

Grundlagen der Physik – Lerneinheit 3

Einführung in die Mechanik



Der Sterngucker (Carl Spitzweg 1808 – 1885)

Dieter Bangert

Januar 2017

Inhaltsverzeichnis Lerneinheit 3 - Grundlagen der Physik -

Vorwort	5
1 Mechanik der Massenpunkte und starren Körper	6
1.1 Einführung	6
2 Grundbegriffe der linearen Bewegung	7
2.1 Geschwindigkeit bei gleichförmiger und ungleichförmiger Bewegung	7
2.1.1 Gleichförmige Bewegung	8
2.1.2 Ungleichförmige Bewegung	9
2.2 Beschleunigung	11
2.2.1 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	12
2.2.2 Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung	14
2.2.3 Berechnung der Wegfunktion $s(t)$	14
3 Dynamik: Masse, Impuls und Kraft	17
3.1 Träge Masse	17
3.2 Impuls	17
3.3 Newtonsche Axiome	17
3.4 Kräfte, Wechselwirkungen und ihre Ursachen	22
3.5 Coulombsche und Newtonsche Reibungskräfte	27
3.5.1 Haftreibung	28
3.5.2 Gleitreibung	31
3.5.3 Rollreibung	32
3.5.4 Anwendungsbeispiel: Bremsen im Straßenverkehr	34
3.5.5 Fahrwiderstand	36
3.5.6 Geschwindigkeitsabhängige Reibungskräfte	37
4 Arbeit, Energie und Leistung	42
4.1 Hubarbeit und potentielle Energie im Schwerfeld der Erde	42
4.2 Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie	42
4.3 Federkraft und Federspannarbeit	48
4.4 Leistung	50
4.5 Impulserhaltung	51
4.5.1 Zentrale Stoßprozesse	52
4.5.2 Raketenantrieb und Strahltriebwerk	56
4.6 Konservative Kräfte und Energieerhaltung	59
5 Drehbewegungen	64
5.1 Kinematik der Rotation	65
5.2 Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft	69
5.3 Drehmoment	70
5.4 Massenträgheitsmoment	78
5.5 Drehimpuls	84
5.6 Dynamisches Grundgesetz der Rotation	85
5.7 Rotationsenergie	86
5.8 Verfahrenstechnische Anwendung: Zentrifugen	89
5.9 Schleudern und Kippen im Straßenverkehr	90
5.9.1 Schleudern	90

5.9.2	Kippen	92
5.9.3	Rekuperation	97
6	Wiederholungstest	98
6.1	Testfragen	98
6.2	Lösungen der Testfragen	100
7	Zusammenfassung	102
8	Übungen	106
8.1	Übungsaufgaben	106
8.2	Lösungen der Übungsaufgaben	108
Anhang		
A1	Griechisches Alphabet	115
A2	Formelzeichen	116
A3	Literaturauswahl	117

Vorwort

Nicht weil es schwer ist, fangen wir nicht an, sondern weil wir nicht anfangen, ist es schwer.

Seneca (4 v. Chr. – 65 n. Chr.)

Die vorliegende Lerneinheit stellt eine elementare Einführung in die Mechanik für Studierende des Wirtschaftsingenieurwesens dar, die Physik als Hilfswissenschaft betreiben. Im Vordergrund steht eine ausführliche Behandlung der physikalischen Grundbegriffe der Kinematik und Dynamik. Ziel dieser Lerneinheit ist das Vertrautwerden mit mechanischen Phänomenen. Dabei soll die Einsicht in physikalische Gesetzmäßigkeiten vertieft werden. So gerüstet soll das Erlernte handlungsorientiert zur Bearbeitung physikalischer Problemstellungen genutzt werden. Die selbständige Lösung von physikalischen Aufgaben stellt eine über das Lesen und Nachvollziehen des vorliegenden Textes hinausgehende Fertigkeit dar. Die dazu notwendige Problemlösungskompetenz muss sich jeder angehende Ingenieur eigeninitiativ erarbeiten. Das Qualifikationskonzept dafür ist einfach: Intellektuelles Training durch Beschäftigen, Auseinandersetzen und immer wieder Üben.

Die Beschreibung der Grundbegriffe der linearen Bewegung ist das Thema von Kapitel 2. Daran anschließend liefert Kapitel 3 einen Überblick über Kräfte und ihre Eigenschaften. Kapitel 4 beschäftigt sich mit den Begriffen Arbeit, Energie und Leistung. In Kapitel 5 erfolgt abschließend eine Behandlung der Drehbewegungen. Den für die Ingenieurspraxis wichtigen Phänomenen der Schwingungen und Wellen ist eine eigenständige Lerneinheit gewidmet.

Verbesserungsvorschläge, Fehlermeldungen und sonstige Kommentare oder Hinweise sind erwünscht. Bitte richten Sie diese an folgende E-Mail-Adresse:

bangert.dieter@fh-swf.de

Marburg, Januar 2017

Dieter Bangert

1 Mechanik der Massenpunkte und starren Körper

1.1 Einführung

Dieses Kapitel liefert unter Verzicht auf Vollständigkeit eine Einführung in die Prinzipien und Grundbegriffe der Mechanik. Die Mechanik als ältestes Teilgebiet der Physik basiert auf einer makroskopischen Betrachtung der Materie. Ihre Gesetzmäßigkeiten sind auch für andere Teilbereiche der Physik von Bedeutung. So führt die Anwendung der mechanischen Stoßgesetze auf der Ebene der Atome und Moleküle zur kinetischen Theorie der Wärme und zur statistischen Mechanik, die eine mikroskopische Erklärung der phänomenologischen Thermodynamik ermöglicht. In Kapitel 2 erfolgt eine Einführung in die Kinematik von einfachen Bewegungsvorgängen in Raum und Zeit. Zentrales Thema von Kapitel 3 ist die Dynamik. Dort werden die Kräfte untersucht, welche die Ursache aller Bewegungsänderungen darstellen. Nachdem in Kapitel 4 die Begriffe Arbeit, Energie und Leistung vorgestellt wurden, wird schließlich in Kapitel 5 eine für die Technik wichtige Klasse von Bewegungen beschrieben, nämlich die Drehbewegungen.

Die Eigenschaften materieller Objekte werden im Rahmen der Mechanik anhand zweier idealisierter Modellkörper diskutiert: Massenpunkt und starrer Körper. Die Bewegung eines Körpers ist dann vollständig beschrieben, wenn die Bewegung aller seiner Teile angegeben werden kann. Der einfachste Fall liegt vor, wenn die Abmessungen des Körpers klein gegen die bei seiner Bewegung zurückgelegten Entfernungen sind, sodass man sich auf die Betrachtung der Bewegung eines einzigen Punktes beschränken kann. Dazu idealisiert man den betrachteten Körper durch einen materiellen Punkt, den so genannten Massenpunkt, der keine räumliche Ausdehnung besitzt und den man die Masse des betrachteten Körpers zuweist. So kann beispielsweise die Bewegung der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne als Massenpunkt behandelt werden. Dies ist jedoch nicht möglich, wenn die Drehung der Erde um ihre eigene Achse behandelt werden soll. Hier kann von der Ausdehnung der Erde nicht abgesehen werden. Werden bei einem festen Körper Formänderungen ausgeschlossen, so kann er als starrer Körper idealisiert werden, der in allen seinen Teilen von absolut unveränderlicher Gestalt ist. Ein starrer Körper kann daher als ein System von Massenpunkten aufgefasst werden, deren gegenseitige Abstände sich nicht verändern.

2 Grundbegriffe der linearen Bewegung

Die Lehre von den Bewegungen der Körper im Raum wird als **Kinematik** bezeichnet. Weg \vec{s} , Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} stellen vektorielle Größen dar, für deren vollständige Beschreibung die Angabe von Betrag und Richtung erforderlich ist. Die allgemeinste Form einer Bewegung erfolgt auf einer gekrümmten Raumkurve im dreidimensionalen Raum. Bei den Bewegungsformen, die ein Körper im Raum ausführen kann, wird zwischen Translationen, Rotationen und aus Translation und Rotation zusammengesetzten Bewegungen unterschieden. Bei einer Translation erfolgt eine Verschiebung aller Punkte des bewegten Körpers auf kongruenten Bahnen gleicher Form und Größe. Bei einer reinen Rotation beschreiben alle Punkte des ausgedehnten Körpers konzentrische Kreise mit unterschiedlichen Radien. Für den Spezialfall der linearen Bewegung, bei der die Bewegungsrichtung durch die Lage einer Geraden definiert ist, können Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung vereinfachend durch skalare Größen beschrieben werden. Die lineare Bewegung erfolgt geradlinig und ist dadurch auf eine Raumdimension beschränkt. Sie ist eindimensional und stellt die einfachste Bewegungsart dar. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf diesen Sonderfall der linearen Bewegung. Der Rotationsbewegung ist ein eigenständiges Kapitel gewidmet.

2.1 Geschwindigkeit bei gleichförmiger und ungleichförmiger Bewegung

Zur analytischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen wurde die Differenzialrechnung erstmals durch *Isaac Newton* (1643 – 1727) eingeführt. Dieses mathematische Konzept soll am Beispiel des freien Falles eines Massenpunktes näher erläutert werden.

Ein Regentropfen falle aus einer Wolke reibungsfrei unter dem Einfluss einer konstanten Schwerkraft senkrecht nach unten. Die quantitative Beschreibung dieser geradlinigen Bewegung erfolge mithilfe einer vertikalen Zahlengerade, mit welcher der Ort s des Regentropfens in Abhängigkeit von der Zeit t angegeben werden kann. Die Funktion $s(t)$ gibt dabei Auskunft darüber, an welcher Stelle s sich der Tropfen zum Zeitpunkt t befindet. Der Ort könnte auch durch die Ortskoordinate x bezeichnet werden. Für die zeitabhängige Ortsfunktion erhielte man dann $x(t)$ statt $s(t)$. Als analytisches Maß für seine momentane Ortsveränderung wird die Geschwindigkeit v des Tropfens definiert. Der Regentropfen hat dann zu jedem Zeitpunkt t eine wohldefinierte Geschwindigkeit $v(t)$. Befindet sich der Tropfen zur Zeit t_0 am Ort s_0 und zu einer späteren Zeit t_1 am Ort s_1 , dann hat er im Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ den Weg $\Delta s = s_1 - s_0$ zurückgelegt. Seine mittlere Geschwindigkeit \bar{v} ist dann:

$$\bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.1)$$

Im Zähler und Nenner dieses Ausdrucks stehen jeweils Differenzen. Die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} wird als Quotient dieser Differenzen, d. h. als Differenzenquotient definiert. Die freie Fallbewegung unter dem Einfluss einer konstanten Schwerkraft ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, bei der die Fallgeschwindigkeit ständig zunimmt. Soll die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t bestimmt werden, zu dem der Tropfen die Position $s(t)$ einnimmt, so ist nach Verstreichen einer infinitesimal kurzen Zeitspanne Δt , d. h. zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ eine erneute Positionsbestimmung (Wegmessung) notwendig. Der Tropfen wird sich um Δs weiterbewegt und die neue Position $s(t) + \Delta s$ eingenommen haben. Eine immer bessere Approximation der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t erhält man nun dadurch, dass man die Zeitspanne Δt immer kleiner wählt. Als Momentangeschwindigkeit $v(t)$ wird dann der Grenzwert des Differenzenquotienten mit $\Delta t \rightarrow 0$ definiert.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Dieser Grenzwert des Differenzenquotienten heißt Differenzialquotient. Aus historischen Gründen werden Differenzialquotienten nach der Zeit durch einen Punkt über dem Symbol der zu differenzierenden Größe bezeichnet:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d}{dt} s(t) = \dot{s}(t) = v(t) \quad (2.3)$$

2.1.1 Gleichförmige Bewegung

Wird der zurückgelegte Weg s als Funktion der Zeit t in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen, so lässt sich der Bewegungsablauf grafisch in einem *Weg-Zeit-Diagramm* darstellen.

Ein Läufer befinde sich zum Zeitpunkt t_1 an einem Ort s_1 . Aufgrund seiner Bewegung erreicht er zu einem späteren Zeitpunkt t_2 den Ort s_2 . Er hat sich somit von dem Ort s_1 zum Ort s_2 bewegt und dabei die Wegstrecke $\Delta s = s_2 - s_1$ zurückgelegt. Die für die zurückgelegte Wegstrecke Δs benötigte Zeitspanne ist $\Delta t = t_2 - t_1$. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 1 skizziert.

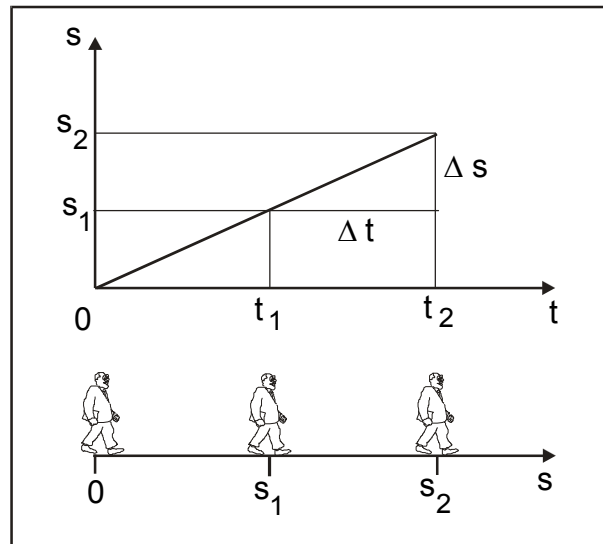


Abb. 1: Weg-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung

Eine Bewegung heißt *gleichförmig*, wenn in gleichen Zeitintervallen Δt gleiche Wegstrecken Δs zurückgelegt werden. Die gleichförmige Bewegung erfolgt mit *konstanter* Geschwindigkeit $v = v_0$.

Es ist: $v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ oder $\Delta s = v_0 \Delta t$

Die Geschwindigkeit v ist eine abgeleitete physikalische Größe. Ihre SI - Einheit ist $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.1.2 Ungleichförmige Bewegung

Bei der *ungleichförmigen* Bewegung ist die Geschwindigkeit v *nicht* konstant, sondern eine Funktion $v = v(t)$ der Zeit t (Abb.2).

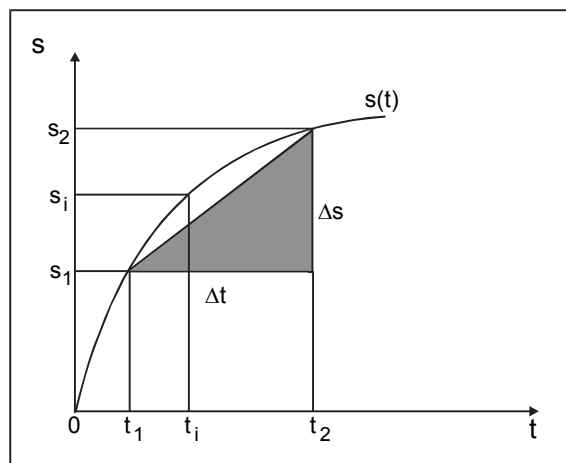


Abb. 2: Weg-Zeit-Diagramm einer ungleichförmigen Bewegung

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** oder mittlere Geschwindigkeit \bar{v} wird durch den Differenzenquotienten

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.4)$$

dargestellt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird häufig auch durch das Symbol $\langle v \rangle$ gekennzeichnet.

Die **Momentangeschwindigkeit** v wird durch den Grenzwert des Differenzenquotienten, d.h. durch den Differenzialquotienten bestimmt:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d}{dt} s(t) = \dot{s}(t) \quad (2.5)$$

$\dot{s}(t)$ beschreibt mathematisch die 1. Ableitung der Wegfunktion $s(t)$ nach der Zeit t .

Im Weg-Zeit-Diagramm ergibt sich die Momentangeschwindigkeit $v(t_i)$ zum Zeitpunkt t_i als Steigung der Tangente im Punkt (s_i, t_i) an die Bahnkurve $s(t)$.

Allgemein gilt:

Eine zeitliche Änderung der Geschwindigkeit kann, da die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist, sowohl durch eine Änderung des Geschwindigkeitsbetrages als auch durch eine Änderung der Richtung der Geschwindigkeit bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag verursacht werden. Die Geschwindigkeit \vec{v} stellt nämlich einen polaren Vektor dar. Raumspiegelung führt zur Umkehr der Bewegungsrichtung, d. h. bewegt sich ein Körper beispielsweise von links nach rechts, so zeigt das Spiegelbild eine Bewegung von rechts nach links. Mathematisch wird die Raumspiegelung durch Anwendung des Paritätsoperators \mathbf{P} auf den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} ausgedrückt. Es gilt dabei:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.6)$$

Für den Ortsvektor \vec{r} erhält man bei Spiegelung:

$$\mathbf{P} \vec{r} = -\vec{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} d\vec{r} = -d\vec{r}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{P} \vec{v} = \mathbf{P} \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v}$$

Durch Raumspiegelung kehrt sich das Vorzeichen von polaren Vektoren um, es findet eine Umkehrung der Bewegungsrichtung statt.

2.2 Beschleunigung

Um Änderungen der Geschwindigkeit während des Bewegungsvorganges beschreiben zu können, führt man den Begriff der Beschleunigung ein. Die Geschwindigkeit beschreibt die Änderung der zurückgelegten Wegstrecke mit der Zeit, und die Beschleunigung wird definiert als Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit.

Für die Durchschnittsbeschleunigung \bar{a} gilt

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Die Durchschnittsbeschleunigung \bar{a} ist das Verhältnis aus der Änderung der Geschwindigkeit $\Delta v = v_2 - v_1$ zwischen zwei Orten s_2 und s_1 und dem zum Zurücklegen der Strecke $\Delta s = s_2 - s_1$ benötigten Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$.

