

# Indice

<b>Notazione</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Effetto Aharonov-Bohm</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Potenziali elettromagnetici . . . . .	3
1.3 Trasformazioni di gauge . . . . .	4
1.4 Processo di interferenza . . . . .	5
1.5 Topologia dell'effetto Aharonov-Bohm . . . . .	8
1.5.1 Dualità tra campi vettoriali e 1-forme differenziali . . . . .	8
1.5.2 Gruppo di coomologia di De Rham e varietà differenziabili . . . . .	9
1.5.3 Classi di coomologia ed effetto Aharonov-Bohm . . . . .	11
<b>2 Metodo</b>	<b>13</b>
2.1 Formulazione matematica . . . . .	13
2.2 Formulazione numerica . . . . .	14
2.2.1 Definizione del reticolo . . . . .	14
2.2.2 Formule alle differenze finite . . . . .	16
2.2.3 Discretizzazione dell'equazione di Schrödinger . . . . .	16
<b>3 Risultati</b>	<b>19</b>
3.1 Evoluzione libera . . . . .	19
3.2 Fenditura singola . . . . .	20
3.3 Fenditura doppia . . . . .	23
3.4 Effetto Aharonov-Bohm . . . . .	26
<b>4 Conclusioni</b>	<b>31</b>



# Notazione

$m$	– Massa dell'elettrone
$q$	– Carica dell'elettrone
$B$	– Intensità del campo magnetico lungo $\hat{z}$
$\mathbf{B}$	– Vettore campo magnetico
$\Phi$	– Flusso del campo magnetico attraverso la sezione del solenoide
$R$	– Raggio del solenoide
$\mathbf{A}$	– Potenziale vettore
$F$	– Campo scalare che definisce le trasformazioni di gauge
$\alpha$	– 1-forma differenziale duale del potenziale vettore $\mathbf{A}$
$\beta$	– 2-forma differenziale del campo magnetico
$M$	– Generica varietà differenziabile
$H_{DR}^1(M)$	– Primo gruppo di coomologia di De Rham di $M$
$\Pi_1(M, x_0)$	– Gruppo fondamentale di $M$ con punto base $x_0$
$a_x, a_y, a_t$	– Ampiezza delle celle del reticolo spazio-temporale
$n_x, n_y, n_t$	– Indice di posizione nel reticolo spazio-temporale
$L, T$	– Dimensioni spaziali e temporali del reticolo
$\Psi(x, y, t)$	– Funzione d'onda nel dominio fisico
$\psi_{(n_x, n_y)}^{n_t}$	– Funzione d'onda nel dominio discretizzato
$\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y$	– Componenti del potenziale vettore $\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} (\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y)$
$k_x, k_y$	– Numero d'onda del pacchetto d'onda gaussiano lungo $x$ e lungo $y$
$n_{k_x}, n_{k_y}, n_{k_t}$	– Indice di posizione nel reticolo reciproco
$\sigma_x, \sigma_y$	– Larghezza del pacchetto d'onda gaussiano lungo $x$ e lungo $y$
$\gamma_1$	– Coefficiente nello schema alle differenze finite pari a $\frac{\hbar}{m}$
$\gamma_2$	– Coefficiente nello schema alle differenze finite pari a $\frac{\Phi q}{2\pi m}$
$\gamma_3$	– Coefficiente nello schema alle differenze finite pari a $\frac{\Phi^2 q^2}{8\pi^2 m \hbar}$
$l$	– Larghezza della fenditura
$d$	– Distanza tra i centri delle due fenditure
$D$	– Distanza dello schermo dal muro con le fenditure
$\tau$	– Periodo della figura di interferenza
$\Delta y$	– Spostamento delle frange di interferenza sullo schermo
$\Delta \tilde{y}$	– Distanza tra i picchi della figura numerica con $B = 0$ e $B \neq 0$



# Elenco delle figure

1.1.1 Effetto Aharonov-Bohm . . . . .	2
1.3.1 Connessione semplice dei domini e gauge-equivalenza . . . . .	6
1.3.2 Schematizzazione del processo di interferenza tra le funzioni d'onda . . . . .	7
3.1.1 Dispersione di un pacchetto d'onda gaussiano: larghezza vs tempo . . . . .	21
3.1.2 Dispersione di un pacchetto d'onda gaussiano: forma vs tempo . . . . .	21
3.2.1 Diffrazione da fenditura singola e doppia . . . . .	22
3.2.2 Confronto tra fenditure rettangolari e gaussiane . . . . .	23
3.2.3 Fenditura singola: approssimazione di pacchetto gaussiano . . . . .	24
3.3.1 Fenditura doppia: figure numeriche vs figure semi-analitiche . . . . .	25
3.3.2 Fenditura doppia: assenza di effetti di bordo . . . . .	26
3.4.1 Aharonov-Bohm: figura d'interferenza vs geometria del sistema . . . . .	28
3.4.2 Aharonov-Bohm: traslazione frange entro la curva di involuppo . . . . .	29
3.4.3 Aharonov-Bohm: figura d'interferenza vs campo magnetico . . . . .	30

# Elenco delle tabelle

3.2.1 Fenditura singola: larghezza dei pacchetti diffratti . . . . .	23
3.4.1 Aharonov-Bohm: traslazione frange d'interferenza vs geometria . . . . .	28
3.4.2 Aharonov-Bohm: traslazione delle d'interferenza vs campo magnetico . . . . .	28



# Abstract

La tesi presenta uno studio numerico dell'effetto Aharonov-Bohm, un fenomeno quantistico in cui un campo magnetico confinato all'interno di un solenoide è in grado di influenzare il comportamento di un fascio di elettroni che si muovono all'esterno di esso. Nella prima parte della tesi, dopo aver derivato i potenziali elettromagnetici del sistema, si discutono le trasformazioni di gauge e si fornisce una giustificazione elementare dell'effetto Aharonov-Bohm. La non equivalenza (nel senso delle trasformazioni di gauge) tra il potenziale generato dal campo magnetico confinato e quello ovunque nullo è argomentata in modo più rigoroso tramite la topologia algebrica: il dominio esterno al solenoide non è semplicemente connesso ed ammette quindi potenziali vettore corrispondenti a campo magnetico nullo non appartenenti alla stessa classe di coomologia. Nella seconda parte della tesi l'effetto Aharonov-Bohm è studiato numericamente, risolvendo l'equazione di Schrödinger mediante uno schema alle differenze finite. Dopo aver presentato lo schema numerico, si conducono quattro serie di simulazioni con lo scopo di validare il codice e verificare l'effetto Aharonov-Bohm. Il primo esperimento numerico riguarda l'evoluzione libera di un pacchetto d'onda gaussiano ed ha lo scopo di verificare che, come previsto dalla teoria, la dispersione del pacchetto d'onda sia quadratico per tempi brevi e lineare per tempi lunghi. Il secondo e terzo esperimento numerico studiano il comportamento di un pacchetto d'onda gaussiano che impatti su una parete dotata, rispettivamente, di una e due fenditure rettangolari. Specificatamente, il secondo esperimento fornisce un'ulteriore validazione del codice numerico in presenza di un potenziale di parete, e permette di valutare la validità dell'ipotesi che i pacchetti in uscita da una fenditura rettangolare siano approssimabili come gaussiani. Nel terzo esperimento numerico si valuta la figura di interferenza formata da un pacchetto gaussiano diffratto da due fenditure. Si verifica che tale figura di interferenza è in accordo con quella prevista semi-analiticamente utilizzando i risultati dell'esperimento precedente. Nel quarto esperimento numerico si verifica l'effetto Aharonov-Bohm, vale a dire che la figura di interferenza prodotta da un pacchetto gaussiano diffratto da due fenditure cambia fase al variare dell'intensità del campo magnetico del solenoide schermato.





# Capitolo 1

## Effetto Aharonov-Bohm

### 1.1 Introduzione

La meccanica quantistica costituisce una delle teorie più rivoluzionarie e intriganti della fisica moderna, in quanto fondata su principi profondamente diversi rispetto a quelli della fisica classica. Infatti, mentre questa formula leggi deterministiche che permettono di prevedere con certezza il comportamento di un sistema partendo da condizioni iniziali ben definite, la teoria quantistica introduce un paradigma totalmente differente. Il concetto di traiettoria ed evoluzione deterministica vengono meno, in quanto il comportamento dei sistemi è descritto da una funzione d'onda, cioè un campo scalare complesso che permette di calcolare solo la probabilità di trovare una particella in una specifica posizione o più in generale in uno specifico stato. Questa natura probabilistica rappresenta un punto di rottura fondamentale rispetto alla fisica classica.

Un esperimento emblematico i cui risultati sono interpretabili solo attraverso la meccanica quantistica è la diffrazione elettronica da doppia fenditura. In questo esperimento gli elettroni provenienti da una sorgente attraversano due fenditure in una parete poste in prossimità l'una dell'altra. Classicamente, ci si aspetterebbe che gli elettroni creino sullo schermo di rivelazione una figura che riproduca la forma delle fenditure stesse. Tuttavia l'esito di tale esperimento si rivela notevolmente diverso. Invece di ottenere due bande luminose si osserva una figura di interferenza composta da bande chiare e scure. Questo fenomeno dimostra in modo inequivocabile che gli elettroni possiedono anche una natura ondulatoria, in contrasto con i principi della meccanica classica.

Ciò che rende ancora più sorprendente i risultati dell'esperimento è che, anche emettendo uno per volta gli elettroni, sullo schermo si forma in maniera graduale la figura di interferenza. Questo fenomeno indica che l'interferenza non è causata dall'interazione diretta tra gli elettroni, ma è la conseguenza della natura intrinsecamente probabilistica della meccanica quantistica.

Risultati ancor più sorprendenti si ottengono se a valle delle due fenditure si posiziona un

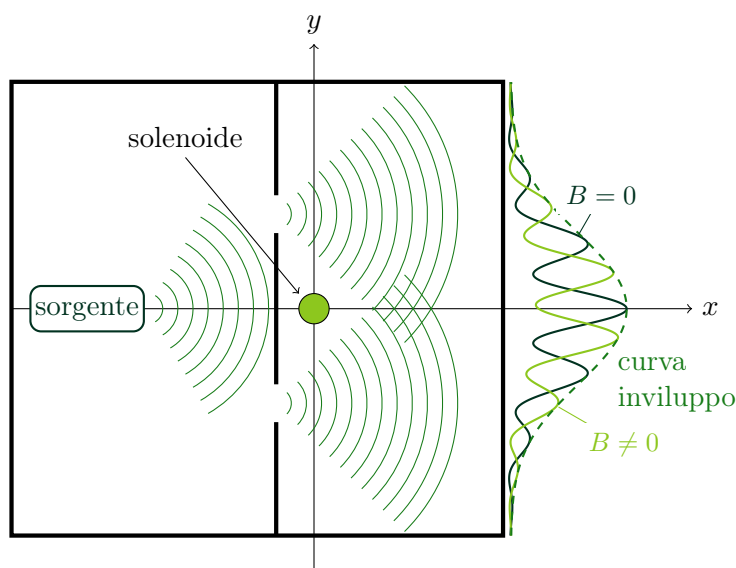


Figura 1.1.1: Effetto Aharonov-Bohm: la figura d'interferenza generata da un esperimento di diffrazione elettronica da doppia fenditura è affetta dal campo magnetico confinato all'interno di un solenoide, sebbene questo sia schermato.

solenoido molto lungo, schermato e percorso da corrente, che genera un campo magnetico uniforme  $B$  confinato al suo interno (Fig. 1.1.1).

Effettuando l'esperimento di diffrazione elettronica con questo apparato sperimentale si osserva che

- Per  $B = 0$ , sullo schermo si forma la figura di interferenza.
- Per  $B \neq 0$ , la figura di interferenza trasla all'interno della curva di inviluppo, con uno spostamento dipendente dall'intensità di  $B$ .

La modifica della figura di interferenza, nota come effetto Aharonov-Bohm, non può essere spiegata da un punto di vista classico. Ciò è dovuto non solo alla mancata considerazione della natura ondulatoria degli elettroni, responsabile dell'interferenza, ma anche al fatto che in tutta la regione attraversata dagli elettroni il campo magnetico è assente, e dunque non vi è alcuna interazione elettromagnetica.

Nel seguito si discuteranno alcuni aspetti fisici e matematici relativi all'effetto Aharonov-Bohm. Nello specifico, il resto del capitolo è strutturato come segue:

- Nella Sezione 1.2 si derivano i potenziali elettromagnetici del sistema in esame.
- Nella Sezione 1.3 si introducono le trasformazioni di gauge dei potenziali elettromagnetici e si discute come, in presenza del solenoide percorso da corrente, i potenziali elettromagnetici del sistema in esame e quelli corrispondenti ad un campo elettromagnetico nullo ovunque non siano gauge-equivalenti.

