

# Barycentric Coordinates and Transfinite Interpolation

- 9:30 *Kai Hormann*  
Generalized Barycentric Coordinates
- 9:55 *Scott Schaefer*  
Barycentric Coordinates for Closed Curves
- 10:20 *Michael Floater*  
Hermite Mean Value Interpolation
- 10:45 *Tao Ju*  
A General, Geometric Construction of Coordinates in any Dimensions
- 11:10 *Solveig Bruvoll*  
Transfinite Mean Value Interpolation over Volumetric Domains
- 11:35 *N. Sukumar*  
Barycentric Finite Element Methods

# Generalized Barycentric Coordinates

Kai Hormann

Clausthal University of Technology

San Antonio, November 8, 2007

- ▶ Introduction
  - ▶ History
  - ▶ Related Work
- ▶ Barycentric Coordinates for Planar Polygons
  - ▶ Convex Polygons
  - ▶ Star-Shaped Polygons
  - ▶ Arbitrary Polygons
- ▶ Conclusion
  - ▶ Applications
  - ▶ Future Work

Der  
barycentrische Calcul

ein neues Hülfsmittel

zur

analytischen Behandlung der Geometrie

dargestellt

und insbesondere

auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und  
die Entwicklung mehrerer Eigenschaften  
der Kegelschnitte

angewendet

von

August Ferdinand Möbius  
Professor der Astronomie zu Leipzig.

---

*Mit vier Kupfertafeln.*

---

Leipzig,  
Verlag von Johann Ambrosius Barth.

1827.

Sr. Excellenz

dem

wirklichen Herrn Geheimen Rathe und Minister

Freyherrn von Lindenau

Vice - Landschafts - Director zu Altenburg, des Grossherzoglich  
Weimarischen Falkenordens Grosskreuz, des Königl. Sächs. Civil-  
Verdienst - Ordens Comthur, des Kaiserl. Russischen Wladimir-  
und des Königl. Preuss. Johanniter - Ordens Ritter

widmet diese Schrift

als Zeichen

seiner tiefsten und dankbarsten Verehrung

with deepest and sincere reverence

der Verfasser.

## Zweites Capitel. Der barycentrische Calcul.

§. 13. Bei Rechnungen, wie wir so eben (§. 11 und 12.) führten, bietet sich gleichsam von selbst eine kleine Abkürzung an. Nämlich die Glieder aller dieser

Gleichungen, die von den Endpunkten  $A, B, C, D, \dots$  kommen, sind, nichts anderes, als die Coefficienten  $a, b, c, d, \dots$  müssen diese Coefficienten mit den

$+b.BB' - c.CC' = (a+b-c)SS'$ , so schreibe man statt dessen:  $aA + bB - cC = (a+b-c)S$ .

Und wirklich könnte man auch nicht einfacher den blossen Satz, dass  $S$  der Schwerpunkt von  $A, B, C$  mit den Gewichten  $a, b, -c$  sey, und dass man sich in  $S$  diese Gewichte vereinigt zu denken habe, durch die Zeichen der Algebra darstellen. Allein unsere Formel ist mehr, als ein bloß abgekürzter Ausdruck dieses Satzes, in welchem Falle sie nur die Gestalt einer algebraischen Gleichung hätte, noch nicht aber algebraische Operationen mit sich vornehmen liesse. In-

dem man  $A, B, C, \dots$  nicht mehr als die blossen Punkte, sondern als die ihnen entsprechenden Abschnitte nimmt, — woran man aber im Verlauf der Rechnung nicht weiter zu denken braucht, — stellt jene Formel zugleich eine Haupteigenschaft des Schwerpunkts in der Sprache der Algebra dar, und wird dadurch eben der Behandlung, wie jede andere algebraische Gleichung, fähig.

§. 14. Die Rechnung mit solchen abgekürzten Formeln ist es nun, welche ich den barycentrischen, d. i. den aus dem Begriffe des Schwerpunkts abgeleiteten, Calcul genannt habe, einen Calcul, der es nicht

2) Dass von den Punkten  $A, B, C, D, \dots$  denen resp. die Coefficienten  $a, b, c, d, \dots$  zukommen,  $S$  der Schwerpunkt ist, wird ausgedrückt durch:

$$I. \quad aA + bB + cC + dD + \dots = (a + b + c + d + \dots) S,$$

ihren Zeichen vorgesetzt. So heisst z. B.  $aA$ , oder  $+aA$  im Zusammenhange, der Punkt  $A$  mit dem Coefficienten  $a$ ;  $-bB$ , der Punkt  $B$  mit dem Coefficienten  $-b$ . Ist der Coefficient die Einheit, so wird nur das Zeichen derselben dem Punkte vorgesetzt, als  $A$  oder  $+A$ ,  $-B$ , d. i.  $A$  mit dem Coefficienten  $1$ ,  $B$  mit dem Coefficienten  $-1$ .

2) Dass von den Punkten  $A, B, C, D, \dots$  denen resp. die Coefficienten  $a, b, c, d, \dots$  zukommen,  $S$  der Schwerpunkt ist, wird ausgedrückt durch:

$$I. \quad aA + bB + cC + dD + \dots = (a + b + c + d + \dots) S,$$

B

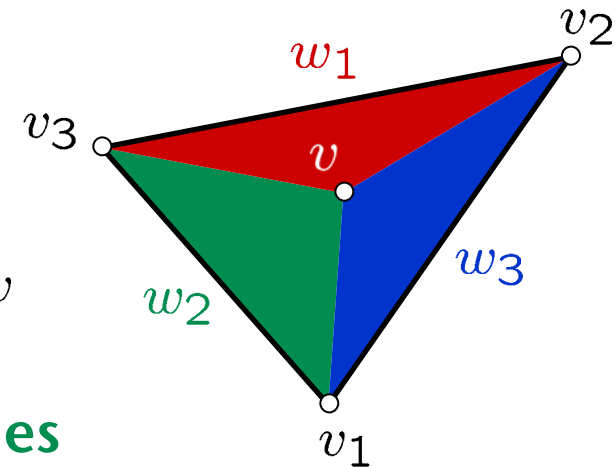
# Barycentric coordinates

August Ferdinand Möbius [1827]

