in V$ קודקוד כלשהו, לפי טענת העזר הוא חלק ממעגל C1 = (u1,u2…uk,u1), אם המעגל עובר דרך כל הקשתות פעם אחת אז סיימנו ולכן נניח שלא, נסתכל בגרף G1 המתקבל מG לאחר הורדת כל הצלעות אשר משתתפות בC1, גם בגרף G1 כל הדרגות זוגיות ולכן בהכרח קיים קודקוד u(i) במעגל C1 שדרגתו בG1 חיובית, אם C1 מכיל את כל קודקודי הגרף אז כל קודקוד ב C1 שלא כל צלעתיו בC1 יתאים, אם C1 לא מכיל את כל קודקודי הגרף כלומר הוא כולל רק חלק מהקודקודים אז מכוון שG קשיר לפי הטענה שנלמדה היום קיים קודקוד x לא בC1 שמחובר על ידי צלע לקודקוד y בC1 ולכן לy יש דרגה חיובית בC1 כי הצלע {x,y} לא נמצאת בC1. בגרף G1 קיים מעגל שמתחיל בu(i) C2 = (u(i)….u(i)) ולכן מצאנו שני מעגלים C1,C2 שהצלעות שלהם זרות ויש להם קודקוד משותף ולכן ניתן ליצור מהם
מעגל לא פשוט חדש C3 = (u1,u2…u(i)…u(i)..u(1)) ולכן נוכל לחזור על התהליך עד שלא יותרו קשתות נוספות. מכוון שאף קשת לא מופיע פעמיים מתקבל בסוף התהחליך מעגל אוילר



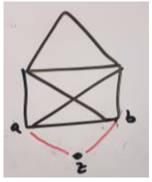


יש ב G מסלול אוילר ↔ יש בדיוק 2 קודקודים מדרגה אי זוגית

הוכחה:

<u>כיוון ראשון:</u> נניח כי בG יש מסלול אוילר ולכן כמו במשפט הקודם, אלא שהטענה על זוגיות הדרגה של הקודקודים לאורך המסלול לא תקפה לקודקוד הראשון והאחרון במסלול

<u>כיוון שני:</u> אם כל הדרגות זוגיות אז לפי המשפט הקודם יש מעגל אוילר. נניח שיש 2 קודקודים a,b שדרגתם אי-זוגית. נוסיף קודקוד חדש z וצלעותיו {z,b} , {a,z} . קבלנו גרף חדש קשיר שכל דרגתיו זוגיות, ולכן קיים בו מעגל אוילר שמתחיל ומסתיים ב a, נשמיט מהמעגל את הצלעות שהוספנו ואת הקודקוד z ונקבל מסלול אוילר שמתחיל בa ומסתיים בb



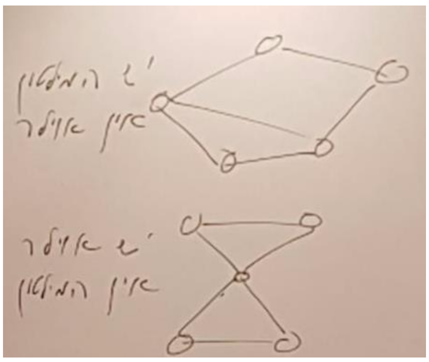
גרף n קובייה: האם יש מעגל או מסלול **<u>אוילר</u>** ?	• אם n זוגי כל הדרגות זוגיות ויש מעגל אוילר בגרף • אם n אי זוגי הגדול מ1 אז **אין** מסלול אוילר שהוא לא מעגל כי כל הדרגות הינם אי זוגיות ויש יותר מ2 קודקודים בגרף, אם n = 1 אז יש מסלול אוילר כי יש 2 קודקודים בגרף
צ"ל כי אם הורדנו צלע אחת ממגרף עם מעגל האוילר אז הגרף נשאר קשיר	לפי הנתון יש בG מעגל אוילר ולאחר הורדת הצלע יש ב G מסלול אוילר הנבנה באופן הבא: נתבונן על המעגל שהיה ב G לפני הורדת הצלע {x,y} ונקבל : C = {v1,v2,v3…x,y…v(n),v1} נשים לב כי הקודקודים שבגרף נמצאים בC כי הגרף Gקשיר ולכן המסלול: P={y,…,v(n),v1,v2….x} הוא מסלול אוילר ובנוסף עובר דרך כל קודקודי הגרף ולכן יש בין כל 2 קודקודים מסלול אשר נמצא חלקי למסלול אוילר שמצאנו