- Nella Sezione 1.4 si applicano i risultati ottenuti per spiegare come si modifica la figura di interferenza in presenza di campo magnetico schermato all'interno del solenoide.
- Infine nella Sezione 1.5 si effettua una digressione sugli aspetti geometrici e topologici del sistema considerato, e viene fornita una spiegazione dell'effetto tramite le classi di coomologia.

## 1.2 Potenziali elettromagnetici

La relazione tra il campo elettromagnetico (i.e., il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$ ) e i potenziali elettromagnetici (i.e., il potenziale scalare  $\phi$  e il potenziale vettore  $\mathbf{A}$ ) è definita dalle seguenti equazioni:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.2.1a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.2.1b)$$

Nel problema in esame si è interessati a determinare i potenziali elettromagnetici nella regione di spazio accessibile agli elettroni, vale a dire quella esterna al solenoide (si ricordi che questo è schermato). Dato che in tale regione il campo elettromagnetico è nullo, assumendo che il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  sia costante nel tempo, si può sempre scegliere il potenziale scalare identicamente nullo e dedurre che il potenziale vettore deve essere irrotazionale:

$$\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 0, \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (1.2.3)$$

Una condizione aggiuntiva che deve soddisfare  $\mathbf{A}$  è che il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie  $\mathcal{S}$  sul piano  $(x, y)$ , contenente il solenoide e orientata concordemente con il verso di  $\mathbf{B}$ , deve essere uguale al flusso costante  $\Phi = B\pi R^2$  attraverso la sezione del solenoide, assunto circolare di raggio  $R$ . Specificatamente:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \Phi \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \Phi \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}' = \Phi, \quad (1.2.4)$$

dove si è sostituita l'Eq.(1.2.1b) e si è usato il teorema di Stokes.

Si vuol quindi determinare un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  che soddisfi contemporaneamente l'Eq.(1.2.3) e l'Eq.(1.2.4). Per far ciò è comodo riscrivere l'Eq.(1.2.3) in coordinate cilindriche:

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (1.2.5)$$

dove  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  sono i vettori unitari radiale, angolare e lungo  $z$ . Si verifica immediatamente che il potenziale

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.2.6)$$

soddisfa l'Eq.(1.2.5), dove  $\alpha$  è una costante da determinare.

Valutando l'integrale del potenziale (1.2.6) lungo  $\mathcal{S}$ , e imponendo che l'Eq.(1.2.4) sia soddisfatta si ottiene

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}' = \int_0^{2\pi} A_\theta r d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} d\theta \equiv \Phi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\Phi}{2\pi}, \quad (1.2.7)$$

Il potenziale vettore del problema in esame, in coordinate cilindriche e cartesiane, risulta quindi:

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\Phi}{2\pi r} \left( -\frac{y}{r} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{r} \hat{\mathbf{y}} \right), \quad r > R, \quad (1.2.8)$$

dove  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$  sono i vettori unitari lungo  $x$  e  $y$ , e  $r$  è la distanza dal centro del solenoide.

### 1.3 Trasformazioni di gauge

L'informazione fisica legata ai potenziali elettromagnetici  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  risiede nelle relazioni che li legano ai campi elettrico e magnetico, che sono quantità osservabili fisicamente rilevanti. Le trasformazioni dei potenziali che lasciano invariati tali campi sono dette trasformazioni di gauge, e sono della forma:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (1.3.1a)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla F(\mathbf{x}, t), \quad (1.3.1b)$$

dove  $F(\mathbf{x}, t)$  è un campo scalare arbitrario. Le Eq.(1.3.1) generano potenziali elettromagnetici matematicamente diversi ma fisicamente equivalenti (i.e., gauge-equivalenti), come si può provare facilmente sostituendole nelle Eq.(1.2.1a)-(1.2.1b) e verificando che i campi elettrico e magnetico restano invariati.

Si vuole verificare se esista o meno una trasformazione di gauge tra i potenziali elettromagnetici identicamente nulli ( $\phi_0, \mathbf{A}_0$ ) e quelli associati ad un campo magnetico confinato nel solenoide ( $\phi, \mathbf{A}$ ), i.e.,

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \mathbf{A}_0 = \mathbf{0} \end{cases} \xrightarrow{F(\mathbf{x}, t)} \begin{cases} \phi = 0 \\ \mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad r > R. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

La funzione cercata  $F$  non deve dipendere dal tempo perché altrimenti l'Eq.(1.3.1a) non sarebbe soddisfatta. Inoltre per l'Eq.(1.3.1b) deve valere

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla F(\mathbf{x}). \quad (1.3.3)$$

La condizione (1.3.3) equivale a richiedere che il potenziale vettore sia un campo conservativo, ovvero la cui circuitazione lungo una qualsiasi linea chiusa  $\omega$  sia uguale a zero:

$$\oint_{\omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (1.3.4)$$

Tuttavia se si considerano cammini chiusi  $\gamma$  che circondano il solenoide, la circuitazione del potenziale vettore è diversa da zero poiché per definizione vale l'Eq.(1.2.4):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \Phi. \quad (1.3.5)$$

Questo significa che nel dominio considerato (il piano privato della regione occupata dal solenoide) il potenziale vettore (1.2.8) non è conservativo, dunque non può essere espresso come gradiente di un campo scalare. Ne consegue che non esiste una trasformazione di gauge che trasformi i potenziali elettromagnetici identicamente nulli nei potenziali associati a un campo magnetico confinato nel solenoide. Nella Sezione 1.5 verrà fornita una spiegazione più dettagliata di questo risultato utilizzando le classi di coomologia su una varietà differenziabile.

**Osservazione 1.3.1** *Se si pensa  $F(\mathbf{x})$  come il “potenziale” del campo  $\mathbf{A}$  si ha*

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}', \quad (1.3.6)$$

dove  $\mathbf{x}_0$  è un punto arbitrario fissato. Nel dominio considerato la funzione  $F(\mathbf{x})$  non è a valore singolo, poiché compiendo un giro attorno al solenoide e tornando al punto di partenza essa non riacquista il valore iniziale ma si ha una discontinuità di salto pari a  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \Phi$ . Come mostra la Fig.1.3.1, introducendo un taglio il dominio diventa semplicemente connesso. In questo caso la funzione  $F(\mathbf{x})$  è a valore singolo ed è una soluzione dell'Eq.(1.3.3).

## 1.4 Processo di interferenza

In meccanica quantistica si può mostrare che le trasformazioni di gauge (1.3.1) sono rappresentate dall'operatore unitario<sup>1</sup>

$$\hat{U}(\mathbf{x}, t) = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} F(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (1.4.1)$$

Applicando al sistema una trasformazione di gauge la funzione d'onda  $\psi$  si trasforma secondo

$$\psi \rightarrow \hat{U}\psi, \quad (1.4.2)$$

---

<sup>1</sup>Un operatore  $\hat{U}$  è detto unitario se  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{I}$ , dove  $\mathbb{I}$  è l'operatore identità e  $\dagger$  indica l'operatore aggiunto.

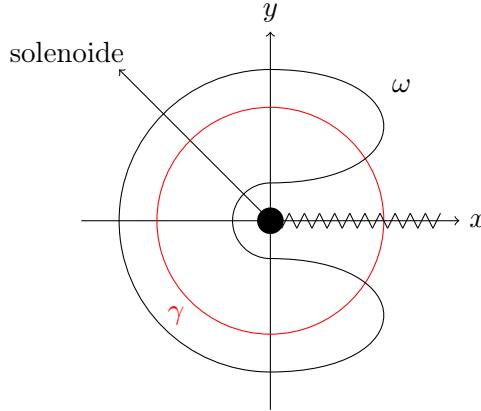


Figura 1.3.1: Introducendo un taglio il dominio diventa semplicemente connesso: lungo cammini chiusi  $\omega$  che non circondano il solenoide  $\mathbf{A}$  è conservativo. Lungo cammini  $\gamma$  che attraversano il taglio il potenziale vettore non risulta essere conservativo (i.e., non è gauge equivalente al potenziale nullo).

cioè acquista una fase, che non modifica il suo modulo quadro  $\|\psi\|^2$  (i.e., la densità di probabilità), coerentemente con il fatto che una trasformazione di gauge non modifica la fisica del problema.

Come indicato in Fig.1.3.2 il processo di interferenza si può schematizzare come segue: il fascio di elettroni si divide da un punto comune (sorgente), viene diffuso dalle fenditure, e si ricongiunge in presenza del punto  $P$  sullo schermo. Se si considerano separatamente i due fasci di elettroni  $\psi_1$  e  $\psi_2$  è possibile posizionare un taglio una volta sull'asse  $y$  positivo e una volta su quello negativo cosicché questi siano definiti in regioni semplicemente connesse. In tali regioni il potenziale vettore nullo e il potenziale vettore (1.2.8) sono gauge-equivalenti. Utilizzando l'Eq.(1.3.6) si ha che

$$\psi(\mathbf{x}) = \hat{U}(\mathbf{x}, t)\psi'(\mathbf{x}) = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \right] \psi'(\mathbf{x}), \quad (1.4.3)$$

dove  $\psi'$  è la funzione d'onda di particella libera (i.e., nel sistema in cui potenziale vettore è identicamente nullo),  $\mathbf{x}$  è un punto appartenente al cammino percorso dagli elettroni e  $\mathbf{x}_0$  è un punto arbitrario. Eseguendo questa trasformazione in entrambe le regioni individuate si ha

$$\psi_1(\mathbf{x}_1) = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \right] \psi'_1(\mathbf{x}_1), \quad (1.4.4a)$$

$$\psi_2(\mathbf{x}_2) = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \right] \psi'_2(\mathbf{x}_1). \quad (1.4.4b)$$

Avendo quindi considerato due differenti domini è stato possibile, conoscendo le soluzioni di particella libera, risolvere in modo banale il problema di un fascio di elettroni interagenti

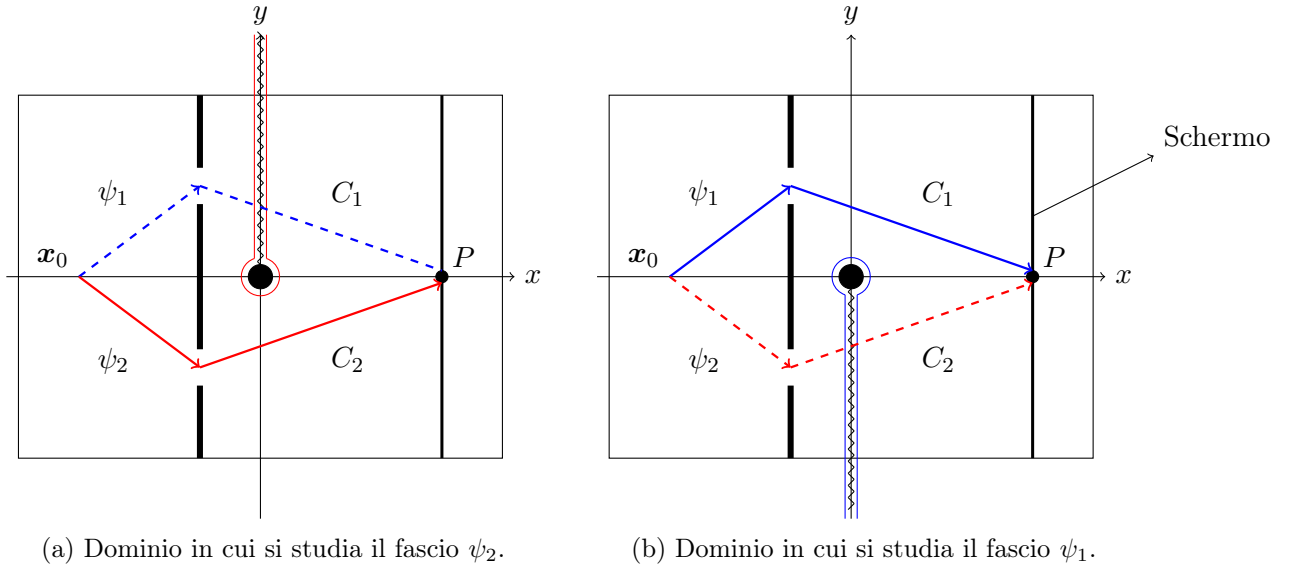


Figura 1.3.2: Rappresentazione schematica delle funzioni d'onda nel processo di interferenza. I domini in cui studiare i fasci  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono scelti in modo che quest'ultimi siano interamente contenuti in domini semplicemente connessi.

con un potenziale vettore che dà campo magnetico nullo.