- $v$  is the **barycentre** of the points  $v_1, \dots, v_n$  with **weights**  $w_1, \dots, w_n$  if and only if

$$v = \frac{w_1 v_1 + \dots + w_n v_n}{w_1 + \dots + w_n}$$

- $w_i$  are the **barycentric coordinates** of  $v$
- **unique** up to common factor for **triangles**



$$v = \frac{w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 v_3}{w_1 + w_2 + w_3} \iff w_i = \eta A(v, v_{i+1}, v_{i+2})$$

zweier anderer in derselben liegenden Punkte  $A$  und  $B$   
betrachten deren Coefficienten in dem Ausdruck  
gegenseitig  
 $BC : CA$

Alle  
raden al  
Punkten  
finden al  
mehr be  
 $A$  und  $B$   
gen,  $\equiv$   
 $\equiv aA +$   
genommen  
sind in  
derholen.

c. Aus  $aA + bB + cC \equiv D$  folgt  $aA + bB = (a+b)C$   
 $= 0$ , und wenn wir  $-(a+b)C$  setzen,  $aA + bB + cC$   
 $= 0$ ,  $bB + cC \equiv A$ , und hieraus eben so wie vorhin,  $b : c$   
 $= CA : AB$ . Unser Satz lässt sich daher noch symme-  
trischer so ausdrücken:

Ist  $aA + bB + cC = 0$ , so liegen  $A, B, C$  in gerader  
Linie, und es verhalten sich  $a : b : c = BC : CA : AB$ .  
Auch gilt dieser Satz umgekehrt.

§. 23. Lehrsatz. Wenn  $aA + bB + cC \equiv D$ , und  
 $A, B, C$  nicht in einer Geraden enthalten sind, so liegt  
 $D$  mit  $A, B, C$  in einer Ebene (§. 4. und 5.), und es  
verhalten sich:

$$a : b : c = \text{die Dreiecke } DBC : DCA : DAB.$$

Beweis. Von den drei Summen, welche sich, je  
zwei der drei Coefficienten  $a, b, c$  zusammengekommen,  
bilden lassen, ist immer wenigstens eine nicht  $= 0$ .  
Sey  $a + b$  diese Summe, und man setze I.  $aA + bB$   
 $= (a+b)Z$ , so wird II.  $D \equiv (a+b)Z + cC$ .

Wegen II. liegen nun (§. 21.)  $C, D, Z$  in gerader

$ADZ$

a.)

$AB$ ,

b.)

§. 23. Lehrsatz. Wenn  $aA + bB + cC \equiv D$ , und  
 $A, B, C$  nicht in einer Geraden enthalten sind, so liegt  
 $D$  mit  $A, B, C$  in einer Ebene (§. 4. und 5.), und es  
verhalten sich:

$$a : b : c = \text{die Dreiecke } DBC : DCA : DAB.$$

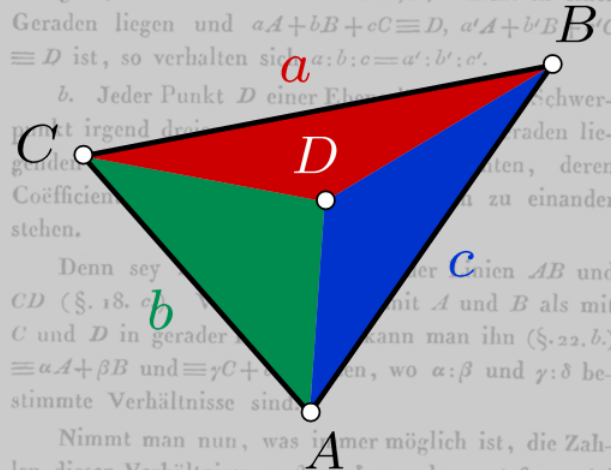
und hieraus in Verbindung mit 4) die Proportion des  
Lehrsatzes.

§. 24. Zusätze. a. Wenn  $A, B, C$  nicht in einer  
Geraden liegen und  $aA + bB + cC \equiv D$ ,  $a'A + b'B + c'C$   
 $\equiv D$  ist, so verhalten sich  $a : b : c = a' : b' : c'$ .

b. Jeder Punkt  $D$  einer Ebene ist Schwerpunkt  
irgend dreier Geraden, die durch  $A, B, C$  gehen, deren  
Coefficienten  $a, b, c$  zu einander  
stehen.

Denn sey  $CD$  die Gerade durch  $C$  und  $D$ ,  $AD$  die Gerade durch  $A$  und  $D$ ,  $BD$  die Gerade durch  $B$  und  $D$ .  
§. 18. c.  $aA + bB + cC \equiv D$  kann man ihn (§. 22. b.)  
 $\equiv aA + \beta B$  und  $\equiv \gamma C + \delta D$  setzen, wo  $\alpha : \beta$  und  $\gamma : \delta$  be-  
stimmte Verhältnisse sind.

