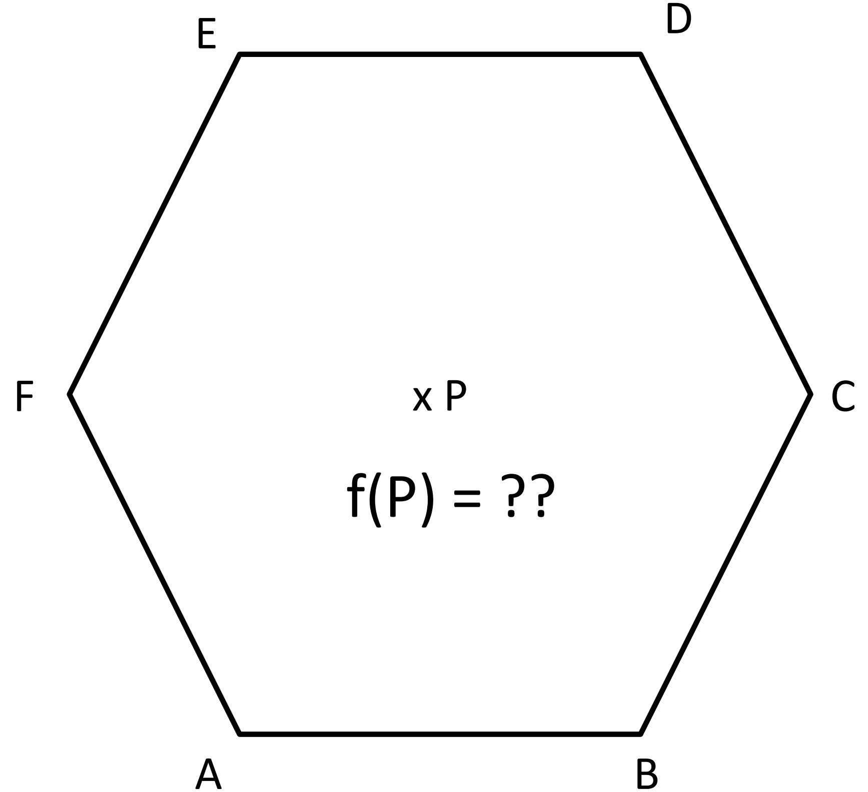
Baryzentrische Koordinaten
&
Interpolation

Seminar Graphische Datenverarbeitung
SS2010

Bert Riffelmacher

Motivation



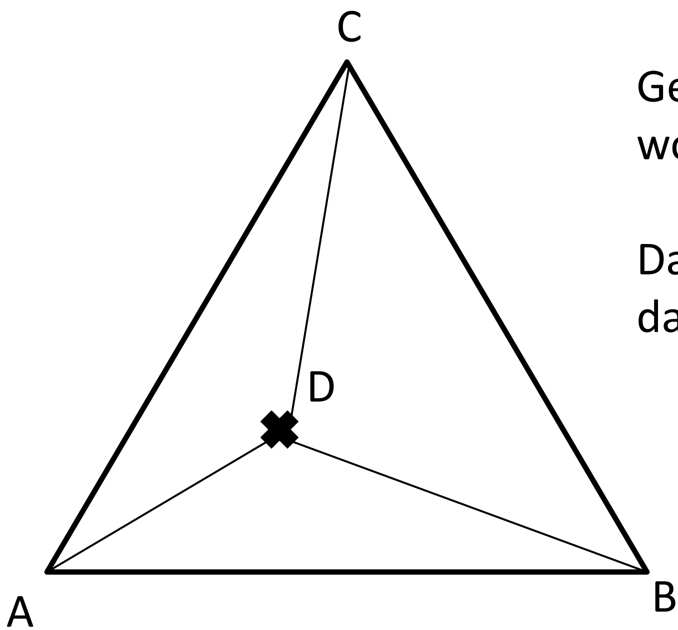
$f(A) = 2$
$f(B) = 4$
$f(C) = 9$
$f(D) = 1$
$f(E) = 6$
$f(F) = 7$

Übersicht

1. Baryzentrische Koordinaten im Dreieck
2. Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten
3. Anwendung

1. Baryzentrische Koordinaten im Dreieck

Baryzentrische Koordinaten im Dreieck (1)



Gegeben sind 3 Punkte A,B und C in der Ebene, wobei A,B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Dann lässt sich jeder Punkt D der Ebene eindeutig darstellen als:

$$D = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$$

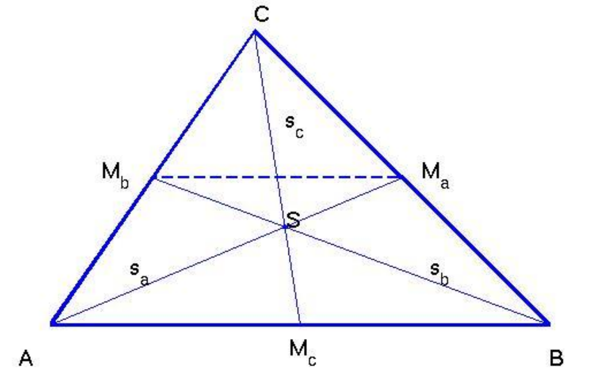
Wobei gilt: $1 = \alpha + \beta + \gamma$

α, β, γ heißen *baryzentrische Koordinaten* von D bzgl $\Delta(A, B, C)$

Baryzentrische Koordinaten im Dreieck (2)

Schwerpunkt

In geometry, the **centroid**, **geometric center**, or **barycenter** of a plane figure or two-dimensional shape *X* is the intersection of all straight lines that divide *X* into two parts of equal moment about the line. Informally, it is the "average" of all points of *X*.



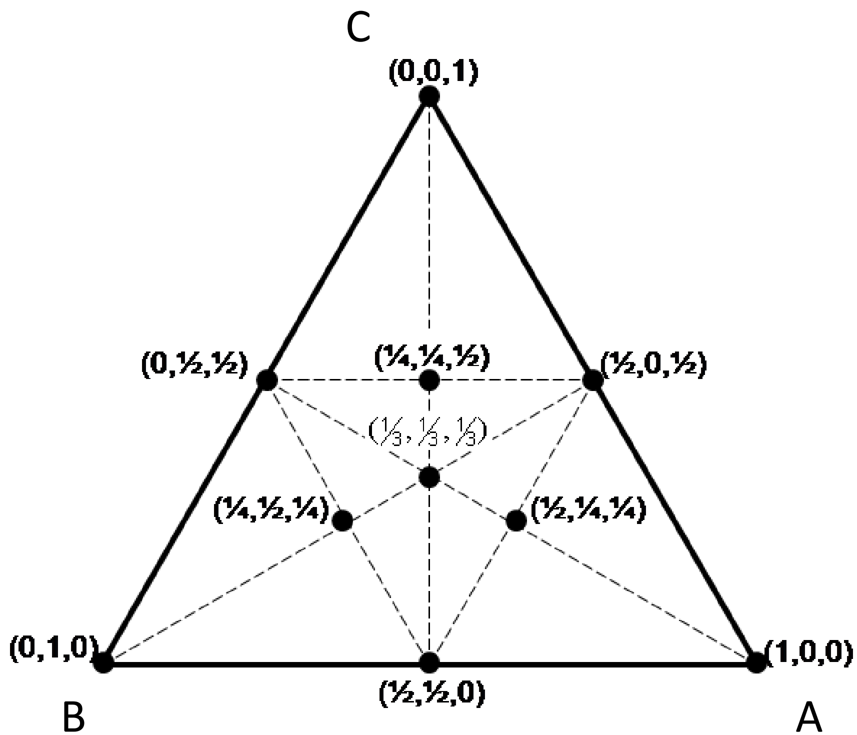
Jeder Punkt des Dreiecks ABC lässt sich als Schwerpunkt eines Dreiecks ABC mit entsprechenden Gewichten an den Ecken A,B & C darstellen. (Möbius 1827)

$$S_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C$$

Offensichtlich: $a_i + \beta_i + \gamma_i = 1$

$$\alpha_i = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} \qquad \beta_i = \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C} \qquad \gamma_i = \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C}$$

Besondere Punkte in baryzentrischen Koordinaten



Schwerpunkt: (1/3, 1/3, 1/3)

Punkt A: (1,0,0)

Punkt B: (0,1,0)

Punkt C: (0,0,1)

Mittelpunkt AB: (1/2,1/2,0)

Baryzentrische Koordinaten im Dreieck (4)

Wie lassen sich die baryzentrischen Koordinaten bzgl. eines Dreiecks ABC berechnen?

$$x_D = \alpha \cdot A_x + \beta \cdot B_x + \gamma \cdot C_x$$
$$y_D = \alpha \cdot A_y + \beta \cdot B_y + \gamma \cdot C_y$$

Es gilt: $\gamma = 1 - \alpha - \beta$

$$x_D = \alpha \cdot (A_x - C_x) + \beta \cdot (B_x - C_x) + C_x$$
$$y_D = \alpha \cdot (A_y - C_y) + \beta \cdot (B_y - C_y) + C_y$$

Mit $T := \begin{bmatrix} A_x - C_x & B_x - C_x \\ A_y - C_y & B_y - C_y \end{bmatrix}$

und $\lambda := \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

Lässt sich das Gleichungssystem umformen:

$$T \cdot \lambda = \vec{D} - \vec{C}$$

und da T invertierbar ist gilt:

$$\lambda = T^{-1}\left(\vec{D} - \vec{C}\right)$$

Baryzentrische Koordinaten im Dreieck (5)