<u>מסלול המילטון/מעגל המילטון</u>

<u>מסלול המילטון:</u> מסלול העובר בכל הקודקודים בגרף בדיוק פעם אחת

<u>מעגל המילטון:</u> מסלול המילטון המתחיל ומסתיים באותו נקודה

- אם יש מעגל המילטון אז יש מסלול המילטון כי אפשר להוריד צלע
- כדי לדעת אם יש מסלול המילטון זה לצאת מאיזשהי נק ולצאת על כל המסלול ואם הצלחתם אז יש ואם לא הצלחתם אז אין או דרך משפט Dirac (לא הוכח בשיעור)



אוניברסיטת אריאל בשומרון

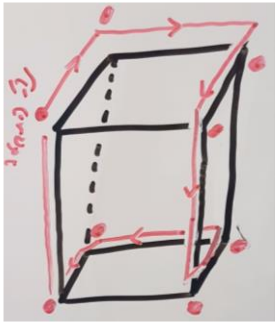
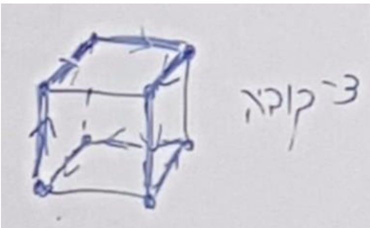
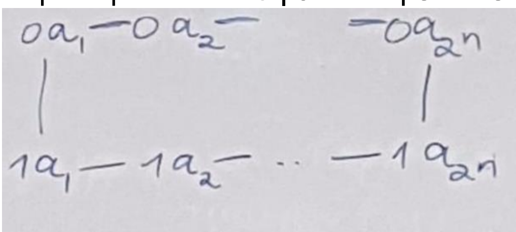
קורס מבנים דיסקרטיים למדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ

משפט (Dirac) יהי $G = (V, E)$ גרף , אם $\delta(G) \ge n/2$ אזי יש ב G מעגל המילטון

[redacted]

[redacted]

- חשוב לציין שאין קשר בין מעגל המילטון לבין מעגל אוילר

<table>
<tr>
<td>
גרף n קובייה:
האם יש מעגל או מסלול <u>המילטון</u> ?

</td>
<td>
כן וכן – הוכחה באינדוקציה על מספר הקודקודים
עבור $n \ge 2$ בגרף הn – קובייה יש מעגל המילטון
לצייר 3 קובייה
<u>בסיס:</u> עבור $n = 2$ הראנו מעגל המילטון
<u>הנחה:</u> נניח כי בגרף ה n – קובייה כאשר $n \ge 2$ יש מעגל המלטון ונוכח שב-$n + 1$ קובייה יש מעגל המילטון.
יהי $a1 - a2 - a3 - a4 \ldots a(2^n), a(1)$ מעגל המילון שבn – קובייה כל $a(i)$ הוא סדרה בינארית באורך n , בעזרת מעגל זה נרצה לבנות מעגל המילטון ב$n + 1$ קובייה . נסתכל על
$$0a1 - 0a2 - 0a3 - 0a4 \ldots 0a(2^n)$$
נשים לב כי אלה סדרות חוקיות היות וההבדל בין כל קודקוד היא בסיבית אחת, נשים לב כי אלה לא כל הקודקודים, אבל מה שרשמנו קודם זה בעצם מסלול הילטון רק בלי הצלע האחרונה במעגל קטן יותר, ולכן עכשיו נחתון מימד נלך מ$0a(2^{(n)}) - 1a(2^{(n)})$ ומשם נמשיך בהמילטון כמו במימד הקודם וקבלנו :



ובפרט עבור N=3
בין הקודקודים $0a(i), 0(a(i + 1))$ יש צלע כי $a(i), a(i + 1)$ מחוברים בצלע ב n – קובייה ולכן אלה סדרות ששונות בביט אחד ולכן גם $0a(i), 0(a(i + 1))$ הן שונות בביט אחד כנל לגביי $1a(i), 1(a(i + 1))$, יש צלע בין $2(2^{(n)})$ ובין 1(a(2^(n)) כי הן סדרות שונות בביט 1 ומאותה סיבה יש צלע בין $1(a(1))$ לבין 0(a1) ולכן קבלנו מעגל שעובר דרך כל הקודקודים, פעם אחת דרך כל קודקוד ולכן קבלנו מעגל המילטון. ■
</td>
</tr>
</table>