Nimmt man nun, was immer möglich ist, die Zah-  
len dieser Verhältnisse  $\alpha : \beta, \gamma : \delta$  so, dass  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$



# Barycentric coordinates for triangles

Normalized barycentric coordinates

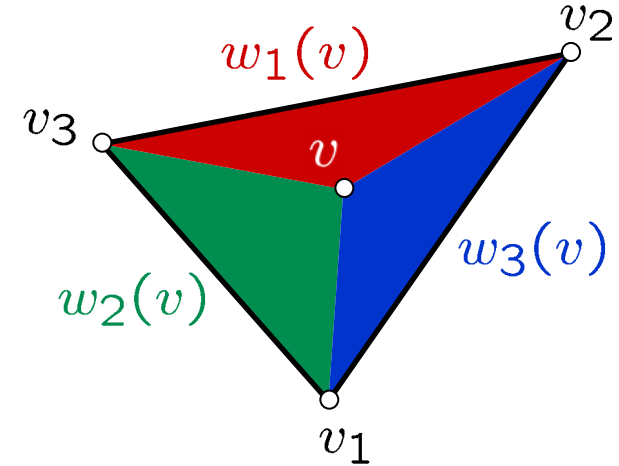
$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{w_1(v) + w_2(v) + w_3(v)}$$

Properties

- ▶ linearity  $\lambda_i \in \pi_1$
- ▶ positivity  $\lambda_i(v) > 0$
- ▶ Lagrange property  $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$

Application

- ▶ linear interpolation of data  $F(v) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(v) f_i$

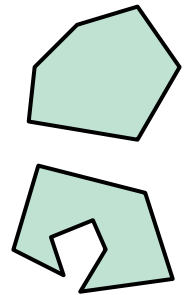




# Generalization of barycentric coordinates

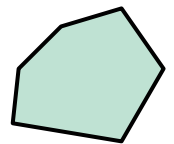
Finite-element-method with polygonal elements

- ▶ convex [Wachspress 1975]
- ▶ weakly convex [Malsch & Dasgupta 2004]
- ▶ arbitrary [Sukumar & Malsch 2006]



Interpolation of scattered data

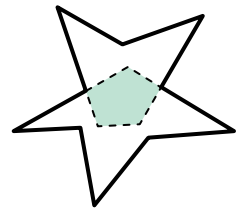
- ▶ *natural neighbour interpolants* [Sibson 1980]
- ▶ — " — of higher order [Hiyoshi & Sugihara 2000]
- ▶ Dirichlet tessellations [Farin 1990]



# Generalization of barycentric coordinates

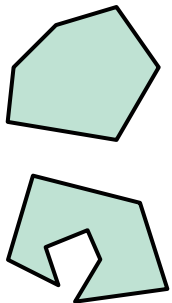
## Parameterization of piecewise linear surfaces

- ▶ *shape preserving* coordinates [Floater 1997]
- ▶ *discrete harmonic* (DH) coordinates [Eck *et al.* 1995]
- ▶ *mean value* (MV) coordinates [Floater 2003]



## Other applications

- ▶ discrete minimal surfaces [Pinkall & Polthier 1993]
- ▶ computer graphics [Meyer *et al.* 2002]
- ▶ mesh deformation [Ju *et al.* 2005]



- ▶ Introduction
  - ▶ History
  - ▶ Related Work
- ▶ Barycentric Coordinates for Planar Polygons
  - ▶ Convex Polygons
  - ▶ Star-Shaped Polygons
  - ▶ Arbitrary Polygons
- ▶ Conclusion
  - ▶ Applications
  - ▶ Future Work

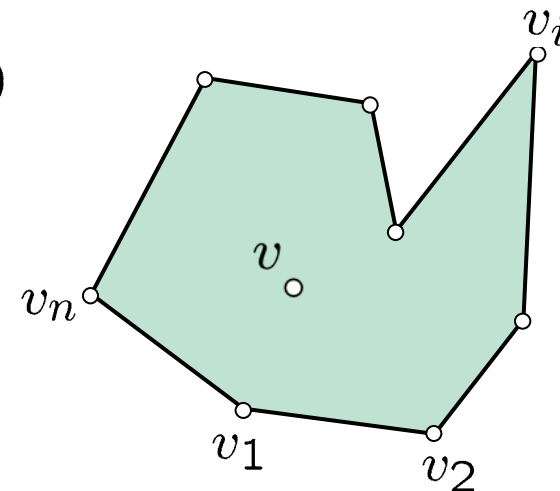
# Arbitrary polygons

Homogeneous coordinates  $w_1(v), \dots, w_n(v)$

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(v) v_i}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}$$

Normalized coordinates

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}$$



Properties

$$\left. \begin{array}{l} \text{partition of unity} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = 1 \\ \text{reproduction} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) v_i = v \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \phi(v_i) = \phi(v)$$

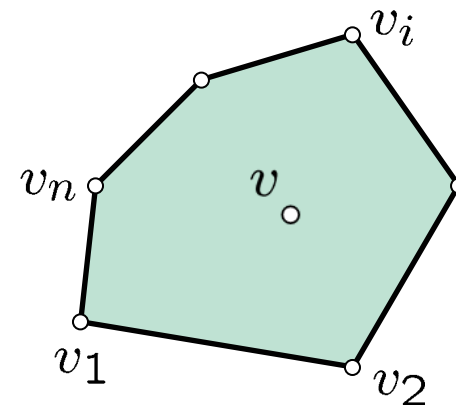
linear precision

for all  $\phi \in \pi_1$

# Convex polygons

**Theorem [FHK'06]:** If all  $w_i(v) > 0$ , then

- ▶ positivity  $\lambda_i(v) > 0$
- ▶ Lagrange property  $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$
- ▶ linear along boundary  $\lambda_i|_{[v_i, v_{i+1}]} \in \pi_1$



## Application

- ▶ interpolation of data given at the vertices
- ▶  $F(v)$  inside the convex hull of the  $f_i$
- ▶ direct and efficient evaluation

$$F(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) f_i$$

## Normal form of homogeneous coordinates

**Theorem [FHK'06]:** All homogeneous coordinates can be written as

$$w_i = \frac{c_{i+1}A_{i-1} - c_i B_i + c_{i-1}A_i}{A_{i-1}A_i}$$

with certain real functions  $c_i$ .

