Die Ableitung

Didaktische Überlegungen

Da es sich um eine Definition handelt

- Wie lautet diese fachlich korrekt?
- Muss/kann der fachliche Anspruch reduziert werden?

In der Vorlesung nur kurz angesprochen:

- Wie kann die Definition motiviert werden?

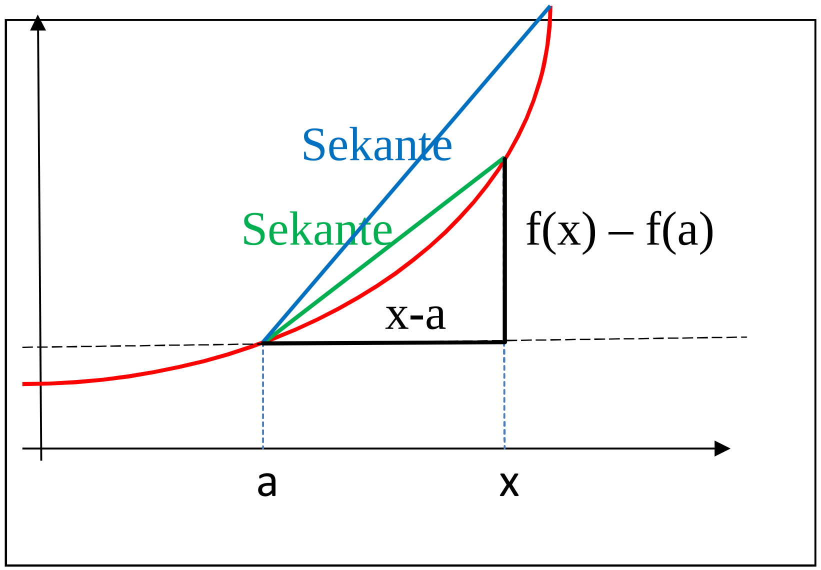
- Auf welchen Wegen kann man fachlich zur Definition hinführen?

Die Ableitung: Definition (Schule)

Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert. f heißt differenzierbar an der Stelle $a \in J$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existiert.}$$

Wenn der Grenzwert existiert, wird er mit f´(a) bezeichnet und heißt **Ableitung von f an der Stelle a**.



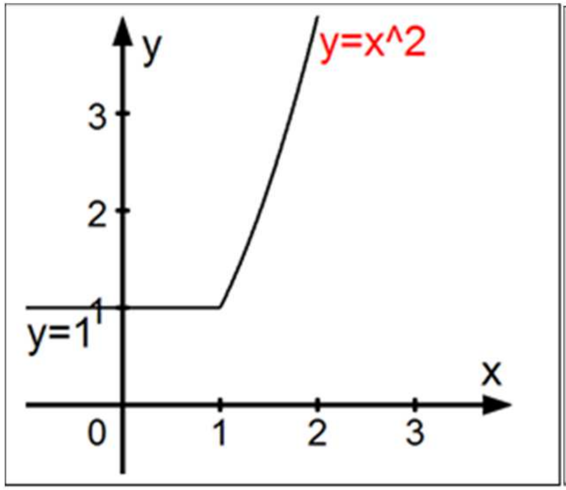
Definition an Beispielen prüfen

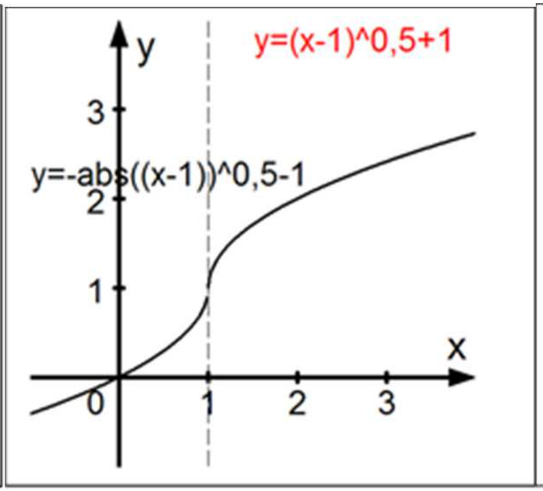
Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert. f heißt differenzierbar an der Stelle $a \in J$, wenn der Grenzwert

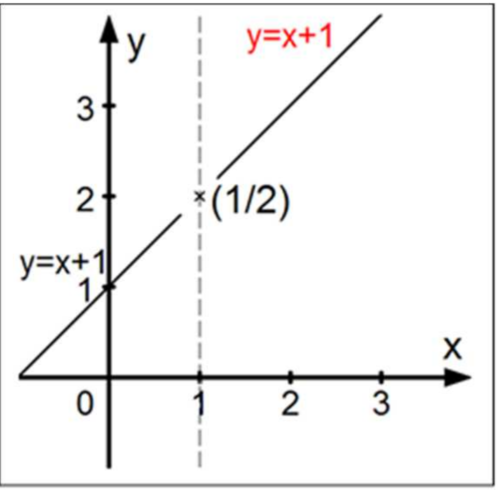
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existiert.}$$

Differenzierbar bei a = 1?