L'intensità della figura di interferenza nel generico punto  $\mathbf{x}_P$  dello schermo è scrivibile come la probabilità che degli elettroni provenienti da entrambe le fenditure raggiungano il punto  $P$ :

$$\|\psi_1(\mathbf{x}_P) + \psi_2(\mathbf{x}_P)\|^2 = \|\psi_1(\mathbf{x}_P)\|^2 + \|\psi_2(\mathbf{x}_P)\|^2 + 2 \operatorname{Re} [\psi_1^*(\mathbf{x}_P)\psi_2(\mathbf{x}_P)], \quad (1.4.5)$$

dove  $\operatorname{Re}[\cdot]$  è l'operatore di parte reale, mentre il simbolo  $*$  indica il complesso coniugato. Si opera ora la sostituzione delle equazioni (1.4.4a)-(1.4.4b) in (1.4.5). In particolare il termine di parte reale risulta essere

$$\psi_1^*(\mathbf{x}_P)\psi_2(\mathbf{x}_P) = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \left( \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}' - \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}' \right) \right] \psi_1'^*(\mathbf{x}_P)\psi_2'(\mathbf{x}_P), \quad (1.4.6)$$

poiché l'integrale è ora valutato da  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_P$ , dunque sui cammini  $C_1$  e  $C_2$  nella loro interezza. La differenza dei due integrali corrisponde all'integrale sulla curva chiusa<sup>2</sup>  $C_2 - C_1$ , e dal momento che tale curva racchiude il solenoide si ha per l'Eq.(1.2.3)

$$\psi_1^*(\mathbf{x}_P)\psi_2(\mathbf{x}_P) = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A} \right] \psi_1'^*(\mathbf{x}_P)\psi_2'(\mathbf{x}_P) = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \Phi \right] \psi_1'^*(\mathbf{x}_P)\psi_2'(\mathbf{x}_P). \quad (1.4.7)$$

<sup>2</sup>Qui si vede come la scelta del punto iniziale  $\mathbf{x}_0$  nel punto di origine dei fasci è arbitraria e non influenza il comportamento della fisica: scegliendo come nuovo punto base  $\mathbf{x}'_0$  si ottengono i cammini  $\gamma_1 + C_1$  e  $\gamma_2 + C_2$ , dove  $\gamma_1 : \mathbf{x}'_0 \rightarrow \mathbf{x}_0$  e  $\gamma_2 : \mathbf{x}'_0 \rightarrow \mathbf{x}_0$  sono due diversi cammini arbitrari che collegano il nuovo punto base al primo punto in cui è definita la funzione d'onda. Quando si sottraggono gli integrali su questi due cammini si isolano due termini: uno che è uguale all'integrale originale e il secondo che è un integrale su un cammino chiuso che non comprende il solenoide, e che quindi è nullo.

Quando si valuta il modulo quadro di una funzione un eventuale termine aggiuntivo di fase è influente, allora la figura di interferenza è descritta da

$$\|\psi'_1(\mathbf{x}_P)\|^2 + \|\psi'_2(\mathbf{x}_P)\|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[ \psi_1^*(\mathbf{x}_P) \psi'_2(\mathbf{x}_P) \exp \left( i \frac{q}{\hbar} \Phi \right) \right]. \quad (1.4.8)$$

Questa è esattamente la figura di interferenza prodotta nel caso libero senza campo magnetico all'interno del solenoide (funzioni d'onda  $\psi'_1$  e  $\psi'_2$ ) con una fase aggiuntiva dipendente da  $\Phi$ . Esplicitando l'azione dell'operatore di parte reale si ha che la figura di interferenza osservata sullo schermo parallelo all'asse  $y$  è proporzionale a

$$f \cos \left( gy_P + \frac{q}{\hbar} \Phi \right), \quad (1.4.9)$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni che modellano la figura e dipendono da diversi fattori, e  $y_P$  è la posizione di un punto lungo lo schermo. L'Eq.(1.4.9) descrive la traslazione delle frange di interferenza che viene osservata sperimentalmente. Dall'Eq.(1.4.9) si nota come per valori del flusso pari a  $\Phi = 2\pi\hbar/q$  la figura di interferenza risulti invariata.

## 1.5 Topologia dell'effetto Aharonov-Bohm

Nella sezione precedente si è trovato che la causa dell'effetto Aharonov-Bohm è da ricondursi all'impossibilità di trovare una trasformazione di gauge che colleghi il potenziale nullo al potenziale caratteristico (1.2.8) in tutto il sistema considerato, ovvero il piano privato dell'origine, punto in cui è posizionato il solenoide. Infatti se tale trasformazione esistesse sarebbe sempre possibile trattare la funzione d'onda del sistema con campo magnetico all'interno del solenoide come la funzione d'onda di particella libera moltiplicata per una fase, che lascia invariata la probabilità. Questo punto può essere chiarito ulteriormente discutendo la geometria dei domini considerati e delle caratteristiche le forme differenziali definite su di essi.

### 1.5.1 Dualità tra campi vettoriali e 1-forme differenziali

In uno spazio euclideo dotato di metrica banale (i.e., la delta di Kronecker  $\delta_{ij}$ ), come quello considerato nello studio dell'effetto Aharonov-Bohm, esiste una dualità tra campi vettoriali e 1-forme differenziali. Un generico campo vettoriale si scrive come

$$\mathbf{f} = f^x \mathbf{e}_x + f^y \mathbf{e}_y + f^z \mathbf{e}_z, \quad (1.5.1)$$

dove i vettori  $\mathbf{e}_i$  sono i vettori della base di  $\mathbb{R}^3$ . Per passare alla controparte duale bisogna scrivere le stesse coordinate esprimendole nella base duale definita da

$$dx^i : dx^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j. \quad (1.5.2)$$



Considerando il duale del potenziale vettore, ovvero la sua 1-forma associata, questa si scrive come

$$\mathbf{A} = A^x \mathbf{e}_x + A^y \mathbf{e}_y + A^z \mathbf{e}_z \longrightarrow \alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz, \quad (1.5.3)$$

dove, poiché la metrica è euclidea, le coordinate covarianti  $A_i$  e controvarianti  $A^i$  coincidono. L'analogo della formula  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$  nel contesto delle forme differenziali si ottiene applicando la derivata esterna alla 1-forma potenziale  $\alpha$ :

$$d\alpha = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx \wedge dy + (\partial_y A_z - \partial_z A_y) dy \wedge dz + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) dz \wedge dx. \quad (1.5.4)$$

Identificando le componenti della 2-forma con le usuali componenti spaziali del rotore del potenziale vettore si ottiene

$$\beta := d\alpha = B_z dx \wedge dy + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx. \quad (1.5.5)$$

Si è quindi trovata la 2-forma differenziale di campo magnetico: questa rappresenta il flusso del campo magnetico attraverso le superfici *infinitesime*  $dx_i \wedge dx_j$ . Dunque la condizione di campo magnetico nullo si traduce nella condizione

$$\beta = d\alpha = 0, \quad (1.5.6)$$

ovvero nella chiusura della 1-forma potenziale  $\alpha$ .

Anche le trasformazioni di gauge possono essere espresse come trasformazione di 1-forme. Nel caso in cui il potenziale scalare sia nullo una trasformazione di gauge tra due potenziali vettori  $\alpha$  e  $\alpha'$  assume la forma

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla F(\mathbf{x}) \longrightarrow \alpha' = \alpha + dF, \quad (1.5.7)$$

dove  $F$  è una 0-forma. L'Eq.(1.5.7) mostra che due potenziali diversi sono gauge-equivalenti (i.e., possono essere ottenuti l'uno dall'altro attraverso una trasformazione di gauge) quando le 1-forme dei potenziali differiscono per una 1-forma esatta  $dF$ . Nel caso particolare dell'effetto Aharonov-Bohm si è interessati a studiare la gauge equivalenza di 1-forme potenziale chiuse.

### 1.5.2 Gruppo di coomologia di De Rham e varietà differenziabili

È possibile generalizzare la nozione di forma differenziale definendo tale oggetto su una varietà differenziabile anziché su uno spazio vettoriale. Questo procedimento, tuttavia, non è banale, in quanto richiede l'introduzione di concetti fondamentali di geometria differenziale. Poiché lo scopo di questa sezione non è la definizione di tali concetti, ci si limita a enunciare alcuni risultati che collegano la topologia delle varietà al comportamento

delle forme differenziali definite su di esse. Tali risultati possono essere applicati al problema di Aharonov-Bohm identificando la varietà differenziabile con un aperto di  $\mathbb{R}^3$ , dove naturalmente le forme differenziali e i vettori risultano ben definiti senza la necessità di alcuna generalizzazione.

Un'importante struttura algebrica legata alla topologia di una varietà differenziabile è il gruppo di coomologia di De Rham.

**Definizione 1.5.1** *Siano  $Z^k(M)$  e  $B^k(M)$  gli insiemi delle  $k$ -forme rispettivamente chiuse ed esatte sulla varietà differenziabile  $M$ . Allora il  $k$ -esimo gruppo di coomologia di De Rham di  $M$  è definito come*

$$H_{DR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M), \quad (1.5.8)$$

dove  $/$  indica l'operazione di quoziente. Se  $\alpha \in Z^k(M)$  allora  $[\alpha]_{DR}$  denoterà la sua classe di equivalenza, o classe di coomologia.

Lo spazio quoziente  $H_{DR}^k(M)$  identifica quindi due  $k$ -forme chiuse come equivalenti se la differenza di queste è una  $k$ -forma esatta. Alla luce di questa definizione e ricordando la condizione (1.5.7), due 1-forme potenziale chiuse, duali del potenziale vettore a cui corrisponde campo magnetico nullo, sono gauge-equivalenti, ovvero descrivono la stessa fisica, quando appartengono alla stessa classe di coomologia:

$$\alpha' \in [\alpha]_{DR}. \quad (1.5.9)$$

Conoscere la struttura di  $H_{DR}^1(M)$  dà quindi informazioni importanti sui gauge e la fisica del problema sulla varietà  $M$ . Questa, in particolare, è intimamente legata alla struttura topologica della varietà stessa.

**Definizione 1.5.2** *Sia  $M$  una varietà differenziabile. Un laccio  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  è una funzione continua su  $M$  tale per cui  $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ .  $x_0$  è detto punto base del laccio.*

**Definizione 1.5.3** *Sia  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  un laccio sulla varietà differenziabile  $M$  con punto base  $x_0$ , e sia  $\sim$  la relazione di equivalenza omotopica tra lacci, per cui due lacci sono omotopi se sono deformabili l'uno nell'altro con continuità: si denota con  $\Pi_1(M, x_0)$  il gruppo fondamentale della varietà differenziabile  $M$  con punto base  $x_0$ , definito come*

$$\Pi_1(M, x_0) = \{\sigma : [0, 1] \rightarrow M \mid \sigma(0) = \sigma(1) = x_0\} / \sim. \quad (1.5.10)$$

Il gruppo fondamentale è dunque l'insieme delle classi di equivalenza omotopiche dei lacci su  $M$ . Si noti che nel caso di varietà connesse il gruppo fondamentale è indipendente rispetto alla scelta del punto base  $x_0$ , in quanto, comunque scelto un nuovo punto base  $x'_0$ , questi possono sempre essere collegati con un cammino ottenendo così dei lacci omotopi a quelli con punto base  $x_0$ . Grazie a queste definizioni si può enunciare il seguente teorema:

**Teorema 1.5.1** *sia  $M$  una varietà differenziabile connessa. Allora*

$$H_{DR}^1(M) \cong \mathbb{R}^r, \quad (1.5.11)$$

dove  $\mathbb{R}$  è il campo dei numeri reali, e  $r$  è il rango<sup>3</sup> dell'abelianizzato del gruppo fondamentale  $\Pi_1(M)$ .

### 1.5.3 Classi di coomologia ed effetto Aharonov-Bohm

Si consideri il sistema di Fig.1.1.1: come già discusso, essendo il solenoide schermato, il dominio di rilevanza fisica è il piano  $\mathbb{R}^2$  privato del disco  $D$  in cui è contenuta la sezione del solenoide, ovvero il piano bucato  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ . Dal punto di vista topologico questo dominio costituisce una varietà differenziabile  $N$  connessa a una componente, omotopicamente equivalente<sup>4</sup> alla circonferenza  $S^1$ . È possibile mostrare che due varietà omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi, dunque sapendo che<sup>5</sup>  $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  si ha che  $\Pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$ , dove  $\mathbb{Z}$  è il gruppo dei numeri interi. Poiché tale gruppo è abeliano, per trovare il primo gruppo di coomologia  $H_{DR}^1(N)$  è sufficiente individuare il rango di  $\mathbb{Z}$  stesso: per farlo si nota che il gruppo dei numeri interi è scrivibile come il gruppo ciclico infinito  $\mathbb{Z}_\infty = \{e, a, a^2, \dots\}$  generato dal solo elemento  $a$ , da cui si deduce che  $r = \text{rango}(\mathbb{Z}) = 1$ .