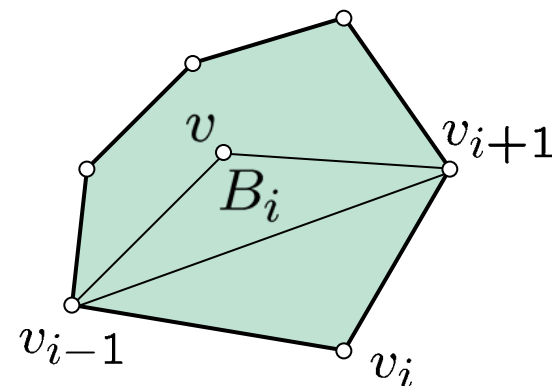
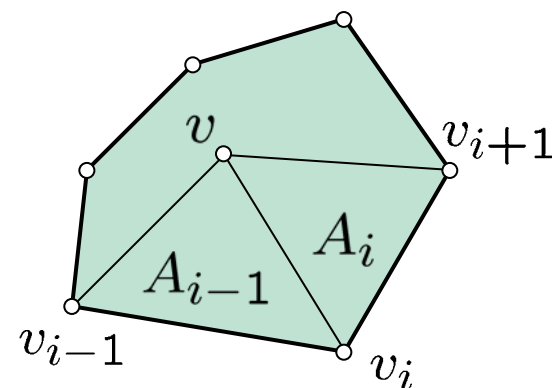
### Three-point coordinates

- $c_i = f(r_i)$  with  $r_i = \|v - v_i\|$

**Theorem [H'07]:** Such a generating function

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

exists for all three-point coordinates.



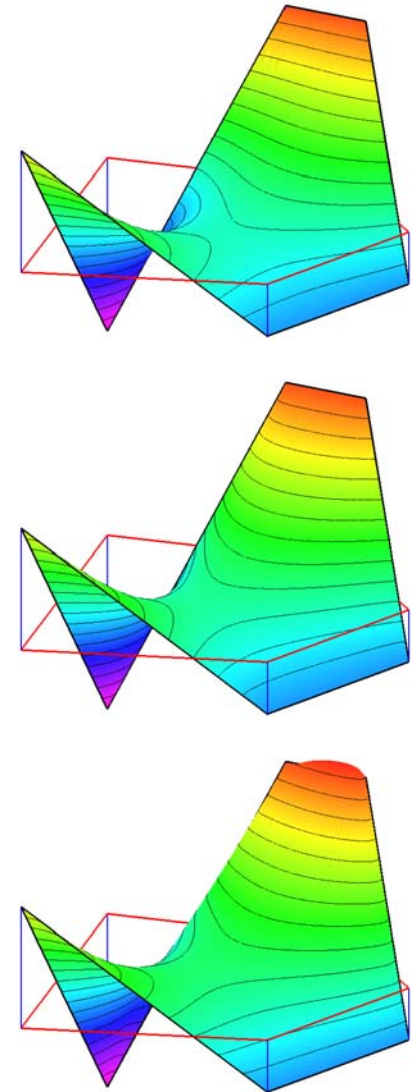
## Three-point coordinates

**Theorem [FHK'06]:**  $w_i(v) > 0$  if and only if  $f$  is

- ▶ positive  $f(r) > 0$
- ▶ monotonic  $f'(r) \geq 0$
- ▶ convex  $f''(r) \geq 0$
- ▶ sub-linear  $f'(r) \leq f(r)/r$

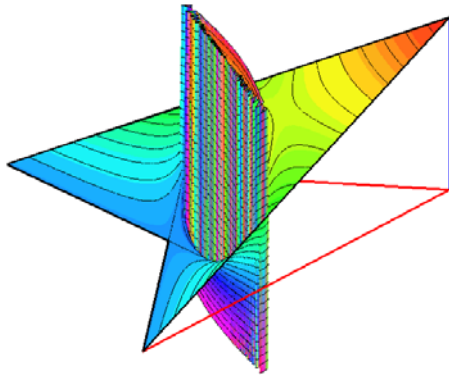
### Examples

- ▶ WP coordinates  $f(r) = 1$
- ▶ MV coordinates  $f(r) = r$
- ▶ DH coordinates  $f(r) = r^2$



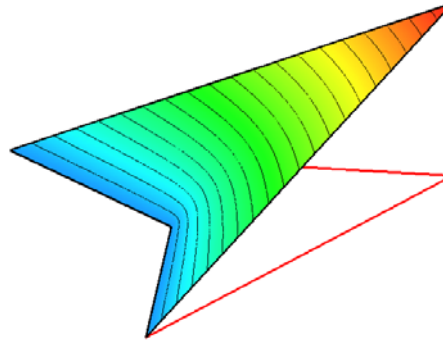
## Non-convex polygons

Wachspress



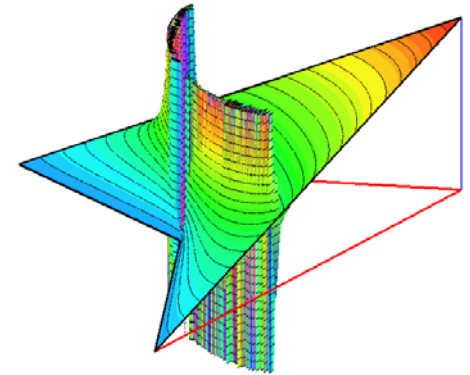
$$f(r) = 1$$

mean value



$$f(r) = r$$

discrete harmonic



$$f(r) = r^2$$

Poles, if  $W(v) = \sum_{j=1}^n w_j(v) = 0$ , because  $\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{W(v)}$



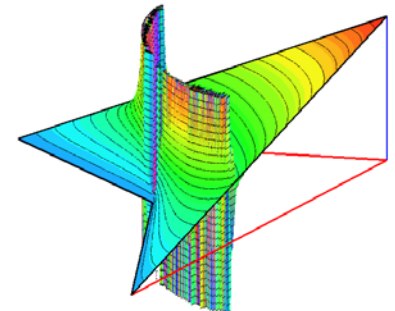
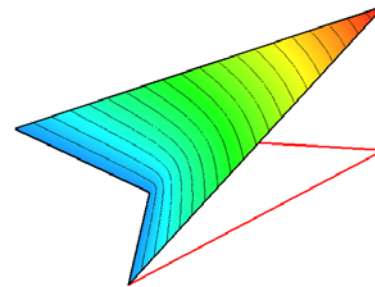
## Star-shaped polygons