Für die Momentanbeschleunigung $a(t)$ folgt:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}(t). \quad (2.8)$$

$\ddot{s}(t)$ beschreibt mathematisch die zweite Ableitung der Wegfunktion $s(t)$ nach der Zeit t . Die SI-Einheit der Beschleunigung a ist

$$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Diese skalare Schreibweise ist nur bei *geradliniger* Bewegung zulässig. Im allgemeinen Fall der *krummlinigen* Bewegung ist der Vektorcharakter der Geschwindigkeit zu berücksichtigen und man erhält

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}. \quad (2.9)$$

Unter dieser vektoriellen Definition der Beschleunigung ist Folgendes zu verstehen: Die Position eines sich im dreidimensionalen Raum bewegendes Massenpunktes wird zu jedem beliebigen Zeitpunkt t durch eine vektorwertige Wegfunktion

$$\vec{s}(t) = (s_x(t), s_y(t), s_z(t))$$

beschrieben, deren Komponenten die Koordinaten des Massenpunktes darstellen, die ihrerseits reelle Funktionen der Zeitvariablen t sind. Für die Geschwindigkeit des Massenpunktes folgt dann:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{s}(t) = \left(\frac{d}{dt} s_x(t), \frac{d}{dt} s_y(t), \frac{d}{dt} s_z(t) \right) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)).$$

Die Beschleunigung ist dann ebenfalls eine vektorwertige Funktion und es gilt:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \left(\frac{d}{dt} v_x(t), \frac{d}{dt} v_y(t), \frac{d}{dt} v_z(t) \right) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)).$$

Der Vektor \vec{a} enthält dabei sowohl die Änderung des Betrages als auch der Richtung von \vec{v} ; er weist in Richtung von $d\vec{v}$, fällt also im Allgemeinen nicht mit der Bahnrichtung zusammen. Es gilt:

Jede krummlinige Bewegung ist immer eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Im Folgenden erfolgt eine *Beschränkung* auf *geradlinige* Bewegungen, bei denen keine Richtungsänderung auftritt und somit nur Änderungen des Geschwindigkeitsbetrages betrachtet werden müssen.

2.2.1 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Eine Bewegung heißt *gleichmäßig* beschleunigt, wenn die Beschleunigung a konstant ist, d.h. unabhängig von der Zeit immer denselben Wert besitzt. Das *Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm* für die *gleichmäßig* beschleunigte Bewegung hat die in Abb.3 dargestellte Form. Zum Anfangszeitpunkt ($t = 0$) besitzt der Körper die Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

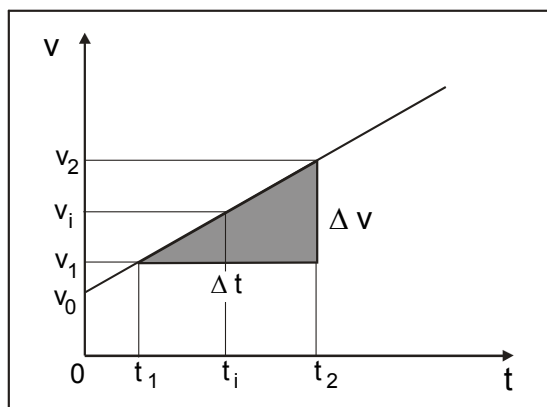


Abb. 3: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a .

Für eine beschleunigte Bewegung ist die Beschleunigung a positiv ($a > 0$), während für eine verzögerte Bewegung (Abbremsung) a negativ ($a < 0$) ist. Im Folgenden wird mit a der Betrag der Beschleunigung bezeichnet. Es ist dann:

$$a = |a| \geq 0$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung lautet dann:

$$v(t) = v_0 \pm at$$

Das positive Vorzeichen gilt für die beschleunigte Bewegung, bei der im Laufe der Zeit die Geschwindigkeit linear zunimmt. Bei einer verzögerten Bewegung, bei der die Geschwindigkeit stetig abnimmt, gilt das negative Vorzeichen im Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz.

Der freie Fall stellt ein Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit positiver Beschleunigung $a = g$ dar. Das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls aus der Ruhelage mit konstanter Beschleunigung g lautet:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.10)$$

Die Proportionalitätskonstante g ist dabei die so genannte Erdbeschleunigung. Das zugehörige Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz des freien Falls erhält man durch Bildung des Differenzialquotienten.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} g \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} g(2t + \Delta t) = gt$$

Die Momentangeschwindigkeit $v(t) = gt$ nimmt beim freien Fall linear mit der Fallzeit t zu.

Ist speziell $a = 0$, so ist wegen $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$ auch $\Delta v = 0$ und damit ist die Geschwindigkeit $v = v_0$ konstant. Für beliebige Zeiten t_1 und t_2 gilt dann: $v(t_1) = v(t_2) = v_0$. Die Bewegung mit einer von der

Zeit unabhängigen Geschwindigkeit v_0 erfolgt **gleichförmig** ohne Beschleunigung (Abb. 4).

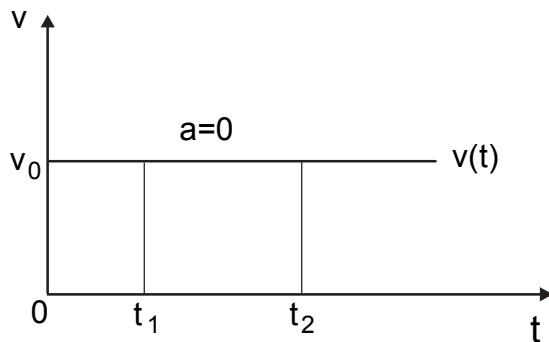


Abb. 4: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung

2.2.2 Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung

Ändert sich der Betrag oder die Richtung der Beschleunigung, so nennen wir die Bewegung *ungleichmäßig* beschleunigt. Es gilt $a = a(t)$. In Abb. 5 sind zwei Beispiele für ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen dargestellt. Die Kurve **1** der Funktion $v_1(t)$ stellt eine *positiv* beschleunigte Bewegung ($a(t) > 0$) dar. Die Kurve **2** der Funktion $v_2(t)$ beschreibt eine *negativ* beschleunigte Bewegung (Abbremsung) mit $a(t) < 0$. Die jeweilige Momentangeschwindigkeit $v_1(t)$ bzw. $v_2(t)$ ist dann eine nichtlineare Funktion der Zeit.

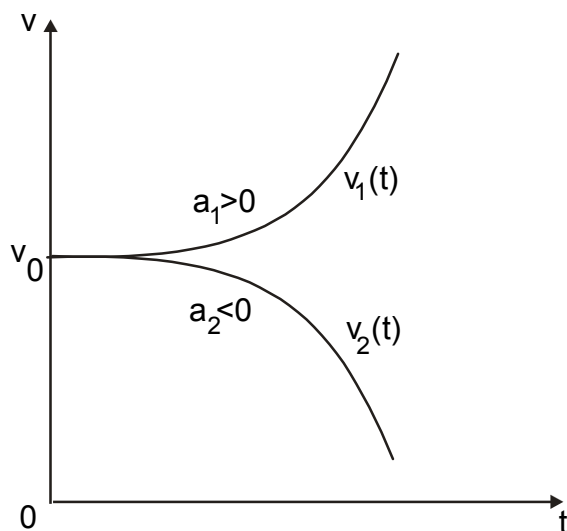


Abb. 5: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm für zwei ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen

2.2.3 Berechnung der Wegfunktion $s(t)$ aus Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung

Für eine Bewegung mit **konstanter** Beschleunigung a_0 gilt

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \quad (2.11)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} dv &= a_0 dt \\ \int_0^t dv &= \int_0^t a_0 dt \\ v(t) - v(t=0) &= a_0 t \end{aligned}$$

Für $v(t=0)$ wird abkürzend v_0 gesetzt. Damit folgt das **Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz** für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$v(t) = a_0 t + v_0 \quad (2.12)$$

Dabei gilt:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \text{ und } ds = v(t)dt \text{ oder } ds = (a_0 t + v_0)dt.$$

Für den zurückgelegten Weg s als Funktion der Zeit t erhält man:

$$\int_0^t ds = \int_0^t (a_0 t + v_0) dt$$

$$s(t) - s(t=0) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t$$

Wird für $s(t=0)$ abkürzend s_0 gesetzt, so folgt daraus das **Weg-Zeit-Gesetz** für die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (2.13)$$

Wird in Gl. 2.13 die Zeit t mithilfe von Gl. 2.12 eliminiert, so erhält man die Endgeschwindigkeit v , die ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleichmäßig beschleunigter Körper nach Durchlaufen der Wegstrecke s erreicht:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as} \quad (2.14)$$

Je nach Art der Bewegung kann die konstante Beschleunigung $a_0 > 0$ oder $a_0 < 0$ (Abbremsung) sein. Werden zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Anfangsbedingungen $s_0 = 0$ und $v_0 = 0$ gewählt, so erhält man für Bewegungen im Schwerfeld der Erde mit der konstanten Erdbeschleunigung $a_0 = g$ aus dem Weg-Zeit-Gesetz das **Fallgesetz für den freien Fall** aus der Ruhelage

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2.$$

Das Fallgesetz erlaubt mithilfe der Messung von Fallstrecke s und Fallzeit t eines zum Anfangszeitpunkt ruhenden Körpers die experimentelle Bestimmung der Fallbeschleunigung oder Erdbeschleunigung, die üblicherweise durch das Symbol g bezeichnet wird.

$$g = \frac{2s}{t^2} \quad (2.15)$$

In Abb. 6 ist das Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Wegfunktion $s(t)$ aus einer gegebenen Beschleunigungsfunktion $a(t) = a_0$ mittels mathematischer Integration sowie die Bestimmung der Beschleunigungsfunktion $a(t)$ aus einer gegebenen Wegfunktion $s(t)$ mithilfe der Differenziation grafisch dargestellt. Hierzu wurde eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gewählt.

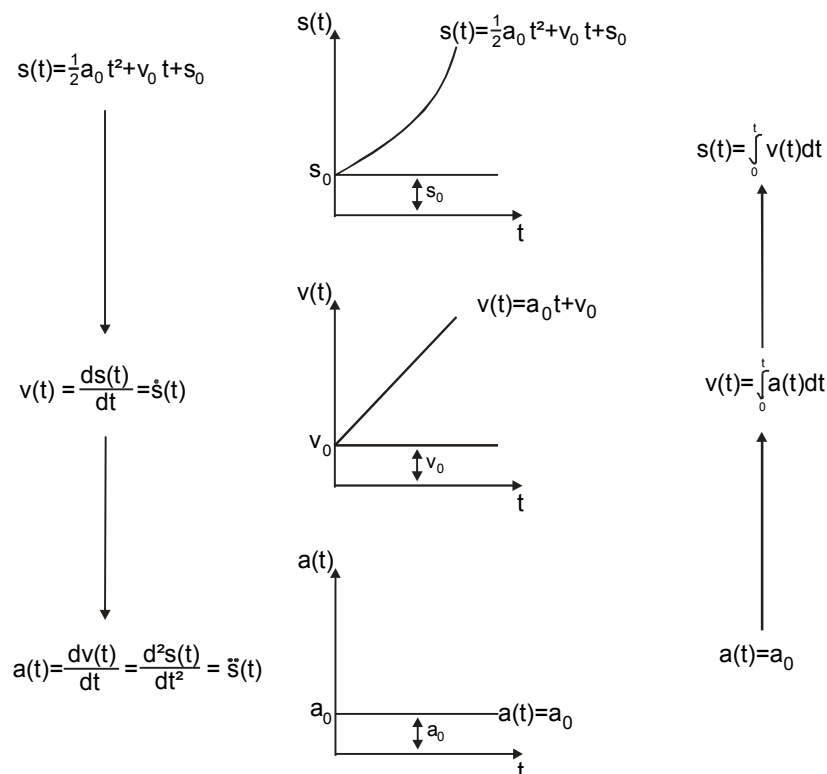


Abb. 6: Weg-Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit- und Beschleunigungs-Zeit-Diagramme

Die Darstellung in Abb. 6 gilt für eine positive Beschleunigung. Bei einer Bremsbewegung unter der Einwirkung einer konstanten Reibungskraft tritt eine Verzögerung auf. Im Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz und im Weg-Zeit-Gesetz tritt dann ein Minuszeichen vor der Beschleunigung a_0 auf. Dieser Sachverhalt wird im Unterabschnitt 3.5.4 am Beispiel Straßenverkehr beschrieben. Analog zu Gl. 2.14 erhält man für eine gleichmäßig verzögerte Bewegung für die Geschwindigkeit v als Funktion des zurückgelegten Bremsweges s :

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2|a|s} \quad (\text{Gl. 2.16})$$

Die Wurzel erstreckt sich über die gesamte rechte Seite der Gl. 2.16. $v = v(t)$ ist die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t und $v_0 = v(t = 0)$ seine Anfangsgeschwindigkeit zum Anfangszeitpunkt $t = 0$.

Für den zurückgelegten Weg $s = s(t)$ einer gleichmäßig beschleunigten oder einer gleichmäßig verzögerten Bewegung folgt:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \quad (\text{Gl. 2.17})$$

Und für den Spezialfall einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit $v_0 = 0$ folgt: $s = \frac{v}{2} \cdot t$

Bei einem Bremsvorgang (gleichmäßig verzögerte Bewegung) wird $s_B = s(t = t_B)$ als Bremsweg bezeichnet. Setzt der Abbremsvorgang zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ ein und sei t_B die Bremsdauer, nach deren Ablauf der bewegte Körper vollständig zur Ruhe gekommen ist, dann ist $v(t = t_B) = 0$. Für den Bremsweg s_B folgt dann:

$$s_B = \frac{v_0}{2} \cdot t_B$$

Die Kinematik der für die technischen Anwendungen wichtigen **Drehbewegung (Rotation)** wird in Kap. 5 anhand der gleichförmigen Kreisbewegung im Detail behandelt.

3 Dynamik: Masse, Impuls und Kraft

3.1 Träge Masse

Die Masse ist eine Basisgröße des SI-Systems mit der Basiseinheit Kilogramm.

Die Masse eines Körpers ist Ursache für sein Beharrungsvermögen gegenüber Versuchen, seinen Bewegungszustand zu ändern. Sie ist somit Ausdruck für die **Trägheit** des Körpers. Sie stellt einen Beschleunigungswiderstand dar und wird auch als **träge Masse** bezeichnet. Die Masse ist somit ein Mengenbegriff, durch den ein quantitatives Maß für die Trägheit gegeben ist.

3.2 Impuls

Der Impuls \vec{p} eines Körpers wird als das Produkt des Skalars Masse m mit seinem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} definiert.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.1)$$

Der Impuls ist damit ein Vektor, der in Richtung des Geschwindigkeitsvektors weist.

Für die Einheit des Impulses folgt

$$[p] = [m] [v] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}.$$

3.3 Newtonsche Axiome

Da ein sich bewegnender Körper zum Stillstand kommt, behaupteten die Griechen, es sei eine *Kraft* nötig, um einen Körper in Bewegung zu halten. Das war die Aussage der Naturlehre des griechischen Philosophen *Aristoteles* (384 - 322), die ja auch mit der alltäglichen Erfahrung überein zustimmen scheint.

Galileo Galilei sowie *Isaac Newton* behaupteten dagegen, dass der bewegte Körper zum Stillstand kommt, ist die Folge einer auf den Körper einwirkenden *Reibungskraft*. Soll diese Aussage in einem Versuch experimentell überprüft werden, so stellt sich heraus, dass die bremsende Reibungskraft nicht völlig ausgeschaltet werden kann, aber sie kann klein gehalten werden, und je kleiner die Reibung wird, desto weiter bewegt sich der Körper, bevor er zur Ruhe kommt.

Es ist daher vernünftig anzunehmen, dass im Grenzfall verschwindender Reibung der Bewegungszustand unverändert bleibt, wie es das **1. Newtonsche Axiom** besagt. Das 1. Newtonsche Axiom, das auch als Galileischer Trägheitssatz bezeichnet wird, beschreibt, wie frei bewegliche Körper sich bewegen, wenn *keine* Kräfte auf sie einwirken. Körper heißen frei beweglich, wenn sie keinen Zwangsbedingungen unterworfen sind.

1. Newtonsche Axiom:

Wirken auf einen frei beweglichen Körper keine Kräfte, so verharrt er im Zustand der Ruhe ($v = 0$) oder der gleichförmigen Bewegung ($\vec{v} = \text{konst.}$).

Die Kraft, die auf einen Körper wirkt, ist an ihrer Auswirkung erkennbar. Deshalb spricht man oft auch statt von Kräften von **Wechselwirkungen**. Die Kraft führt, wenn der Körper beweglich ist, zur Änderung seines Bewegungszustandes, anderenfalls zu seiner Deformation.

2. Newtonsche Axiom:

Die Einwirkung einer Kraft auf einen frei beweglichen Körper ruft eine Änderung seines Bewegungszustandes, d.h. seine Beschleunigung (oder Verzögerung), hervor. Die Größe der Kraft ist gegeben als zeitliche Änderung des Impulses

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}). \quad (3.2)$$

Für Körper, deren Massen sich *nicht* mit der Zeit ändern (wie dies z.B. wegen des Brennstoffverbrauchs bei einer Rakete der Fall wäre), d.h. für einen Körper mit konstanter Masse m ergibt sich:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}. \quad (3.3)$$

Das 2. Newtonsche Axiom beschreibt, wie sich die Geschwindigkeit eines Körpers unter dem Einfluss von Kräften ändert. Es wird wegen seiner Bedeutung auch als **Grundgleichung der Mechanik** bezeichnet. Dabei stellt die Beschleunigung \vec{a} die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit \vec{v} dar. Die Masse m ist ein Skalar, die Beschleunigung \vec{a} ist eine vektorielle Größe. Die Kraft als das Produkt von Masse und Beschleunigung ist damit ein Vektor, der in Richtung des Beschleunigungsvektors \vec{a} weist. Die Kraft im 2. Newtonschen Axiom ist immer eine resultierende Kraft, d.h. die Vektorsumme aller Kräfte, die auf einen Körper einwirken.

Für die Einheit der Kraft gilt

$$[F] = [m] [a] = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N (Newton)}. \quad (3.4)$$

Es zeigt sich, dass das 1. Newtonsche Axiom nur einen Spezialfall des 2. Newtonschen Axioms darstellt. Ist nämlich $\vec{F} = 0$, dann ist auch $\vec{a} = 0$ und daraus folgt $\vec{v} = \text{konstant}$.

Aus $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}$ folgt durch Multiplikation mit dt :

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

Integration über die Zeitspanne zwischen einem Anfangszeitpunkt t_A und einem Endzeitpunkt t_B ergibt das Zeitintegral über die Kraft \vec{F} , das auch als **Kraftstoß** bezeichnet wird.

$$\int_{t_A}^{t_E} \vec{F} dt = \int_{t_A}^{t_E} d\vec{p} = \vec{p}(t_E) - \vec{p}(t_A) \quad (3.5)$$

Der Kraftstoß ist somit gleich der durch ihn bewirkten **Impulsänderung** $\Delta \vec{p} = \vec{p}(t_E) - \vec{p}(t_A)$.

3. Newtonsche Axiom: actio = reactio

Das 3. Newtonsche Axiom wird auch als das Prinzip der Gleichheit von actio (Kraft) und reactio (Gegenkraft) bezeichnet.

Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ aus, so zeigt die Erfahrung, dass der Körper 2 auf den Körper 1 mit einer Kraft $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ wirkt, die von gleichem Betrag, aber entgegengesetzt gerichtet ist.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_1 = -\frac{d}{dt} \vec{p}_2 \quad (3.7)$$

Mit dem 3. Newtonschen Axiom hat Newton eine Regel, d.h. eine allgemeine Eigenschaft der Kräfte formuliert. Dazu soll ein Laufschienenexperiment betrachtet werden, bei dem zwei ruhende Wagen gleicher Masse durch eine elastisch gespannte Feder miteinander verbunden sind (Abb. 7). Lässt man die Feder sich entspannen, werden die Wagen in entgegengesetzte Richtungen beschleunigt, sodass sie sich auf der Schiene mit entgegengesetzt gleicher Geschwindig-

keit voneinander fortbewegen. Es ist $m_1 = m_2$. Die Auswertung des Experimentes liefert $a_1 = -a_2$. Daher ist $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.

Vorher:

Nachher:

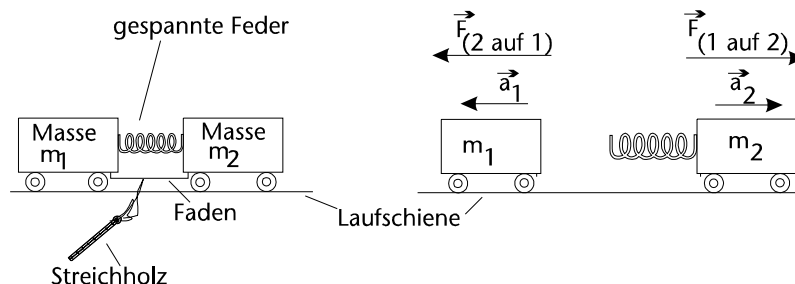


Abb. 7: Laufschienenexperiment

Die Bedeutung des 3. Newtonschen Axioms (*actio gleich reactio*) soll an einigen Beispielen demonstriert werden.

Beispiele:

a) Die Gewichtskraft $\vec{F} = m\vec{g}$

Ein 150 kg schwerer Unternehmensberater, der im 25. Stockwerk eines Bürohochhauses an seinem Schreibtisch sitzt, fällt infolge seiner Gewichtskraft *nicht* durch die Decke des Bodens nach unten (entsprechende Tragfähigkeit der Decke sei vorausgesetzt), da diese Gewichtskraft gemäß des 3. Newtonschen Axioms durch eine gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft $\vec{F} = -m\vec{g}$ kompensiert wird. Nach längerem Sitzen macht sich diese Gegenkraft übrigens schmerzhaft bemerkbar.

b) Das Mond-Erde-System

Die Erde übt auf den Mond eine Anziehungskraft aus. Infolge dieser Kraft bewegt sich der Mond um die Erde. Diese Kraft ist ein Spezialfall der Newtonschen Gravitationskraft, die in Abschnitt 3.5 näher beschrieben wird. Nach dem 3. Newtonschen Axiom übt der Mond eine gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Anziehungskraft auf die Erde aus. Da die Erdmasse 100mal schwerer als die Mondmasse ist, bewegt sich die Erde nicht um den Mond. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass sich der Mond und die Erde gemeinsam um den Massenschwerpunkt des Mond-Erde-Systems bewegen, der sich allerdings noch innerhalb der Erdkugel befindet.

c) Das Paradoxon vom Elch und dem Baustamm

J. Balif und W. Dibble berichten in ihrem Buch *Anschauliche Physik* (S. 208) von folgender Fabel. Ein Elch soll vor einen Baumstamm gespannt werden, um einen gefällten Stamm zu ziehen. In der Forstwirtschaft wird diese Arbeit als Rückearbeit bezeichnet, worunter man das Herausziehen der Stämme aus dem Bestand hin zu einem geeigneten Abfuhrplatz versteht. Der gebildete Elch weigert sich aber und zitiert Isaac Newtons drittes Axiom und schließt daraus, dass, wie kräftig er auch den Stamm ziehen möge, der Stamm ihn immer mit der gleichen Kraft zurückzieht. "Also", sagt er, "ist es völlig nutzlos, dass ich versuche, den Stamm zu ziehen (oder irgendeinen anderen Gegenstand), denn jede Kraft, die ich auf den Baustamm ausübe, um ihn zu bewegen, wird genau ausgeglichen durch die Kraft, mit der der Stamm zurückzieht". Diese Argumentation beruht jedoch auf einem Trugschluss. Wird der Stamm über den Boden gezogen, so greift an dem Stamm eine bremsende Reibungskraft an. Sie ist als bremsende Kraft der Bewegungsrichtung des ziehenden Elches entgegengerichtet. Daneben greift die Zugkraft des Elches an dem Stamm an, die, sofern sie die Reibungskraft überwiegt als resultierende Kraft den Stamm in Richtung des ziehenden Elches beschleunigt. Da die Bewegung des Stammes horizontal erfolgt, können alle vertikalen Kräfte ignoriert werden. Soll der Elch den Stamm mit konstanter Geschwindigkeit weiterziehen, nachdem er einmal in Bewegung ist, muss er auf den Stamm eine Kraft ausüben, deren Betrag gleich dem Betrag der Reibungskraft auf den Stamm ist. Die resultierende Kraft ist in diesem Fall null. Der Stamm wird sich dann gemäß dem Galileischen Trägheitssatz (1. Newtonsches Axiom) mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegen. Bei dieser Argumentation wurde die Kraft des Stammes auf den Elch nicht erwähnt. Diese Kraft wirkt nicht auf den Stamm; sie beeinflusst zwar die Bewegung des Elches, aber nicht die Bewegung des Stammes. Obwohl die Wechselwirkung zwischen dem Elch und dem Stamm aus zwei Kräften besteht, wirkt nur eine von ihnen auf den Stamm.

Um Missverständnisse bei der Anwendung des 3. Newtonschen Axioms auszuschließen ist Folgendes zu beachten: Die beiden betragsmäßig immer gleich großen aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte (Aktionskraft und Reaktionskraft) wirken niemals beide auf dasselbe Objekt ein. Ein vertieftes Studium der Natur der Kräfte zeigt: Das 3. Newtonsche Axiom gilt nur bei einer Beschränkung auf nicht-relativistische Phänomene. Es ist somit kein allgemein gültiges Naturgesetz, da es dem Relativitätsprinzip widerspricht, nachdem alle Naturgesetze in allen nicht beschleunigten Bezugssystemen, den so genannten Inertialsystemen, gleich sein sollen. Gemäß der Aussage $actio = reactio$ müssen nämlich die beiden Kräfte $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ und $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ zur gleichen Zeit t miteinander verglichen werden. Die Definition der Gleichzeitigkeit bereitet jedoch Schwierigkeiten, da sie vom jeweili-

gen Bezugssystem abhängig ist. Zwei von einem Bezugssystem aus gleichzeitig registrierte Ereignisse, sind nämlich nicht notwendigerweise gleichzeitig, wenn sie von einem anderen Bezugssystem aus beobachtet werden, das sich relativ zum Ersten bewegt.

3.4 Kräfte, Wechselwirkungen und ihre Ursachen

Kräfte sind vektorielle physikalische Größen, d.h. Vektoren mit zu ihrer Größe proportionalen Längen. Ein Körper befindet sich im statischen Gleichgewicht, wenn er keiner resultierenden Gesamtkraft ausgesetzt ist, die ihn andernfalls in Bewegung setzen würden. In diesem Fall bilden die Kräfte ein geschlossenes Vieleck, d.h. die Kräfte, die ihrerseits alle von null verschieden sind, addieren sich nach den Regeln der Vektoraddition zu einer resultierenden Vektorsumme mit dem Betrag Null. Dabei müssen die Kräfte nicht notwendigerweise in einer Ebene liegen, sie können vielmehr im dreidimensionalen Raum in jede beliebige Richtung weisen. Auf einen frei beweglichen aber ruhenden Körper sollen beispielsweise drei nicht parallele Kräfte \vec{F}_1 , \vec{F}_2 und \vec{F}_3 einwirken (Abb. 8).

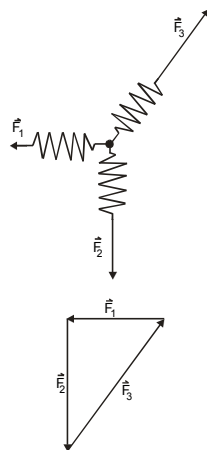


Abb. 8: Kräftegleichgewicht von drei nicht parallelen Kräften

Ein Kräftegleichgewicht bezüglich Translationsbewegungen liegt immer dann vor, wenn verschiedene Kräfte, die an einer Punktmasse m angreifen ein **geschlossenes** Vieleck (Polygon) bilden.

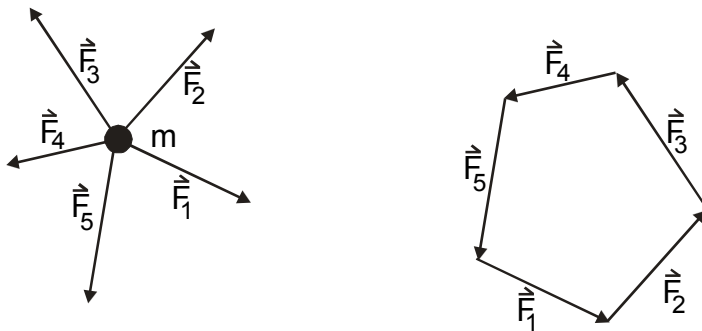


Abb.9: Kräftegleichgewicht von fünf nicht parallelen Kräften

In Vektorschreibweise gilt dann:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad (3.8)$$

Der Vektorcharakter der Kräfte führt zu dem interessanten Ergebnis, dass die Summe unterschiedlicher Kräfte, die alle vom Nullvektor $\vec{0}$ verschieden sind, zu einer verschwindenden Resultierenden ($\vec{F} = \vec{0}$) führt. In Komponentenschreibweise kann diese Vektorgleichung durch drei skalare Gleichungen ersetzt werden:

$$F_x = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} + \dots = \sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0$$

$$F_y = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} + \dots = \sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0$$

$$F_z = F_{1,z} + F_{2,z} + F_{3,z} + \dots = \sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0$$

Das 2. Newtonsche Axiom $\vec{F} = m\vec{a}$ kann als eine Art Definition der Kraft angesehen werden. Die Aussage dieses Axioms geht aber über eine reine Definition hinaus. Einerseits ist die Art und Weise, wie sich materielle Objekte unter dem Einfluss von Kräften verhalten, völlig unabhängig von irgendeiner Wahl von Definitionen. Andererseits ist das 2. Newtonsche Axiom als physikalisches Gesetz unvollständig, denn die auf der linken Seite der Gleichung $\vec{F} = m\vec{a}$ stehende Kraft ist noch nicht näher bestimmt. Eine Kraft \vec{F} muss daher zusätzlich zum 2. Newtonschen Axiom noch einige unabhängige Eigenschaften aufweisen, welche die jeweilige Kraft genauer spezifizieren. Eine der wichtigsten physikalischen Eigenschaften jeder Kraft ist dabei, dass sie einen materiellen Ursprung hat. Massen und elektrische Ladungen als die wichtigsten qualitativen Eigenschaften der Materie und ihrer Konstituenten in Form der Elementarteilchen können daher als die grundlegenden Quellen der Kräfte angesehen werden. Die Frage „was ist eine Kraft?“ wird beispielsweise im Falle der Wechselwirkung zwischen den beiden Massen m und M , die einen Abstand r voneinander haben durch das von Newton 1666

formulierte **Gravitationsgesetz** beantwortet. Für den Betrag F_G der Gravitationskraft gilt:

$$F_G = G \frac{mM}{r^2} \quad (3.9)$$

Die Gravitation ist eine langreichweitige Wechselwirkung, die nicht abschirmbar ist, da es nur Massen eines Vorzeichens gibt. Wird die Masse M in den Ursprung eines Koordinatensystems gelegt, dann weist der Ortsvektor \vec{r} zur Masse m . Mithilfe des in Richtung des Ortsvektors \vec{r} weisenden **radialen Einheitsvektors** $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ kann die Anziehungskraft \vec{F} , die eine Masse M auf eine punktförmige Masse m im Abstand r ausübt in vektorieller Form geschrieben werden:

$$\vec{F}_G = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r. \quad (3.10)$$

\vec{F} greift in m an und weist nach M . Die Richtung der Kraft wird dabei durch den zu $-\vec{r}$ parallelen Einheitsvektor $-\vec{e}_r$ charakterisiert. Die Kraft, mit der die Masse m gemäß dem 3. Newtonschen Axioms auf die Masse M einwirkt, unterscheidet sich nur durch ein positives Vorzeichen. Dies ist in der folgenden Abbildung am Beispiel des Erde-Mond-Systems dargestellt. Der Mond übt eine Gravitationskraft $\vec{F}_{M \rightarrow E}$ auf die Erde aus. Die Erde übt eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Gravitationskraft $\vec{F}_{E \rightarrow M}$ auf den Mond aus. Diese Aussage ergibt sich aus dem 3. Newtonschen Axiom:

$$\vec{F}_{M \rightarrow E} = -\vec{F}_{E \rightarrow M} \quad (3.11)$$

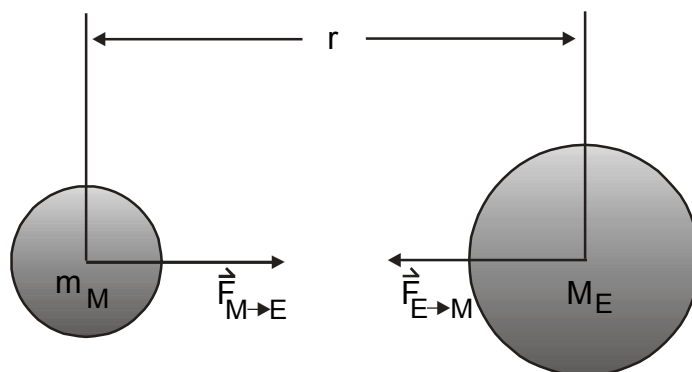


Abb. 10: Gravitationswechselwirkung

Die Proportionalitätskonstante G , die so genannte **Gravitationskonstante**, die erstmals 1798 durch *Henry Cavendish* (1731 - 1810) experimentell bestimmt wurde, hat den Zahlenwert

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}. \quad (3.12)$$

Die Gravitation infolge der Erdmasse M_E nennen wir die **Schwerkraft**, Gewichtskraft oder Erdanziehungskraft F_G . Die Schwerkraft oder Gewichtskraft einer Masse m auf der Erdoberfläche, d. h. im Abstand R_E vom Erdmittelpunkt ergibt sich zu:

$$F_G = G \frac{mM_E}{R_E^2} = mg. \quad (3.13)$$

Die Erde verhält sich dabei so, als sei ihre gesamte Masse im Erdmittelpunkt vereinigt. Diese Tatsache liefert eine Rechtfertigung für die idealisierende Modellannahme der Punktmechanik: Massen können als mathematische Punkte aufgefasst werden, denen zusätzliche physikalische Eigenschaften zugewiesen werden.

Für die Schwerebeschleunigung der Erde, die kurz als **Erdbeschleunigung** g bezeichnet wird, folgt:

$$g = G \frac{M_E}{R_E^2}. \quad (3.14)$$

Mit den Zahlenwerten für die Erdmasse $M_E = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und dem mittleren Erdradius $R_E = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$ erhält man für die Erdbeschleunigung:

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3.15)$$

Die Form der Erde ist nicht starr, sondern einer dynamischen Veränderung unterworfen. Sie stellt in guter Näherung ein Rotationsellipsoid dar mit einem Äquatorialradius von $R_{E,\text{Ä}} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$ und einem Polradius von $R_{E,\text{P}} = 6,357 \cdot 10^6 \text{ m}$. Die Abplattung

$\Delta R = R_{E,\text{Ä}} - R_{E,\text{P}}$ beträgt zurzeit in einer Phase der Zunahme des Äquatorialradius $\Delta R = 21 \text{ km}$. Die Abplattung und die Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation führen dazu, dass ein Gegenstand am Pol schwerer ist als am Äquator. Abweichend von dem auf Meeresniveau definierten Standardwert der Erdbeschleunigung von $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$, misst man am Pol einen größeren Wert von etwa $g = 9,83 \text{ m/s}^2$, während man am Äquator einen kleineren Messwert von etwa $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ registriert.

Die **Gravimetrie** ist ein Messverfahren, dass im Rahmen der *Lagerstättenkunde* die genaue Messung der lokalen Erdbeschleunigung g ausnutzt, um beispielsweise Aussagen über mögliche Erdölvorkommen zu machen. Oberflächennahe Gesteine mit Unterschieden in der Dichte beeinflussen das Schwerfeld der Erde und damit den Betrag der Erdbeschleunigung. So ist beispielsweise die lokale Erdbeschleunigung über einem dichten Erzvorkommen etwas größer, über Salzstöcken mit geringer Dichte etwas kleiner als der Normalwert. Während ursprünglich zur Messung der Erdbeschleunigung Pendelversuche eingesetzt wurden, beruhen moderne Gravimeter auf dem Prinzip der Federwaage. An einer Spiralfeder ist eine bestimmte Masse m aufgehängt. Durch Änderung der Erdbeschleunigung ändert sich die Gewichtskraft $F_S = mg$ und damit die Länge der Feder.

Federwaagen-Gravimeter liefern Schwereunterschiede mit einer Genauigkeit von $\pm 10^{-7} \text{ m/s}^2$. Grundlage ist das **Hookesche Gesetz** der Elastizität, das der Physiker *Robert Hooke* (1635 - 1703) im Jahr 1679 aufstellte. Die Dehnung einer Schraubenfeder ist demnach der wirkenden Kraft direkt proportional.

Ein Kraftgesetz mit der gleichen mathematischen Struktur, das die Größe der Kraft F_C zwischen elektrisch geladenen Objekten mit den Ladungen q_1 und q_2 , die sich im Abstand r voneinander befinden beschreibt, entdeckte *Charles Augustin Coulomb* (1736 - 1806). Dieses Gesetz kann betragsmäßig folgendermaßen geschrieben werden:

$$F_C = k_E \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.16)$$

Die Kopplungskonstante k_E beschreibt die Stärke der **Coulombschen Kraft**, die auch als **elektromagnetische Wechselwirkung** bezeichnet wird. Für k_E gilt:

$$k_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.17)$$

ϵ_0 heißt **elektrische Feldkonstante**. Ihr Wert ist

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}.$$

Die Richtung der Coulombschen Kraft hängt davon ab, ob die elektrischen Ladungen gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Die experimentelle Beobachtung zeigt nämlich:

Gleichnamige elektrische Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige elektrische Ladungen ziehen sich an.

Für die Anziehungskraft, mit der im Wasserstoffatom das Elektron mit der elektrischen Ladung $q_1 = -e$ an das Proton mit der Ladung $q_2 = +e$ gebunden ist folgt:

$$F_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}. \quad (3.18)$$

Durch diese Coulombsche Kraft werden Proton und Elektron im Wasserstoffatom zusammengehalten.