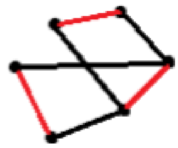
קורס מבנים דיסקרטיים למדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ

זיווג גרפים

- **לא חייב להיות קשיר!**

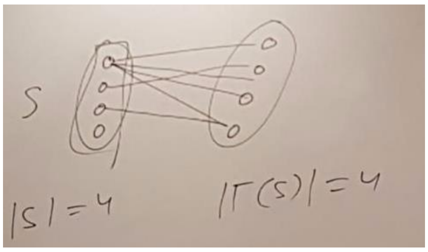
זיווג בגרף: זיווג בגרף G הוא אוסף של קשתות מהגרף כך שאין 2 קשתות מהאוסף שנוגעות בקודקוד משותף.

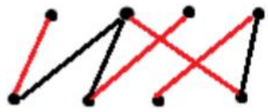
זיווג מושלם: זיווג מושלם ב G הוא זיווג שבו משתתפים כל הקודקודים בגרף.
(חלוקת קודקודי הגרף לזוגות כך שכל זוג קודקודים מחוברים בקשת)



- אם צמתים בגודל שונה בטוח איזה זיווג מושלם

משפט Hall (משפט החתונה): יהא $G = (V \uplus U, E)$ גרף דו צדדי, $|U| = |V|$, אם לכל תת קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ מתקיים: $|\Gamma(S)| \leq |S|$ כאשר $\Gamma(S)$ מייצג את אוסף השכנים של קודקודי S אז קיים ב G זיווג מושלם.





בגרף דו צדדי $G = (V1, V2, E)$ כאשר $|V1| = |V2|$ יש זיווג מושלם אם"ם לכל קבוצה S החלקית ל-V1 מתקיים כי $|R(s)| \geq |S|$

ברגע שיש זיווג זה אומר תקחו את הקודקודים בS ולכל קודקוד בS יש בן זוג ע"י הזיווג המושלם ולכן נקח שכן אחד מקבוצה 2V וזה לא משנה שיש יותר שכנים כי זה אומר שיש לפחות שכן אחד שבשבילו יש זיווג.

הוכחה של משפט Hall:

כיוון 1: נניח שיש בגרף G זיווג מושלם, ותהי S קבוצה חלקית ל-V1 , לכל קודקוד בקבוצה S יש בן זוג בזיווג ולכן $|R(s)| \geq |S|$ לפי עקרון שובך היונים.

כיוון 2: אחרי שראינו שלא יכולה להיות קבוצה שלא מקיימת את התנאי נראה באינדוקציה על מספר הקודקודים n ב-V1 שיש זיווג מושלם M ל-G אם מתקיימת הטענה שעוצמת השכנים של תת קבוצה גדולה או שווה לעומת תת הקבוצה S $|R(s)| \geq |S|$

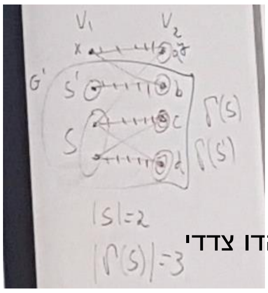
בסיס האינדוקציה: $|V1| = |V2| = n = 1$ אז ישנם שני קודקודים וצלע בינהם = זיווג מושלם

הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור גרפים שעבורים $|V1| = n - 1$ ונוכיח עבור הגרפים עוברים $|V1| = n$ כלומר גרפים אשר מקיימים את הטענה של משפט Hall עבורם כל קבוצה חלקית של V1 מתקיים כי $|R(s)| \geq |S|$

צעד האינדוקציה:

מקרה א' : לכל קבוצה חלקית ממש Sלקבוצה הקודקודים מתקיים שעוצמת קבוצת השכנים של S גדולה מעוצמתה של S כלומר $|R(s)| \geq |S| + 1$ [כי זה נוח להוכיח] [כלומר יש יותר שכנים]