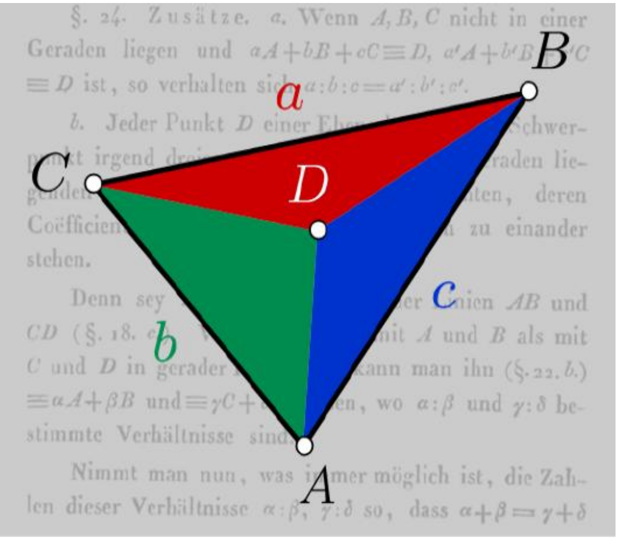
Wie lassen sich die baryzentrischen Koordinaten bzgl. eines Dreiecks ABC berechnen? (2)

=> $$\alpha = \frac{(x_D - C_x)(B_y - C_y) - (y_D - C_y)(B_x - C_x)}{\det(T)}$$

bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass sich dies auch so darstellen lässt:

$$\alpha = \frac{\det\begin{bmatrix} x_D - C_x & B_x - C_x \\ y_D - C_y & B_y - C_y \end{bmatrix}}{\det(T)}$$

$$= \frac{\det(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})}{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \frac{area(\Delta(D,B,C))}{area(\Delta(A,B,C))}$$



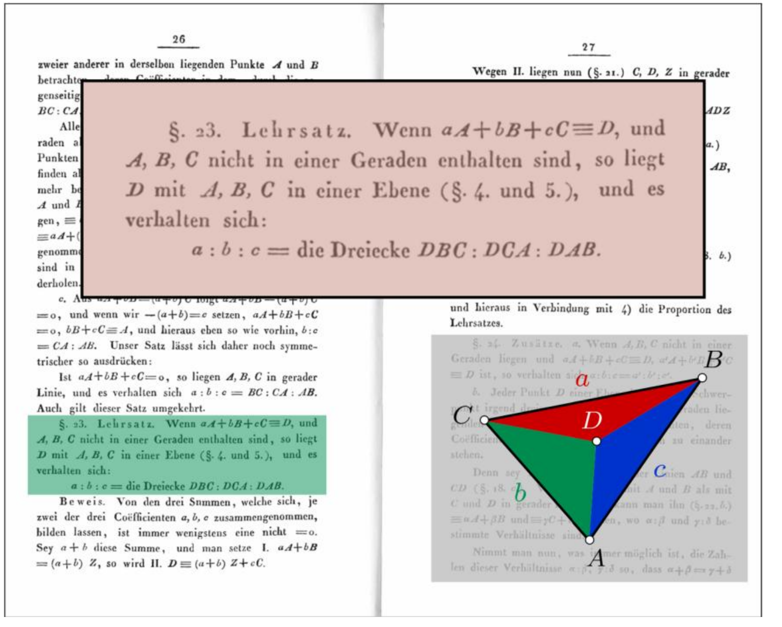
Baryzentrische Koordinaten im Dreieck (6)

Folgerung

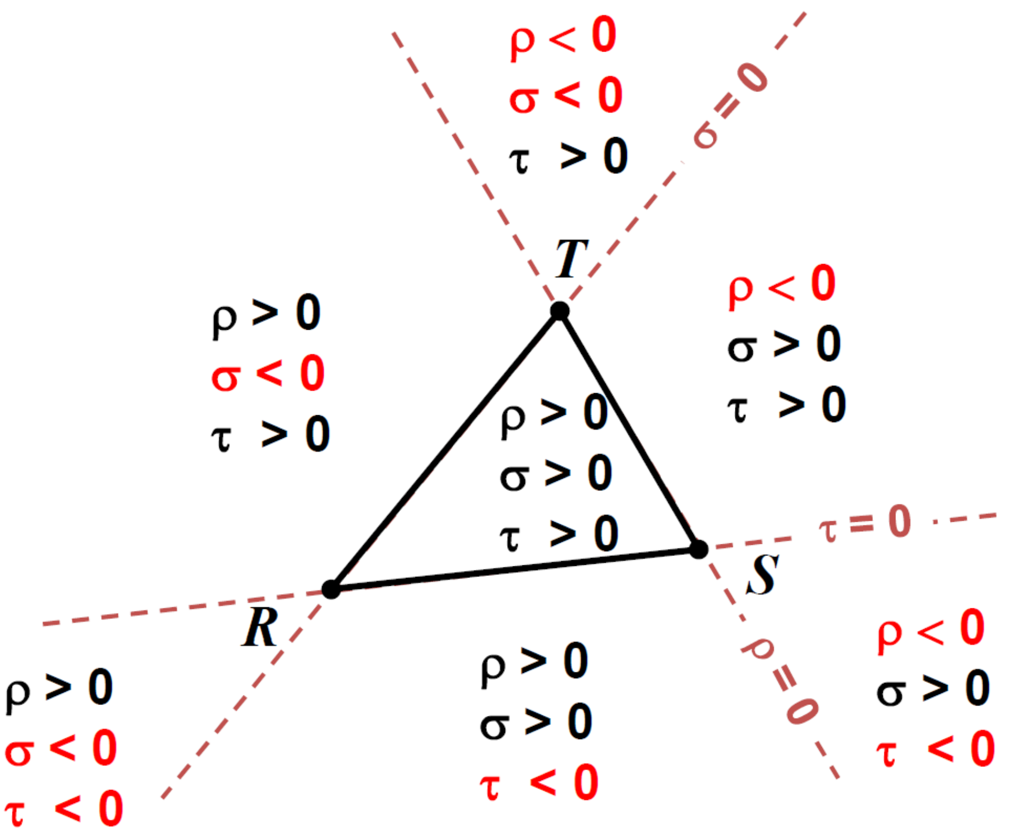
$$\alpha = \frac{area(\Delta(D,B,C))}{area(\Delta(A,B,C))}$$

$$\beta = \frac{area(\Delta(D,C,A))}{area(\Delta(A,B,C))}$$

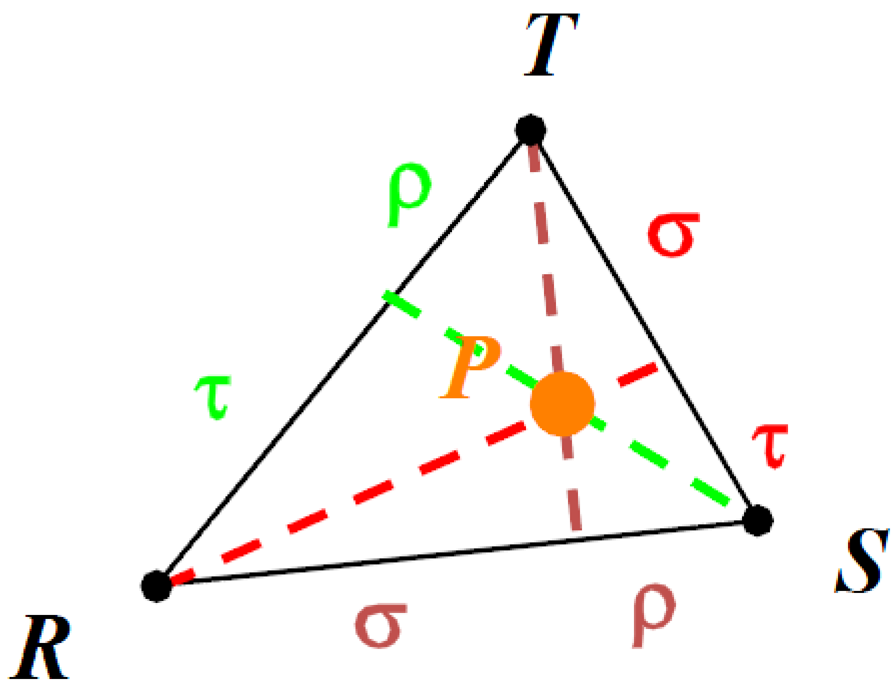
$$\gamma = \frac{area(\Delta(D,A,B))}{area(\Delta(A,B,C))}$$



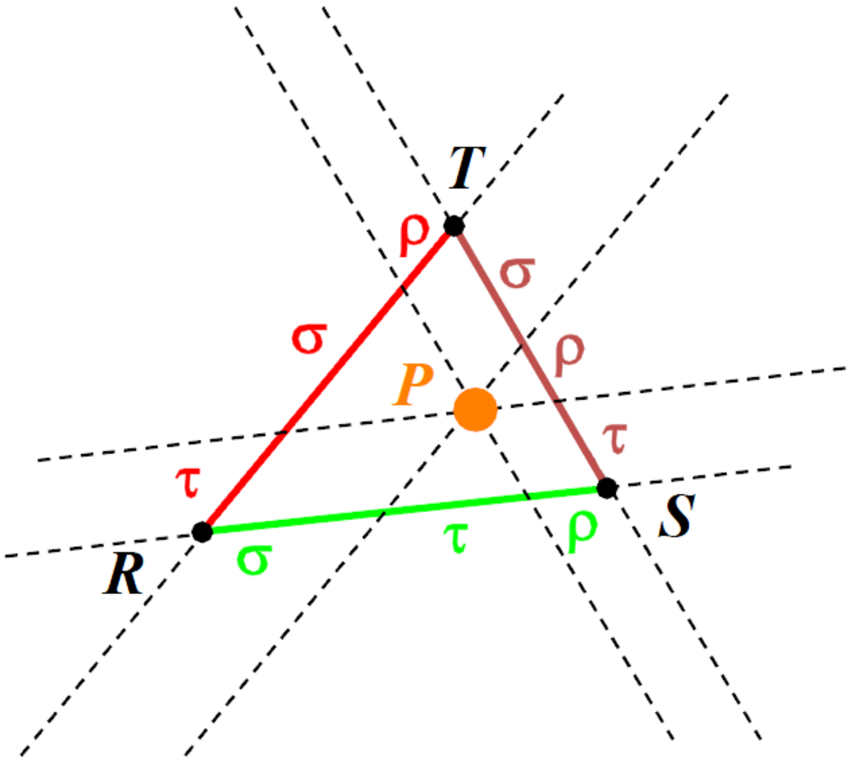
Vorzeichen der baryzentrischen Koordinaten