**Theorem [H'07]:**  $W(v) \neq 0$  if and only if  $f$  is

- ▶ positive  $f(r) > 0$
- ▶ super-linear  $f'(r) \geq f(r)/r$

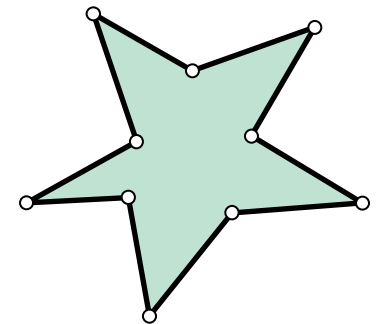
### Examples

- ▶ MV coordinates  $f(r) = r$
- ▶ DH coordinates  $f(r) = r^2$



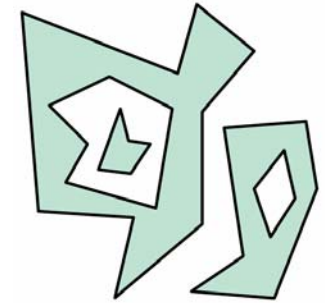
**Theorem [H'07]:**  $W(v) = 0$  for some  $v$  if  $f$  is

- ▶ strictly super-linear  $f'(r) > f(r)/r$



# Mean value coordinates

## Properties



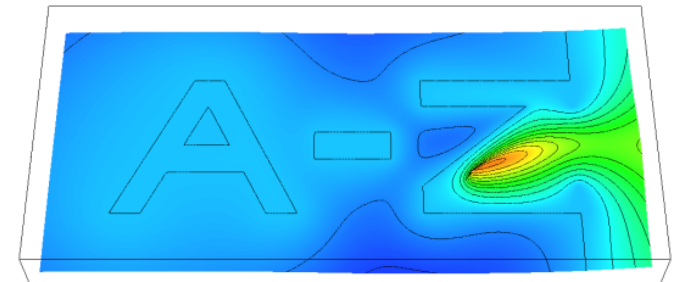
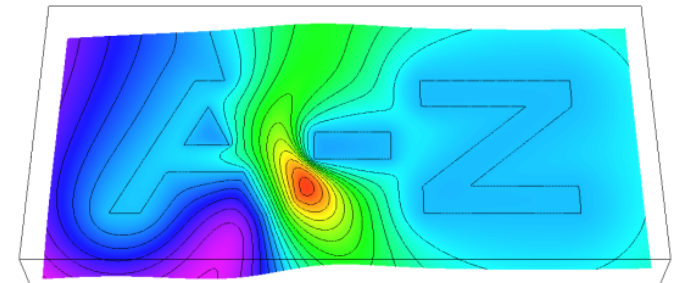
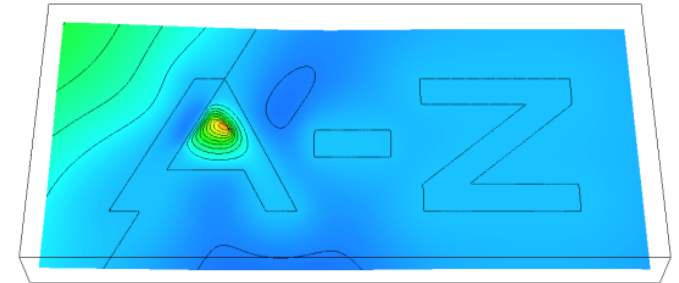
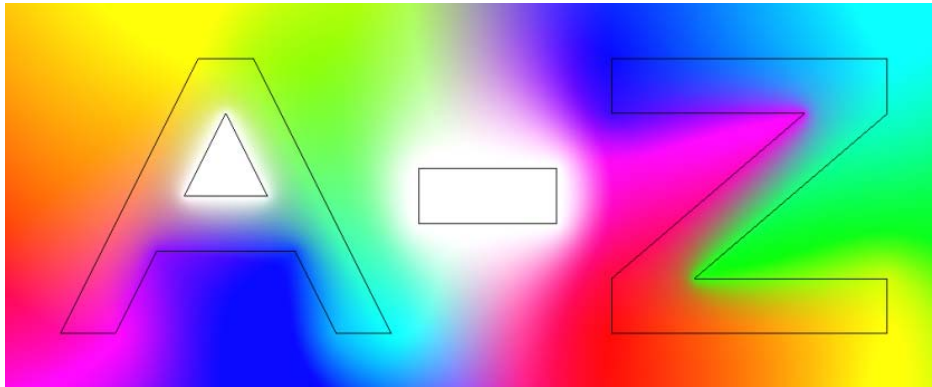
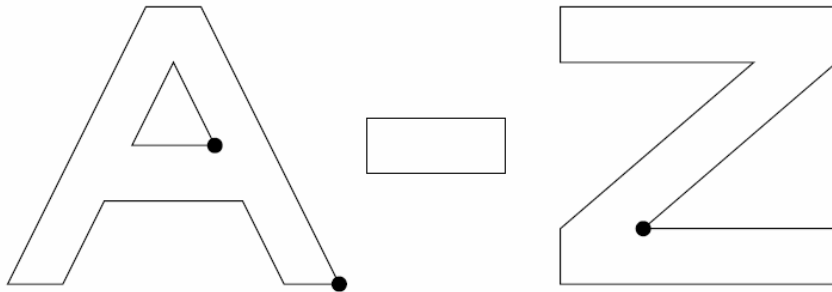
- ▶ well-defined everywhere in  $\mathbb{R}^2$
- ▶ Lagrange property  $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$
- ▶ linear along boundary  $\lambda_i|_{[v_i, v_{i+1}]} \in \pi_1$
- ▶ linear precision  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \phi(v_i) = \phi(v)$  for  $\phi \in \pi_1$
- ▶ smoothness  $C^0$  at  $v_i$ , otherwise  $C^\infty$
- ▶ similarity invariance  $\lambda_i = \hat{\lambda}_i \circ \psi$  for  $\hat{\Omega} = \psi(\Omega)$