3.5 Coulombsche und Newtonsche Reibungskräfte

Unter realen Bedingungen wird die Bewegung von Körpern durch **Reibung** beeinflusst. Aber auch bei statischen Problemen der Mechanik spielt die Reibung eine hervorragende Rolle. Ohne Reibungskräfte würde kein Knoten halten und kein Nagel in der Wand bleiben. Auch spanende Werkstückbearbeitung (Bohren, Fräsen, Drehen) wäre ohne Reibung unmöglich.

Ursache der Bewegungsänderung durch Reibung ist die Reibungskraft \vec{F}_R . Sie ist der Bewegungsrichtung, d.h. der Momentangeschwindigkeit \vec{v} des Körpers stets entgegengerichtet und wirkt daher bremsend auf den Bewegungsablauf.

Die Reibungskräfte haben ihren Ursprung in den zwischen den Atomen/ Molekülen eines Körpers und den Atomen/Molekülen des umgebenden Mediums wirkenden *Anziehungskräfte* (Adhäsion). Diese Kräfte wirken nur auf kleine Entfernungen und sind elektromagnetischer Natur. Je nach Art des umgebenden Mediums unterscheidet man zwischen:

- Festkörperreibung
- Reibung in Flüssigkeiten und Gasen.

Die Festkörperreibung wird auch als **äußere Reibung** oder auch als **Coulombsche Reibung** bezeichnet; sie tritt nur bei der Relativbewegung zweier verschiedener fester Körper gegeneinander auf. Ein besonderes Kennzeichen der äußeren Reibung ist ihre weit gehende Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit der Relativbewegung.

Bei der Festkörperreibung unterscheidet man zwischen:

- Haftreibung
- Gleitreibung
- Rollreibung

Die Reibungskräfte F_R können unabhängig von der genauen Kenntnis der zwischenmolekularen Prozesse vereinfachend durch empirisch gewonnene Regeln näherungsweise beschrieben werden. Sie haben die folgende mathematische Struktur:

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (3.19)$$

F_N ist die Normalkraft, d.h. die Komponente der Schwerkraft, die senkrecht auf die jeweilige Unterlage als Bewegungsebene des Körpers wirkt. Die Festkörperreibung hängt dabei von der Oberflächenbeschaffenheit der reibenden Körper ab, die durch einen Reibungskoeffizienten μ berücksichtigt wird. Unterschiedliche Oberflächenbeschaffenheit führt z.B. dazu, dass zwei plan polierte Glasplatten fester aneinander haften als zwei aufgeraute.

Die Reibung in Flüssigkeiten und Gasen wird als **innere Reibung** oder auch als **Newtonsche Reibung** bezeichnet. Sie tritt bei Relativbewegungen von Molekülen/Atomen ein und desselben Körpers wie z.B. bei Strömungen in einer Flüssigkeit auf und ist geschwindigkeitsabhängig. Eine wesentliche Eigenschaft der inneren Reibung ist ihre ausgeprägte Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Relativbewegung. Die Reibungskräfte in Flüssigkeiten und Gasen werden im Rahmen einer Einführung in die **Fluidodynamik** behandelt.

3.5.1 Haftreibung

Unter Haftreibung versteht man die Reibung zwischen ruhenden Körpern. Sie ist im eigentlich Sinne keine Reibung dar, denn die aneinander haftenden Körper reiben sich nicht, da keine Relativbewegung vorhanden ist. Die Haftreibung stellt vielmehr einen Haftwiderstand oder eine Haftkraft dar. Sie lässt sich durch die Rauigkeit der sich berührenden Oberflächen aufgrund der Verzahnung der Rauigkeitsgebirge erklären.

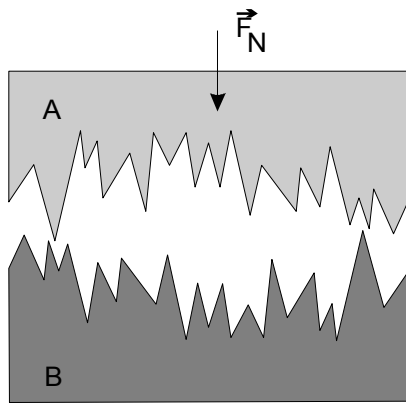


Abb. 11: Oberflächenrauigkeit als Reibungsursache

Auch eine polierte ebene Fläche ist keine ideale Ebene. Sie besitzt aufgrund von Polierungenauigkeiten eine Mikrorauigkeit, deren Einhüllende sich als makroskopische Abweichungen von der mittleren Oberfläche (Soll-Ebene $h = 0$) bemerkbar macht (Abb. 12).

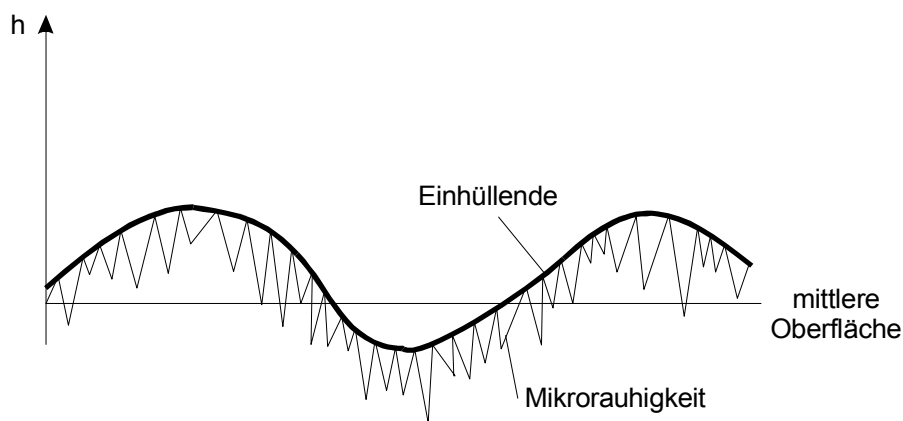


Abb. 12: Mikrorauigkeit einer polierten ebenen Fläche

Ein auf einer schiefen Ebene ruhender Körper setzt sich erst dann in Bewegung, wenn die Hangabtriebskraft \vec{F}_T die Reibungskraft \vec{F}_H überschreitet (Abb. 13).

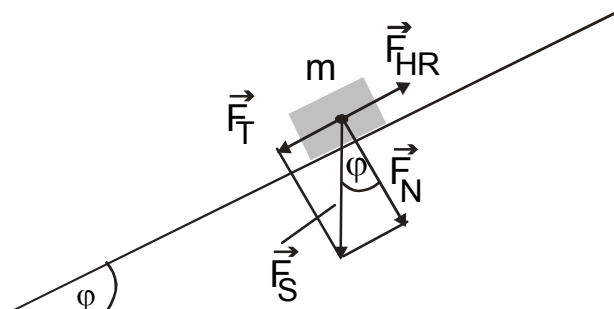


Abb. 13: Festkörperreibung

Aus der in Abb. 13 dargestellten schiefen Ebene ergibt sich für die wirkenden Kräfte: $\vec{F}_S = \vec{F}_N + \vec{F}_T$

\vec{F}_N ist dabei die Normalkraft, sie ist die Komponente der Schwerkraft \vec{F}_S , die senkrecht auf die jeweilige Unterlage wirkt. $F_S = mg$ ist der Betrag der Schwerkraft. Im Folgenden werden nur die Beträge der Reibungskräfte betrachtet. Für die Festkörperreibung gilt das empirisch gefundene **Coulombsche Reibungsgesetz**: Die Reibungskraft ist proportional zur Normalkraft. Für die Haftreibungskraft F_{HR} macht man daher in Übereinstimmung mit der Erfahrung den Ansatz

$$F_{HR} = \mu_H F_N \quad (3.20)$$

$$[\mu_H] = \frac{[F_{HR}]}{[F_N]} = \frac{N}{N} = 1 \quad (3.21)$$

Die dimensionslose Zahl μ_H heißt aus historischen Gründen *Haftreibungszahl* oder üblicherweise **Haftreibungskoeffizient**. Bei präzisiertem Sprachgebrauch müsste er *Haftkraftkoeffizient* genannt werden. Der Reibungskoeffizient stellt eine so genannte **Materialkonstante** dar. Er beschreibt eine stoffspezifische Eigenschaft von Körpern, nämlich die Stärke der Reibungskraft.

Ferner sind

$$F_N = F_S \cos \varphi \quad (3.22)$$

$$F_T = F_S \sin \varphi \quad (3.23)$$

Die Bewegung auf der schiefen Ebene setzt ein für

$$\vec{F}_{HR} = -\vec{F}_T$$

oder betragsmäßig

$$\mu_H F_S \cos \varphi = F_S \sin \varphi \quad (3.24)$$

Ein Körper mit einer Masse m bleibt in Ruhe, solange der Neigungswinkel φ der schiefen Ebene kleiner als ein Grenzwinkel φ_H ist. Bei $\varphi = \varphi_H$ beginnt Körper auf der schiefen Ebene zu gleiten. Dieser Winkel φ_H heißt **Haftreibungswinkel** und es gilt

$$\mu_H = \tan \varphi_H \quad (3.24)$$

Ist speziell $\varphi_H = 45^\circ$, dann ergibt sich für den Haftreibungskoeffizienten $\mu_H = 1$. So hinderlich die Reibung bei vielen technischen Anwendungen ist, so muss doch eindeutig festgestellt werden, dass die Haftreibung eine *bewegungsfördernde* Kraft ist. So wird z.B. ein Pkw durch die Haftreibung der Reifen vorwärts getrieben.

3.5.2 Gleitreibung

Ist die Haftreibung überwunden, so gleitet der Körper über die Auflagefläche. Die Reibungskraft nimmt dabei ab. Schon *Leonardo da Vinci* (1452 – 1519) erkannte, dass sowohl die Haft- als auch die Gleitreibung bei *harten* Oberflächen nicht von der Größe der Auflagefläche, sondern nur von der Gewichtskraft senkrecht zur Unterlage abhängig ist. Bei Autoreifen trifft dies jedoch nicht zu. So besitzen breite Reifen eine größere Haft- und Gleitreibung. Auf mikroskopischer Ebene ist nämlich die Reibungskraft proportional zur effektiven Berührungsfläche und damit von der Anzahl der atomaren oder molekularen Paarwechselwirkungen der vorhandenen Kontaktstellen abhängig. Die Gleitreibungskraft F_{GR} ist entgegengesetzt gleich der Kraft, die dann erforderlich ist, um die Bewegung des Körpers auf konstanter Geschwindigkeit zu halten. Es gilt

$$F_{GR} = \mu_G F_N. \quad (3.25)$$

Die Reibungskraft ist **unabhängig** von der Größe und der Form der Berührungsfläche. μ_G heißt *Gleitreibungszahl* oder **Gleitreibungskoeffizient**. Es ist $\mu_G < \mu_H$. Bei großen Geschwindigkeiten zeigt sich ferner eine Geschwindigkeitsabhängigkeit der Gleitreibungszahl $\mu_G = \mu_G(v)$. Dabei beobachtet man mit wachsender Geschwindigkeit eine Abnahme der Gleitreibungszahl μ_G . Umgekehrt nähert sich bei abnehmender Geschwindigkeit der Gleitreibungskoeffizient dem Haftreibungskoeffizienten an.

$$\mu_G \xrightarrow{v \rightarrow 0} \mu_H \quad (3.26)$$

Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten erfolgt das Gleiten ruckweise. Man spricht dann von einem *Slip-Stick-Prozess*, der auch die Grundlage für die Tonerzeugung von Streichinstrumenten darstellt. Die Reibungskoeffizienten lassen sich *nicht* mikroskopisch aus den Eigenschaften der Atome der beiden relativ zueinander bewegten Körper und den zwischen ihnen wirkenden Kräften ableiten. Durch Verwendung von *Schmiermitteln*, welche die sich berührenden Oberflächen benetzen, lässt sich μ_G erheblich verringern. Diese **Schmiermittelreibung** ist von großer technischer Bedeutung. Denn überall

wo Körper aufeinander gleiten treten infolge von Reibungskräften auch Verschleißerscheinungen auf, die zu einem Materialabrieb führen. Die Schmiermittelreibung ist keine Festkörperreibung. Sie stellt eine *innere* Reibung der an beiden Festkörperoberflächen haftenden Flüssigkeitsschichten dar. Die **Tribologie**, ein Teilgebiet der Werkstoffwissenschaften, beschäftigt sich mit den werkstofftechnischen Maßnahmen zur Verschleißminderung und Energieeinsparung durch Reduzierung der Reibung.

3.5.3 Rollreibung

Zur Beschreibung der Reibungseffekte beim Rollvorgang führt man die *Rollreibung* ein. Sie ist kleiner als die Gleitreibung, da beim Abrollen viele Unebenheiten infolge der Mikrorauigkeit ohne abbremssende Wirkung überbrückt werden können. Voraussetzung für die Rollbewegung ist allerdings die Haftreibung, ohne die eine Kugel oder ein Rad nicht rollen würde, sondern nur gleiten. Beim Rollen einer Kugel *haftet* die momentane Auflagefläche infolge der Haftreibung fest an der Unterlage. Die Rollreibung hat ihre Ursache darin, dass beim Rollen eine Drehbewegung abläuft und der rollende Körper (Kugel, Rad oder Zylinder) und Unterlage wegen der kleinen Auflagefläche beim Abrollen verformt werden können.

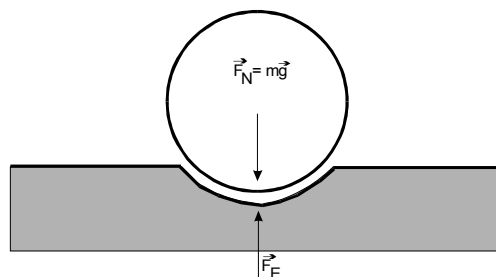


Abb. 14: Deformation der Unterlage beim Rollvorgang

Durch die Deformation der Oberfläche um die Berührungslinie wird Deformationsarbeit (Walkarbeit) verrichtet, die teilweise in Wärme dissipiert wird. Der Laufwiderstand beim Abrollen eines Rades ohne Achskugellager auf einer Unterlage hängt aber nicht nur von der elastischen Verformung der Unterlage durch die Normalkraft sowie vom Raddurchmesser ab, sondern auch von der Gleitreibung in den Achslagern, nämlich an den Berührungsflächen von Achsapfen und Radnabe.

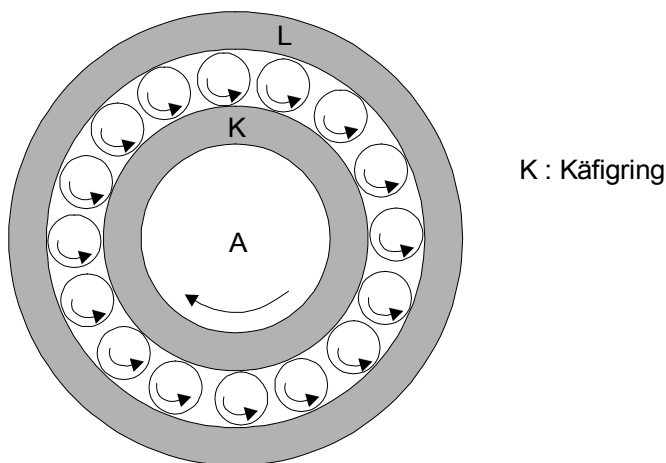
Die die Rollbewegung hemmende Reibungskraft wird analog zur Haft- und Gleitreibung proportional zur Normalkraft angesetzt. Es gilt:

$$F_{RR} = \mu_R F_N. \quad (3.27)$$

$\mu_R = \frac{F_{RR}}{F_N}$ ist die dimensionslose **Rollreibungszahl**.

Um den Betrag der Rollreibungskraft abschätzen zu können, sind als Anwendungsbeispiel die beiden folgenden Zahlenwerte für μ_R aufgeführt. Für Eisenbahnräder gilt $\mu_R \approx 0,001$ und für Pkw-Räder liegt die Rollreibungszahl im Bereich $\mu_R \approx 0,02 - 0,05$.

Die Erfindungen von Rad und Wälzlagern, zu denen neben dem Kugellager auch das Zylinderrollenlager gehört, waren die Voraussetzung für den Transport von Lasten auf dem Landwege über große Entfernungen. Die aufzuwendende Reibungsenergie wurde dabei durch die geringere Rollreibung größenordnungsmäßig um den Faktor 10^3 reduziert. Das Kugellager besteht aus zwei Ringen: Außenring (Lagering) L und Innenring (Käfigring) K. Der Innenring K wird nach Erwärmung auf die Achse A aufgeschraubt und sitzt nach dem Abkühlen fest auf der rotierenden Achse A, welche durch den Lagerring L gehalten wird. Der Käfigring K hat die Aufgabe, die Kugeln auf festem seitlichen Abstand zu halten und eine unmittelbare Berührung zu verhindern. Bei Rotation der Achse A rollen die Kugeln zwischen dem Innen- und Außenring und reduzieren dadurch die Reibung. Das Lager ist mit Schmierstoff gefüllt und wird durch nicht eingezeichnete Dichtungs- und Deckscheiben im Lager gehalten, die zugleich das Eindringen von Fremdkörpern (Verschmutzung) verhindern. Für die Aufnahme großer radialer Lasten werden bevorzugt Zylinderrollenlager eingesetzt, da diese wegen ihrer größeren Kontaktfläche mit dem äußeren und inneren Lagerring bei gleicher Belastung einen im Vergleich zum Kugellager kleineren Druck hervorrufen.



15: Kugellager in schematischer Darstellung

In Tabelle 1 sind einige Zahlenbeispiele für die Koeffizienten der Haft- bzw. Gleitreibung für verschiedene Materialkombinationen aufgeführt.

Werkstoffpaarung	μ_H	μ_G
Stahl – Stahl	0,1 – 0,7	0,1 – 0,2
Gummi – Asphalt		
- trocken	0,9 – 1,2	0,7 – 1,05
- nass ohne Wasserfilm	0,5 – 0,6	0,4
Gummi - Beton	0,5 – 1,0	0,5 – 0,6
Gummi – Eis	0,05 – 0,1	0,05
Aluminium (Al) – Al	1,1	0,8 – 1,0
Diamant - Diamant	0,1	0,08
Teflon - Teflon	0,04	0,04
Glas-Glas	0,9	0,4
Sandpapier – Sandpapier	1 – 5	0,5 – 3

Tab. 1: Haft- und Gleitreibungszahlen

Die genauen Werte hängen stark von der jeweiligen Oberflächenbeschaffenheit (Bearbeitungszustand) und der Reinheit der Oberflächen ab. Die genannten Zahlenwerte können schwanken und stellen daher nur Richtwerte dar.