$y = 1$ $\qquad$ $y = x^2$ $\qquad$ $y = -\sqrt{1-x} - 1$ $\qquad$ $y = \sqrt{x-1} + 1$ $\qquad$ $y = x+1$

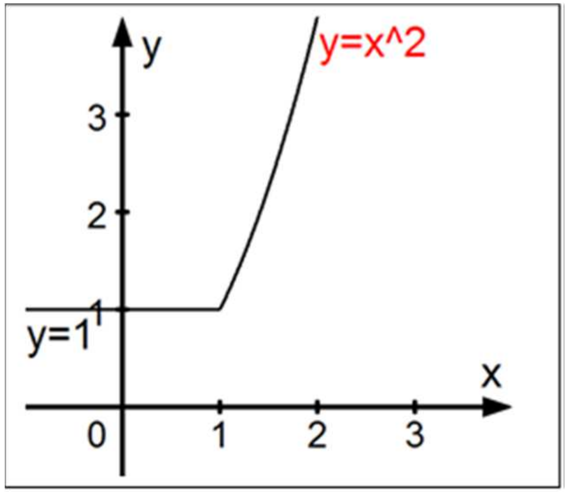


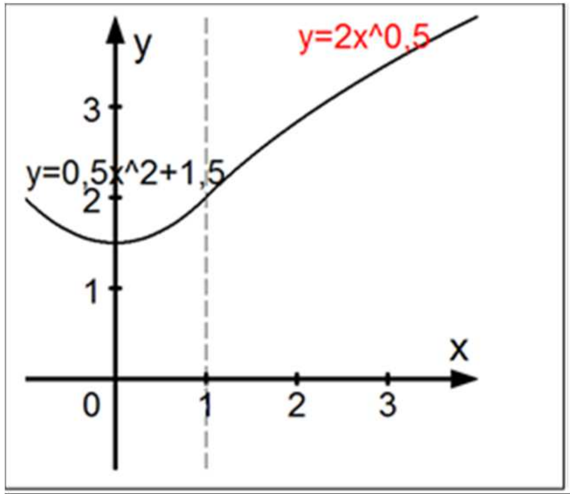


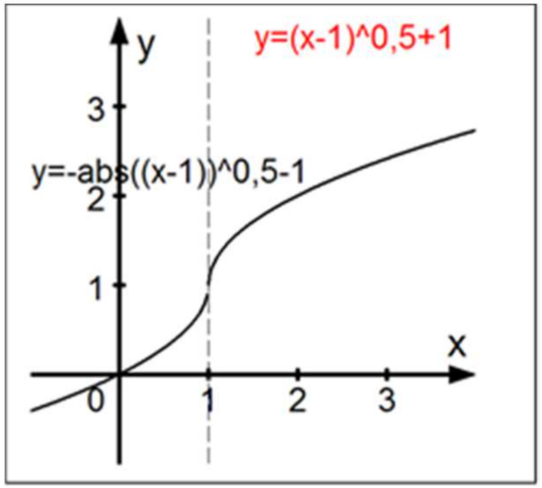


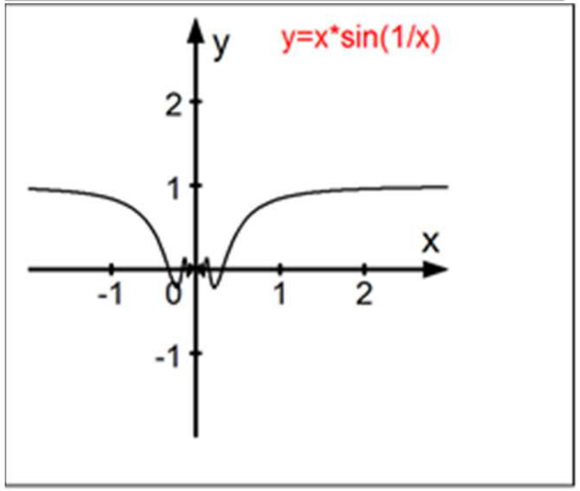
Die Ableitung: Grundvorstellung

Grundvorstellung: Zeichnen ohne Knick?









Wie bestimmt man Ableitungen?

1.Schritt: Man bestimmt Ableitungen für **Grund-funktionen mit der Definition**, z.B. für $f(x) = x^2$

a)Bestimmung von f´ an konkreten Stellen

b)Bestimmung von f´ an der Stelle a

Dasselbe für weitere Grundfunktionen wie

x^3 ; x^4 ; $1/x$; $1/x^2$; $\sqrt{x}$

Frage: h-Methode oder x-Methode?