Geometrische Interpretation



Geometrische Interpretation (2)



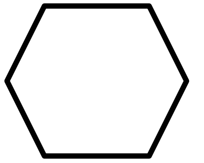
2. Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten

1. **Motivation**
2. Definition
3. Überblick über verallgemeinerte Koordinaten
4. Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten

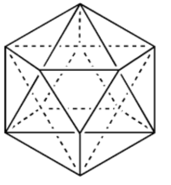
Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten (1)

Motivation

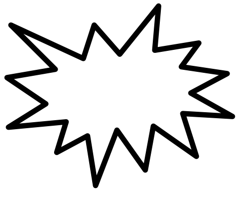
1. Konvexe Polygone im R^2 mit mehr als 3 Ecken



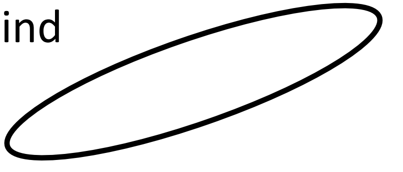
2. Konvexe Polytope im R^n mit mehr als n+1 Ecken



3. Nicht-konvexe Polygone



4. Gebiete, die durch eine glatte, geschlossene Kurve begrenzt sind



2. Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten

1. Motivation
2. **Definition**
3. Überblick über verallgemeinerte Koordinaten
4. Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten

Allgemeine Definition

Sei Ω ein geschlossenes konvexes Polygon der Ebene mit den Knoten

$v_1, v_2, \ldots, v_n, n \geq 3.$

Dann bezeichnet die Menge der Abbildungen $\lambda_i : \Omega \to R, i = 1, \ldots, n$ *Baryzentrische Koordinaten* falls für alle $v \in \Omega$ gilt:

(1) $\lambda_i(v) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) = 1$ (partition of unity)

(3) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) v_i = v$ (linear precision)

Interpolationseigenschaft

Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten besitzen die Interpolationseigenschaft d. H. sind für die Punkte $P_0,\dots,P_k$ Funktionswerte f_i gegeben, so lässt sich durch

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(P) \cdot f_i$$

die Funktion f interpolieren, d.h

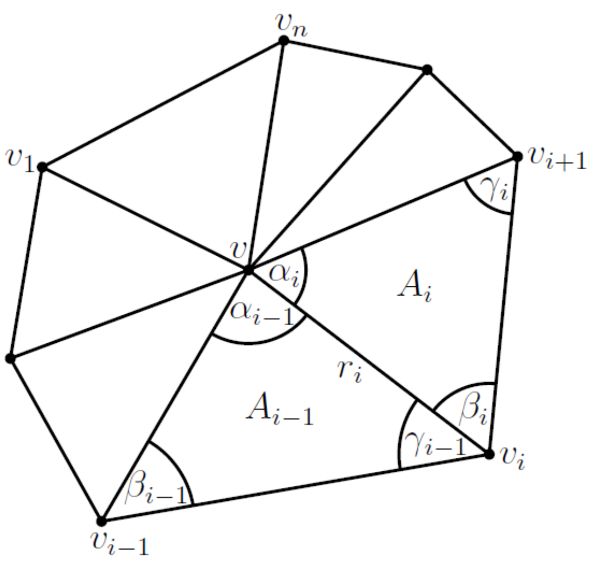
$$\forall i : f(P_i) = f_i$$

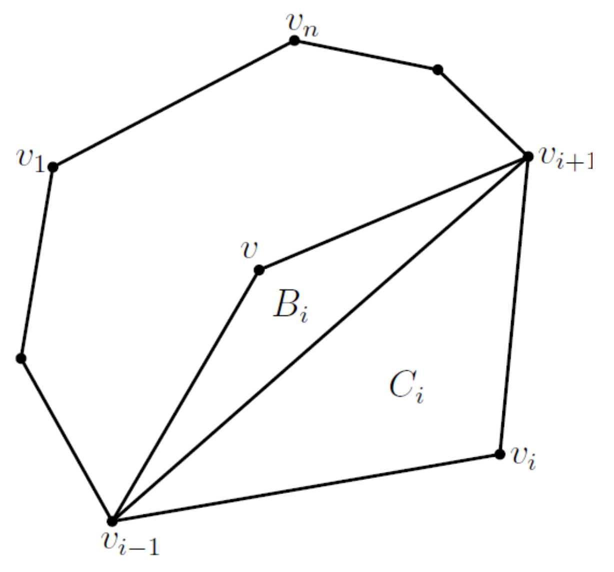
oder $\lambda_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, sonst \end{cases}$ *(Lagrange Property)*

2. Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten

1. Motivation
2. Definition
3. Überblick über verallgemeinerte Koordinaten
4. Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten

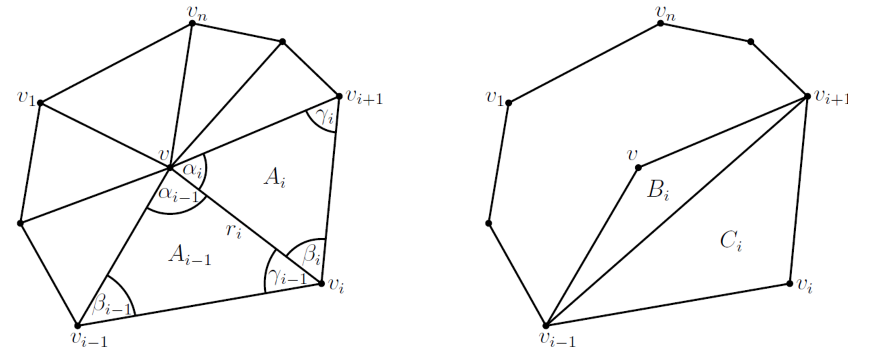
Notation für konvexe Polygone





Überblick über verallgemeinerte Koordinaten (1)

Wachspress Koordinaten (~1970)

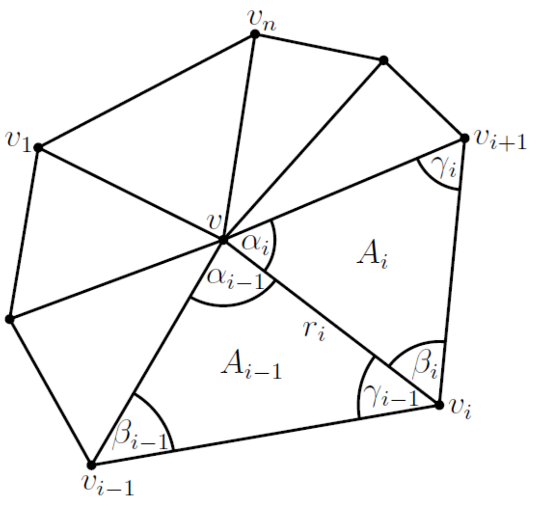


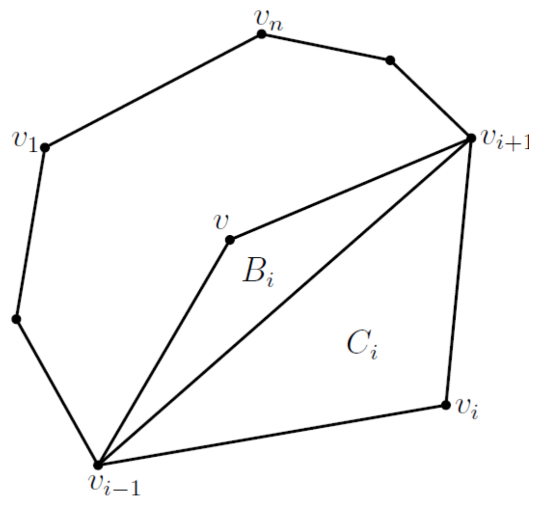
•Bis zum Jahr 2000 wichtigste Verallgemeinerung für n-konvexe Polygone

•Wachspress wollte die „Finite Element Methode“ (Methode der finiten Elemente) verallgemeinern

Überblick über verallgemeinerte Koordinaten (2)

Wachspress Koordinaten (~1970)





$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(v)}$$

$$w_i(v) = A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) \prod_{j \neq i-1,i} A(v, v_j, v_{j+1})$$

Wachspress Koordinaten (~1970)

Erfüllen die Eigenschaften (1) – (3), sind folglich baryzentrische Koordinaten

Weitere Eigenschaften

Affine Invarianz

Die Koordinaten bleiben unverändert wenn eine affine Transformation T gleichzeitig auf auf die Punkte $v_1,..,v_n$ und v angewendet wird.

$$T := R^2 \to R$$

oder falls wir die λ_i in Abhängigkeit der Eckpunkte angeben:

$$\lambda_i(Tv_1,..,Tv_n) = \lambda(v_1,..,v_n)$$

Wachspress Koordinaten (~1970)

Weitere Eigenschaften

- Sind rationale Polynome P(x,y) mit grad(P) <= n-2

  Warren bewies das dies der minimal mögliche Grad ist

- Wachspress Koordinaten sind glatt (C^∞)

- Linear entlang der Kanten

- Lassen sich (nach Meyer et. Al) mit der äquivalenten Form

$$w_i(v) = \frac{A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})}{A(v, v_{i-1}, v_i) A(v, v_i, v_{i+1})}$$