## Application

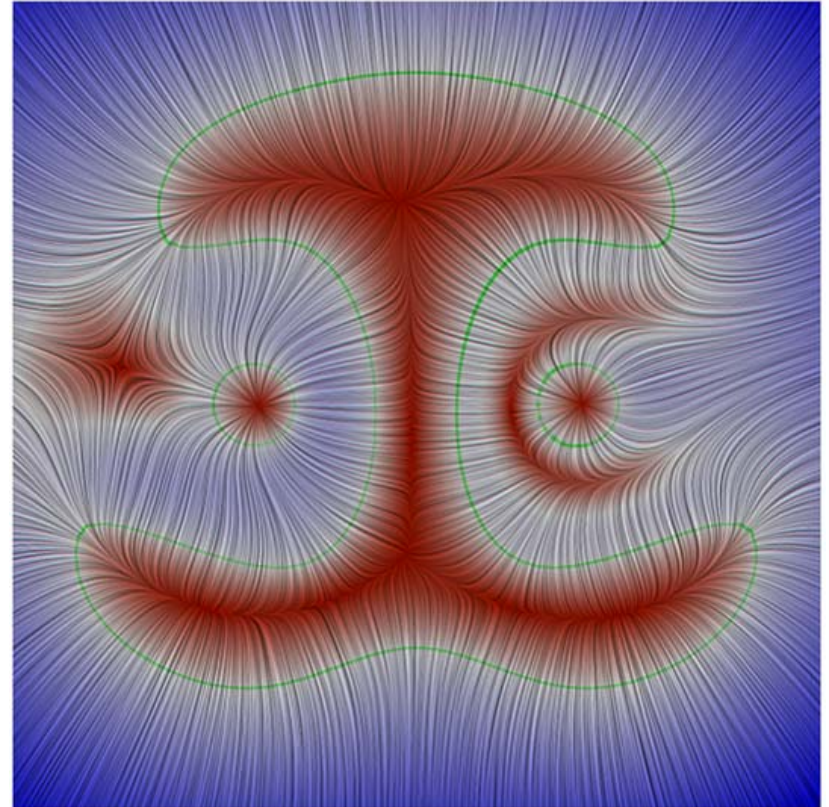
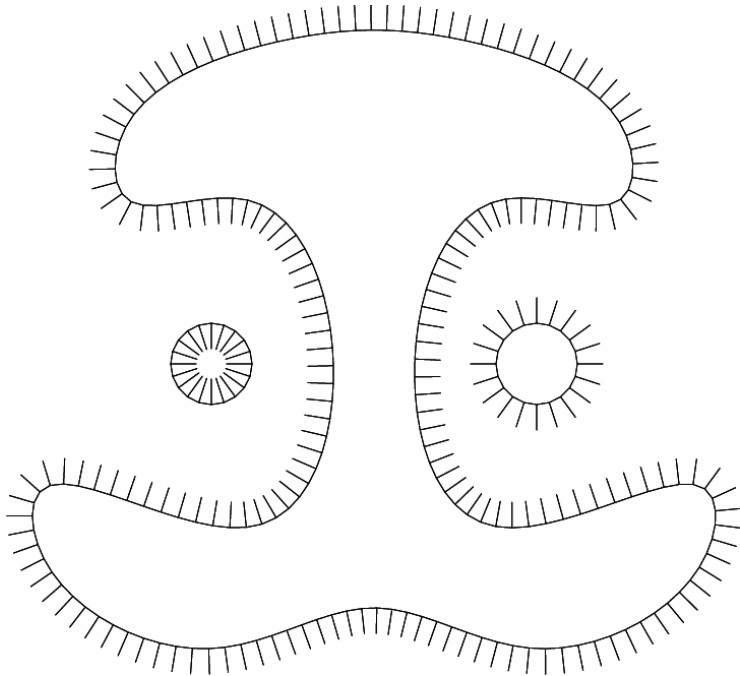
- ▶ **direct** interpolation of data 
$$F(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) f_i$$

- ▶ Introduction
  - ▶ History
  - ▶ Related Work
- ▶ Barycentric Coordinates for Planar Polygons
  - ▶ Convex Polygons
  - ▶ Star-Shaped Polygons
  - ▶ Arbitrary Polygons
- ▶ Conclusion
  - ▶ Applications
  - ▶ Future Work