Si è concluso quindi che  $H_{DR}^1(N) \cong \mathbb{R}$ , ovvero nel dominio in questione esistono un numero infinito, con cardinalità del continuo, di forme chiuse ma non esatte che non sono equivalenti. Questo risultato è importante poiché assicura che nel piano bucato esistono infinite 1-forme potenziale chiuse associate a campo magnetico nullo, che non appartengono alla stessa classe di coomologia (non sono gauge-equivalenti), ognuna descrivente una fisica diversa.

Questo risultato si può esplicitare considerando sulla varietà  $N$  la 1-forma chiusa ma non esatta

$$\omega = \frac{1}{2\pi r^2} (-ydx + xdy), \quad (1.5.12)$$

dove  $r$  è la distanza dal centro del solenoide. Tale forma descrive il potenziale vettore nel sistema in cui il solenoide produce un flusso di campo magnetico pari a uno e il cui integrale su un cammino chiuso è proprio il flusso unitario. Scrivendone il multiplo

$$\alpha_\lambda = \lambda\omega, \quad (1.5.13)$$

<sup>3</sup>Il rango di un gruppo finitamente generato è pari al numero dei suoi generatori

<sup>4</sup>In questo semplice caso si può vedere l'equivalenza omotopica tra  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  e  $S^1$  in modo intuitivo, notando che entrambi hanno la stessa forma (sebbene in dimensioni diverse) di anello con un buco al centro.

<sup>5</sup>Le classi di equivalenza omotopica di lacci sulla circonferenza sono infinite con la cardinalità dei numeri interi. Questo è dovuto al fatto che due lacci sono omotopi quando contano lo stesso numero di avvolgimenti sulla circonferenza

dove  $\lambda$  è un numero reale, si ottiene la 1-forma potenziale  $\alpha_\lambda$  che descrive il sistema fisico in cui il solenoide produce un flusso di campo magnetico pari a  $\lambda$ . Si nota subito che considerando  $\lambda' \neq \lambda$  si ha che

$$[\alpha_\lambda]_{DR} \neq [\alpha_{\lambda'}]_{DR}, \quad (1.5.14)$$

ovvero le due forme non appartengono alla stessa classe di coomologia. Infatti la loro differenza

$$\alpha_\lambda - \alpha_{\lambda'} = (\lambda - \lambda') \omega \quad (1.5.15)$$

è un multiplo di  $\omega$  che non è una forma esatta. Ciò significa che ogni forma del tipo

$$\alpha_\lambda = \lambda \omega = \frac{\lambda}{2\pi r^2} (-ydx + xdy), \quad (1.5.16)$$

con  $\lambda$  parametro reale, descrive una diversa classe di coomologia<sup>6</sup> (e quindi una fisica diversa) che corrisponde al sistema in cui il campo magnetico produce un flusso pari a  $\lambda$ . Segue dunque che diversi valori di campo magnetico all'interno del solenoide alterano la fisica anche in regioni di spazio in cui questo è identicamente nullo, generando l'effetto Aharonov-Bohm.

---

<sup>6</sup>In accordo con il fatto che  $H_{DR}^1(M) \cong \mathbb{R}$

## Capitolo 2

# Metodo

Lo scopo del capitolo è quello di introdurre l'equazione di Schrödinger, e di discutere l'implementazione dello schema numerico per calcolarne la soluzione. Nello specifico:

- In Sezione 2.1 si introduce l'equazione di Schrödinger, e si discute l'accoppiamento minimale con il potenziale vettore.
- In Sezione 2.2 si discute la discretizzazione del dominio fisico e dei numeri d'onda, e si deriva lo schema numerico alle differenze finite.

### 2.1 Formulazione matematica

Lo scopo dello studio numerico è quello di osservare come la presenza di un solenoide schermato di lunghezza indefinita perpendicolare al piano  $(x, y)$  modifica la dinamica della particella, in particolare la figura di interferenza nell'esperimento da doppia fenditura. Sia  $\Phi = \pi R^2 B$  il flusso del campo magnetico, dove  $R$  è il raggio del solenoide e  $B$  l'intensità del campo magnetico: allora come visto nella Sezione 1.2 per descrivere un campo nullo all'esterno del solenoide, preservando l'informazione che all'interno questo è diverso da zero si sceglie un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  che ha la seguente espressione analitica:

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad r > R, \quad (2.1.1)$$

dove per semplicità si è posto il centro del solenoide nell'origine.

Per implementare questo potenziale nell'hamiltoniana dell'equazione di Schrödinger è necessario scrivere l'accoppiamento minimale

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 \Psi + V\Psi, \quad (2.1.2)$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone e  $q$  la sua carica. Poiché  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  gli operatori  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{A}$  commutano, da cui

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Psi + \frac{q}{m} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \Psi + \frac{q^2 \mathbf{A}^2}{2m} \Psi + V\Psi. \quad (2.1.3)$$

Scrivendo l'operatore di momento come  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  si ottiene

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) + \frac{q}{m}\left(A_x\frac{\partial\Psi}{\partial x} + A_y\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{q^2\mathbf{A}^2}{2m}\Psi + V\Psi. \quad (2.1.4)$$

Per comodità il potenziale vettore viene scritto come

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\Phi}{2\pi}(\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y), \quad (2.1.5)$$

in questo modo l'Eq.(2.1.4) diventa

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\Phi q}{2\pi m}\left(\mathcal{A}_x\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \mathcal{A}_y\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\Phi^2 q^2}{8\pi^2 m}(\mathcal{A}_x^2 + \mathcal{A}_y^2)\Psi + V\Psi. \quad (2.1.6)$$

Nel seguito ogni simulazione verrà eseguita considerando come condizione iniziale un pacchetto d'onda gaussiano con un momento non nullo in direzione delle  $x$  positive. Il pacchetto si scrive come

$$\Psi_0 = \mathcal{N} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4\sigma^2}\right] \exp[ik_0 x], \quad (2.1.7)$$

dove  $\mathcal{N}$  è la costante di normalizzazione,  $x_0$  e  $y_0$  rappresentano la posizione iniziale del pacchetto,  $\sigma$  è la sua larghezza e  $k_0$  è il vettore d'onda lungo la direzione  $x$ .

## 2.2 Formulazione numerica

### 2.2.1 Definizione del reticolo

Per studiare numericamente l'effetto Aharonov-Bohm si discretizza il dominio spazio-temporale in un reticolo su cui si risolve l'Eq.(2.1.6) mediante uno schema alle differenze finite esplicito di tipo *time-marching*. Il dominio spaziale è discretizzato in celle di ampiezza  $a_x \times a_y$  e quello temporale in celle di ampiezza  $a_t$ :

$$x_{n_x} = n_x a_x, \quad n_x = 1 \dots N_x, \quad (2.2.1a)$$

$$y_{n_y} = n_y a_y, \quad n_y = 1 \dots N_y, \quad (2.2.1b)$$

$$t_{n_t} = n_t a_t, \quad n_t = 1 \dots N_t. \quad (2.2.1c)$$

In questo modo i punti del reticolo spaziano da zero a  $L = N_x a_x = N_y a_y$ , e  $T = N_t a_t$ , dove  $L$  è la dimensione spaziale del dominio e  $T$  quella temporale (è sempre possibile traslare il reticolo per fissare l'origine al centro).

Il dominio fisico computazionale è limitato e si devono quindi introdurre condizioni di bordo che, nel presente studio, si assumono periodiche. Ciò impone che le funzioni rappresentabili numericamente soddisfino le condizioni:

$$f(x, y, t) = f(x + L, y, t), \quad (2.2.2a)$$

$$f(x, y, t) = f(x, y + L, t). \quad (2.2.2b)$$

Le condizioni di bordo periodiche, Eq.(2.2.2), e la discretizzazione del dominio, Eq.(2.2.1), comportano una discretizzazione nello spazio dei numeri d'onda  $k_x$  e  $k_y$ , con la conseguente definizione di un reticolo reciproco. Specificatamente, l'anti-trasformata di Fourier di una funzione soddisfacente le Eq.(2.2.2) risulta essere:

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= \int d^2k \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i(k_x x + k_y y)} \\ &= f(x + L, y + L, t) = \int d^2k \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{ik_x L} e^{ik_y L}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

e ne consegue che i numeri d'onda sono discretizzati:

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_{k_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_{k_y}. \quad (2.2.4)$$

Un limite superiore ai valori assumibili dai numeri d'onda discende poi dalle Eq.(2.2.1). Infatti, la trasformata di Fourier monodimensionale di una funzione  $f(x)$  quando discretizzata diventa:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f(x) e^{-ikx} \rightarrow \tilde{f}_{n_x}(k) = \frac{a_x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n_x} f(a_x n_x) e^{-ika_x n_x}, \quad (2.2.5)$$

dove  $\tilde{f}_{n_x}(k)$  indica la trasformata di Fourier discretizzata. Da ciò discende che

$$\tilde{f}_{n_x} \left( k + \frac{2\pi}{a_x} \right) = \frac{a_x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n_x} f(a_x n_x) e^{-ika_x n_x} e^{-i\frac{2\pi}{a_x} a_x n_x} = \tilde{f}_{n_x}(k), \quad (2.2.6)$$

ovvero il numero d'onda  $k$  è periodico di periodo  $2\pi/a_x$ , dunque il massimo valore che questo può assumere è

$$k_{max} = \frac{2\pi}{a_x} = \frac{2\pi}{L} N_x. \quad (2.2.7)$$

Questo risultato si estende nel caso bidimensionale imponendo la stessa condizione su  $y$ . La condizione espressa dall'Eq.(2.2.7) rappresenta un limite superiore ai numeri d'onda ammissibili, per cui tenendo conto anche delle Eq.(2.2.4), i numeri d'onda risultano discretizzati come segue:

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_{k_x}, \quad n_x = 1 \dots N_x, \quad (2.2.8a)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L} n_{k_y}, \quad n_y = 1 \dots N_y. \quad (2.2.8b)$$

### 2.2.2 Formule alle differenze finite

Scegliendo celle sufficientemente piccole rispetto alle dimensioni del sistema, la funzione d'onda  $\Psi(x, y, t)$  può essere espansa come

$$\Psi(x + a_x, y, t) = \Psi(x, y, t) + a_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{a_x^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(a_x^3), \quad (2.2.9)$$

$$\Psi(x - a_x, y, t) = \Psi(x, y, t) - a_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{a_x^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(a_x^3). \quad (2.2.10)$$

Sottraendo il primo membro al secondo e dividendo per  $2a_x$  si ottiene un'espressione discretizzata per la derivata prima in  $x$  come differenza centrata:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Psi(x + a_x, y, t) - \Psi(x - a_x, y, t)}{2a_x} + \mathcal{O}(a_x^2). \quad (2.2.11)$$

Sviluppando la funzione al terzo ordine è possibile trovare l'analoga formula per la derivata seconda:

$$\Psi(x + a_x, y, t) = \Psi(x, y, t) + a_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{a_x^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{a_x^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(a_x^4), \quad (2.2.12)$$

$$\Psi(x - a_x, y, t) = \Psi(x, y, t) - a_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{a_x^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{a_x^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(a_x^4), \quad (2.2.13)$$

sommando membro a membro e riarrangiando i termini si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi(x + a_x, y, t) - 2\Psi(x, y, t) + \Psi(x - a_x, y, t)}{a_x^2} + \mathcal{O}(a_x^2). \quad (2.2.14)$$

Si procede in modo analogo per le derivate in  $y$ , mentre la derivata prima nel tempo si discretizza con una differenza in avanti:

$$\Psi(x, y, t + a_t) = \Psi(x, y, t) + a_t \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathcal{O}(a_t^2), \quad (2.2.15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi(x, y, t + a_t) - \Psi(x, y, t)}{a_t} + \mathcal{O}(a_t). \quad (2.2.16)$$