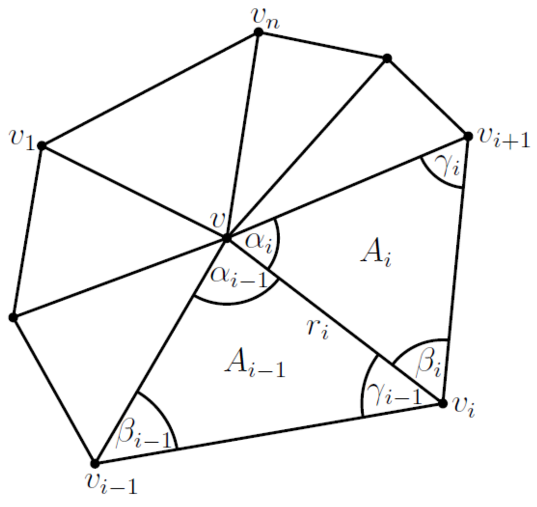
leicht und lokal berechnen

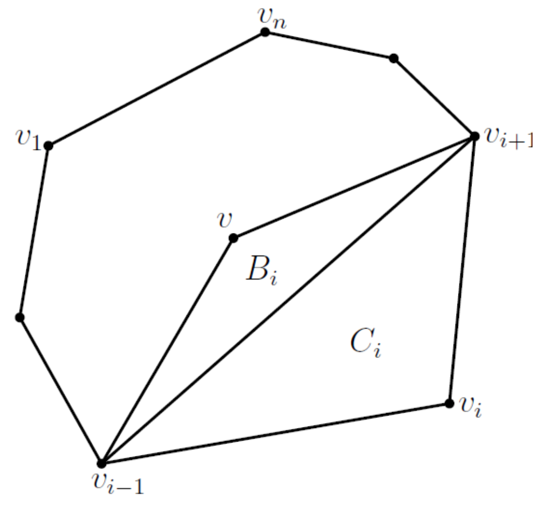
Wachspress Koordinaten (~1970)

Weiterführende Arbeiten zu Wachspress Koordinaten

- Von Warren (1996) für konvexe Polytope erweitert
- Geometrische Konstruktion existiert [Ju et al.,2005]

Mean Value Coordinates





Konstruiert von M.S. Floater 2003

$$w_i(v) = \frac{\tan(\alpha_i/2) + \tan(\alpha_{i-1}/2)}{\|v_i - v\|} \qquad \lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(v)}$$

Mean Value Coordinates (2)

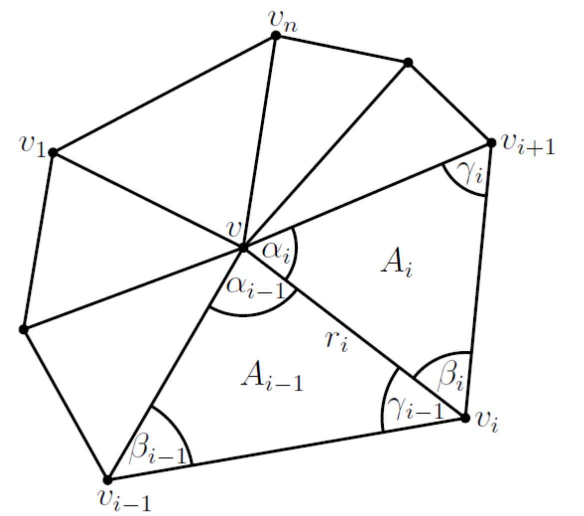
Eigenschaften

- Baryzentrische Koordinaten für konvexe Polygone und beliebige Polygone ohne Selbstüberschneidung
- Invariant nur gegenüber Ähnlichkeitsabbildungen
- Glatt
- Linear entlang der Kanten

Weitere Erweiterungen

Discrete Harmonic Coordinates (1)

[Pinkball and Poltier], [Eck et Al]



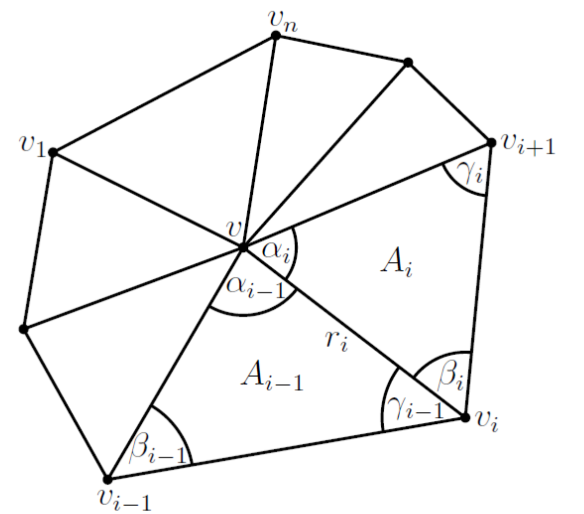
$$w_i(v) = \cot \gamma_i + \cot \beta_{i-1}$$

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(v)}$$

Weitere Erweiterungen

Discrete Harmonic Coordinates (2)

$$w_i(v) = \cot \gamma_i + \cot \beta_{i-1}$$

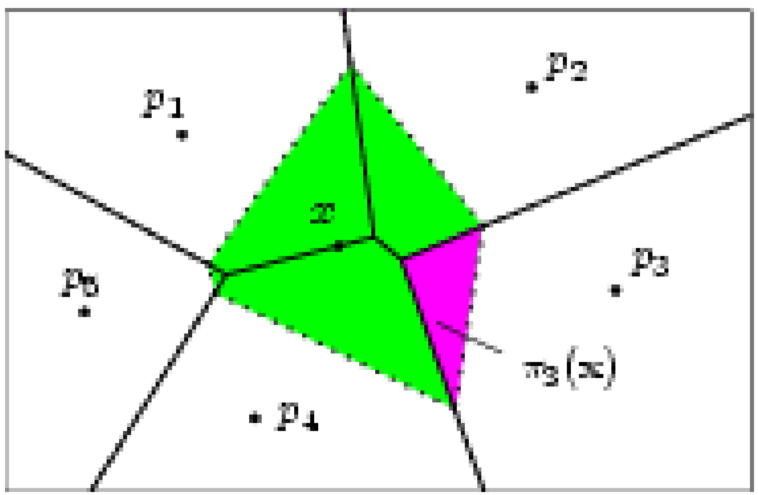


Nachteil

- Nur positiv für $\gamma_i + \beta_{i-1} < \pi$
- Sind für alle Punkte im Inneren eines Polygons positiv nur dann, wenn die $v_1,..,v_n$ auf einem Kreis liegen
- Also im Allgemeinen keine baryzentrischen Koordinaten für konvexe Polygon

Weitere Erweiterungen

Natural Neighbour Coordinates (Sibson)

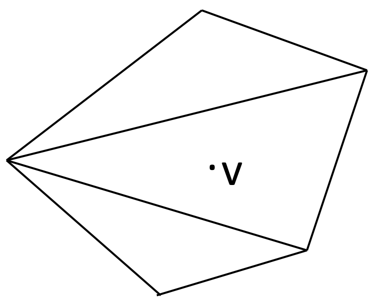


nicht glatt außerhalb der Eckpunkte

2. Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten

1. Motivation
2. Definitionen
3. Überblick über verallgemeinerte Koordinaten
4. **Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten**

Baryzentrische Koordinaten verallgemeinern – Naiver Ansatz



1. Unterteile konvexes Polygon in Dreiecke (Triangulation)
2. Bestimme die baryzentrischen Koordinaten bzgl. des Dreieckes in dem sich v befindet

Offensichtliche Probleme dieses Verfahrens

- Triangulation, und damit auch die resultierenden Koordinaten, ist nicht eindeutig
- Wie werden die Koordinaten für Punkte außerhalb des Polygons bestimmt?

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (2)

Einschub

Aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) v_i = v$ folgt: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i - v) = 0$

D.h. Funktionen $w_i = w_i(v)$ gesucht die folgende Eigenschaften erfüllen:

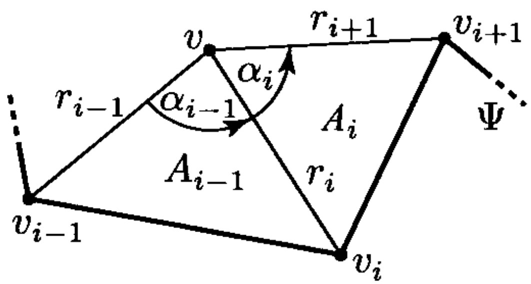
$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i (v_i - v) &= 0 \qquad (1) \\ \forall i : w_i &\geq 0 \qquad (2) \end{aligned}}$$

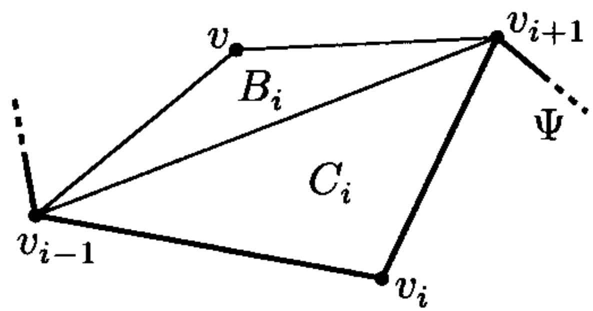
Koordinaten die (1) erfüllen werden als *homogene Koordinaten* bezeichnet

Die baryzentrischen Koordinaten lassen sich dann wie folgt berechnen:

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (3)





Ψ ein (konvexes) Polynom der Ebene

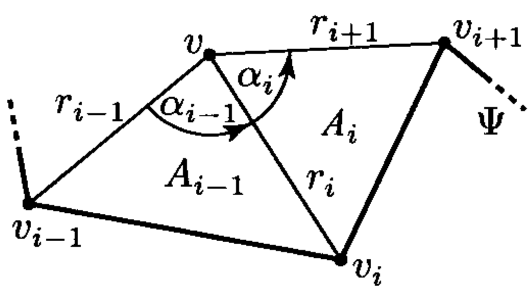
mit n>= 3 paarweise verschiedenen Knoten v1,...,vn