- נבחר קודקוד כלשהו $x \in V1$ אז לפי ההנחה יש ל-x לפחות שכן אחד, נבחר אחד מהם – y. נכלול את הצלע $\{x, y\}$ בזיווג M המבוקש, ונסיר את שניהם ואת הצלע בינהם מהגרף
- נתכל על הגרף $G' = G - \{x, y\}$ נסמן ע"י $r'(s)$ את קבוצת השכנים של S בגרף G' קל לראות שלכל תת קבוצה S ב $V1 - \{x\}$ מתקיים $|R'(s)| \geq |S|$ ולכן:



$$|R'(s)| \geq |R(s)| - 1 \geq |S| + 1 - 1 = |S|$$

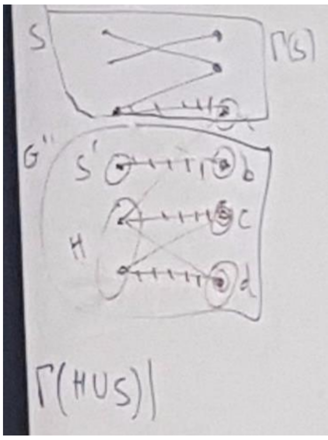
ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם ב'G נחזיר את צלע {x,y} ונקבל זיווג מושלם בגרף המקורי G

<u>מקרה ב':</u>

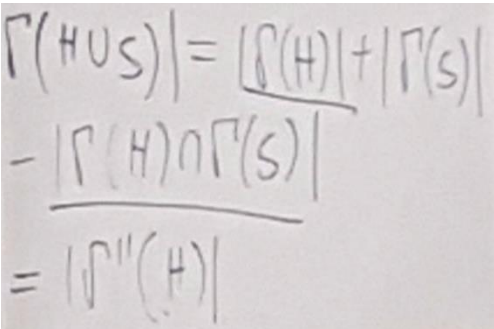
- קיימת לפחות קבוצה אחת חלקית ממש ל S של V1 כך ש $|R(s)| \geq |S|$ במקרה זה נתבונן בגרף הדו צדדי $Gs = (S, R(S), Es)$

כאשר Es היא קבוצת כל הצלעות בין הקודקודים מ-S ל-R(s)

- בGs מתקיימת הנחת המשפט, וגם יש בו פחות קודקודים מאשר הגרף המקורי G כי $|s| < |v1|$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיים זיווג מושלם Ms לGs
- נסיר מהגרף G את קבוצת הקודקודים S ו R(s) ואת הצלעות בינהם.
- יהי G''=(V1\s,V2\s,E'') הגרף המתקבל.



- תהי H תת קבוצה כלשהי של קודקודים ב-V_1\S. נסמן ע"י $\Gamma''(H)$ את קבוצת השכנים של H בגרף G''.
- אז מתקיים בהכרח $|\Gamma''(H)| \geq |H|$:
  נניח שלא. כלומר $|\Gamma''(H)| < |H|$. אז בגרף G היה מתקיים:
  $$|\Gamma(HUS)| = |\Gamma''(H)| + |\Gamma(S)| < |H| + |S| = |HUS|$$
  זה בסתירה לכך שבגרף G לכל קבוצה חלקית T של V_1 של קודקודים מתקיים $|\Gamma(T)| \geq |T|$.
- לכן גם הגרף G'' מקיים את תנאי המשפט. לכן לפי הנחת האינדוקציה יש בגרף G'' זיווג מושלם M''. נוסיף לזיווג הזה את הזיווג Ms ונקבל זיווג מושלם בגרף המקורי G.



מסקנה ממשפט החתונה של Hall

<u>משפט:</u> אם G גרף דו צדדי d-רגולרי אזי קיים בו זיווג מושלם.

<u>הוכחה:</u>

- נקח תת קבוצה של קודקודים מאחד הצדדים. אז לכל קודקוד כזה יש d צלעות כי הגרף הוא d-רגולרי. כמות הצלעות בתת הקבוצה הזו היא d*|S| כאשר S היא תת הקבוצה שבחרנו.
- עכשיו ניקח את קבוצת כל השכנים של S. גם לכל שכן יש d צלעות כי הגרף d-רגולרי. אז לקבוצת השכנים של S יש d*|Γ(S)| צלעות (Γ(S) היא קבוצת השכנים של S).
- קבוצת הצלעות של S היא חלקית לקבוצת הצלעות של השכנים של S, כי כל צלע שחלה בקודקוד ב-S חלה גם בקודקוד שהוא שכן של הקודקוד מ-S - כי הגרף לא מכוון ויש צלע בין הקודקודים האלה.
- אז עבור כל תת קבוצה של קודקודים שנבחר, עוצמת קבוצת הצלעות שלה, כלומר עוצמת קבוצת השכנים שלה, תהיה גדולה או שווה לה, ואז לפי משפט החתונה של Hall, קיים בגרף זיווג מושלם.