3.5.4 Anwendungsbeispiel: Bremsen im Straßenverkehr

Ein auf ebener Strecke fahrendes Auto mit der Masse $m = 1500$ kg und der Geschwindigkeit $v_0 = 144$ km/h wird durch Blockieren aller Räder gebremst. Die Gleitreibungszahl zwischen Autoreifen und Straßenbelag betrage $\mu_G = 0,8155$.

a) Wie groß ist die bremsende Reibungskraft F_{GR} ?

b) Wie lang ist der Bremsweg s_B ?

a) Für die Gleitreibungskraft F_{GR} gilt:

$$F_{GR} = \mu_G F_N = \mu_G mg = 0,8155 \cdot 1500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$F_{GR} = 12000 \text{ N} = 12 \text{ kN}$$

b) Gemäß des 2. Newtonschen Axioms gilt für alle Kräfte:

$$F = ma = F_{GR}$$

Mit $F_{GR} = \mu_G mg$ folgt für den Betrag der Beschleunigung a

$$a = \mu_G g.$$

Da es sich um einen Abbremsvorgang handelt, ist die Beschleunigung a in skalarer Schreibweise allerdings negativ.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} < 0$$

Denn bei Abbremsung gilt für $t_2 > t_1$:

$$v_2 = v(t_2) < v_1 = v(t_1)$$

Dann ist $\Delta v = v_2 - v_1 < 0$ und damit a negativ.

Das *Weg-Zeit-Gesetz* und das *Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz* einer unter konstanter Beschleunigung verzögerten Bewegung eines **Abbremsvorganges**, der durch das negative Vorzeichen im Beschleunigungsterm gekennzeichnet ist, lautet:

$$s(t) = -\frac{1}{2}|a|t^2 + v_0 t + s_0$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s(t) = -|a|t + v_0$$

$|a|$ ist dabei der Betrag der Beschleunigung ($(|a| > 0)$). Das Betragszeichen kann auch weggelassen werden, wenn der obige Sachverhalt klar ist. Der Bremsvorgang setze zum Zeitpunkt $t=0$ ein und der Nullpunkt der Wegmessung sei so gewählt, dass $s(t=0) = s_0 = 0$ gilt. Nach Ablauf der Abbremszeit t_B ist dann der Bremsweg

$$s_B = s(t_B) = -\frac{1}{2}at_B^2 + v_0 t_B.$$

Zum Zeitpunkt $t = t_B$ ist das Fahrzeug zum Stillstand gekommen ($v(t_B) = 0$). Aus dem *Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz* $v(t) = v_0 - at$ folgt:

$$0 = v_0 - at_B$$

$$t_B = \frac{v_0}{a}$$

Damit folgt für den Bremsweg:

$$s_B = v_0 t_B - \frac{1}{2} a t_B^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$$

Mit $a = \mu_G g$ ergibt sich für s_B :

$$s_B = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_G g} = \frac{1}{2} t_B v_0 \quad (3.28)$$

Durch Einsetzen der Daten dieses Beispiels erhält man für die Länge des Bremsweges das Ergebnis $s_B = 100 \text{ m}$.

Die quadratische Abhängigkeit des Bremsweges s_B von der Ausgangsgeschwindigkeit v_0 ist für verschiedene Gleitreibungskoeffizienten μ_G in Abb. 16 grafisch dargestellt.

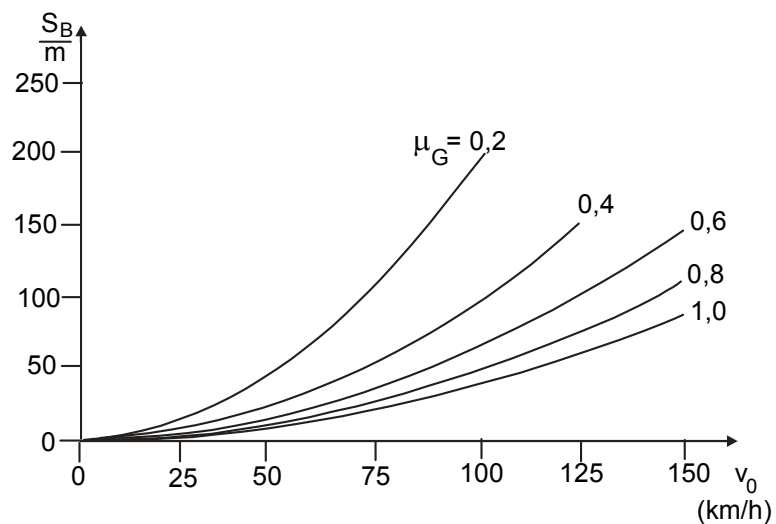


Abb. 16: Bremsweg als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit

3.5.5 Fahrwiderstand

An den Rädern von Fahrzeugen wirkt nicht nur die Rollreibungskraft F_{RR} am Umfang des Rades, sondern zusätzlich noch jeweils die Reibungskraft in seinem Achslager. Diese beiden bewegungshemmenden Kräfte werden oft zur *Fahrwiderstandskraft* F_{FR} zusammengefasst und durch eine Fahrwiderstandszahl μ_F gekennzeichnet. Für den Fahrwiderstand gilt dann:

$$F_{FR} = \mu_F F_N \quad (3.29)$$

Für eine **horizontale** Straße ist die Normalkraft gleich der Gewichtskraft des Fahrzeugs und wegen $F_N = mg$ gilt dann

$$F_{FR} = \mu_F mg.$$

Die beherrschende Reibungskraft im realen Straßenverkehr ist jedoch die geschwindigkeits-abhängige Luftwiderstandskraft F_W . Die Fortbewegung eines Fahrzeugs wird dann durch die Summenkraft F_{SR} aus Fahrwiderstand und Luftwiderstand behindert.

$$F_{SR} = F_{FR} + F_W$$

3.5.6 Geschwindigkeitsabhängige Reibungskräfte

Reale Fluide, die Körper umströmen, üben Widerstandskräfte F_W auf diese aus. Bewegt sich ein Körper der Masse m durch Luft oder ein anderes viskoses Medium, so wirkt auf ihn eine der Bewegungsrichtung entgegen gerichtete Reibungskraft. Die theoretische Berechnung dieser Widerstandskraft gelingt nur in einfachen Spezialfällen. Ansonsten müssen diese Kräfte in Strömungsversuchen (z.B. in Windkanälen) experimentell ermittelt werden. Als Beispiele geschwindigkeitsabhängiger Reibungskräfte werden im Rahmen der Fluiddynamik die **Stokesche Reibungskraft**

$$F_R = -6\pi\eta r v \quad (3.30)$$

und die **Luftwiderstandskraft**

$$F_W = -\frac{1}{2} c_w A \rho v^2 \quad (3.31)$$

detailliert behandelt. Da diese Reibungskräfte von der Relativgeschwindigkeit v des Körpers zum fluiden Medium abhängig sind, macht man folgenden allgemeinen Ansatz:

$$F_W(v) = -Bv - Dv^2 \quad (3.32)$$

Die Minuszeichen weisen darauf hin, dass die Reibungskraft $F_W(v)$, die hier betragsmäßig angegeben ist, eine bremsende Kraft ist, die entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung gerichtet ist. Die Reibungskoeffizienten B und D sind positive Konstanten, die von der Größe und geometrischen Form des umströmten Körpers sowie von den stoffspezifischen Eigenschaften des fluiden Mediums abhängen. Details zu Reibungsphänomenen in fluiden Medien werden in der Lerneinheit *Fluiddynamik* behandelt. Bei geringen Geschwindigkeiten ist der zweite Term Dv^2 klein im Vergleich zum ersten Term Bv . Der zweite Term kann dann vernachlässigt werden und man erhält eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft. Bei große-

ren Geschwindigkeiten dominiert der zweite Term Dv^2 , und der lineare Term Bv kann weggelassen werden. Dieser Fall ist typisch für Bewegungen unter dem Einfluss der Luftwiderstandskraft. In der folgenden Betrachtung sollen jedoch beide Terme berücksichtigt werden. Dabei soll die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t)$ für einen Körper mit der Masse m und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 untersucht werden, welcher der alleinigen Wirkung einer Reibungskraft $F_w(v)$ ausgesetzt ist. Gemäß dem zweiten Newtonschen Axiom $F = ma$ lautet die **Bewegungsgleichung** für diese Bewegung:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -Bv - Dv^2 \quad (3.33)$$

oder

$$1 = - \frac{mdv / dt}{Bv + Dv^2}.$$

Unbestimmte Integration über die Zeit t liefert:

$$\int 1 dt = \int - \frac{mdv / dt}{Bv + Dv^2} dt$$

$$t = -m \int \frac{dv / dt}{v(B + Dv)} dt = -m \int \frac{1}{v(B + Dv)} dv$$

Die Ausführung der Integration erfolgt mithilfe der **Methode der Partialbruchzerlegung**. Die Partialbruchzerlegung des Integranden liefert:

$$\frac{1}{v(B + Dv)} = \frac{A_1}{v} + \frac{A_2}{B + Dv}$$

$$\frac{1}{B + Dv} = A_1 + \frac{A_2 v}{B + Dv}$$

$$\text{Mit } v = 0 \text{ folgt: } A_1 = \frac{1}{B}$$

$$\text{Mit } v = 1 \text{ folgt: } A_2 = -\frac{D}{B}$$

Damit folgt für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{v(B + Dv)} = \frac{A_1}{v} + \frac{A_2}{B + Dv} = \frac{1}{Bv} - \frac{D}{B(B + Dv)} = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{v} - \frac{D}{B + Dv} \right)$$

$$t = -m \int \frac{1}{v(B + Dv)} dv = -\frac{m}{B} \int \left(\frac{1}{v} - \frac{D}{B + Dv} \right) dv$$

$$t = -\frac{m}{B} [\ln v - \ln(B + Dv)] + C. \quad (3.34)$$

Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ hat der Körper voraussetzungsgemäß die Ausgangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$. Damit folgt für die Integrationskonstante C :

$$C = \frac{m}{B} [\ln v_0 - \ln(B + Dv_0)]$$

Folglich ist:

$$t = -\frac{m}{B} [\ln v - \ln(B + Dv)] + \frac{m}{B} [\ln v_0 - \ln(B + Dv_0)] = \frac{m}{B} \ln \left[\frac{v_0(B + Dv)}{v(B + Dv_0)} \right]$$

Nach Multiplikation mit B/m und Exponentiation zur Basis e folgt:

$$e^{Bt/m} = \frac{v_0(B + Dv)}{v(B + Dv_0)} \quad (3.35)$$

Auflösung dieser Gleichung nach $v(t)$ ergibt schließlich die gesuchte Geschwindigkeits-Zeit-Funktion

$$v(t) = \frac{Bv_0 e^{-Bt/m}}{B + Dv_0(1 - e^{-Bt/m})} \quad (3.36)$$

4 Arbeit, Energie und Leistung

Den Jägern und Sammlern der Steinzeit stand neben dem Feuer nur die menschliche Arbeitskraft zur Verfügung. Dies änderte sich als in der neolithischen Revolution der Übergang zu Ackerbau und Viehzucht stattfand und dadurch auch die Muskelkraft der Haustiere genutzt werden konnte. Erst im Mittelalter wurden Wasser- und Windmühlen als Antriebsmaschinen, die bereits seit der Antike bekannt waren, systematisch zur Mechanisierung der Arbeit eingesetzt. Mit ihnen konnten mit Hilfe von Transmissionsrädern und -riemen mechanische Leistungen zum Betrieb von Hammer- und Sägewerken sowie von Entwässerungspumpen im Bergbau übertragen werden. Die physikalische Größe **Energie** (gr. *energeia*: Wirkungsvermögen) wurde phänomenologisch von *Thomas Young* (1773 - 1829) in die Naturwissenschaften eingeführt und erstmals durch *William Rankine* (1820 - 1872) mit der Wortschöpfung Energie versehen. Die Energie stellt eine abstrakte Größe dar, die nicht direkt messbar ist. Sie kann nur aus anderen messbaren Größen berechnet werden. Während allerdings der Kraftbegriff bereits durch Newton definiert wurde, gelang es erst infolge der experimentellen Untersuchungen von *Julius R. Mayer* (1814 - 1878) und *Hermann von Helmholtz* (1821 – 1894) über die Äquivalenz von Wärme und Arbeit den abstrakten Energiebegriff zu präzisieren. Einen wichtigen Beitrag leistete hierbei der britische Physiker *James Prescott Joule* (1818 – 1889) durch eine genaue Messung des mechanischen Wärmeäquivalents bei der mechanische Arbeit durch Reibung vollständig in Wärme umgewandelt wird. In diesem Abschnitt sollen die Begriffe Arbeit, Energie und Leistung aus der Sicht der Mechanik näher erläutert werden. Eine Erweiterung des Energiekonzeptes auf die Wärmeerscheinungen erfolgt in einer separaten Lerneinheit im Rahmen einer Einführung in die Thermodynamik.

4.1 Hubarbeit und potentielle Energie im Schwerfeld der Erde

Wenn auf einen beweglichen Körper eine äußere Kraft einwirkt, so ändert sich der Bewegungszustand des Körpers. Der Körper soll in diesem Abschnitt als Massenpunkt aufgefasst werden. Soll beispielsweise ein Körper entgegen der nach unten gerichteten Schwerkraft $\vec{F}_S = -m\vec{g}$ um das Wegstück $d\vec{s}$ senkrecht nach oben angehoben werden, so muss eine Gegenkraft $\vec{F} = -\vec{F}_S$ aufgewandt werden, die den Einfluss der Schwerkraft aufhebt. Hierbei ist ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen positive z-Achse in Richtung des Einheitsvektors \vec{k} senkrecht nach oben weist. Durch die Kraft \vec{F} wird gegen die Schwerkraft \vec{F}_S längs eines Weges $d\vec{s}$ eine Hubarbeit $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds$ verrichtet. Die von der Kraft geleistete Arbeit dW wird über das "Innere Produkt" oder "Skalarpro-

dukt" der Vektoren \vec{F} und $d\vec{s}$ definiert. Besteht zwischen den Vektoren der Kraft und der Verschiebungsrichtung $d\vec{s}$ ein Winkel α , so ist die verrichtete Arbeit (Abb. 17) gleich dem Produkt aus der Kraftkomponente F_{\parallel} parallel zur Wegrichtung und der zurückgelegten Strecke ds .

$$dW = F_{\parallel} ds = F \cos \alpha ds = F ds \cos \alpha = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.1)$$

Damit erhält man die in Abb. 17 dargestellte Komponentenzerlegung einer Kraft bezüglich einer vorgegebenen Verschiebungsrichtung $d\vec{s}$.

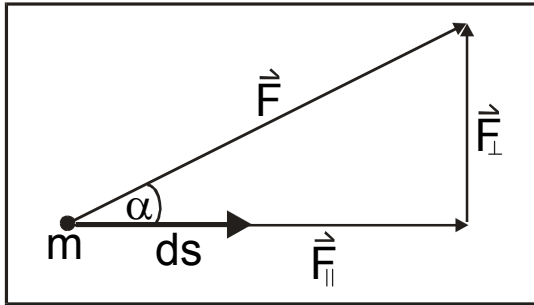


Abb. 17: Komponentenzerlegung einer Kraft

Ist die Kraft $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$ ortsabhängig, so kann der insgesamt zurückzulegende Weg \vec{s} in eine Summe von vielen infinitesimal kleinen Wegstücken $\Delta\vec{s}$ zerlegt werden, entlang derer die jeweils wirkende Kraft $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ als konstant angesehen werden kann. Die entlang eines endlichen Weges von einer Ausgangsposition \vec{r}_A bis zu einer Endposition \vec{r}_E verrichtete Arbeit W ist dann gegeben durch

$$W = \sum_i \Delta W_i = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{s}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{s}_n = \sum_i \vec{F}_i \Delta\vec{s}_i \quad (4.2)$$

Für eine unendlich feine Zerlegung erhält man im Grenzübergang:

$$W = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad (4.3)$$

Die Arbeit wird somit als das **Linienintegral** $\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ über das

vektorielle Linienelement $d\vec{s}$ auf dem Weg von einem Anfangspunkt A mit $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$ nach einem Endpunkt E mit

$\vec{r}_E = (x_E, y_E, z_E)$ definiert. Das Linienintegral stellt aufgrund der Definition des Skalarproduktes die Kurzschreibweise für den Ausdruck

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_E} F_x dx + \int_{y_A}^{y_E} F_y dy + \int_{z_A}^{z_E} F_z dz \quad (4.4)$$

dar. Die physikalische Größe **Arbeit** ist somit eine **skalare Größe** mit der Dimension „Kraft mal Weg“. Für ihre Einheit erhält man

$$[W] = [F][s] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J (Joule)}.$$

Beispiel:

Ein Körper mit der Masse m soll unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel φ entlang eines Weges s bis auf die Höhe h reibungsfrei verschoben werden (Abb. 18).

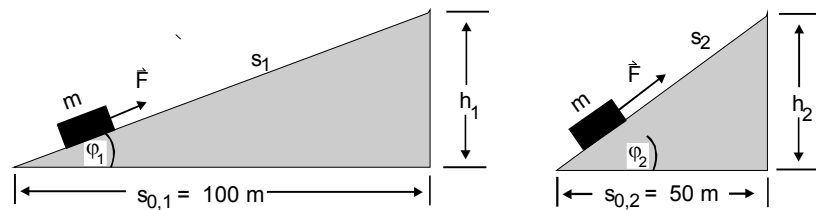


Abb. 18: Arbeit am Beispiel der schiefen Ebene

Es sei: $h_1 = h_2 = h$. Nach Maßgabe der Neigungswinkel der Ebenen gilt dann für die Wegstrecken

$$s_1 = \frac{h_1}{\sin \varphi_1} \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{h_2}{\sin \varphi_2}.$$

Die auf die Masse m wirkende Schwerkraft \vec{F}_S kann vektoriell zerlegt werden in eine Komponente \vec{F}_N , die normal (senkrecht) zur Auflagefläche der schiefen Ebene gerichtet ist und in eine Komponente $\vec{F}_T = \vec{F}_{||}$ tangential (parallel) zur Auflagefläche. Diese Komponente wird auch als **Hangabtriebskraft** \vec{F}_{HA} bezeichnet ($F_{HA} = F_T = F_{||}$).

$$\vec{F}_S = \vec{F}_N + \vec{F}_T \quad (4.5)$$

Es gilt dann betragsmäßig

$$F_N = F_S \cos \varphi = mg \cos \varphi$$

$$F_T = F_S \sin \varphi = mg \sin \varphi.$$

Um den Körper reibungsfrei die schiefe Ebene hochzuschieben ist eine Kraft erforderlich, die der Tangentialkraft (Hangabtriebskraft) entgegengesetzt gerichtet ist.

$$\vec{F} = -\vec{F}_T$$

Für die jeweils zu verrichtende Arbeit folgt:

$$W_1 = F_1 s_1 = m g \sin \varphi_1 \frac{h_1}{\sin \varphi_1} = m g h_1$$

$$W_2 = F_2 s_2 = m g \sin \varphi_2 \frac{h_2}{\sin \varphi_2} = m g h_2$$

Wegen $h_1 = h_2 = h$, folgt

$$W_1 = W_2.$$

Die Arbeit $W = F_S h = mgh$ hängt nur vom Betrag der Schwerkraft $F_S = mg$ und der erreichten Höhe h zwischen End- und Anfangslage ab. Die Arbeit ist von der Form des Weges zwischen Anfangs- und Endpunkt unabhängig.