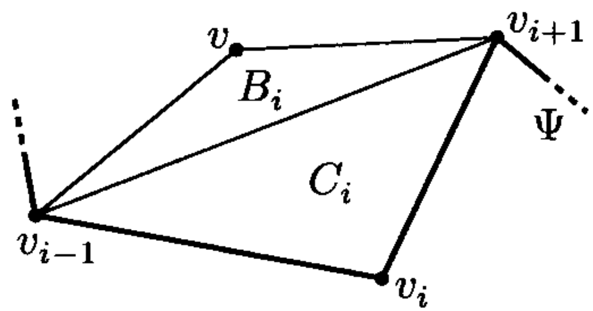
$$r_i := \|v_i - v\|$$

$$A_i := \frac{1}{2} r_i r_{i+1} \sin \alpha_i = A(\Delta v, v_i, v_{i+1}) \qquad \Delta_i = [v_{i-1}, v_i, v_{i+1}]$$

$$B_i := \frac{1}{2} r_{i-1} r_{i+1} \sin(\alpha_{i-1} + \alpha_i) = A(\Delta v, v_{i+1}, v_{i-1})$$

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (4)





Offensichtlich gilt:

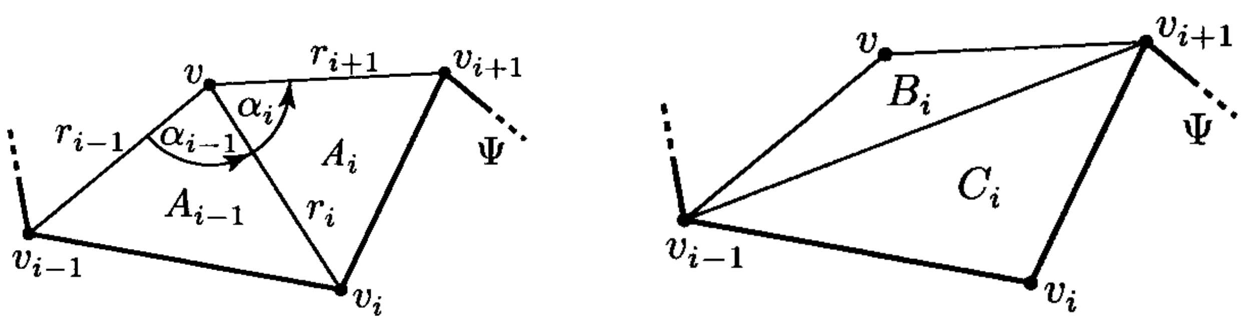
$$A_{i-1}(v) + A_i(v) = B_i(v) + C_i(v)$$

und für v innerhalb des konvexen Polygons $v \in Int(\Psi)$

$$A_i(v), A_{i-1}(v), C_i(v) > 0$$

und für $B_i(v)$ hängt das Vorzeichen von der Lage von v bzgl. $[v_{i-1}, v_{i+1}]$

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (5)



Behauptung

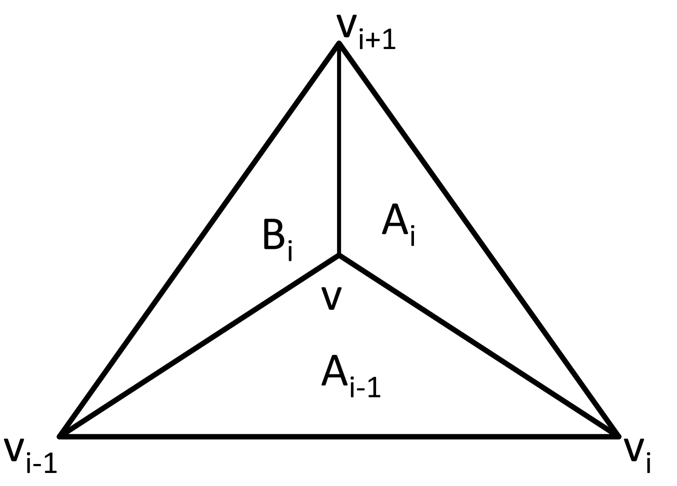
Seien $b_1, b_2, \ldots, b_n : Int(\Psi) \rightarrow R$ beliebige reelle Funktionen. Dann sind die Funktionen

$$w_i(v) = \frac{b_{i+1}(v)A_{i-1}(v) - b_i(v)B_i(v) + b_{i-1}(v)A_i(v)}{A_{i-1}(v)A_i(v)}$$

Homogene Koordinaten. (Erfüllen also $\sum_{i=1}^{n} w_i(v_i - v) = 0$)

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (6)

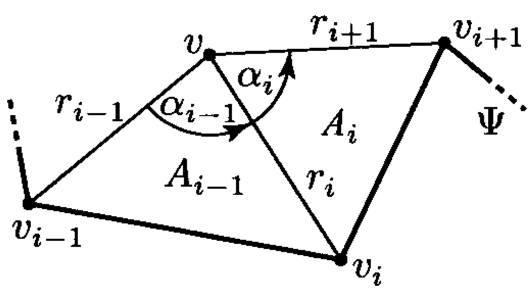
Rückblick: Dreieck

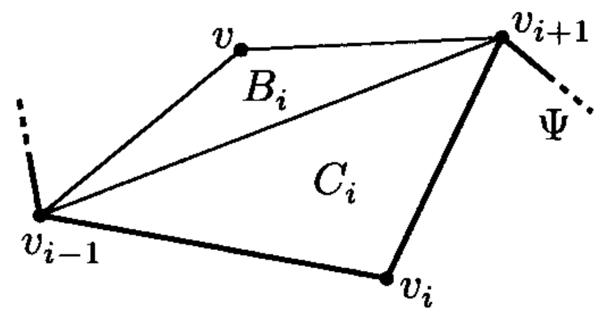


Offensichtlich gilt:

$$A_i(v_{i-1}-v)+(-B_i)(v_i-v)+A_{i-1}(v_{i+1}-v)=0$$

d.h. der gewählte Ansatz liefert für Dreiecke homogene (baryzentrische) Koordinaten.



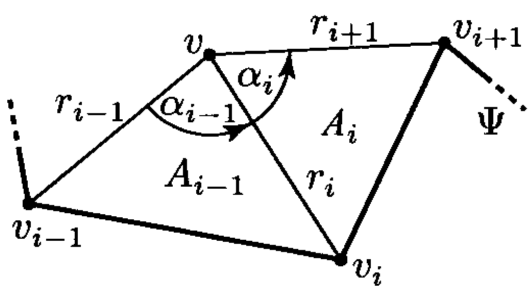


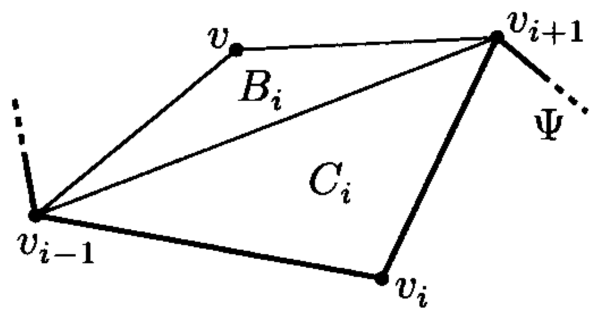
Einschub

In $$w_i(v) = \frac{b_{i+1}(v)A_{i-1}(v) - b_i(v)B_i(v) + b_{i-1}(v)A_i(v)}{A_{i-1}(v)A_i(v)}$$

könnte der Nenner offensichtlich 0 werden. Deswegen betrachten wir hier zuerst nur den Fall dass $v \in Int(\Psi)$ gilt. Diese Koordinaten können dann auf das ganze Polygon Ψ erweitert werden. (Beweis in[2])

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (8)





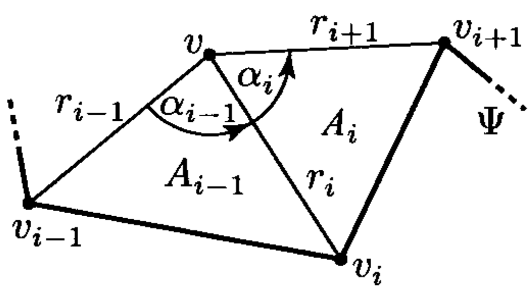
Beweis

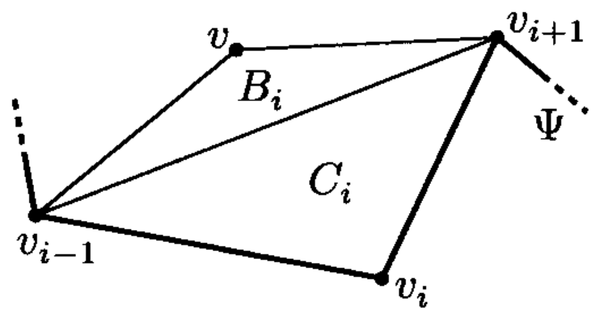
Wir stellen v als baryzentrische Kombination von v_{i-1}, v_i, v_{i+1} dar.

$$A_i(v)(v_{i-1} - v) + A_{i-1}(v)(v_{i+1} - v) - B_i(v)(v_i - v) = 0$$

Division durch $A_{i-1}A_i$ ergibt:

$$D := \frac{v_{i-1} - v}{A_{i-1}(v)} + \frac{v_{i+1} - v}{A_i(v)} - \frac{B_i(v)}{A_{i-1}(v)A_i(v)}(v_i - v) = 0$$