### 2.2.3 Discretizzazione dell'equazione di Schrödinger

Per scrivere la versione discretizzata dell'Eq.(2.1.6) si riarrangiano i termini in modo da isolare la derivata temporale nel membro di sinistra:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i \frac{\gamma_1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \gamma_2 \left( \mathcal{A}_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathcal{A}_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - i \gamma_3 (\mathcal{A}_x^2 + \mathcal{A}_y^2) \Psi - i \mathcal{V} \Psi, \quad (2.2.17)$$

dove

$$\gamma_1 = \frac{\hbar}{m}, \quad \gamma_2 = \frac{\Phi q}{2\pi m}, \quad \gamma_3 = \frac{\Phi^2 q^2}{8\pi^2 m \hbar}, \quad \mathcal{V} = \frac{V}{\hbar}. \quad (2.2.18)$$



Si noti che<sup>1</sup> le dimensioni dei coefficienti  $\gamma_i$  sono le stesse, pari a  $\text{m}^2/\text{s}$ . Ora le funzioni  $\Psi$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{A}_x$  e  $\mathcal{A}_y$  sono definite su un reticolo e quindi possono essere trattate come matrici  $N_x \times N_y \times N_t$  dipendenti dagli indici del reticolo  $(n_x, n_y, n_t)$ . Per semplicità di notazione si pone

$$\psi_{(n_x, n_y)}^{n_t} = \Psi(n_x a_x, n_y a_y, n_t a_t), \quad (2.2.19)$$

$$v_{(n_x, n_y)} = \mathcal{V}(n_x a_x, n_y a_y), \quad (2.2.20)$$

$$\mathcal{A}_{x,y}(n_x, n_y) = \mathcal{A}_{x,y}(n_x a_x, n_y a_y). \quad (2.2.21)$$

**Osservazione 2.2.1** *Il potenziale vettore  $\mathcal{A}_{x,y}(n_x, n_y)$  è inizializzato così da assumere i valori prescritti dalla Eq.(2.1.1) all'esterno del solenoide e valori nulli all'interno. Il potenziale di parete  $v_{(n_x, n_y)}$  è modellato con una funzione a gradino che assume valore costante all'interno della parete e zero all'esterno. Il valore costante è scelto sufficientemente grande così da evitare che il pacchetto d'onda penetri nella parete. Il solenoide è posizionato dentro la parete in modo tale che il potenziale di quest'ultima lo schermi dal pacchetto.*

Lo schema alle differenze finite è ottenuto sostituendo le espressioni (2.2.11)-(2.2.14)-(2.2.16) in (2.2.17):

$$\begin{aligned} \psi_{(n_x, n_y)}^{n_t+1} = & \psi_{(n_x, n_y)}^{n_t} \left( 1 - i\gamma_1 \frac{a_t}{a_x^2} - i\gamma_1 \frac{a_t}{a_y^2} - ia_t v_{(n_x, n_y)} + i\gamma_3 a_t \mathcal{A}_{x(n_x, n_y)}^2 + i\gamma_3 a_t \mathcal{A}_{y(n_x, n_y)}^2 \right) \\ & + \psi_{(n_x+1, n_y)}^{n_t} \left( i\frac{\gamma_1}{2} \frac{a_t}{a_x^2} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{a_t}{a_x} \mathcal{A}_{x(n_x, n_y)} \right) + \psi_{(n_x-1, n_y)}^{n_t} \left( i\frac{\gamma_1}{2} \frac{a_t}{a_x^2} - \frac{\gamma_2}{2} \frac{a_t}{a_x} \mathcal{A}_{x(n_x, n_y)} \right) \\ & + \psi_{(n_x, n_y+1)}^{n_t} \left( i\frac{\gamma_1}{2} \frac{a_t}{a_y^2} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{a_t}{a_y} \mathcal{A}_{y(n_x, n_y)} \right) + \psi_{(n_x, n_y-1)}^{n_t} \left( i\frac{\gamma_1}{2} \frac{a_t}{a_y^2} - \frac{\gamma_2}{2} \frac{a_t}{a_y} \mathcal{A}_{y(n_x, n_y)} \right) \\ & + \mathcal{O}(a_t^2) + \mathcal{O}(a_x^2) + \mathcal{O}(a_y^2), \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

dove i parametri che moltiplicano la funzione d'onda discretizzata  $\psi$  sono ora adimensionali. Si noti che il processo di discretizzazione introduce, dopo un singolo passo temporale, un errore del secondo ordine rispetto all'ampiezza delle celle  $(a_x, a_y, a_t)$ . Utilizzando la discretizzazione delle lunghezze (2.2.1a) e del momento (2.2.4) si discretizza in modo analogo il pacchetto d'onda iniziale (2.1.7):

$$\psi_{(n_x, n_y)}^0 = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{(n_x a_x - \tilde{x}_0)^2 + (n_y a_y - \tilde{y}_0)^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right] \exp \left[ 2\pi i \frac{a_x}{L} n_{k_x} n_x \right]. \quad (2.2.23)$$

<sup>1</sup>Il vettore  $\mathcal{A}$  ha dimensioni dell'inverso della lunghezza, quindi gli oggetti che moltiplicano i coefficienti  $\gamma_i$  hanno tutti la dimensione di  $\text{m}^{-2}$ . Allora, poiché il membro di sinistra ha la dimensione dell'inverso del tempo i coefficienti  $\gamma_i$  devono avere necessariamente la dimensione  $\text{m}^2/\text{s}$ .

**Osservazione 2.2.2** *La soluzione numerica  $\psi_{(n_x, n_y)}^{n_t+1}$  si ottiene iterando l'Eq.(2.2.22) nel tempo a partire dalla condizione iniziale (2.2.23). In questo modo si simula l'evoluzione temporale del pacchetto d'onda che diffratto dalla doppia fenditura forma una figure di interferenza. Quest'ultima può essere osservata simulando la presenza di uno schermo di "raccolta" degli elettroni lungo una sezione  $y$  del dominio a valle della doppia fenditura, vale a dire rappresentando il valore di  $\psi_{(\tilde{n}_x, n_y)}^{\tilde{n}_t}$  in funzione dei punti  $n_y$  per  $\tilde{n}_t$  e  $\tilde{n}_x$  fissati.*

## Capitolo 3

# Risultati

Di seguito si discutono simulazioni numeriche relative alla dinamica di un pacchetto d'onda gaussiano in diversi scenari. Specificatamente:

- In Sezione 3.1 viene studiata l'evoluzione libera di un pacchetto d'onda gaussiano.
- In Sezione 3.2 si simula la diffrazione del pacchetto attraverso una fenditura singola.
- In Sezione 3.3 viene aggiunta al problema una seconda fenditura, e si osserva la figura di interferenza numerica.
- In Sezione 3.4 è introdotto nel sistema con doppia fenditura il solenoide schermato, e si studia la modifica delle frange di interferenza predette dall'effetto Aharonov-Bohm.

I primi tre esperimenti numerici sono condotti in assenza di campo magnetico ed hanno un duplice scopo: validare il codice numerico e valutare la figura di interferenza di riferimento. Il quarto esperimento numerico intende verificare che, come previsto, la presenza di un potenziale vettore non nullo comporta una variazione di fase delle frange di interferenza, indipendente dalle caratteristiche geometriche delle due fenditure.

In tutte le simulazioni discusse in seguito si trattano quantità fisiche con il seguente ordine di grandezza:

$$L \sim 10^{-2} \text{ m}, \quad T \sim 1 \text{ s}, \quad k \sim 10^2 \text{ m}^{-1}, \quad B \sim 1 \text{ }\mu\text{T}. \quad (3.0.1)$$

In questo modo i coefficienti adimensionali che compaiono dell'Eq.(2.2.22) hanno ordine di grandezza unitario.

### 3.1 Evoluzione libera

Si studia l'evoluzione libera di un pacchetto d'onda gaussiano in un sistema con potenziale nullo. Questo studio fornisce una prima validazione del codice numerico, poiché dalla

teoria è noto che la dispersione di un pacchetto gaussiano è

$$\sigma(t) \sim \frac{1}{\sigma(0)} \sqrt{\sigma^4(0) + 4 \frac{\hbar^2}{m^2} t^2} = \sigma(0) \sqrt{1 + \left( \frac{4\hbar t}{m\sigma^2(0)} \right)^2} = \sigma(0) \sqrt{1 + \left( \frac{t}{t_c} \right)^2}, \quad (3.1.1)$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone e  $t_c$  un tempo caratteristico

$$t_c = \sigma^2(0) \frac{m}{4\hbar}. \quad (3.1.2)$$

Per tempi minori del tempo caratteristico, si può espandere l'Eq.(3.1.1) al secondo ordine in  $t$  ottenendo una dispersione quadratica

$$\sigma(t) \propto \sigma(0) + t^2, \quad t \ll t_c, \quad (3.1.3)$$

mentre per tempi maggiori si ha una dispersione lineare

$$\sigma(t) \propto \sigma(0)t, \quad t \gg t_c. \quad (3.1.4)$$

Si possono verificare numericamente questi risultati eseguendo simulazioni sul seguente reticolo spazio-temporale:

$$L \times L = [-3, 3] \times [-3, 3] \text{ cm}^2, \quad a_x = a_y = 0.03 \text{ cm}, \quad (3.1.5a)$$

$$T = [0, 1] \text{ s}, \quad a_t = 2.5 \times 10^{-6} \text{ s}. \quad (3.1.5b)$$

Si inizializza il pacchetto gaussiano nell'origine con momento nullo e con larghezza  $\sigma(0) = \sqrt{0.5} \text{ cm}$ . Il tempo caratteristico risulta  $t_c \approx 0.05 \text{ s}$ . Si valuta la figura ottenuta rappresentando il modulo quadro della funzione d'onda  $\psi_{(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)}^{\tilde{n}_t}$  per diversi tempi  $t = a_t \tilde{n}_t$  e fissando  $x = 0$ . In Fig. 3.1.1a sono riportati i valori di  $\sigma(t)$  in funzione del tempo per  $t \ll t_c$ , e si osserva un andamento quadratico in accordo con l'Eq.(3.1.3). In Fig. 3.1.1b è riportato l'andamento per tempi  $t \gg t_c$  in modo tale che l'Eq.(3.1.4) sia soddisfatta, e l'andamento è lineare. Questi risultati sono in accordo con le previsioni teoriche e forniscono una prova della solidità dello schema numerico adottato.

## 3.2 Fenditura singola

Si studia la diffrazione di un pacchetto d'onda gaussiano attraverso una singola fenditura rettangolare, come mostrato in Fig. (3.2.1a). Questo esperimento numerico ha un duplice scopo. Primo, fornire una validazione più stringente del codice numerico, dato che, rispetto all'evoluzione libera di un pacchetto d'onda gaussiano studiato nella sezione precedente, la simulazione di una parete con fenditura richiede di introdurre un elemento aggiuntivo, vale a dire un potenziale di parete. Secondo, valutare l'approssimazione associata al considerare come gaussiano un pacchetto diffratto da una fenditura rettangolare. Più

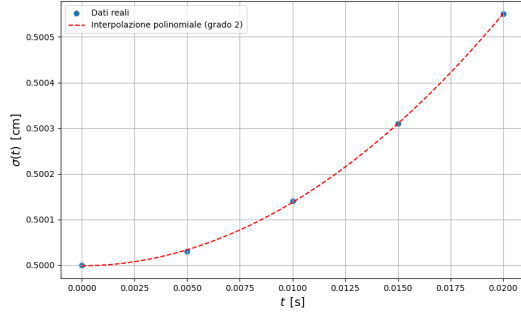
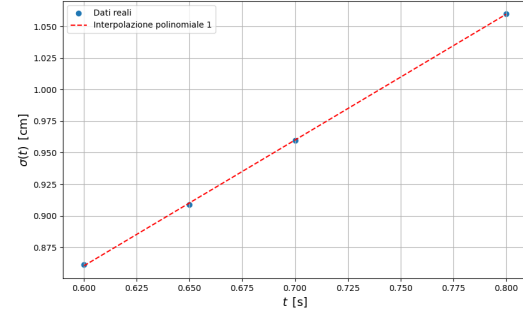
(a) Andamento quadratico per tempi  $t \ll 0.05$  s(b) Andamento lineare per tempi  $t \gg 0.05$  s