Wird an einem Körper Arbeit verrichtet, so ändert sich der Zustand des Körpers. Dem Körper ist Energie zugeführt worden, die dann in verschiedenen Formen von dem Körper gespeichert werden kann.

Energie stellt das Vermögen dar, Arbeit zu verrichten.

Der Energieinhalt eines Körpers ist somit ein quantitatives Maß für die Arbeitsfähigkeit des Körpers. Die physikalische Größe *Energie* wird durch das Symbol E bezeichnet. Für ihre Einheit gilt

$$[E] = [W] = J \text{ (Joule)}. \quad (4.6)$$

Die Einheit der Energie ist identisch mit der Einheit der Arbeit. Wird an einem Körper durch eine äußere Kraft Arbeit geleistet, so nimmt der Körper Energie auf. In welcher Form der Körper dabei Energie gewinnt, hängt dabei von der Art der Kräfte ab, gegen die die Arbeit geleistet wird. Die Energie ist eine **Zustandsgröße**. Sie wird von dem Körper, an dem die Arbeit verrichtet wurde gespeichert. Der Körper besitzt damit die Möglichkeit, selbst Arbeit zu verrichten. Im Gegensatz zur Energie stellt die Arbeit eine **Prozessgröße** dar. Durch Zufuhr von Arbeit ($\Delta W \geq 0$) wird die Energie eines mechanischen Systems vergrößert. Durch Abgabe von Arbeit ($\Delta W \leq 0$) wird die Energie eines mechanischen Systems verringert.

Im Folgenden soll die Hubarbeit W berechnet werden, die verrichtet werden muss, wenn eine Masse m von einem Punkt \vec{r}_A mit $z_A = 0$ zu einem auf der Höhe h gelegenen Punkt \vec{r}_E mit $z_E = h$ gegen die nach unten gerichtete Gewichtskraft $\vec{F}_S = -m\vec{g} = (0,0,-mg)$ angehoben wird (Abb. 19). Für die dazu nötige Gegenkraft \vec{F} gilt

$$\vec{F} = -\vec{F}_S = m\vec{g}.$$

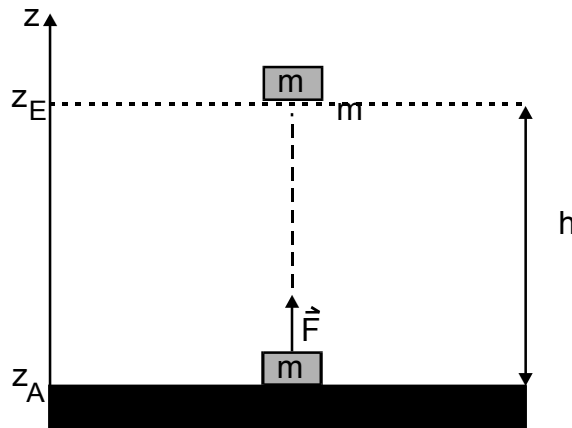


Abb. 19: Hubarbeit

Wird der Vektor \vec{s} mit dem Ortsvektor \vec{r} identifiziert, dessen Spitze die Bahnkurve beschreibt, auf welcher der Körper mit der Masse m infolge der Kraftwirkung verschoben wird, dann folgt für das vektorielle Linienelement $d\vec{s} = d\vec{r}$

$$d\vec{s} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz. \quad (4.7)$$

Für die Arbeit dW ergibt sich damit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \cdot d\vec{s} = mgdz. \quad (4.8)$$

Die Arbeit dW ist unabhängig von der Art des Weges von \vec{r}_A nach \vec{r}_E . Sie ist nur von der relativen Höhenänderung dz abhängig. Die insgesamt gegen eine konstante Schwerkraft zu verrichtende Arbeit W ergibt sich damit zu

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{z_A}^{z_E} dW = \int_0^h mgdz = mgh. \quad (4.9)$$

Die Hubarbeit hängt nur vom Höhenunterschied h ab.

Sie ist unabhängig von der Form der Bahnkurve, auf der der Körper von \vec{r}_A nach \vec{r}_E gelangt ist. Die geleistete Hubarbeit wird als **po-**

potentielle Energie E_{pot} (Energie der Lage) vom Körper mit der Masse m gespeichert.

$$E_{\text{pot}} = mgh \quad (4.10)$$

Für die Arbeit, welche die Gegenkraft $\vec{F} = -\vec{F}_G$ zur ortsabhängigen Newtonschen Gravitationskraft $\vec{F}_G = -G \frac{mM_E}{r^2} \vec{e}_r$ beim Anheben der Masse m bis zur Höhe h über der Erdoberfläche (Erdradius R_E) verrichtet, gilt:

$$W = \int_{R_E}^{R_E+h} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{R_E}^{R_E+h} G \frac{mM_E}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \int_{R_E}^{R_E+h} G \frac{mM_E}{r^2} dr$$

$$W = -\frac{GmM_E}{R_E+h} + \frac{GmM_E}{R_E} = \frac{GmM_E}{R_E(R_E+h)} h \quad (4.11)$$

Unter der Annahme, dass $h \ll R_E$ ist, d.h. in der Nähe der Erdoberfläche, folgt für die Hubarbeit

$$W = m \frac{GM_E}{R_E^2} h = mgh. \quad (4.12)$$

Für kleine Abstände oberhalb der Erdoberfläche kann die Gravitationskraft als konstant angesehen werden. In einer Höhe von $h = 70 \text{ km}$ oberhalb der Erdoberfläche weicht die Erdbeschleunigung um 1% von ihrem auf Meereshöhe definiertem Standardwert von $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ab. Die Hubarbeit gegen die Gravitationskraft kann somit bis in stratosphärische Höhen ($h < 100 \text{ km}$) in guter Näherung durch $W = mgh$ beschrieben werden.

4.2 Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie

Soll beispielsweise ein frei beweglicher aber ruhender Körper ($v = 0$) durch Einwirkung einer Kraft \vec{F} auf eine Geschwindigkeit v beschleunigt werden, so muss **Beschleunigungsarbeit** W verrichtet werden. Für die beschleunigende Kraft gilt das 2. Newtonsche Axiom

$$\vec{F} = m \vec{a}.$$

Die Kraft \vec{F} und die Beschleunigung \vec{a} sind gleichgerichtet. Der durch die Kraft beschleunigte Körper bewegt sich in Richtung der wirkenden Kraft \vec{F} und wird dabei in Richtung der einwirkenden

Kraft um die Wegstrecke $d\vec{s}$ verschoben. Für die dabei zu verrichtende Beschleunigungsarbeit dW folgt

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \alpha = F ds = m a ds. \quad (4.13)$$

Wegen $\vec{F} \parallel d\vec{s}$ ist $\alpha = 0$ und $\cos \alpha = 1$.

$$dW = F ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv \quad (4.14)$$

Mit $v = \frac{ds}{dt}$ erhält man

$$dW = m v dv$$

$$W = \int_0^v m v dv = \frac{1}{2} m v^2. \quad (4.15)$$

Den durch seine Beschleunigung bedingten Zuwachs an Energie des Körpers bezeichnet man als **kinetische Energie** oder **Bewegungsenergie** E_{kin} .

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (4.16)$$

Besitzt der Körper bereits eine Anfangsgeschwindigkeit vom Betrag v_0 und somit eine kinetische Anfangsenergie $E_{\text{kin},0} = W_0$, so folgt

für die durch die Kraft \vec{F} durch Beschleunigung auf die Endgeschwindigkeit v verrichtete Beschleunigungsarbeit ΔW :

$$\Delta W = \int_{v_0}^v m v dv = W - W_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (4.17)$$

4.3 Federkraft und Federspannarbeit

Eine Schraubenfeder mit der Länge ℓ_0 soll an einer Seite an einem starren Balken befestigt werden. Die Feder soll senkrecht nach unten hängen. Wird eine Kugel mit der Masse m an der unteren Federseite befestigt, so dehnt sich die Feder um eine Länge $\Delta \ell$ auf die Gesamtlänge $\ell = \ell_0 + \Delta \ell$. Sie erreicht dadurch eine Gleichgewichtslage, in der die Gesamtkraft \vec{F} als Summe der auf die Masse m einwirkenden Schwerkraft \vec{F}_S und der rücktreibenden Federkraft \vec{F}_D gleich Null ist.

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_D = \vec{0}$$

In dieser Ruhe- oder Gleichgewichtslage soll der Mittelpunkt der Kugel mit dem Nullpunkt eines Maßstabes zusammenfallen (Abb. 20). Der Maßstab wird durch eine nach unten weisende x-Achse repräsentiert. Wird die Schraubenfeder um eine Länge x_0 aus der Ruhelage $x = 0$ gedehnt oder gestaucht, so tritt eine rücktreibende Federkraft \vec{F}_D auf. Die experimentelle Erfahrung zeigt, dass diese Federkraft direkt proportional zur Auslenkung \vec{x} aus der Ruhelage ist.

$$\vec{F}_D = -D\vec{x} \quad (4.18)$$

Da es sich hierbei um einen eindimensionalen Bewegungsablauf in Richtung der x-Achse handelt, können die auftretenden Vektoren ebenfalls als einkomponentige Größen aufgefasst werden, deren Richtung durch das jeweilige Vorzeichen gegeben ist. Die die Bewegung beschreibenden Größen lassen sich somit in skalarer Schreibweise darstellen.

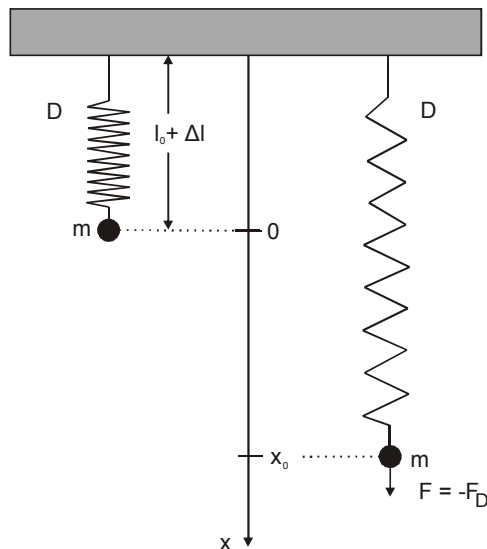


Abb. 20: Federkraft

Die durch die Federkraft F_D beschriebene elastische Rückwirkung wird auch als das Hookesche Gesetz (*Robert Hooke* (1635 - 1703)) bezeichnet. Die Größe D heißt Federkonstante oder Richtgröße und charakterisiert die Stärke der Schraubenfeder. Die Einheit von D ergibt sich zu

$$[D] = \frac{[F_D]}{[x]} = \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (4.19)$$

Durch das Minuszeichen im Hookeschen Gesetz wird zum Ausdruck gebracht, dass Federkraft und Auslenkung entgegengesetzt gerichtet sind. Wird die Masse m durch eine Gegenkraft $F = -F_D = +Dx$ aus

der Ruhelage ausgelenkt und von $x = 0$ bis $x = x_0$ gedehnt, so ist gegen die Federkraft eine Spannarbeit W_s zu leisten (Abb. 21).

$$dW_s = \vec{F} \cdot d\vec{s} = Fdx = Dxdx$$

$$W_s = \int_0^{x_0} Fdx = \int_0^{x_0} Dxdx = \frac{D}{2} x_0^2 \quad (4.20)$$

Die Federkraft ist vom Weg x , d. h. vom Ausmaß der Dehnung abhängig. Dass die Federkraft beschreibende *Hookesche Gesetz* kann als eine Gerade in einem Kraft-Weg-Diagramm dargestellt werden. Die Fläche unter der $F(x)$ -Kurve repräsentiert dabei die bei der Dehnung verrichtete Spannarbeit W_s , die in Form von potentieller Energie in der gespannten Feder gespeichert wird.

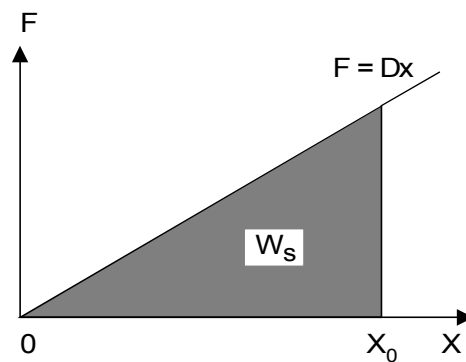


Abb. 21: Spannarbeit bei einer elastischen Feder

Die bei einer Federdehnung um die Länge x verrichtete Spannarbeit wird von der gespannten Feder als potentielle Energie E_{pot} gespeichert. Gespannte Federn sind somit Energiespeichervorrichtungen.

$$E_{\text{pot}} = W_s = \frac{D}{2} x^2 \quad (4.21)$$

4.4 Leistung

Unter der Leistung P versteht man die pro Zeiteinheit Δt verrichtete Arbeit ΔW :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (4.22)$$

Für die Einheit der Leistung gilt

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{J}{s} = W \text{ (Watt)} \quad (4.23)$$

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-3}. \quad (4.24)$$

Die Einheit der Leistung leitet sich vom Eigennamen des schottischen Instrumentenbauers und Erfinders *James Watt* (1736 – 1819) ab. Dieser verbesserte 1768 mithilfe eines Kondensators die 1712 durch den englischen Eisenwarenhändler *Thomas Newcomen* (1663 – 1729) entwickelte atmosphärische Dampfmaschine. Die physikalische Größe Leistung wird häufig benutzt, um kontinuierlich arbeitende Maschinen zu charakterisieren.

Beispiel:

Ein Motor, der pro Stunde eine Arbeit von 360 MJ verrichtet, besitzt eine Leistung P von

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{360 \text{ MJ}}{3600 \text{ s}} = 100 \text{ kW}.$$

Ändert sich die geleistete Arbeit mit der Zeit, so definiert man den Differentialquotienten aus Arbeit und Zeit

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F \Delta s}{\Delta t} = F v \quad (4.25)$$

und bezeichnet ihn als **Momentanleistung**. v stellt dabei die Momentangeschwindigkeit dar. In der folgenden Tabelle 2 sind einige typische Leistungen zusammengestellt.

Physikalischer Vorgang	Leistung
Elektrische Leistung eines Kernkraftwerkes	1 GW
Nennleistung einer Windkraftanlage	1 MW
Pkw	100 kW
Höchstleistung eines Menschen	1 kW
Glühlampe	100 W
Energiesparlampe	10 W
Dauerleistung beim Gehen mit 5 km/h	120 W
Akustik (Sprechen)	$\approx 10 \mu\text{W}$
Hörschwelle des Ohres bei 1000 Hz	$\approx 0,1 \text{ fW}$

Tab. 2: Größenordnungen verschiedener Leistungen

4.5 Impulserhaltung

Es sollen zwei Körper **1** und **2** betrachtet werden, die wechselseitig Kräfte, so genannte innere Kräfte oder Wechselwirkungskräfte aufeinander ausüben. Auf die beiden Körper sollen keine Kräfte von außen (äußere Kräfte) einwirken. Eine solche Situation liegt beispielsweise beim Aufeinandertreffen zweier reibungsfrei aufeinander zurollender Billardkugeln vor. Im Augenblick des Zusammenstoßes üben sie gegenseitig abstoßende Wechselwirkungskräfte aufeinander aus.

Aufgrund des 3. Newtonschen Axioms ($\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$) ist dann die zeitliche Änderung des Impulses \vec{p}_1 von Körper **1** gleich der negativen zeitlichen Änderung des Impulses \vec{p}_2 von Körper **2**.

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_1 = -\frac{d}{dt} \vec{p}_2 \quad (4.26)$$

oder:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_1 + \frac{d}{dt} \vec{p}_2 = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad (4.27)$$

Wenn die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ null ist, so heißt dies: Der Gesamtimpuls $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ändert sich nicht.

Diese Aussage stellt das **Gesetz der Impulserhaltung** dar. Für zwei verschiedene Zeitpunkte t_1 und t_2 bleibt der Gesamtimpuls konstant.

$$\vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) = \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2) \quad (4.28)$$

Im obigen Beispiel wird die Impulszunahme des ersten genau durch die Impulsabnahme des zweiten Körpers kompensiert. Alle Wechselwirkungskräfte sind somit ausgeglichen und können daher den Gesamtimpuls der Körper nicht ändern. Der Gesamtimpuls ist somit eine **Konstante** der Bewegung. Die Impulserhaltung gilt auch für Systeme, die aus mehr als zwei Körpern bestehen. Im Gegensatz zu Wechselwirkungskräften oder inneren Kräften sind **äußere Kräfte** solche Kräfte, die **nicht** von der gegenseitigen Wechselwirkung der betrachteten Körper oder Teilchen herrühren.