Beweis

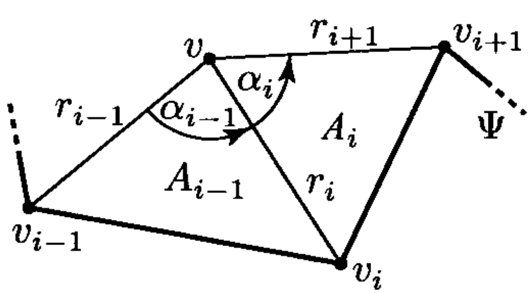
Mit $D_i(v) := \dfrac{v_{i-1} - v}{A_{i-1}(v)} + \dfrac{v_{i+1} - v}{A_i(v)} - \dfrac{B_i(v)}{A_{i-1}(v) A_i(v)}(v_i - v) = 0$

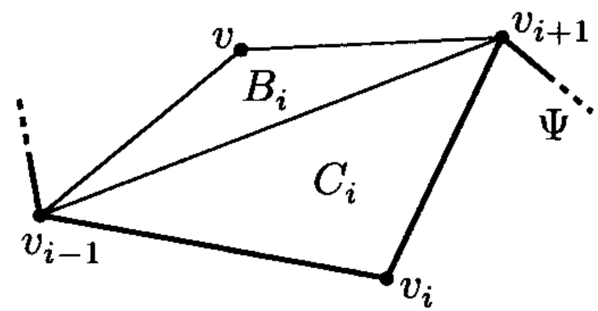
gilt offensichtlich auch $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i(v) D_i(v) = 0$

Diese Gleichung lässt sich aber umstellen zu:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(v_i - v) = 0 \qquad \text{mit} \quad w_i(v) = \frac{b_{i+1}(v)A_{i-1}(v) - b_i(v)B_i(v) + b_{i-1}(v)A_i(v)}{A_{i-1}(v)A_i(v)}$$

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (10)



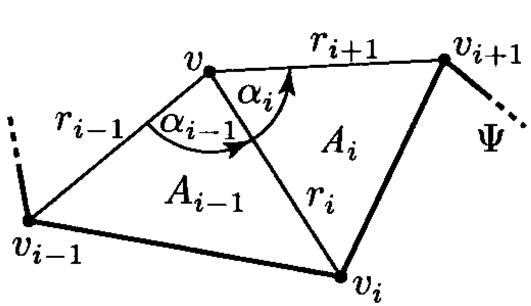


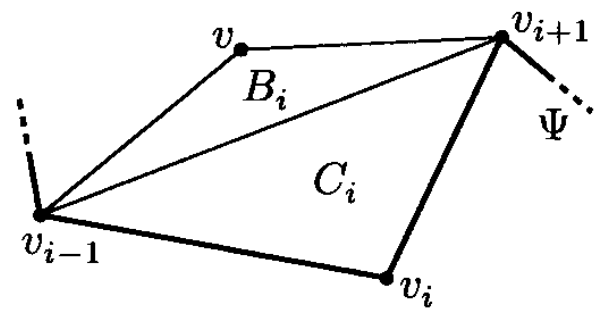
Folgerung

Unabhängig von den gewählten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind die gefundenen Funktion w(v) homogene Koordinaten.

Um baryzentrische Koordinaten zu erhalten müssen die $b_1, b_2, \ldots, b_n$ folglich so gewählt werden, dass die $w_i(v)$ positiv für v im Inneren des Polygons sind.

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (11)





Erinnerung

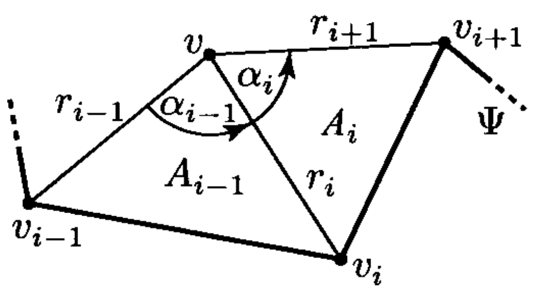
$$r_i := \left\| v_i - v \right\|$$

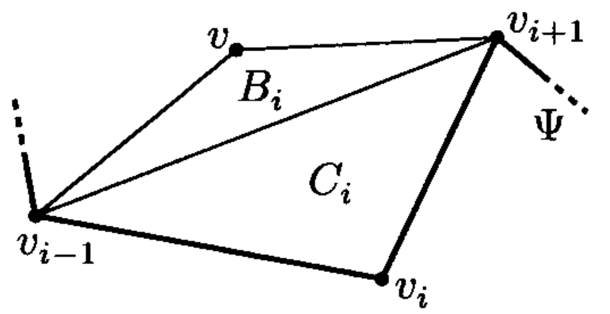
$$A_i := \frac{1}{2} r_i r_{i+1} \sin \alpha_i = A(\Delta v, v_i, v_{i+1})$$

$$B_i := \frac{1}{2} r_{i-1} r_{i+1} \sin(\alpha_{i-1} + \alpha_i) = A(\Delta v, v_{i+1}, v_{i-1})$$

Damit ergibt sich folgende …

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (12)





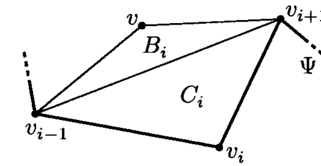
Alternative Darstellung der $w_i(v)$:

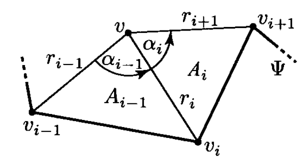
$$w_i = \frac{2}{r_i}\left(\frac{b_{i+1}}{r_{i+1}\sin\alpha_i} - \frac{b_i\sin(\alpha_{i-1}+\alpha_i)}{r_i\sin\alpha_{i-1}\sin\alpha_i} + \frac{b_{i-1}}{r_{i-1}\sin\alpha_{i-1}}\right)$$

oder mit $a_i = \frac{b_i}{r_i}$

$$w_i = \frac{2}{r_i}\left(\frac{a_{i+1} - a_i\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i} + \frac{a_{i-1} - a_i\cos\alpha_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}}\right)$$

Drei-Punkt-Koordinaten





Wähle $b_i = r_i^p,\ p \in R$

$$w_{i,p}(v) = \frac{r_{i+1}^p(v)A_{i-1}(v) - r_i^p(v)B_i(v) + r_{i-1}^p(v)A_i(v)}{A_{i-1}(v)A_i(v)}$$

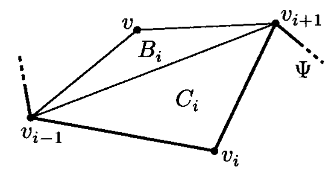
oder alternativ

$$w_{i,p} = \frac{2}{r_i}\left(\frac{r_{i+1}^{p-1} - r_i^{p-1}\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i} + \frac{r_{i-1}^{p-1} - r_i^{p-1}\cos\alpha_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}}\right)$$

Da diese $w_{i,p}$ offensichtlich nur von v_{i-1}, v_i, v_{i+1} abhängen werden diese Koordinaten *Drei-Punkt-Koordinaten* genannt.

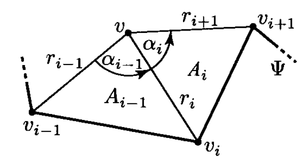
Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (14)

Drei-Punkt-Koordinaten



Für p=0

$$w_{i,0} = \frac{C_i}{A_{i-1} A_i}$$



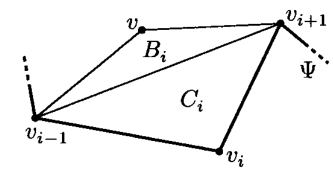
in anderer Darstellung

$$w_i(v) = \frac{A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})}{A(v, v_{i-1}, v_i) A(v, v_i, v_{i+1})}$$

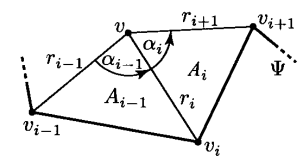
Also genau die *Wachspress Koordinaten*!!

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (15)

Drei-Punkt-Koordinaten



Für p=1



$$w_{i,1} = \frac{2}{r_i}\left(\frac{1-\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i} + \frac{1-\cos\alpha_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}}\right)$$

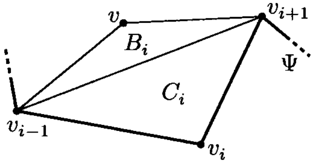
in anderer Darstellung

$$w_{i,1}(v) = 2\frac{\tan(\alpha_i/2)+\tan(\alpha_{i-1}/2)}{\|v_i - v\|}$$

Also genau die *Mean Value Koordinaten.*

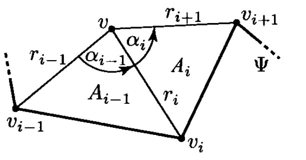
Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (16)

Drei-Punkt-Koordinaten



Für p=2

$$w_{i,2} = \frac{2}{r_i}\left(\frac{r_{i+1} - r_i \;\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i} + \frac{r_{i-1} - r_i \;\cos\alpha_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}}\right)$$

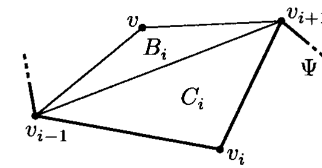


lässt sich umformen zu

$$w_{i,2}(v) = 2(\cot\gamma_i + \cot\beta_{i-1})$$

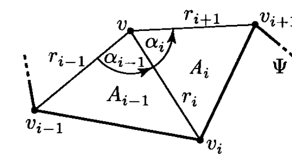
Das sind die *Discrete Harmonic Koordinaten*.

Drei-Punkt-Koordinaten



Offensichtliche Frage

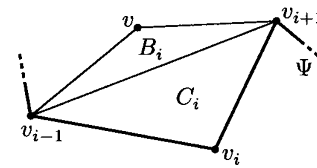
Für welche p ergeben sich baryzentrische Koordinaten?