Figura 3.1.1: Evoluzione libera: larghezza del pacchetto in funzione del tempo

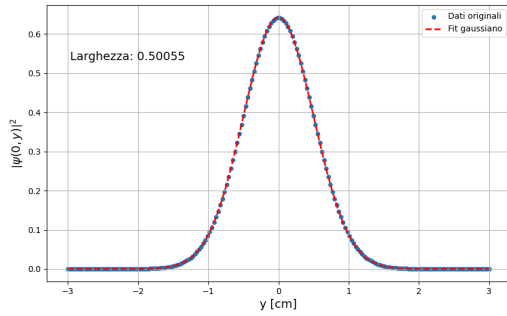
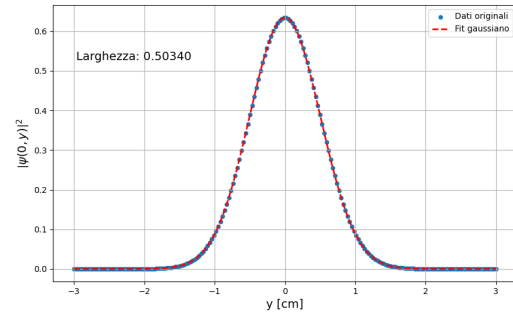
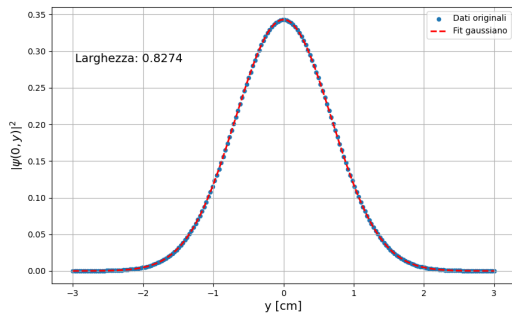
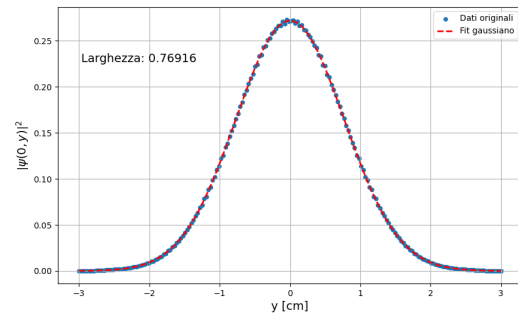
(a)  $t = 0.02$  s(b)  $t = 0.05$  s(c)  $t = 0.4$  s(d)  $t = 0.5$  s

Figura 3.1.2: Evoluzione libera: forma del pacchetto in funzione del tempo.

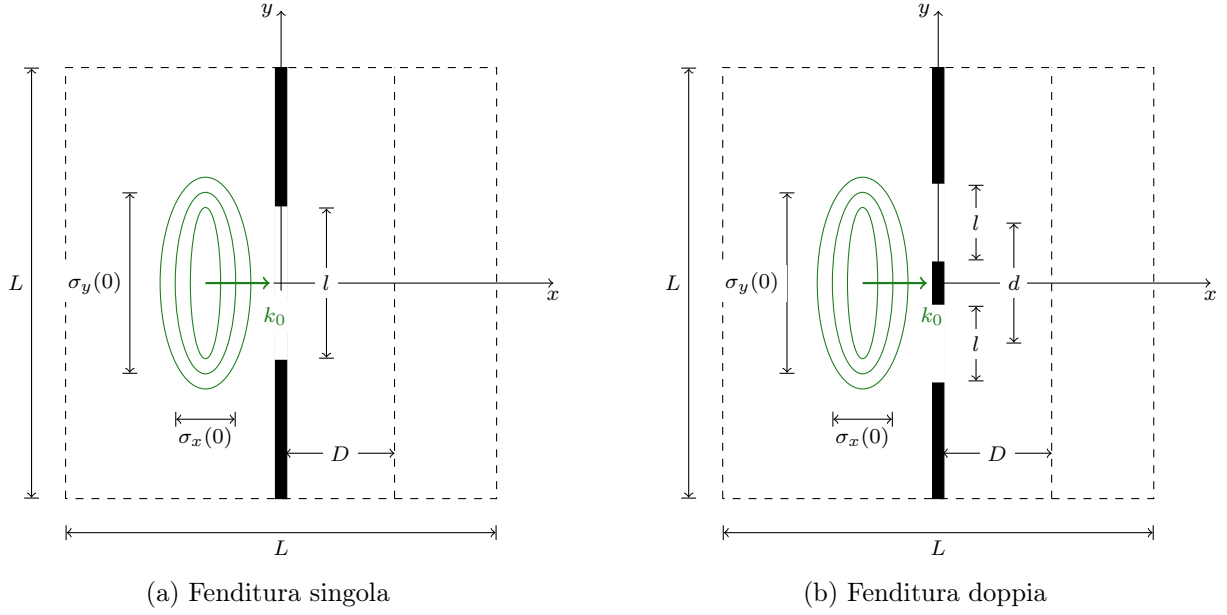


Figura 3.2.1: Geometria degli esperimenti di diffrazione di un pacchetto d'onda gaussiano da fenditura (a) singola e (b) doppia. Lo schermo è posto ad una distanza  $D$  dalle fenditure.

precisamente, nella Sezione 3.3 si confronterà la figura di diffrazione dell'esperimento delle due fenditure ottenuta numericamente con la figura prevista teoricamente, ipotizzando che i pacchetti fuoriuscenti dalle fenditure siano gaussiani. L'esperimento numerico attuale consentirà quindi di valutare in che misura la riemissione gaussiana del pacchetto d'onda sia valida in caso della fenditura rettangolare in esame (Fig. 3.2.2).

Si eseguono simulazioni sul seguente reticolo spazio-temporale

$$L \times L = ([-3, 3] \times [-3, 3]) \text{ cm}^2, \quad a_x = 0.03 \text{ cm}, \quad a_y = 0.015 \text{ cm}, \quad (3.2.1a)$$

$$T = [0, 0.1] \text{ s}, \quad a_t = 1 \times 10^{-6} \text{ s}. \quad (3.2.1b)$$

La fenditura singola è centrata nell'origine. Il pacchetto iniziale gaussiano è centrato in  $(-1, 0)$  con numero d'onda  $k_0 \approx 25 \text{ cm}^{-1}$  lungo  $x$ , e con larghezza lungo l'asse  $y$  pari a  $\sigma_y(0) = 1 \text{ cm}$ . Si è inoltre fissata la larghezza lungo  $x$  in modo tale che propagandosi il pacchetto non interagisca con il bordo,  $\sigma_x(0) = 0.2 \text{ cm}$ . In Fig. 3.2.3 è rappresentata in funzione di  $y$  la soluzione per diversi valori della larghezza  $l$  della fenditura lungo lo schermo posto in  $x = D = 1.5 \text{ cm}$ . Con questa scelta dei parametri il pacchetto, se fosse libero, al tempo  $\tilde{t} = 0.1 \text{ s}$  si troverebbe centrato esattamente in  $D$ , poiché la sua velocità (assunta come velocità di gruppo) è

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk_0} = \frac{d}{dk_0} \left( \frac{\hbar k_0^2}{2m} \right) = \frac{k_0 \hbar}{m} \rightarrow v_g \approx 25 \text{ cm/s}. \quad (3.2.2)$$

In Tab. 3.2.1 sono riportate le larghezze dei pacchetti ottenuti dall'interpolazione con una curva gaussiana, ma, come chiaramente mostrato dalla Fig. 3.2.3, l'ipotesi che il

pacchetto d'onda diffratto sia gaussiano perde di accuratezza al crescere di  $l$ .

$l$ [cm]	0.3	0.42	0.6	1.2
$\sigma$ [cm]	0.5	0.47	0.30	0.19

Tabella 3.2.1: Fenditura singola: larghezza dei pacchetti diffratti assumendo che la fenditura abbia forma gaussiana.

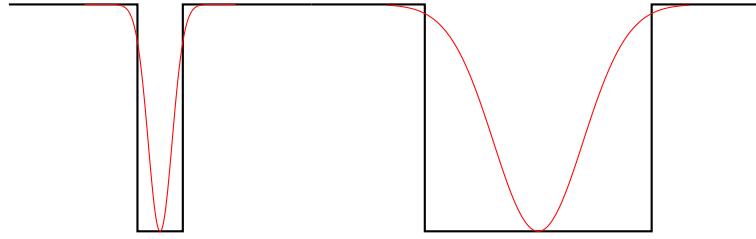


Figura 3.2.2: Confronto tra fenditure rettangolari e gaussiane. Per fenditure molto strette i due profili sono quasi sovrapponibili, mentre per fenditure più larghe si notano deviazioni significative.

### 3.3 Fenditura doppia

Si studia la diffrazione di un pacchetto d'onda gaussiano attraverso una doppia fenditura rettangolare, come mostrato in Fig. (3.2.1b). Questo esperimento numerico ha un duplice scopo. Primo, fornire un'ulteriore validazione del codice numerico confrontando la figura di interferenza determinabile in modo semi-analitico (Osservazione 3.3.1) con quella puramente numerica. Secondo, fornire la soluzione della figura di interferenza sulla base della quale verificare l'effetto Aharonov-Bohm.

**Osservazione 3.3.1** *La figura di interferenza di elettroni diffratti da una doppia fenditura può essere determinata come segue. Come discusso in 1.4, la forma delle figure di interferenza prodotte da una doppia fenditura è descritta dall'equazione:*

$$\|\psi_1 + \psi_2\|^2 = \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 + 2 \operatorname{Re} [\psi_1^* \psi_2], \quad (3.3.1)$$

dove  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono le funzioni d'onda che si propagano rispettivamente dalla fenditura (1) e (2), e  $\operatorname{Re}[\cdot]$  è l'operatore parte reale. Nel sistema in esame, le due fenditure hanno la stessa larghezza  $l$ , sono simmetriche rispetto all'origine, ed i loro centri distano  $d$ . Siccome il pacchetto d'onda incidente è simmetrico rispetto all'origine, è ragionevole assumere che

$$\psi(x, y, t) := \psi_1(x, -y, t) = \psi_2(x, y, t). \quad (3.3.2)$$

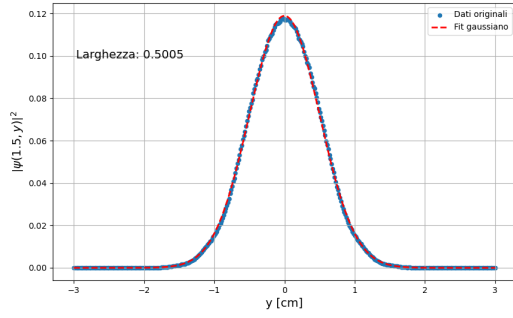
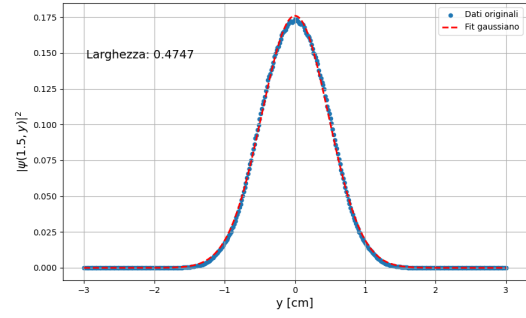
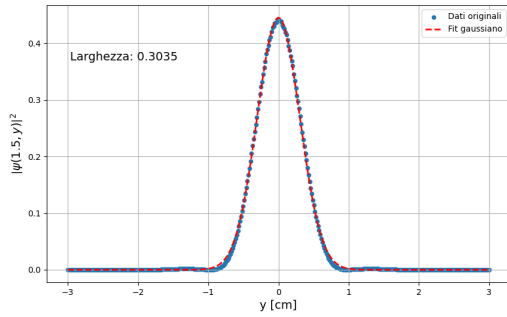
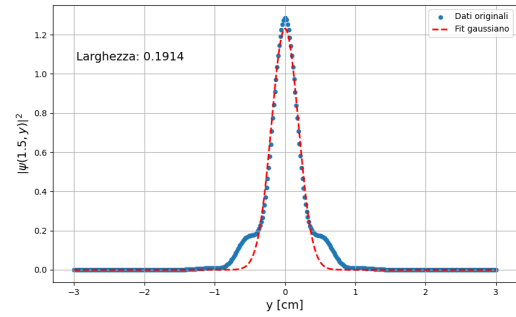
(a)  $l = 0.3$  cm.(b)  $l = 0.42$  cm(c)  $l = 0.6$  cm(d)  $l = 1.2$  cm

Figura 3.2.3: Fenditura singola: approssimazione della soluzione numerica di un pacchetto diffratto da fenditura rettangolare con un profilo gaussiano.

Ponendo quindi lo schermo ad una distanza  $D$  e valutando le funzioni d'onda in  $x = D$  l'Eq.(3.3.1) si può scrivere come

$$\|\psi(y) + \psi(-y)\|^2 = \|\psi(y)\|^2 + \|\psi(-y)\|^2 + 2\|\psi(y)\|\|\psi(-y)\| \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}y\right), \quad (3.3.3)$$

dove  $\psi$  può essere pensata come la funzione che descrive un pacchetto d'onda diffratto da una singola fenditura di larghezza  $l$  centrata in  $d + l/2$ . L'Eq.(3.3.3) è una funzione modulata da un termine oscillante di periodo  $\tau$  lungo la direzione dello schermo, che assume valori compresi tra  $f_{inf} = (\|\psi(y)\| - \|\psi(-y)\|)^2$  e la figura di inviluppo  $f_{sup} = (\|\psi(y)\| + \|\psi(-y)\|)^2$ .