Die Erfahrung zeigt:

Stellt \vec{F} die Summe aller **äußeren** Kräfte dar, die auf ein Ensemble von Teilchen einwirken, so ist diese resultierende Kraft \vec{F} gleich der zeitlichen Änderung des Gesamtimpulses \vec{p} aller dieser Teilchen.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} \quad (4.29)$$

4.5.1 Zentrale Stoßprozesse zwischen zwei Teilchen

Abweichend von der Modellvorstellung der Punktmechanik sollen im Folgenden die betrachteten Teilchen eine räumliche Ausdehnung besitzen und durch Kugeln grafisch dargestellt werden. Man unterscheidet:

- Gerade Stöße
- Schiefe Stöße

Bei geraden Stößen liegen die Impulse der Teilchen vor und nach dem Stoß auf einer Geraden, während dies bei schiefen Stößen nicht der Fall ist. Einen Spezialfall der geraden Stöße stellen die zentralen Stöße dar, bei der die Impulse der stoßenden Teilchen vor und nach dem Stoß auf derselben Geraden liegen. Die Impulserhaltung bei zentralen Stoßvorgängen zwischen zwei Teilchen, die ein so genanntes Zweikörpersystem bilden, soll in diesem Unterabschnitt erläutert werden. Zwei ausgedehnte Teilchen können bei Annäherung einen peripheren (streifenden) Stoß oder einen zentralen Stoß ausüben. Im Folgenden soll nur der einfache Spezialfall des zentralen Stoßes näher betrachtet werden. Bei einem zentralen Stoß bewegen sich die beiden Teilchen auf einer Geraden aufeinander zu, die durch ihre Schwerpunkte verläuft (Abb. 22). Der Berührungspunkt der beiden Teilchen liegt auf dieser Verbindungsgeraden. Dabei werden zwei idealisierte Grenzfälle zentraler Stöße unterschieden:

- vollkommen elastischer Stoß
- vollkommen unelastischer Stoß

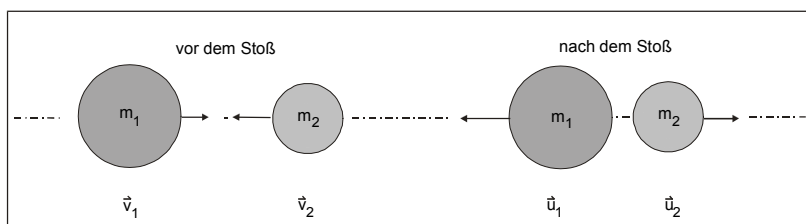


Abb. 22: Vollkommen elastischer Stoß

Werden die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen vor dem Stoß mit \vec{v}_1 und \vec{v}_2 und nach dem Stoß mit \vec{u}_1 und \vec{u}_2 bezeichnet, so erhält man folgende Formulierung des Gesetzes der Impulserhaltung:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad (4.30)$$

Bei einem **vollkommen elastischen Stoß** zeigt die experimentelle Erfahrung, dass zusätzlich zur Impulserhaltung auch die kinetische Energie der Stoßpartner erhalten bleibt. Diese Konstanz der Gesamtenergie wird als Energieerhaltung bezeichnet und in Abschnitt 4.6 als Energieerhaltungssatz formuliert. Sind $E_{\text{kin},1}$ bzw. $E_{\text{kin},2}$ die kinetischen Energien der Teilchen vor dem Stoß und $E'_{\text{kin},1}$ bzw. $E'_{\text{kin},2}$ die kinetischen Energien nach dem Stoß, so gilt:

$$E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2} = E'_{\text{kin},1} + E'_{\text{kin},2} \quad (4.31)$$

Da beim zentralen Stoß die Impulse der Teilchen nur eine Komponente in Richtung ihrer Verbindungsgeraden haben, kann hier der Impulserhaltungssatz für die Impulsbeträge angewendet werden:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (4.32)$$

Die Erhaltung der kinetischen Energien (Energiesatz) liefert:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (4.33)$$

Aus (4.32) und (4.33) können die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 der beiden Teilchen nach dem Stoß berechnet werden:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (4.34)$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} \quad (4.35)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich folgende Spezialfälle ableiten:

1. Ist $m_1 = m_2$, so folgt: $u_1 = v_2$ und $u_2 = v_1$. Sind die beiden Massen identisch, so vertauschen die Teilchen beim Stoß ihre Geschwindigkeiten.
2. Ist $v_2 = 0$, das heißt ruht ein Stoßpartner vor dem Stoß, so folgt für die vom stoßenden auf das gestoßene Teilchen übertragene Energie ΔE_2 :

$$\Delta E_2 = E'_{\text{kin},2} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 \quad (4.36)$$

Der relative Energieverlust $\Delta E_1 / E_{\text{kin},1}$ des stoßenden Teilchens ergibt sich dann zu:

$$\frac{\Delta E_1}{E_{\text{kin},1}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (4.37)$$

Der relative Energieverlust des stoßenden Teilchens $\Delta E_1 / E_{\text{kin},1}$ wird maximal, wenn $m_1 = m_2$ ist.

Ein Stoß heißt unelastisch, wenn ein Teil der kinetischen Energie in andere Energieformen umgewandelt wird, zum Beispiel in Deformationsenergie oder Wärme. Unelastische Stöße stellen die wichtigsten Wechselwirkungsprozesse in der Natur dar. Unelastische Stöße werden unterteilt in *teilelastische* und *vollständig inelastische* Stöße. Beim **vollkommen unelastischen Stoß** (Abb. 23) vereinigen sich die beiden Teilmassen zu einer Gesamtmasse $m = m_1 + m_2$, die sich nach dem Stoß mit der gemeinsamen Geschwindigkeit \bar{u} fortbewegt.

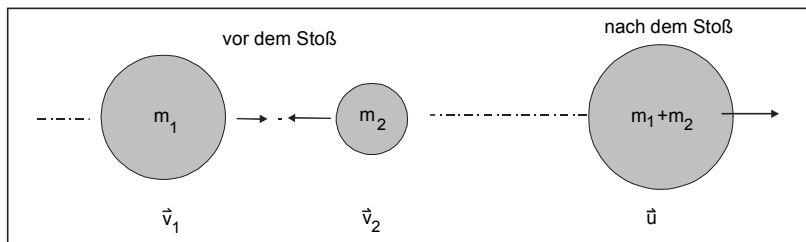


Abb. 23: Vollkommen unelastischer Stoß

Wird das Gesetz der Impulserhaltung auf den vollkommen unelastischen Stoßvorgang angewandt, so erhält man die Beziehung

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = (m_1 + m_2) \bar{u} = m \bar{u} . \quad (4.38)$$

Der Anteil der kinetischen Energie, der bei einem solchen Stoß in andere Energieformen umgewandelt wird, soll mit ΔQ bezeichnet werden. Der Energieerhaltungssatz liefert dann die Gleichung

$$\Delta Q = (E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2}) - (E'_{\text{kin},1} + E'_{\text{kin},2}) . \quad (4.39)$$

$$\Delta Q = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \right) \quad (4.40)$$

ΔQ stellt die in Form von plastischer Verformungs- und Reibungsarbeit dissipierte Energie dar, die neben der Deformation auch eine Temperaturerhöhung hervorruft.

War der gestoßene Körper m_2 vor dem Stoß in Ruhe, so gilt $v_2 = 0$. \vec{v}_1 und \vec{u} liegen dann auf einer Geraden und sind parallel zueinander. Der Impulserhaltungssatz (4.38) kann dann in skalarer Form geschrieben werden:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u \quad (4.41)$$

Für den Energieerhaltungssatz folgt dann:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + \Delta Q \quad (4.42)$$

Aus Impuls- und Energieerhaltung folgt dann für die Geschwindigkeit u bzw. die beim Stoß dissipierte Energie ΔQ :

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4.43)$$

$$\Delta Q = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{\text{kin},1} \quad (4.44)$$

Hierbei bedeutet $E_{\text{kin},1}$ die kinetische Energie des stoßenden Körpers. Aus (4.44) folgt, dass im Allgemeinen nicht die gesamte kinetische Energie beim Stoß dissipiert werden kann. Ursache hierfür ist der Impulserhaltungssatz: Der vor dem Stoß vorhandene Gesamtimpuls muss auch nach Stoß unverändert vorhanden sein. Die dazu erforderliche kinetische Energie bleibt der Bewegung der beiden Stoßpartner erhalten und kann daher nicht umgewandelt werden. Einzige Ausnahme bildet der Fall, in dem sich zwei Körper mit gleicher Masse und betragsmäßig gleicher (antiparallel gerichteter) Geschwindigkeit aufeinander zu bewegen. Beim vollkommen unelastischen Stoß kann dann die gesamte kinetische Energie dissipiert werden. Dieser Fall kann beispielsweise beim Frontalzusammenstoß zweier Pkw auftreten. Der vollständig inelastische Stoß soll abschließend für drei Spezialfälle näher betrachtet werden:

1. $m_1 = m_2$: Haben stoßender und gestoßener Körper die gleiche Masse, so gilt für die Geschwindigkeit u nach dem Stoß:

$$u = \frac{1}{2} v_1$$

Für die dissipierte Energie gilt dann: $\Delta Q = \frac{1}{2} E_{\text{kin},1}$

2. $m_1 \ll m_2$: Ist die stoßende Masse m_1 sehr klein im Vergleich zur vor dem Stoß ruhenden Masse m_2 , dann ist die gemeinsame Geschwindigkeit u nach dem Stoß ebenfalls sehr klein und es

wird fast die gesamte kinetische Energie ($\Delta Q \approx E_{\text{kin},1}$) dissipiert.

3. $m_1 \gg m_2$: Ist die stoßende Masse m_1 sehr groß im Vergleich zur vor dem Stoß ruhenden Masse m_2 , dann bleiben seine Geschwindigkeit ($u \approx v_1$) und seine kinetische Energie $E_{\text{kin},1}$ beim Stoßvorgang nahezu erhalten. Der in andere Energieformen umgewandelte Energieanteil ist dann vernachlässigbar klein ($\Delta Q \approx 0$).

4.5.2 Raketenantrieb und Strahltriebwerk

Ein typisches Anwendungsbeispiel des Impulserhaltungssatzes stellt der Raketenantrieb dar. Er funktioniert im Gegensatz zu den auf Reibungskräften basierenden Antriebsarten wie der Propellerantrieb auch im luftleeren Raum.

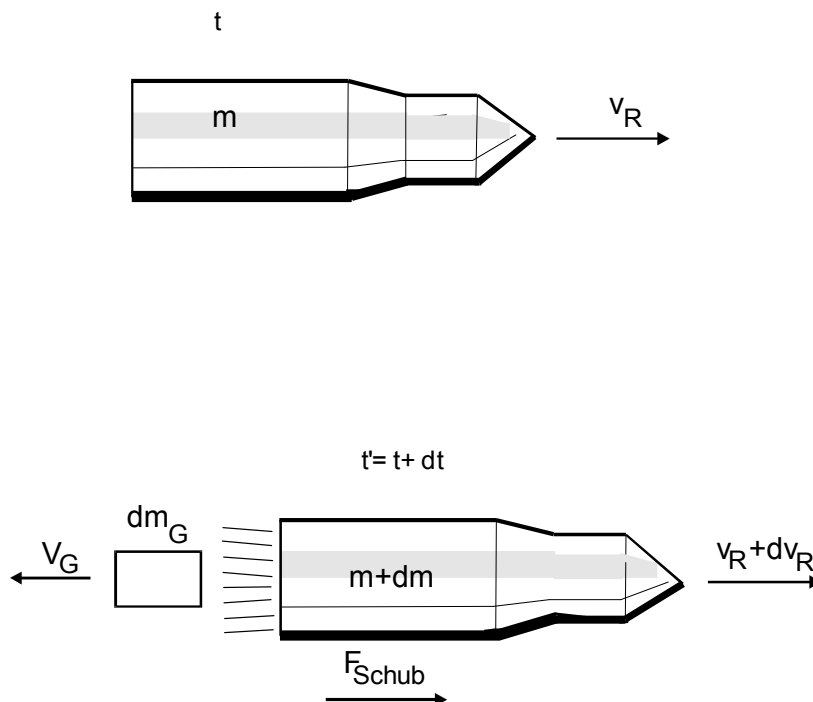


Abb. 24: Prinzip des Raketenantriebs

Die Rückstoßimpulse der mit hoher Geschwindigkeit \vec{v}_G relativ zum Raketenkörper und antiparallel zur Raketengeschwindigkeit \vec{v}_R ausströmenden heißen Verbrennungsgase ändern laufend den Impuls der Rakete. Die Beschleunigung der Rakete ist ein Rückstoßprozess, bei dem der Gesamtimpuls, d. h. die Vektorsumme der Impulse von Rakete und ausströmenden Verbrennungsgasen zu jedem Zeitpunkt gleich null ist.

Im Folgenden soll eine Rakete im **kräftefreien** Weltraum betrachtet werden, die sich entlang einer Geraden bewegt. Zum Zeitpunkt t besitze diese Rakete eine Masse $m = m(t)$ sowie eine Geschwindigkeit v_R relativ zur ruhend gedachten Erde. Die Geschwindigkeit der ausgestoßenen Verbrennungsgase relativ zur Erde ist dann betragsmäßig $v_R - v_G$. Im Zeitintervall $dt = t' - t$ wird die Gasmasse dm_G mit der Relativgeschwindigkeit v_G ausgestoßen (Abb. 24). Die Rakete hat zum Zeitpunkt $t' = t + dt$ eine Geschwindigkeit von $v_R + dv_R$. Aufgrund des Impulserhaltungssatzes ist der Gesamtimpuls von Rakete samt Brennstoff zum Zeitpunkt t gleich demjenigen zum späteren Zeitpunkt $t' = t + dt$:

$$mv_R = (m + dm)(v_R + dv_R) + dm_G(v_R + dv_R - v_G) \quad (4.45)$$

dm ist die Änderung der Raketenmasse im Zeitintervall dt . Aufgrund der Massenerhaltung gilt:

$$dm = -dm_G \quad (4.46)$$

Damit folgt für den Impulserhaltungssatz:

$$mv_R = (m - dm_G)(v_R + dv_R) + dm_G(v_R + dv_R - v_G) \quad (4.47)$$

Nach Umformung erhält man die Gleichung:

$$mdv_R = dm_G v_G \quad (4.48)$$

Da die ausgestoßene Gasmasse der Abnahme der Raketenmasse entspricht ($dm_G = -dm$) folgt:

$$mdv_R = -dmv_G$$

$$dv_R = -\frac{dm}{m} v_G \quad (4.49)$$

Hiermit kann die Raketenmasse $m(t)$ als Funktion der Zeit berechnet werden. Hat die Rakete zum Zeitpunkt t_1 die Geschwindigkeit $v_{R,1}$ und die Masse m_1 , sowie zum späteren Zeitpunkt t_2 die entsprechenden Größen $v_{R,2}$ und m_2 , so folgt:

$$\int_{v_{R,1}}^{v_{R,2}} dv_R = -v_G \int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{m}$$

$$v_{R,2}(t_2) - v_{R,1}(t_1) = v_G \ln \frac{m_1(t_1)}{m_2(t_2)} \quad (4.50)$$

Diese Beziehung stellt die vom russischen Mathematiker und Physiker *Konstantin Ziolkowski* (1857 – 1935) aufgestellte Raketengleichung dar.

Zu einem Anfangszeitpunkt $t_1 = 0$ sei die Raketengeschwindigkeit $v_{R,1} = 0$ und die zugehörige Startmasse sei $m_0 = m_1$. Die Geschwindigkeit der Rakete $v_R = v_{R,2}$ zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_2$ lässt sich dann aus der Raketengleichung und der aktuellen Raketenmasse $m(t) = m_2$ berechnen.

$$v_R = v_G \ln \frac{m_0}{m(t)} \quad (4.51)$$

Ist die Geschwindigkeit v_R vorgegeben, so lassen sich die Raketenmasse und damit der Brennstoffverbrauch $\Delta m_B(t) = m_0 - m(t)$ ermitteln. Auflösen von Gl. 4.51 nach $m(t)$ liefert:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{v_R}{v_G}} \quad (4.52)$$

Ist der Brennstoff $m_B = m_0 - m_E$ vollständig verbrannt, dann hat die Rakete ihre Endmasse m_E und zugleich ihre maximale Geschwindigkeit v_{RE} erreicht. Für diese Endgeschwindigkeit folgt:

$$v_{RE} = v_G \ln \frac{m_0}{m_E} \quad (4.53)$$

Jets mit Düsenantrieb besitzen sog. **Strahltriebwerke** (Abb. 25), die jedoch keine Raketen darstellen, da sie ihre Rückstoßmasse überwiegend in Form von Luft ansaugen und abgesehen von der Treibstoffmasse nicht selbst mitführen.

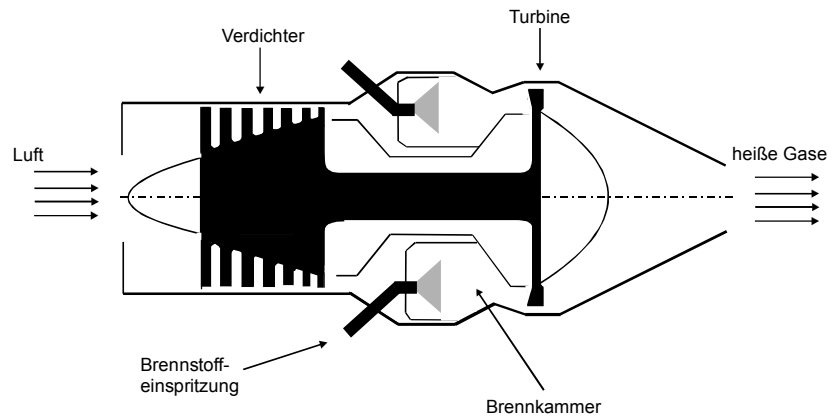


Abb. 25: Strahltriebwerk in schematischer Darstellung

4.6 Konservative Kräfte und Energieerhaltung

Alle physikalischen Kräfte lassen sich in zwei Klassen einteilen:

Konservative und dissipative Kräfte.

Eine Kraft heißt **konservativ**, wenn bei der Arbeit gegen diese Kraft die mechanische Energie des Körpers, auf den die Kraft einwirkt, erhöht wird. Die Arbeit gegen eine konservative Kraft wird dann als kinetische oder potentielle Energie des Körpers gespeichert. Man sagt: Konservative Kräfte besitzen ein Potential. Das wichtigste Beispiel einer konservativen Kraft stellt die Gravitationskraft dar. Für konservative Kräfte ist die Arbeit, die auf einem beliebigen Weg von einer Anfangsposition \vec{r}_A zu einer Endposition \vec{r}_E verrichtet wird von der Wahl des Weges von \vec{r}_A nach \vec{r}_E unabhängig. Mit

anderen Worten: Die Arbeitsintegrale $W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ sind unabhängig

von der Form des Weges. Für einen in sich geschlossenen Weg fallen End- und Anfangsposition zusammen, es ist $\vec{r}_A = \vec{r}_E$, und es gilt

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Das Kreissymbol im Integrationszeichen weist darauf hin, dass hier das Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg auszuwerten ist.

Konservative Kräfte \vec{F} besitzen ein Potential E_{pot} . Mit Hilfe der **Vektoranalysis** kann gezeigt werden, dass zwischen der konservativen Kraft \vec{F} und ihrer potentiellen Energie E_{pot} eine mathematische Beziehung der Form

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}$$

existiert. Der mit der Bezeichnung *grad* abgekürzte **Gradient** ist ein so genannter vektorieller Differentialoperator, für den die folgende Definition gilt:

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Der Gradient stellt somit formal einen Vektor dar, dessen Komponenten aus partiellen Ableitungen bestehen. Wirkt eine konservative Kraft auf einen Massenpunkt ein, so besitzt der Massenpunkt an jedem Raumpunkt eine wohldefinierte potentielle Energie, die somit eine skalare Funktion repräsentiert. Wird der Gradient auf den Skalar der potentiellen Energie angewandt, so ergibt sich als abgeleitete Größe ein Vektor, der in die Richtung der maximalen Änderung der potentiellen Energie zeigt. Dieser Vektor ist mit der einwirkenden Kraft identisch. Die **Zentralkräfte** wie die Gravitationskraft oder die Coulombkraft sind konservativ und besitzen jeweils ein Potential E_{pot} . Der Nullpunkt der potentiellen Energie kann dabei willkürlich festgelegt werden. Wegen der $(1/r^2)$ -Abhängigkeit dieser Kräfte ist es sinnvoll, den Nullpunkt der potentiellen Energie ins Unendliche zu legen. Dort verschwindet die Krafteinwirkung und dann ist $E_{\text{pot}}(r = \infty) = 0$. Als Beispiel soll dazu die Gravitationskraft näher untersucht werden.