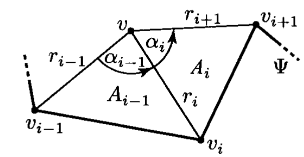
(Überraschende) Antwort

Nur mit p=0 (Wachspress) und p=1 (Mean Value Coordinates) ergeben sich baryzentrische Koordinaten

Drei-Punkt-Koordinaten



Es lässt sich zeigen dass für homogene Koordinaten der Form



$$w_{i,f} = \frac{f(r_{i+1})A_{i-1} - f(r_i)B_i + f(r_{i-1})A_i}{A_{i-1}A_i} \quad \text{mit} \quad f:(0,\infty) \to R$$

für f folgendes gelten muss damit die $w_{i,f}$ positiv für alle Punkte im Inneren des Polynom sind.

(i) Positivität: $f(r) > 0$

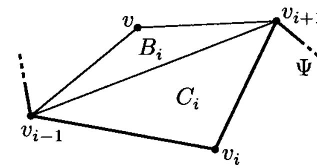
(ii) Monotonie: $f'(r) \geq 0$

(iii) Sublinerarität: $f(r) \geq rf'(r)$

(iv) Konvex: $f''(r) \geq 0$

Konstruktion von verallgemeinerten Koordinaten (19)

Drei-Punkt-Koordinaten

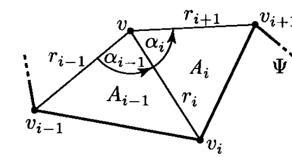


(i) Positivität: $f(r) > 0$

(ii) Monotonie: $f'(r) \geq 0$

(iii) Sublinerarität: $f(r) \geq rf'(r)$

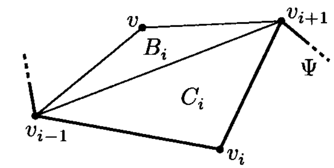
(iv) Konvex: $f''(r) \geq 0$



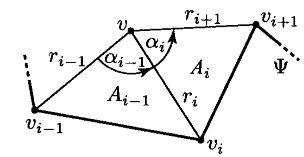
Die einzigen p für r^p die diese Eigenschaften erfüllen sind p=0 und p=1

➔Wachspress und Mean Value Koordinaten sind die einzigen baryzentrischen Drei-Punkt Koordinaten für konvexe Polygone.

Fünf-Punkt-Koordinaten



Für b_i in Abhängigkeit von v_{i-1}, v_i, v_{i+1} der Form



$$b^1_{i,\mu} = 1 + \mu \frac{C_i}{A_{i-1} + A_i}$$

ergeben sich für $0 \le \mu \le 1$ homogene Koordinaten.

Da die $w_i(v)$ dann offensichtlich von den fünf Punkten $v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ abhängen spricht man von

Fünf-Punkt-Koordinaten

(Mehr in [2,Kap 5])

3. Anwendung

1. Interpolation

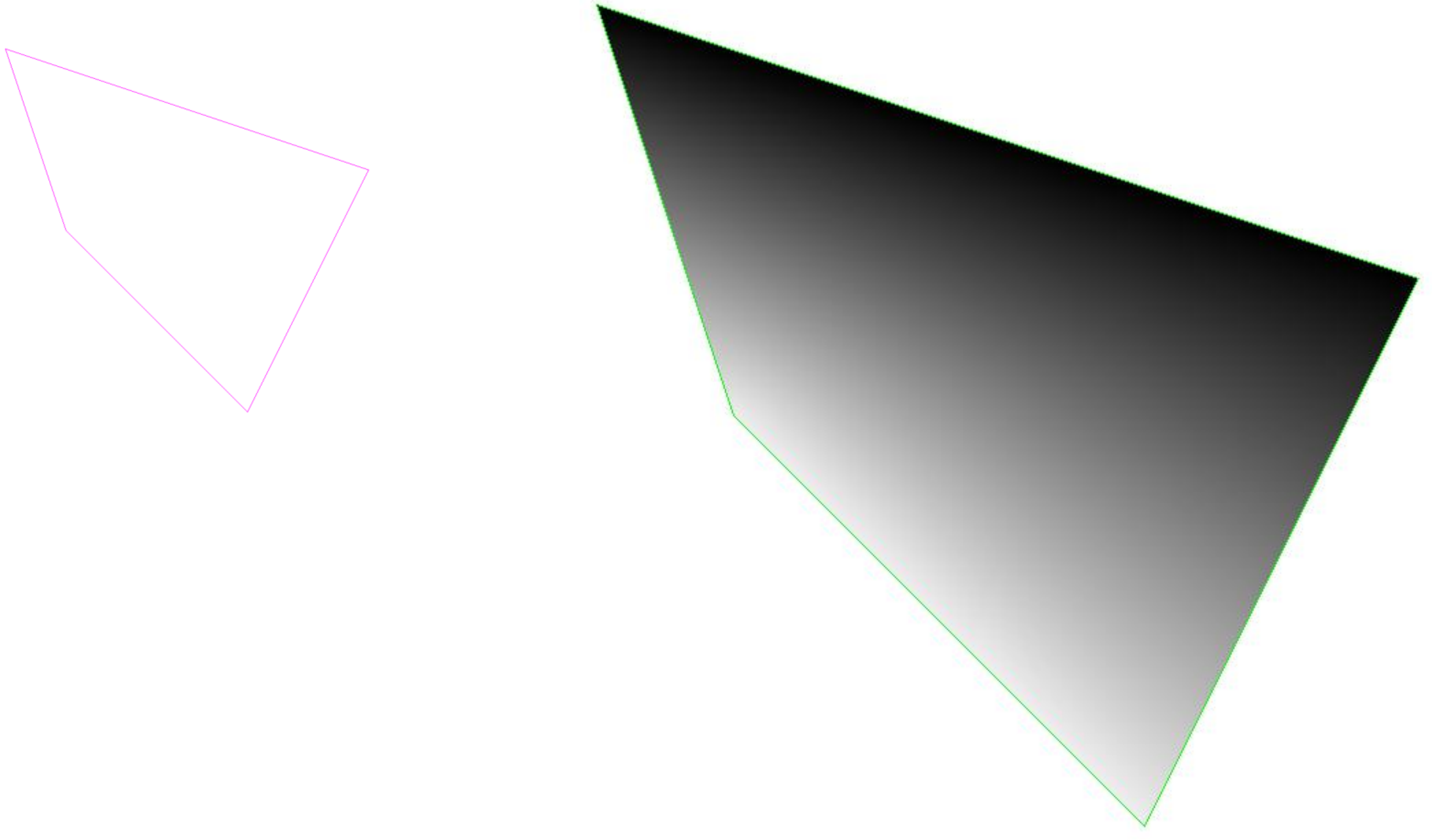
2. Implementierung

3.1. Interpolation (1)

Wie auch bei den baryzentrischen Koordinaten im Dreieck kann für ein n-Polygon mit gegebenen Funktionswerten in den Eckpunkten für einen Punkt P(x,y) innerhalb des Polygons ein interpolierter Wert wie folgt berechnet werden:

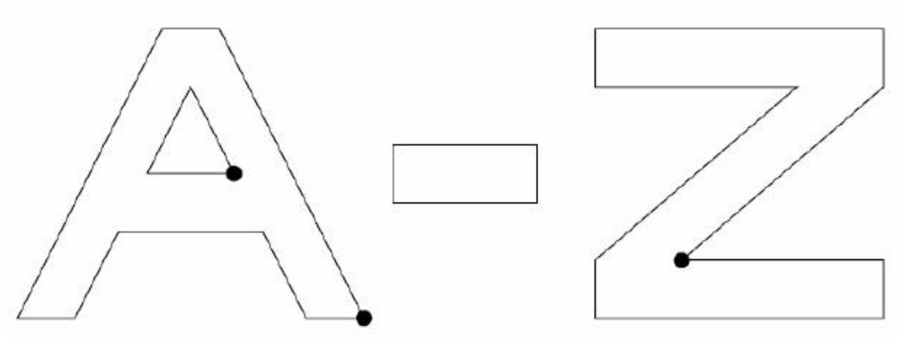
$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(P) \cdot f_i$$

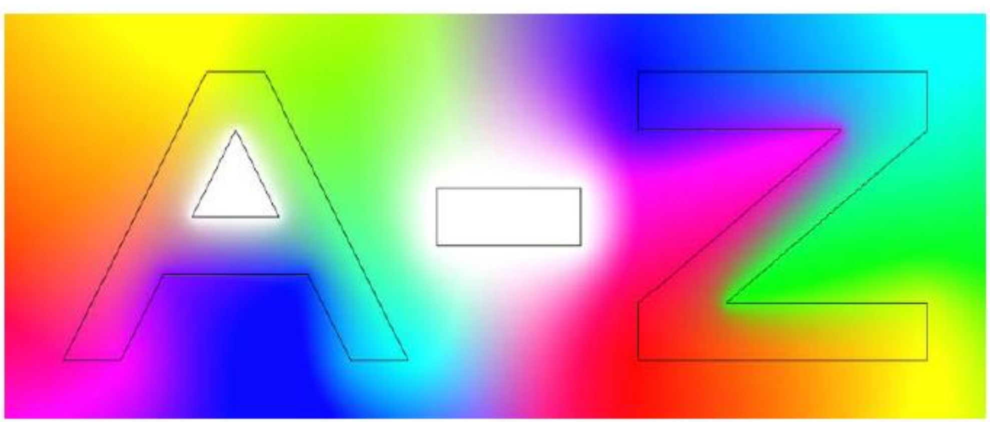
3.1. Interpolation (2)