Si eseguono simulazioni sullo stesso reticolo spazio-temporale utilizzando le medesime condizioni iniziali della Sezione 3.2. Si confronta la figura di interferenza determinata numericamente con quella fornita dall'Eq.(3.3.3), dove il periodo del termine modulante è estratto dalla figura numerica mediando la distanza tra i picchi adiacenti, e la funzione d'onda diffratta da fenditura singola è

$$\psi = \exp\left[-\frac{(y + l + \frac{d}{2})^2}{2\bar{\sigma}_y(l)^2}\right]. \quad (3.3.4)$$



Nell'Eq.(3.3.4)  $l + d/2$  è la posizione in valore assoluto del centro delle fenditure, e  $\bar{\sigma}_y(l)$  è la larghezza lungo  $y$  del pacchetto diffratto da singola fenditura stimato nella sezione precedente e riportato in Tab. 3.2.1. In Fig. 3.3.1 si confrontano le figure di interferenza semi-analitiche, ottenute sostituendo l'Eq.(3.3.4) in Eq.(3.3.3), (linea rossa) con quelle numeriche (linea blu) per diversi valori della larghezza delle fenditure  $l$  e delle distanza dei loro centri  $d$ . Il maggiore scostamento si osserva ai lati della figura di interferenza. Ciò è ragionevole dato che l'assunzione che la forma del pacchetto diffratto sia gaussiano perde progressivamente accuratezza allontanandosi dal centro del pacchetto. Si noti che gli scostamenti non sono legati a effetti di bordo. Infatti, come mostrato in Fig. 3.3.2, eseguendo due simulazioni con uguali parametri e passi reticolari, ma con dimensioni del dominio spaziale raddoppiate si trova che le soluzioni risultano essere pressoché identiche, di fatto garantendo che il dominio considerato in origine è sufficientemente grande da poter trascurare gli effetti di bordo.

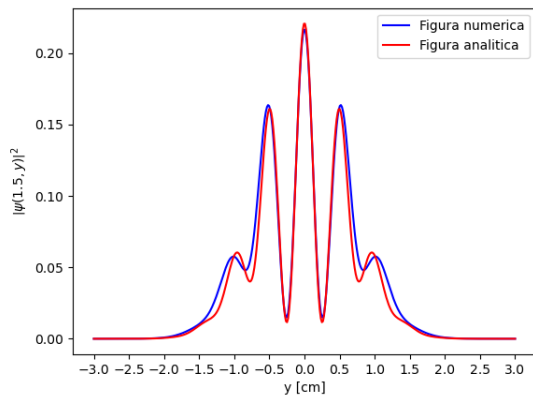
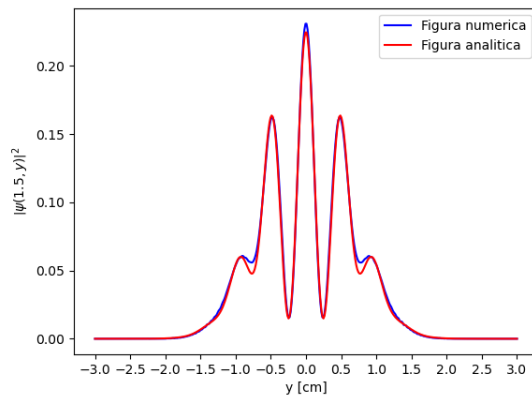
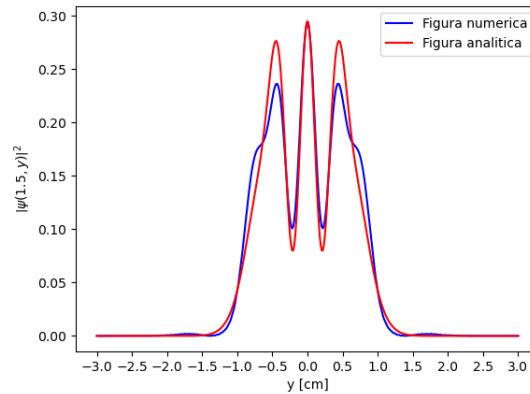
(a)  $l = 0.3$  cm,  $d = 0.9$  cm.(b)  $l = 0.42$  cm,  $d = 0.9$  cm.(c)  $l = 0.6$  cm,  $d = 0.9$  cm.

Figura 3.3.1: Fenditura doppia: confronto tra le figure di interferenza numeriche e semi-analitiche, con larghezza di fenditura  $l$  distanza  $d$  tra i loro centri.

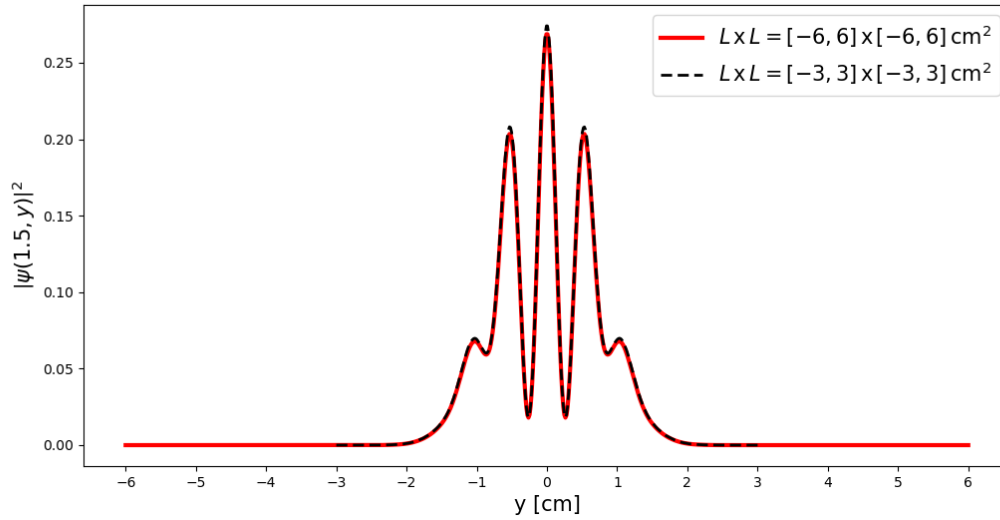


Figura 3.3.2: Fenditura doppia: simulazione con  $l = 0.3$  cm,  $d = 0.9$  cm, con differenti dimensioni del dominio spaziale.

### 3.4 Effetto Aharonov-Bohm

Si simula l'esperimento della doppia fenditura in presenza di un campo magnetico nel solenoide, descritto dal potenziale vettore discusso nell'Osservazione 2.2.1. Si confrontano quindi le figure di interferenza ottenute con quelle determinate nella Sezione 3.3. In particolare, si verifica che la traslazione delle frange di interferenza osservata numericamente sia consistente con quella prevista dall'Eq.(1.4.9) dato il valore del campo magnetico usato nelle simulazioni.

**Osservazione 3.4.1** *L'effetto del campo magnetico sulla funzione d'onda è tale per cui la figura d'interferenza descritta dall'Eq.(3.3.3) si modifica nel modo seguente:*

$$\|\psi(y) + \psi(-y)\|^2 = \|\psi(y)\|^2 + \|\psi(-y)\|^2 + 2\|\psi(y)\|\|\psi(-y)\| \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}y + \frac{q}{\hbar}\Phi\right), \quad (3.4.1)$$

ovvero le frange d'interferenza traslano all'interno della figura di inviluppo di

$$\Delta y = \frac{\tau}{2\pi} \frac{q}{\hbar} \Phi = \frac{q\tau R^2}{2\hbar} B. \quad (3.4.2)$$

**Osservazione 3.4.2** *Misurando le distanze tra i picchi delle figure di interferenza determinate numericamente con  $B = 0$  e quella con  $B \neq 0$  è possibile stimare il valore di cui traslano le frange  $\Delta\tilde{y}$ . L'errore su  $\Delta\tilde{y}$  si può stimare considerando l'errore associato all'individuazione dei picchi delle frange:*

$$\tilde{y}_{max} \pm 2a_y, \quad (3.4.3)$$

dove  $y_{max}$  è la posizione del picco e  $a_y$  è il passo del reticolo. Di conseguenza il valore delle distanze tra picchi risulta

$$\Delta\tilde{y} \pm \epsilon_{\tilde{y}} = (\tilde{y}_{max_1} - \tilde{y}_{max_2}) \pm 4a_y, \quad (3.4.4)$$

e infine mediando tutte le distanze tra picchi adiacenti:

$$\langle \Delta\tilde{y} \rangle \pm \frac{\epsilon_{\tilde{y}}}{\sqrt{N-1}}, \quad (3.4.5)$$

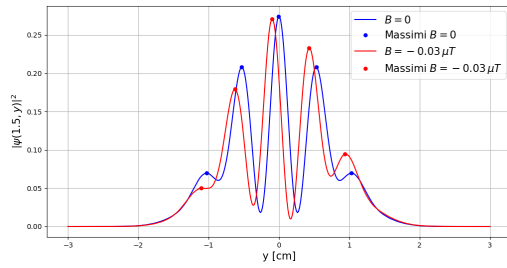
dove  $N$  è il numero di picchi presi in considerazione.

Di seguito si eseguono due serie di simulazioni con due finalità. Primo, a pari valore di  $B$  verificare che in accordo con l'Eq.(3.4.1), variando i parametri geometrici del sistema (i.e.,  $l$  e  $d$ ), la fase della figura di interferenza rimanga invariata. Secondo, fissati i parametri geometrici, verificare che al variare di  $B$ , le frange di interferenza traslino all'interno della figura di involuppo e la variazione di fase determinata numericamente sia in accordo con quella prevista teoricamente dall'Eq.(3.4.2).

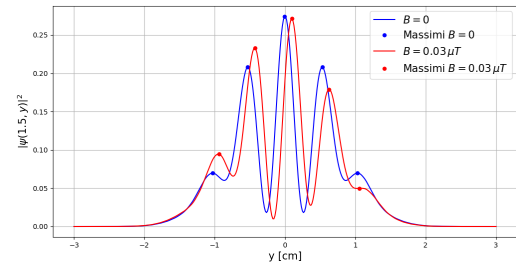
In entrambe le serie di simulazioni il raggio del solenoide è fissato a  $R = 0.1$  mm, cosicché considerando valori del campo magnetico nell'ordine di  $0.1$   $\mu$ T gli spostamenti  $\Delta y$  sono nell'ordine del centimetro. I risultati della prima serie di simulazioni indicano chiaramente che la variazione di fase indotta dal campo magnetico è indipendente dalla larghezza delle fenditure e dalla loro distanza. Inoltre cambiare il segno di  $B$  produce, come previsto, uno spostamento delle frange uguale e opposto (Fig. 3.4.1b). Nella seconda serie di simulazioni si fissano i parametri  $l = 0.3$  cm e  $d = 0.9$  cm, e si varia il valore di  $B$ . In Fig. 3.4.2 viene mostrato che la traslazione delle frange di interferenza avviene all'interno delle curve di involuppo. In Tab. 3.4.2 e Fig. 3.4.3 si valuta quantitativamente lo spostamento delle frange. Per campi magnetici deboli gli spostamenti delle frange di interferenza calcolati numericamente concordano con quelli previsti teoricamente, rientrando nel margine d'errore (Osservazione 3.4.2). Per campi magnetici intensi, invece, si osservano scostamenti maggiori, che potrebbero essere imputabili alla minore accuratezza che ha lo schema numerico in presenza di gradienti più elevati entro il dominio computazionale. Complessivamente, questi risultati confermano che il codice numerico è in grado di replicare l'effetto Aharonov-Bohm.

$B$ [ $\mu\text{T}$ ]	-0.03	0.03	-0.03	-0.03
$l$ [cm]	0.3	0.3	0.42	0.51
$d$ [cm]	0.9	0.9	0.9	0.99
$\Delta y$ [cm]	0.117	-0.117	0.111	0.104
$\Delta \tilde{y}$ [cm]	0.098	-0.098	0.090	0.066
$\epsilon_{\tilde{y}}$ [cm]	0.035	0.035	0.035	0.035

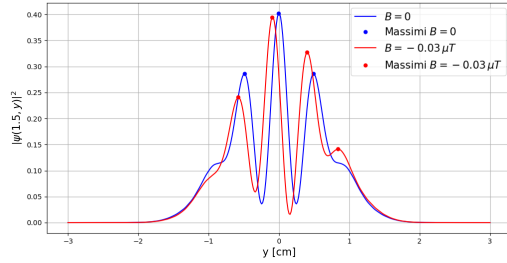
Tabella 3.4.1: Effetto Aharonov-Bohm: stima di  $\Delta y$  a partire da diversi parametri geometrici del sistema, con campo magnetico fissato.



