Mathematische Grundlagen

Gleichungen und Ungleichungen

Lösung einer quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},\ \Delta = b^2 - 4ac$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta},\ \Delta = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{zwei reelle Lösungen} \\ \Delta = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{eine reelle Lösung} \\ \Delta < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{keine reelle Lösung} \end{aligned}$$

Rechenregeln für Ungleichungen (auch gültig mit $\leq$ bzw. $\geq$):

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Longrightarrow \quad cx < cy, \text{ falls } c > 0 \\ x < y \quad &\Longrightarrow \quad cx > cy, \text{ falls } c < 0 \\ |x - a| < r \quad &\Leftrightarrow \quad a - r < x < a + r \end{aligned}$$

Beispiel

Die Gleichung

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

kann mit der Substitution $z = x^2$ als quadratische Gleichung

$$z^2 - 8z - 9 = 0$$

geschrieben werden. Diese hat die Lösungen $z = -1$ und $z = 9$.

Rücksubstitution führt auf $x^2 = -1$ bzw. $x^2 = 9$. Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung. Die Gleichung $x^2 = 9$ liefert $x = \pm 3$ als die einzigen reellen Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel

Bestimmung der Lösungsmenge L der Ungleichung

$$\frac{3}{4}(3x + 1) \geq 2x + \frac{1}{2}|x - 1|.$$

Äquivalente Umformungen $\rightsquigarrow$

$$9x + 3 \geq 8x + 2|x - 1| \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 \geq 2|x - 1|$$

1. Fall: $x \geq 1 \rightsquigarrow$

$$x + 3 \geq 2(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 5$$

$\rightsquigarrow L_1 : 1 \leq x \leq 5$

2. Fall: $x < 1 \rightsquigarrow$

$$x + 3 \geq -2(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{3}$$

$\rightsquigarrow L_2 : -\frac{1}{3} \leq x < 1$

Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = [-\frac{1}{3}, 5]$

Fakultät

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird mit

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

bezeichnet (lies: n Fakultät). Konsistent mit der Definition des leeren Produktes setzt man $0! = 1$.
Die Zahl $n!$ entspricht der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten n unterschiedliche Objekte anzuordnen.

Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ definiert man den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}\,.$$

Er gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen an.
Wegen $0! = 1$ gilt insbesondere

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

und aus der Definition folgt:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Beispiel

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Auswahl von 2-elementigen Teilmengen aus der Menge $\{a, b, c, d, e\}$:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}$$
$$\{b, a\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}$$
$$\cdots$$

$\rightsquigarrow$ $5 \cdot 4$ Teilmengen.
Reihenfolge irrelevant

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \cdots$$

$\rightsquigarrow$ Division durch 2

Pascalsches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

lassen sich mit Hilfe der Rekursion

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

in einem Dreiecksschema, dem sogenannten Pascalschen Dreieck, berechnen.

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & 1 & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & 1 & & 1 & & & \\
\binom{2}{k} & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
\binom{3}{k} & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
\binom{4}{k} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Binomischer Satz

Mit der binomischen Formel lassen sich Potenzen einer Summe von zwei Variablen berechnen. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist für $n = 2, 3$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 , \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .
\end{aligned}
$$

Abbildung

Unter einer Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ eindeutig ein bestimmtes $b = f(a) \in B$ zuordnet:

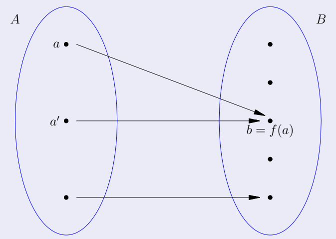
$$f : A \longrightarrow B .$$

Für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise

$$a \mapsto b = f(a)$$

und bezeichnet b als das Bild von a, bzw. a als ein Urbild von b.
Ist $M \subseteq A$, so heißt $f(M) = \{f(m) | m \in M\} \subseteq B$ das Bild von M und für $N \subseteq B$ heißt $f^{-1}(N) = \{a | f(a) \in N\} \subseteq A$ das Urbild von N unter der Abbildung f.
Die Menge $f(A)$ heißt Wertebereich und A Definitionsbereich der Abbildung f.

Eine Abbildung kann man folgendermaßen illustrieren.



Wie aus dem Bild ersichtlich ist, müssen nicht alle Elemente aus B als Bild eines Elementes aus A auftreten und ein Element aus B darf auch Bild mehrerer Elemente aus A sein. Es muss allerdings für jedes Element aus A ein eindeutiges Bild geben, das heißt von jedem a muss genau ein Pfeil ausgehen.
Man erkennt auch, dass ein Bild b mehrere Urbilder haben kann, hier beispielsweise a und a'.

Statt Abbildung verwendet man auch den Begriff Funktion, insbesondere in der reellen und komplexen Analysis.

Eigenschaften von Abbildungen

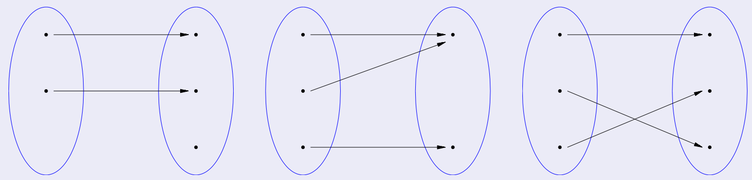
Eine Abbildung

$$f : A \longrightarrow B$$

zwischen zwei Mengen A und B heißt

- injektiv, falls $f(a) \neq f(a')$ für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$
- surjektiv, falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$
- bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe lassen sich anhand von Mengendiagrammen illustrieren:



injektiv surjektiv bijektiv

Beispiel

(i) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

ist nicht surjektiv, da z.B. -1 kein Urbild hat. f ist nicht injektiv, da z.B. $f(-1) = f(1)$.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$$

ist bijektiv.

- Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $x := \sqrt[3]{y}$ gilt

$$f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = y.$$

- Injektivität:

$$f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x^3 = x'^3 \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Verknüpfung von Abbildungen

Die Verknüpfung oder Komposition zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist durch

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

definiert und in dem folgendem Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d.h.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

aber nicht kommutativ, also ist im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$.

Inverse Abbildung

Für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ ist durch

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

die inverse Abbildung $f^{-1} : B \to A$ definiert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $a = f^{-1}(f(a))$, d.h. $f^{-1} \circ f$ ist die identische Abbildung.