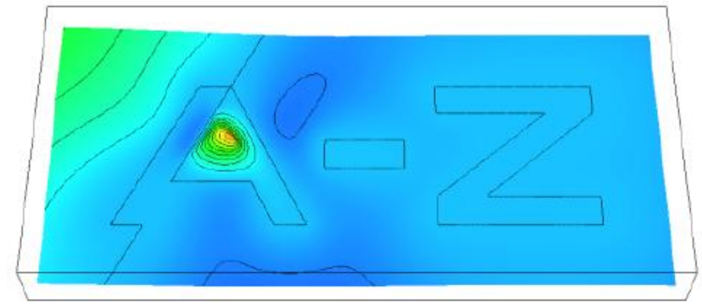


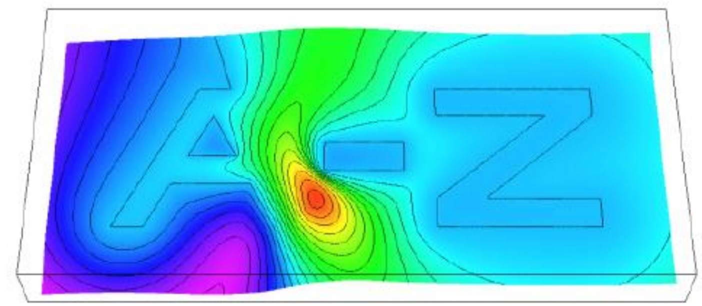
3.1. Interpolation (3)

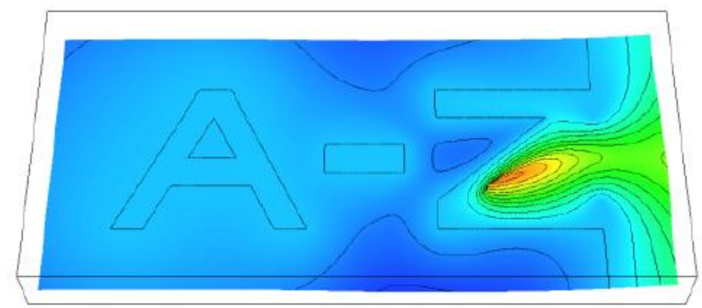
Color Interpolation



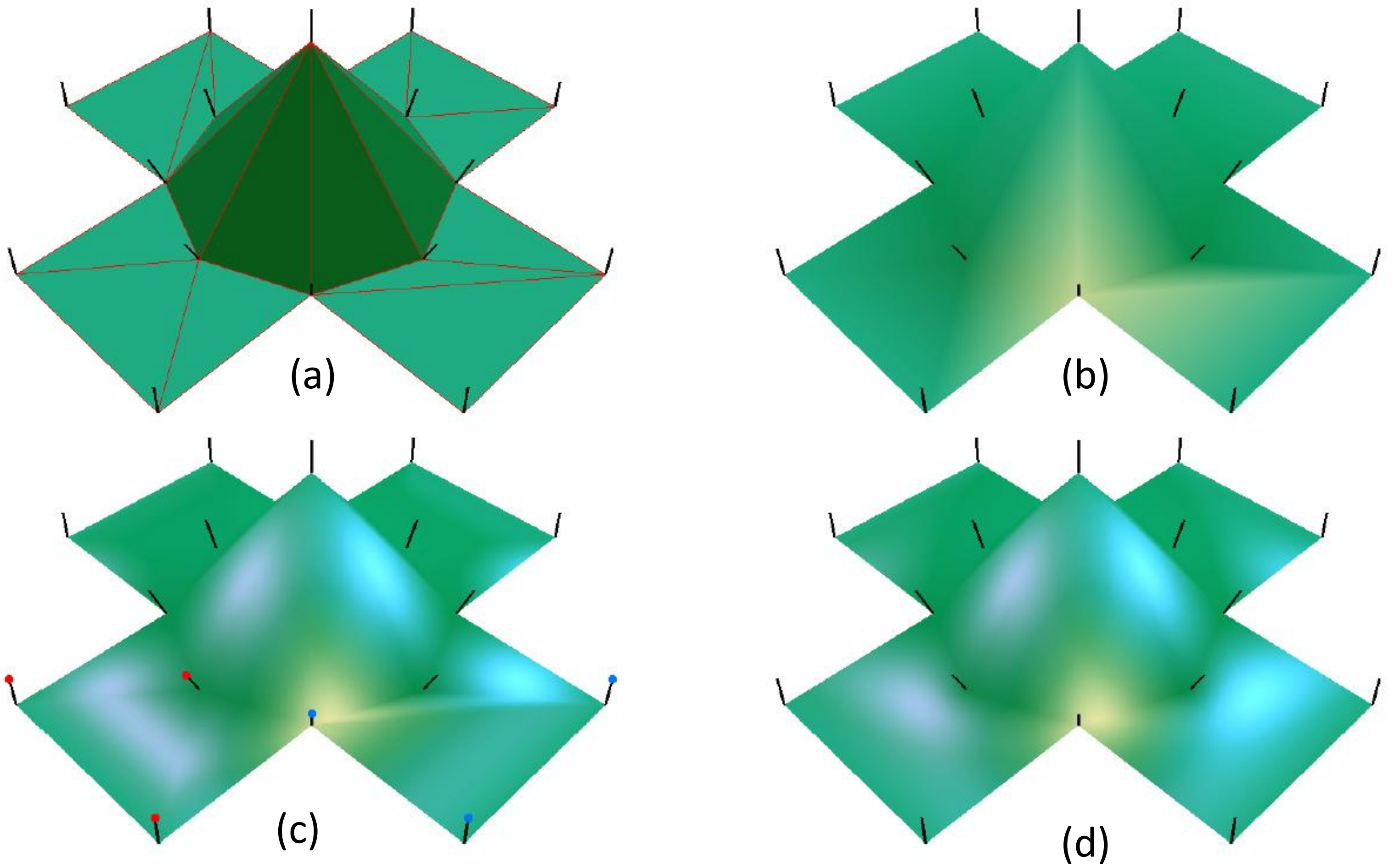








3.1. Interpolation (4)



a. flat shading b. Gouraud shading c. Phong shading d.generalized Phong Shading

3. Anwendung

1. Interpolation
2. **Implementierung**

Implementierung (1)

JAVA Implementierung folgenden Pseudo-Codes für MVC

function $F(v)$
  for $j = 1$ to m **do**
    for $i = 1$ to n_j **do**
      $s_{j,i} := v_{j,i} - v$
  for $j = 1$ to m **do**
    for $i = 1$ to n_j **do**
      $i^+ := (i \bmod n_j) + 1$
      $r_{j,i} := \|s_{j,i}\|$
      $A_{j,i} := \det(s_{j,i}, s_{j,i^+})/2$
      $D_{j,i} := \langle s_{j,i}, s_{j,i^+} \rangle$
      if $r_{j,i} = 0$ **then** $// \; v = v_{j,i}$
        return $f_{j,i}$
      if $A_{j,i} = 0$ and $D_{j,i} < 0$ **then** $// \; v \in e_{j,i}$
        $r_{j,i^+} := \|s_{j,i^+}\|$
      return $(r_{i^+} f_i + r_i f_{i^+})/(r_i + r_{i^+})$
  $f := 0$
  $W := 0$
  for $j = 1$ to m **do**
    for $i = 1$ to n_j **do**
      $i^+ := (i \bmod n_j) + 1$
      $i^- := ((i-2) \bmod n_j) + 1$
      $w := 0$
      if $A_{j,i^-} \neq 0$ **then**
        $w := w + (r_{j,i^-} - D_{j,i^-}/r_{j,i})/A_{j,i^-}$
      if $A_{j,i} \neq 0$ **then**
        $w := w + (r_{j,i^+} - D_{j,i}/r_{j,i})/A_{j,i}$
      $f := f + w f_{j,i}$
      $W := W + w$
  return f/W

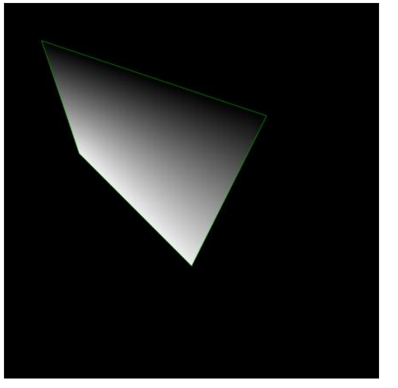
nach Hormann & Floater [1]

Implementierung (2)

- Berechnung der Interpolationsfunktion für ein n-Polygon
- Funktionswerte zwischen 0 und 255 werden als Graustufen interpretiert
- Werte außerhalb des Wertebereichs werden abgeschnitten

Berechnungsoptimierungen:

$$s_i(v) := v_i - v \qquad D_i(v) = \langle s_i, s_{i+1} \rangle$$



Und damit:

$$\tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha_i)}{\sin(\alpha_i)} = \frac{r_i r_{i+1} - D_i}{2A_i}$$

Außerdem werden die Sonderfälle v liegt auf einem Knoten oder einer Kante effizient behandelt

Literatur

[1] K.Hormann and M.S. Floater. Mean value coordinates for arbitrary planar polygons. ACM Transactions on Graphics, 25(4):1424-1441, October 2006

[2] M.S. Floater and K.Hormann. A General Construction of Barycentric Coordinates over Convex Polygons

[3] Universität Clausthal: Einführung in die Computergraphik 1+2

[4] K.Hormann. Lecture 1: Generalized Barycentric Coordinates. Minisymposium on Barycentric Coordinates and Transfinte Interpolation.

[5] Algorithmen Kontinuierlicher Systeme, SS 2009, FAU Erlangen-Nürnberg

„The Barycentric Coordinates Homepage“ http://www.inf.usi.ch/hormann/barycentric/
umfangreichste Sammlung an Texten zu baryzentrischen Koordinaten im Web

„Cut The Knot“ http://www.cut-the-knot.org
ausführliche Einführung, Beweis zu Theorem von Ceva, Lösung des 3-Gläser-Problems mit baryzentrischen Koordinaten ;)

Vielen Dank
für die
Aufmerksamkeit!!