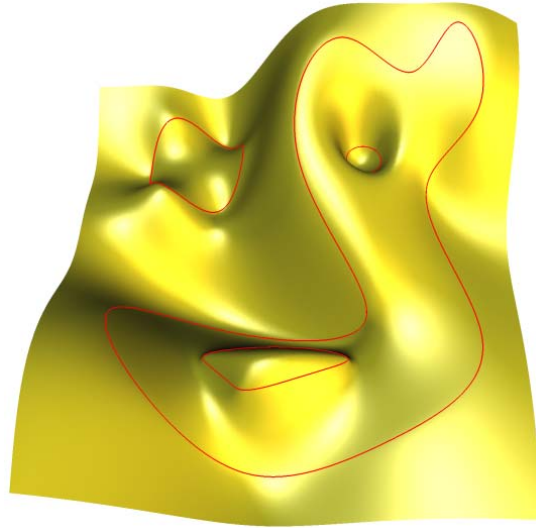
# Colour interpolation



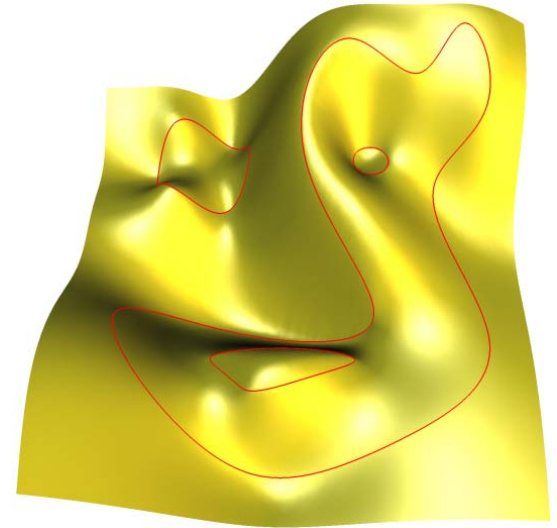
## Vector fields



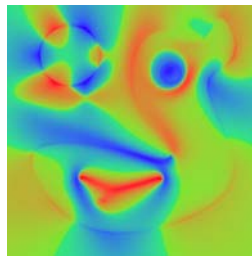
# Transfinite interpolation



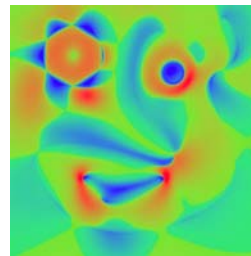
mean value coordinates



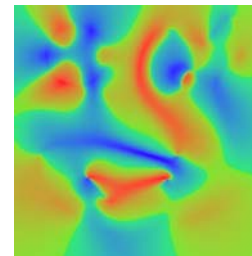
radial basis functions



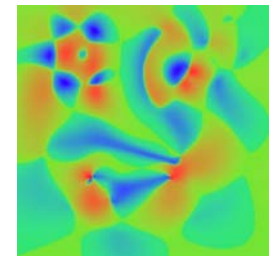
$H$



$K$



$H$



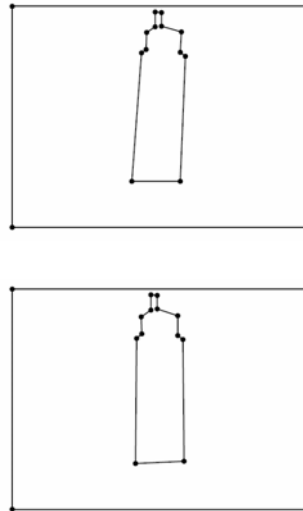
$K$



# Image warping



original image

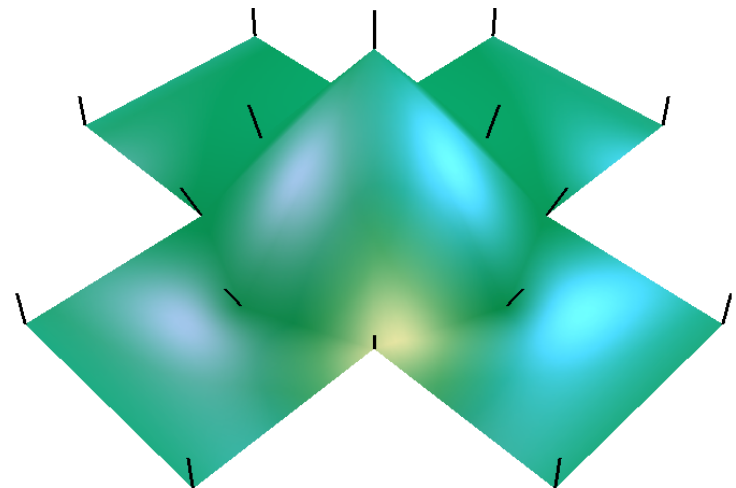
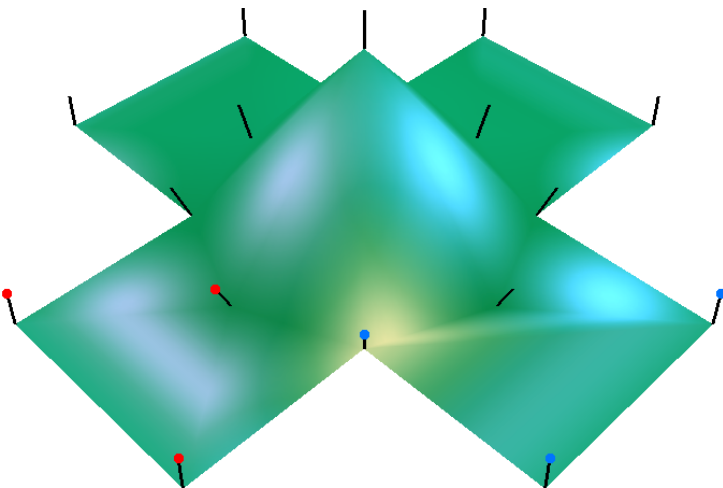
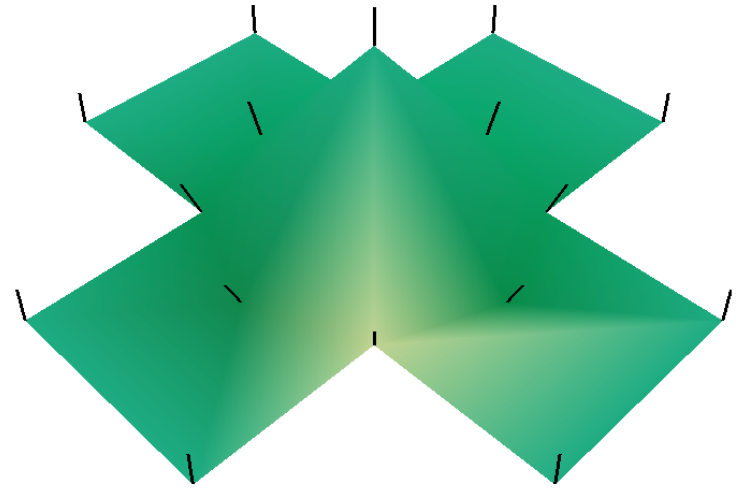
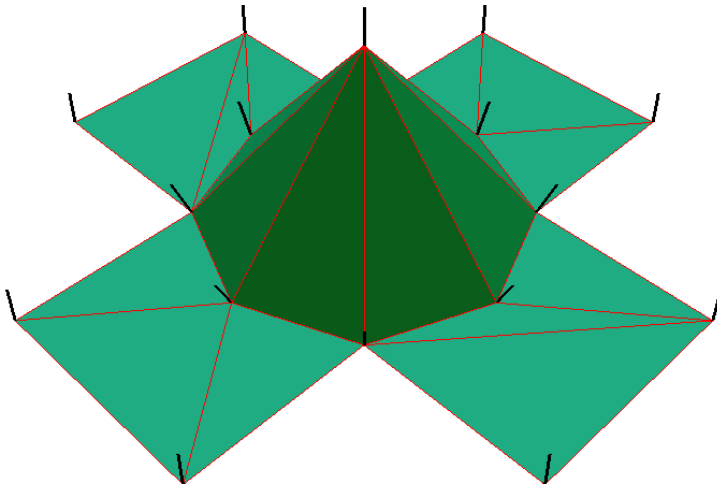