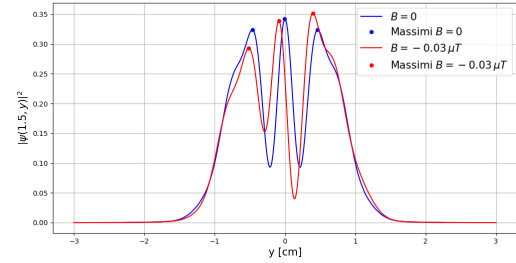
(a)  $l = 0.3$  cm,  $d = 0.9$  cm,  $B = -0.03$   $\mu\text{T}$ .



(b)  $l = 0.3$  cm,  $d = 0.9$  cm,  $B = 0.03$   $\mu\text{T}$ .



(c)  $l = 0.42$  cm,  $d = 0.9$  cm,  $B = -0.03$   $\mu\text{T}$ .



(d)  $l = 0.51$  cm,  $d = 0.99$  cm,  $B = -0.03$   $\mu\text{T}$ .

Figura 3.4.1: Effetto Aharonov-Bohm: traslazione delle frange di interferenza fissando il campo magnetico e variando i parametri  $l$  e  $d$ .

$B$ [ $\mu\text{T}$ ]	-0.02	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.08	-0.1
$\Delta y$ [cm]	0.078	0.117	0.156	0.195	0.234	0.312	0.390
$\Delta \tilde{y}$ [cm]	0.060	0.098	0.127	0.161	0.187	0.251	0.319
$\epsilon_{\tilde{y}}$ [cm]	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035

Tabella 3.4.2: Effetto Aharonov-Bohm: stima di  $\Delta y$  con  $l = 0.3$  cm e  $d = 0.9$  cm, variando il campo magnetico.

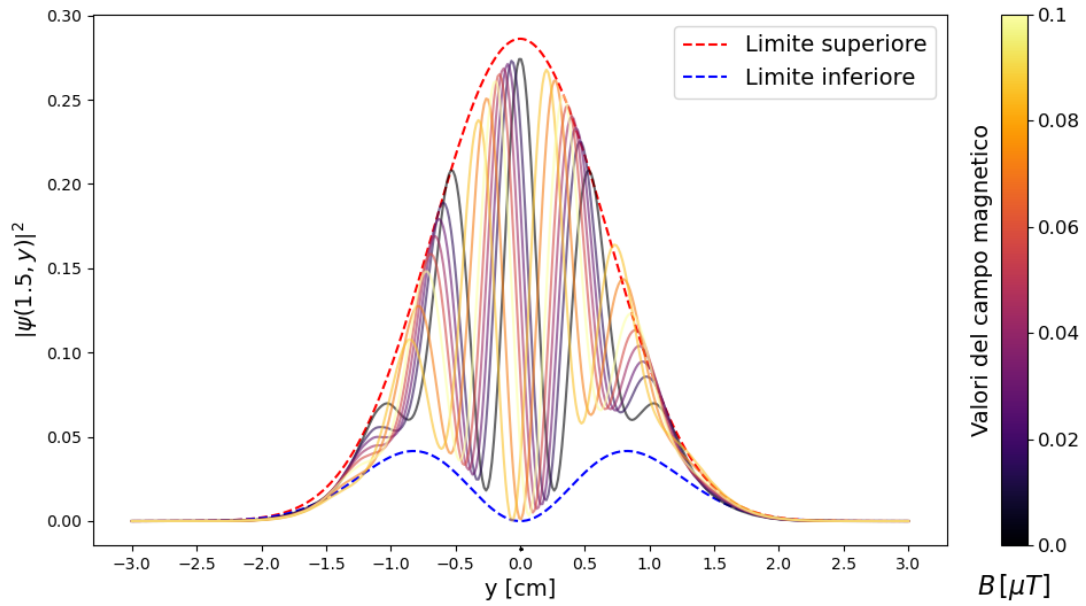


Figura 3.4.2: Effetto Aharonov-Bohm: traslazione delle frange di interferenza tra  $f_{sup}$  e  $f_{inf}$ .

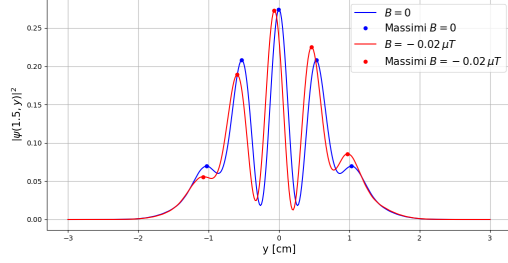
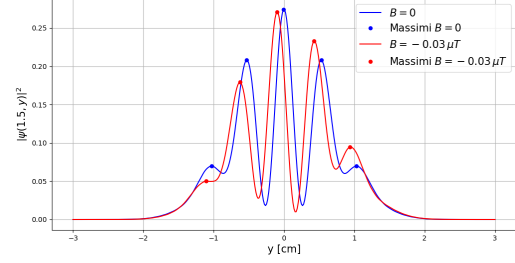
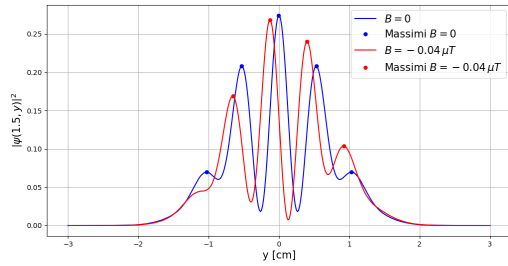
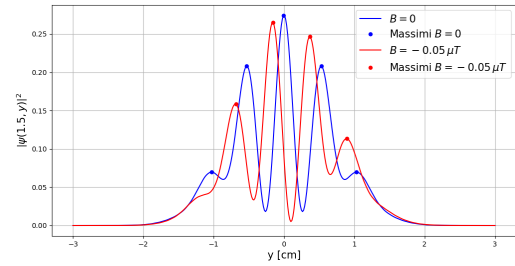
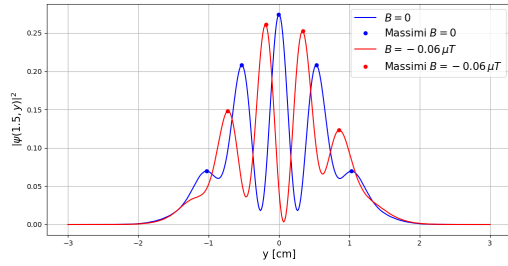
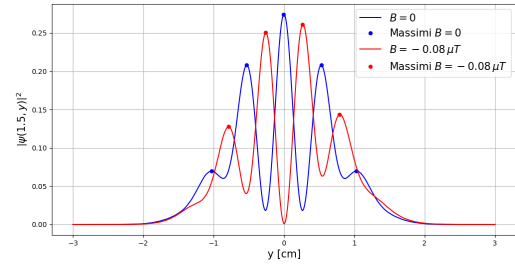
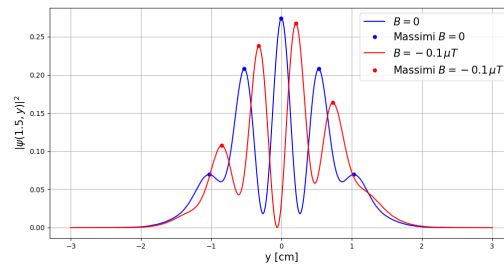
(a)  $B = -0.02 \mu\text{T}$ .(b)  $B = -0.03 \mu\text{T}$ .(c)  $B = -0.04 \mu\text{T}$ .(d)  $B = -0.05 \mu\text{T}$ .(e)  $B = -0.06 \mu\text{T}$ .(f)  $B = -0.08 \mu\text{T}$ .(g)  $B = -0.1 \mu\text{T}$ .

Figura 3.4.3: Effetto Aharonov-Bohm: traslazione delle frange di interferenza con  $l = 0.3 \text{ cm}$  e  $d = 0.9 \text{ cm}$ , variando i valori del campo magnetico.

## Capitolo 4

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato presentato uno studio numerico dell'effetto Aharonov-Bohm, un fenomeno fondamentale della fisica quantistica. Tale effetto prevede che un campo magnetico confinato all'interno di un solenoide possa influenzare la fase delle particelle cariche, come gli elettroni, che si muovono all'esterno del solenoide stesso. Nonostante il campo magnetico sia schermato e confinato, nella configurazione discussa (ovvero quella di un esperimento da diffrazione elettronica da doppia fenditura) questo comporta una modifica nella fase delle particelle esterne che portano a un'osservabile alterazione nella figura di interferenza che si forma. Nella prima parte della tesi si è introdotto l'effetto Aharonov-Bohm da un punto di vista teorico. In particolare, si sono derivati i potenziali elettromagnetici di un campo magnetico confinato all'interno di un solenoide, e si è dimostrato che questi potenziali non sono gauge-equivalenti a quelli nulli ovunque. Questo implica che questi due potenziali descrivono situazioni fisiche differenti. Una spiegazione più rigorosa di questa non-equivalenza è stata fornita mediante la topologia algebrica: essendo il dominio esterno al solenoide non semplicemente connesso, i potenziali associati a campo magnetico confinato e quelli identicamente nulli appartengono a classi di coomologia differenti. Infine si è mostrato analiticamente lo spostamento di fase delle frange di interferenza predetto da Aharonov-Bohm. Nella seconda parte della tesi, si è derivato uno schema alle differenze finite per risolvere l'equazione di Schrodinger, essendo il campo magnetico introdotto tramite l'accoppiamento minimale. Lo schema alle differenze finite è di tipo time-marching accurato al secondo ordine in spazio e tempo. Il nucleo centrale della tesi è la terza parte in cui si sono effettuate quattro serie di simulazioni. In primo luogo, si è studiata l'evoluzione libera di un pacchetto d'onda gaussiano, per verificare che, in accordo con le previsioni teoriche, la dispersione del pacchetto sia quadratica per tempi brevi e lineare per tempi lunghi. Successivamente, si è simulata la diffrazione di un pacchetto gaussiano attraverso una singola fenditura rettangolare, con un duplice scopo: validare ulteriormente il codice in presenza di un potenziale di parete e verificare la validità dell'approssimazione di diffrazione gaussiana del pacchetto

dalla fenditura. Come atteso, i risultati hanno evidenziato che tale approssimazione perde di accuratezza al crescere della larghezza di fenditura. Si è quindi simulata la diffrazione di un pacchetto gaussiano in presenza di una seconda fenditura. Utilizzando i parametri dei pacchetti gaussiani diffratti da una singola fenditura determinati nelle serie di simulazioni precedenti si è valutata semi-analiticamente la figura di interferenza a valle della doppia fenditura, e si è verificato che è in buon accordo con quella determinata in modo puramente numerico. Ciò ha fornito un'ulteriore validazione del codice alle differenze finite sviluppato nella presente tesi. Infine, si è studiato l'effetto Aharonov-Bohm vero e proprio, ovvero si è simulato numericamente l'esperimento della doppia fenditura in presenza di un campo magnetico confinato in un solenoide. I risultati hanno confermato che, come previsto teoricamente, la fase delle frange di interferenza si modifica proporzionalmente all'intensità del campo magnetico ed è indipendente dalle caratteristiche geometriche del sistema, quali distanza e larghezza delle fenditure.

I risultati ottenuti hanno dimostrato che il codice numerico sviluppato in questa tesi è in grado di replicare in modo fedele l'effetto Aharonov-Bohm. Tuttavia, vi è spazio per migliorare ulteriormente l'accuratezza del codice, ad esempio, attraverso l'adozione di integratori temporali più precisi, come gli schemi di Runge-Kutta al posto del metodo di Eulero esplicito.



# Bibliografia

- [1] Aharonov, Y., Bohm, D. (1959). Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3), 485.
- [2] Peshkin, M. (2005). The Aharonov-Bohm effect Part one: Theory. *The Aharonov-Bohm Effect*, 1-34.
- [3] Arnold, V. I. (2010). *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti.
- [4] Izaac, J., Wang, J. (2018). *Computational quantum mechanics*. Berlin: Springer.
- [5] Tu, L. W. (2011). *An introduction to manifolds*. New York: Springer.