2.Schritt: Man beweist Ableitungsregeln und bestimmt Ableitungen **mit Ableitungsregeln.**

Rechnerische Durchführung

$f(x) = x^2$ mit der x-Methode

Für $x \neq x_0$ gilt:

1. Differenzenquotient an der Stelle x $\quad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2. Der Funktionsterm von f wird eingesetzt $\quad = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}$

3. Der Bruchterm wird vereinfacht

a) Der Zähler wir als Produkt geschrieben $\quad = \dfrac{(x-x_0)\cdot(x+x_0)}{x-x_0}$

b) Der Bruchterm wird gekürzt $\quad = x + x_0$

4.Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird bestimmt. $\quad \lim\limits_{x \to x_0}(x+x_0) = 2x_0$

5. Ergebnis: Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 ist ist $f'(x_0) = 2x_0$.

Rechnerische Durchführung

$f(x) = x^2$ mit der h-Methode

Für $h \neq 0$ gilt:

1. Differenzenquotient an der Stelle x $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2. Der Funktionsterm von f wird eingesetzt $\quad = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

3. Der Bruchterm wird vereinfacht

a) Die Klammer im Zähler wird ausmultipliziert $\quad = \dfrac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}$

b) Der Zähler wird zusammengefasst $\quad = \dfrac{2xh+h^2}{h}$

c) Der Bruchterm wird gekürzt $\quad = 2x + h$

4.Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird bestimmt $\quad \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

5. Ergebnis: Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle x ist $f'(x) = 2x$.

Rechnerische Durchführung

Übungsblatt:
Rechnerische Bestimmung der Ableitung von Grundfunktionen mit der h- und mit der x-Methode.

Dazu gehört eine
- Reflektion der algebraischen Schwierigkeiten
- Reflektion der fachlichen Reduktion

9 **Ableitung und Ableitungsregeln**
Fachlogische Struktur:

Ableitungsregeln

Definition der Ableitung

Satz: (Potenzregel)
Ableitung der <u>Grundfunktionen</u> $f(x) = x^n$
$(n=1; 2; 3; \ldots)$ und $f(x) = k$ (k ist konstant)

Satz: Ableitung der <u>Grundfunktionen</u>
$f(x) = x^{-1}$; $f(x) = x^{-2}$

Satz: Ableitung der <u>Grundfunktionen</u>
$f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$.

Satz: Ableitung der <u>zusammengesetzten Funktionen:</u>
$f(x) = k \cdot g(x)$ (Faktorregel)
$f(x) = g(x) + h(x)$ (Summenregel)

Klasse 10

Ableitungsregeln

Kursstufe

Definition der Ableitung

Satz: Ableitung der <u>Grundfunktion</u>

$f(x) = e^x$

Satz: Ableitung der <u>zusammengesetzten Funktionen:</u>

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ (Produktregel)

$f(x) = g(h(x))$ (Kettenregel)

Bemerkung: Die ln-Funktion wird als Funktion nicht abgeleitet und untersucht. Der Sch. benötigt lediglich die Stammfunktion von 1/x. Das passt am besten zur Integralrechnung.

Formaler Beweis: Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Differenzenquotient $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$= \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \ldots \quad + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-2} + h^{n-1}$$

Ableitung: f´(x) = $\lim\limits_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \ldots \quad + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \right]$

$$= \lim_{h \to 0} \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \lim_{h \to 0} \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \ldots \quad + \lim_{h \to 0} h^{n-1}$$

$$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + 0 + \ldots + 0$$

= n· x^{n-1}

Beweis: Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Vorwissen:

Definition der Ableitung mit h-Methode

Binomischer Lehrsatz (muss bereitgestellt werden)

Grenzwertsätze (fachliche Reduzierung)

Gibt es eine zentrale Idee?

Kann sie der Schüler erkennen? Wie?

Spezifische Schwierigkeiten:

Die vielen Variablen, sehr abstrakte Ausdrücke

Die Binomialkoeffizienten

Beweis: Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Unterrichtliches Vorgehen:

1. Konkrete Bsp. ableiten: x^2 , x^3, usw. *Erfahrungen sammeln*

2. Vermutung formulieren, zunächst in Worten
   Aha, da gibt es eine Regel und ich kann diese formulieren

3. Kann man einsehen, warum die Regel gelten muss?
   Ja, das kann man sehen

4. Ist ein formaler Beweis noch sinnvoll?

Beweis: Summenregel und Faktorregel

Gegeben Funktionen g und h und k aus R.

1. Faktorregel: Für $f(x) = k \cdot g(x)$ gilt $f'(x) = k \cdot g'(x)$

2. Summenregel:
   Für $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Wo liegen die didaktischen Herausforderungen?

Strategie: Zusammengesetzte Funktionen

Ableitung: Grundfunktionen f(x) =
x^r (r$\in R$); $\sin(x)$; $\cos(x)$; e^x

Ableitung: Zusammengesetzte Funktionen
Summenregel
Faktorregel
Produktregel
Kettenregel
Quotientenregel

Stammfunktion bestimmen („Aufleitung“): Regeln?

Nächste Woche brauchen Sie Zirkel und Lineal!