mask



warped image

# Smooth shading





# Implementation

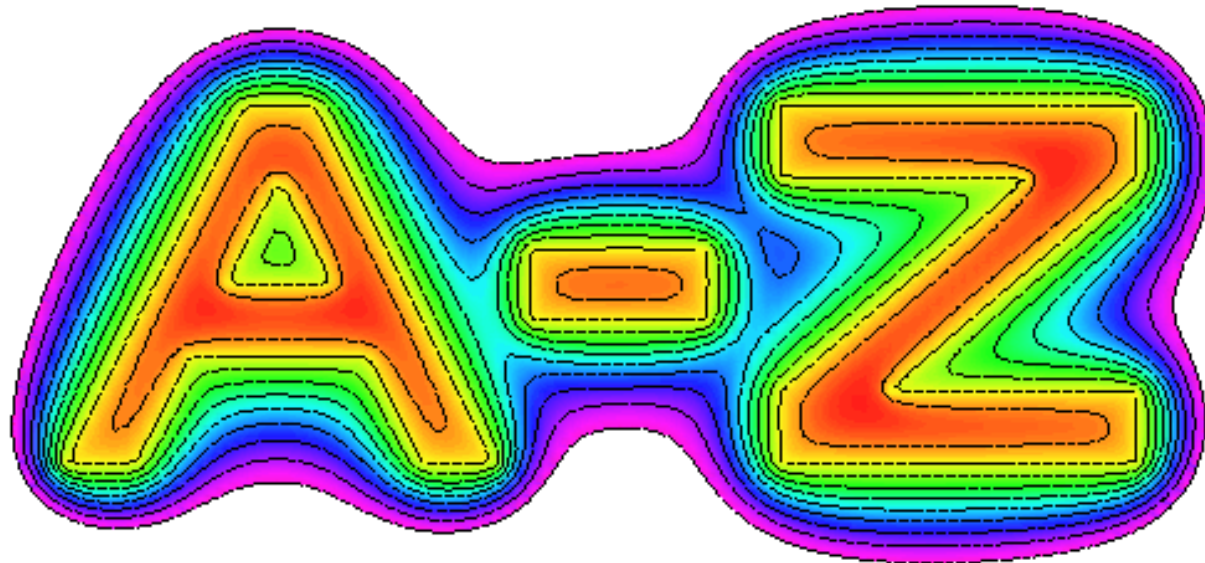
```
00 function  $F(v)$ 
01 for  $i = 1$  to  $n$  do
02    $s_i := v_i - v$ 
03 for  $i = 1$  to  $n$  do
04    $r_i := \|s_i\|$ 
05    $A_i := \det(s_i, s_{i+1})/2$ 
06    $D_i := \langle s_i, s_{i+1} \rangle$ 
07   if  $r_i = 0$  then                                // v = v_i
08     return  $f_i$ 
09   if  $A_i = 0$  and  $D_i < 0$  then // v ∈ e_i
10      $r_{i+1} = \|s_{i+1}\|$ 
11     return  $(r_{i+1}f_i + r_i f_{i+1})/(r_i + r_{i+1})$ 
12    $f := 0$ 
13    $W := 0$ 
14   for  $i = 1$  to  $n$  do
15      $w := 0$ 
16     if  $A_{i-1} \neq 0$  then
17        $w := w + (r_{i-1} - D_{i-1}/r_i)/A_{i-1}$ 
18     if  $A_i \neq 0$  then
19        $w := w + (r_{i+1} - D_i/r_i)/A_i$ 
20      $f := f + w f_i$ 
21      $W := W + w$ 
22 return  $f/W$ 
```

- efficient and robust evaluation of the function  $F(v)$

## Smooth distance function

Function  $D = 1/W$  approximates the distance function

- ▶  $D(v) = 0$  and  $\|\nabla D(v)\| = 1/2$  along the boundary
- ▶ smooth, except at the vertices  $v_i$



# Open questions

## ► Positive coordinates inside arbitrary polygons

### ► positive MV coordinates

[Lipman *et al.* 2007]

#### ► only $C^0$ -continuous

### ► harmonic coordinates

[Joshi *et al.* 2007]

#### ► hard to compute

## ► Relation to boundary value problems

[Belyaev 2006]

## ► Bijectivity of MV mappings

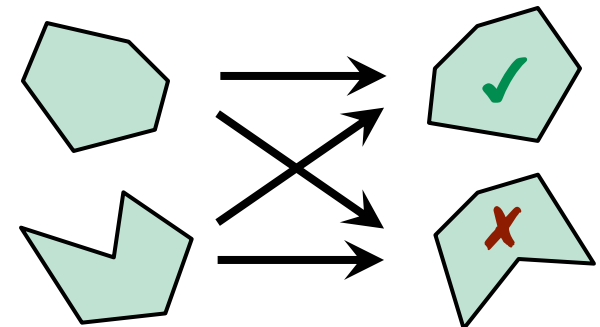
### ► convex $\rightarrow$ convex



### ► non-convex $\rightarrow$ convex



### ► (non-)convex $\rightarrow$ non-convex



# Generalized Barycentric Coordinates

Kai Hormann

Thank you for your attention 😊