Für die Arbeit W , die gewonnen wird, wenn eine Masse m aus sehr großer Entfernung bis auf einen Abstand r an die Masse M herangeführt wird erhält man:

$$W = \int_{\infty}^r \vec{F}_G \cdot d\vec{s} = \int_{\infty}^r -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r \cdot (-d\vec{r}) = \int_{\infty}^r G \frac{mM}{r^2} dr = -\frac{GmM}{r}$$

Dabei ist $d\vec{s} = -d\vec{r}$, da der Weg in Richtung auf die sich im Zentrum des Koordinatensystems befindliche Masse M durchlaufen wird. Als Ergebnis erhält man:

$$W = E_{\text{pot}}(r) - E_{\text{pot}}(r = \infty) = E_{\text{pot}}(r) - 0 = E_{\text{pot}} = -\frac{GmM}{r}$$

Die gewonnene Arbeit ist somit gleich der Differenz der potentiellen Energie zwischen Anfangs- und Endposition. Stellt r den Abstand der Masse m von der Masse M dar, dann kann man der Masse m an jeder Stelle des Raumes einen Skalar, nämlich seine potentielle Energie E_{pot} , zuordnen. Für die an einer beliebigen Stelle r auf die Masse m einwirkende Kraft gilt dann:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}} = \left(-\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}, -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}, -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \right)$$

Für den Abstand r folgt mit Hilfe kartesischer Koordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Komponentenweise Differentiation liefert schließlich:

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{GmM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x GmM}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -\frac{x GmM}{r^3}$$

Analog folgt für die anderen beiden Komponenten:

$$F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} = -\frac{y GmM}{r^3}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} = -\frac{z GmM}{r^3}$$

In vektorieller Schreibweise erhält man für die Kraft \vec{F} :

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}, -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}, -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \right) = -\frac{G m M}{r^3} (x, y, z) = -\frac{GmM}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r = \vec{F}_G$$

Als einwirkende Kraft ergibt sich konsistenterweise die Newtonsche Gravitationskraft.

Wird eine Arbeit gegen eine **dissipative Kraft** verrichtet, dann ändert sich die potentielle Energie nicht. Dissipative Kräfte besitzen nämlich kein Potential. Die von der dissipativen Kraft geleistete Arbeit wird deswegen nicht in Form von mechanischer (potentieller oder kinetischer) Energie gespeichert, sondern ständig in Wärmeenergie umgewandelt

Dissipative Kräfte sind Reibungskräfte.

Durch dissipative Kräfte verrichtete Reibungsarbeit wird in Wärmeenergie umgewandelt, die sich nicht vollständig in potentielle oder kinetische Energie zurückverwandeln lässt. Einzelheiten dazu werden in der **Thermodynamik** im Zusammenhang mit **irreversiblen Prozessen** behandelt. Dagegen sind mechanische Energien (potentielle Energie E_{pot} und kinetische Energie E_{kin}) Energieformen, die vollständig ineinander umgewandelt werden können.

Die große Bedeutung der physikalischen Größe Energie beruht darauf, dass sie in verschiedenen Formen auftritt und dass sie insgesamt erhalten bleibt, d. h. die Gesamtenergie bleibt konstant. Sie ändert sich im Laufe der Zeit nicht. Die Gesamtenergie ist somit eine **Erhaltungsgröße**. Mit anderen Worten: In einem abgeschlossenen System, auf das keine äußeren Kräfte einwirken, ändert sich die mechanische Energie des Systems nicht. Für **konservative Kräfte** gilt der **Erhaltungssatz für die mechanische Energie**:

Die Summe E aus potentieller und kinetischer Energie bleibt in einem abgeschlossenen System konstant.

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = E = \text{konstant.} \quad (4.54)$$

Nimmt die kinetische Energie ab, so wird diese Abnahme gerade wieder durch die Zunahme der potentiellen Energie um denselben Betrag ausgeglichen und umgekehrt.

Der Energieerhaltungssatz ist ein Erfahrungssatz. Aufgrund von Reibungskräften geht allerdings bei realen Bewegungen immer ein Teil der mechanischen Energie verloren. Diese mechanischen Energieverluste verschwinden jedoch nicht, denn sie werden in eine andere Energieform, nämlich Wärme umgewandelt. Wird die durch die Reibungsarbeit gegen dissipative Kräfte entstandene Wärmeenergie mit in der Energiebilanz berücksichtigt, dann lässt sich im Rahmen der Thermodynamik ein **erweiterter Energieerhaltungssatz** formulieren.

In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aus mechanischer Energie und Wärmeenergie konstant.

Energie kann damit weder erzeugt noch vernichtet werden. Sie kann lediglich unter Erhaltung ihres Gesamtbetrages auf verschiedene Energieformen verteilt und zwischen ihnen umgewandelt werden. Der Heilbronner Arzt *Julius Robert Mayer* (1814 – 1878) beobachtete als Erster, dass Bewegungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt werden kann. Er konnte zeigen, dass mechanische Arbeit und Wärme äquivalent sind. Diese Erkenntnis wird als Erster Hauptsatz der Wärmelehre bezeichnet. Durch seine Messungen des Mechanischen Wärmeäquivalents konnte Mayer das konstante Umwandlungsverhältnis von mechanischer Energie in Wärmeenergie experimentell belegen. Darauf aufbauend wurde der oben genannte erweiterte Energieerhaltungssatz 1847 von dem Physiologen und Physiker Hermann Helmholtz (1821 – 1894) formuliert.

5 Drehbewegungen

Die Beschleunigung \vec{a} ist definiert als

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (5.1)$$

Ist \vec{a} konstant, so ändert sich weder der Betrag noch die Richtung der Beschleunigung. Die Bewegung heißt dann *geradlinig, gleichmäßig beschleunigte Bewegung*. Ist \vec{a} nicht konstant, so ändert sich der Betrag oder die Richtung der Beschleunigung. Die Bewegung heißt dann *ungleichmäßig beschleunigt*. Zur Klasse der ungleichmäßig beschleunigten Bewegungen gehören die Drehbewegungen, die im Folgenden am Beispiel der Kreisbewegung genauer betrachtet werden sollen. Eine Masse m bewege sich mit **konstanter** Bahngeschwindigkeit gemäß Abb. 26 auf einer *Kreisbahn* mit dem Radius r . Eine solche Bewegung heißt **gleichförmige Kreisbewegung**. Hierbei durchläuft der Körper in gleichen Zeitintervallen gleiche Winkel. Da der Kreismittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liegt, wird die Lage der Punktmasse m durch den Ortsvektor $\vec{r} = (x, y)$ eindeutig charakterisiert. Die Lage des Massenpunktes m kann jedoch auch durch den Abstand r vom Koordinatenursprung und durch den Winkel φ , den der Ortsvektor mit der positiven Richtung der x -Achse bildet, angegeben werden. Die Koordinaten r und φ werden *ebene Polarkoordinaten* genannt. Aus Abb. 26 liest man folgende Transformationsformeln zwischen den **kartesischen** und den **Polarkoordinaten** ab:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (5.2)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad (5.3)$$

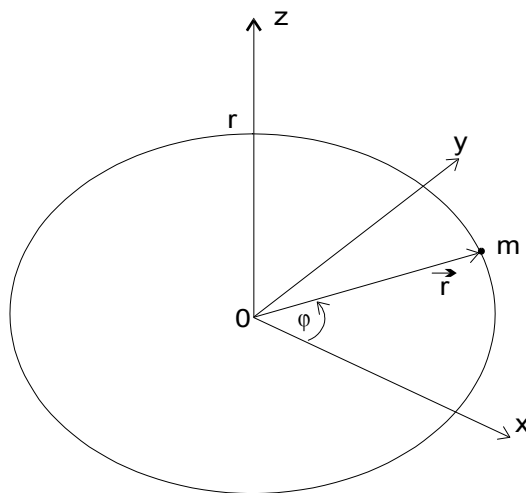


Abb. 26: Kreisbewegung eines Massenpunktes

5.1 Kinematik der Rotation

Die ideale Rotationsbewegung ist ein gleichförmig durchlaufener Kreis. Hierbei durchläuft der Körper in gleichen Zeitabschnitten gleiche Winkel. Da der Radius r bei der Kreisbewegung unverändert bleibt, wird der Bewegungsablauf durch die Änderung des Winkels φ mit der Zeit t beschrieben. Der Differentialquotient $d\varphi/dt$ wird als **Winkelgeschwindigkeit** ω definiert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (5.4)$$

Für die Einheit der Winkelgeschwindigkeit erhält man

$$[\omega] = \frac{[d\varphi]}{[dt]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (5.5)$$

Bei einem vollständigen Umlauf auf der Kreisbahn wird der Vollwinkel 2π vom Ortsvektor \vec{r} während der Umlaufzeit T überstrichen. Damit folgt für die konstante Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f. \quad (5.6)$$

Die Größe $f = \frac{1}{T}$ ist die **Umlauffrequenz**. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ wird wegen dieser Proportionalität auch als **Kreisfrequenz** bezeichnet. Die Kreisfrequenz ω kann zusammen mit der *Drehachse* und dem *Drehsinn* zu einem axialen Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zusammengefasst werden. Die Kreisfrequenz gibt dann den Betrag und die Drehachse samt Drehsinn die Orientierung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit an. Aufgrund dieser Eigenschaften stellt $\vec{\omega}$ einen *axialen* Vektor dar (Abb. 27). Der Vektor \vec{v} der Bahngeschwindigkeit verläuft immer tangential zur Kreisbahn und steht senkrecht auf dem Ortsvektor \vec{r} , der die momentane Lage des Massenpunktes auf der Kreisbahn mit dem Radius r kennzeichnet.

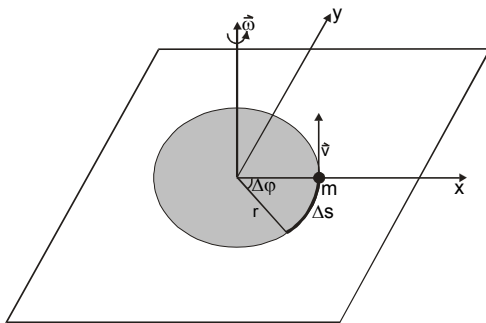


Abb. 27: Vektoren der Kreisbewegung

Der Winkel φ als mathematische Größe stellt einen Skalar dar. Formal lässt sich die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ in Vektorschreibweise darstellen.

Man schreibt dann $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$. $d\vec{\varphi}$ beschreibt dabei die

Lage der Ebene im Raum, die durch den Winkel $d\varphi$ bestimmt ist, der durch zwei sich schneidende Geraden aufgespannt wird. Dies geschieht durch Angabe ihrer Normalenrichtung, durch welche die Ausrichtung der Ebene im Raum gegeben ist. Denn die Lage einer Ebene im Raum kann durch den Normalenvektor, der senkrecht auf dieser Ebene steht, gekennzeichnet werden. Offen ist dabei noch der Richtungssinn von $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, durch den angegeben werden soll, in welchem mathematischen Sinne der Winkel $d\varphi$ durchlaufen wird. Erst durch Angabe des Richtungssinns wird die Orientierung der Ebene festgelegt. Dadurch lässt sich eindeutig bestimmen, welche Seite der Ebene ihre Oberseite und welche ihre Unterseite ist. Mit Hilfe eines rechtshändigen Koordinatensystems lässt sich die x-y-Ebene so in die Ebene von $d\varphi$ legen, dass $d\varphi$ als positiv durchlaufen zählt, wenn der rotierende Körper von der positiven x- zur positiven y-Achse läuft. Dann stellt die der positiven z-Richtung zugewandte Seite der Ebene von $d\varphi$ die Oberseite dar und der Vektor $d\vec{\varphi}$ weist in die positive z-Richtung.

Der Betrag der Bahngeschwindigkeit v ergibt sich als Quotient aus dem Kreisumfang $2\pi r$ und der Umlaufzeit T zu

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi f r = \omega r. \quad (5.7)$$

In Vektorschreibweise ergibt sich die Bahngeschwindigkeit \vec{v} als Vektorprodukt der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und des Ortsvektors \vec{r} .

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.8)$$

Bei der Kreisbewegung stehen die Vektoren $\vec{\omega}$ und \vec{r} stets senkrecht aufeinander.

Die mit konstantem Betrag der Bahngeschwindigkeit erfolgende **gleichförmige Kreisbewegung** ist eine beschleunigte Bewegung mit nicht-konstanter Beschleunigung. Sowohl der Beschleunigungsvektor \vec{a} als auch der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} ändern zwar ihre Beträge nicht, jedoch ständig ihre Richtung. Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} ändert sich im Zeitintervall Δt um das gleiche Winkelintervall $\Delta\varphi$ wie der Orts- oder Radiusvektor \vec{r} . Da der Radius bei einer Kreisbewegung konstant ist, folgt aus der konstanten Bahngeschwindigkeit v , aufgrund von $v = \omega r$, auch die Konstanz der Winkelgeschwindigkeit ω . Da die Lage (Orientierung) der Drehachse

ebenfalls unverändert bleibt, erfolgt die gleichförmige Kreisbewegung mit konstantem Vektor $\vec{\omega}$.

Die zugehörige Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}$ ergibt sich zu

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \frac{d}{dt} \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (5.9)$$

Der Beschleunigungsvektor \vec{a} liegt in der Bahnebene. Er steht senkrecht auf der Bahngeschwindigkeit \vec{v} und ist gemäß der Rechten-Hand-Regel antiparallel zum Ortsvektor \vec{r} und weist damit zum Kreiszentrum. Die zeitliche Änderung des Ortsvektors \vec{r} ist gleich dem Vektor \vec{v} der Bahngeschwindigkeit (Abb. 28). Dies sei im Folgenden kurz erläutert. Zum Zeitpunkt t_1 befindet sich der Massenpunkt an der durch den Ortsvektor $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ bzw. den Winkel φ_1 gekennzeichneten Stelle. Zu einem späteren Zeitpunkt t_2 hat der Massenpunkt die durch $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ bzw. φ_2 charakterisierte Position erreicht. Dabei hat der Ortsvektor des sich auf einer Kreisbahn bewegendes Massenpunktes im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ das Winkelintervall $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ überstrichen und sich um $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ geändert. Der Ortsvektor wird bei der Kreisbewegung auch als Radiusvektor bezeichnet. $\Delta \vec{r}$ verläuft auf der Sekanten und weist von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 . Die Länge der Sekante Δr stimmt näherungsweise mit der Länge des Kreisbogenelementes Δs überein.

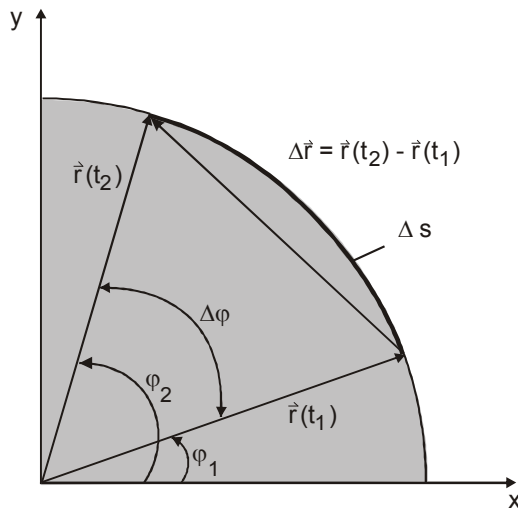


Abb. 28: Ableitung der Bahngeschwindigkeit \vec{v}

Für beliebig kleine Winkel $\Delta \varphi$ kann das Kreisbogenelement Δs durch die Sehne $|\Delta \vec{r}|$ approximiert werden. Mit $\Delta t \rightarrow 0$ wird die Änderung des Radiusvektors $d\vec{r}$ mit dem Kreisbogen $d\vec{s}$ identisch:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (5.10)$$

Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} hat die Richtung der Kreistangente und steht senkrecht auf \vec{r} und auf $\vec{\omega}$. Für die gleichförmige Kreisbewegung gelten dann betragsmäßig folgende Beziehungen:

$$a = \omega v \quad (5.11)$$

$$v = \omega r \quad (5.12)$$

$$a = \omega^2 r \quad (5.13)$$

Die Richtung des Beschleunigungsvektors \vec{a} ergibt sich aus:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.14)$$

Der letzte Ausdruck stellt ein mehrfaches Vektorprodukt dar. Für das **dreifache Vektorprodukt** aus beliebigen Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} gilt der **Entwicklungssatz** der Vektoralgebra:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (5.15)$$

Das dreifache Vektorprodukt ist somit wiederum ein Vektor. Für die Beschleunigung \vec{a} folgt damit:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \quad (5.16)$$

Da $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ ist $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$. Damit verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Für das Skalarprodukt folgt: $\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega^2$. Der Beschleunigungsvektor \vec{a} steht nach den Rechenregeln zur Bildung des Vektorproduktes senkrecht auf $\vec{\omega}$ und \vec{v} und weist zum Zentrum des Kreises ($-\vec{r}$ ist antiparallel zu \vec{r}):

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \quad (5.17)$$

Erfolgt die Kreisbewegung mit konstantem Betrag v der Bahngeschwindigkeit (**gleichförmige Kreisbewegung**), so ändert sich ständig nur die Richtung, nicht aber der Betrag des *radial* gerichteten Beschleunigungsvektors \vec{a} . Sie wird *Radialbeschleunigung* genannt. \vec{a} ist immer entgegengesetzt zum Radiusvektor \vec{r} gerichtet, aber betragsmäßig konstant.

Nach Ablauf des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$ ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$ durch Drehung um den Winkel $\Delta\varphi$ in den Vektor $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$ übergegangen. Er hat sich dabei um

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ mit dem Betrag $\Delta v = v\Delta\varphi$ geändert. Δv entspricht dabei der Länge eines Kreisbogenschnitts, der vom Zentrum des Kreises mit dem Radius v unter dem Winkel $\Delta\varphi$ „gesehen“ wird.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v\omega = \omega v$$

Mit $\omega = \frac{v}{r}$ ergibt sich

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (5.18)$$

Aus Abb. 29a wird graphisch ersichtlich, dass der Beschleunigungsvektor \vec{a} senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} steht und

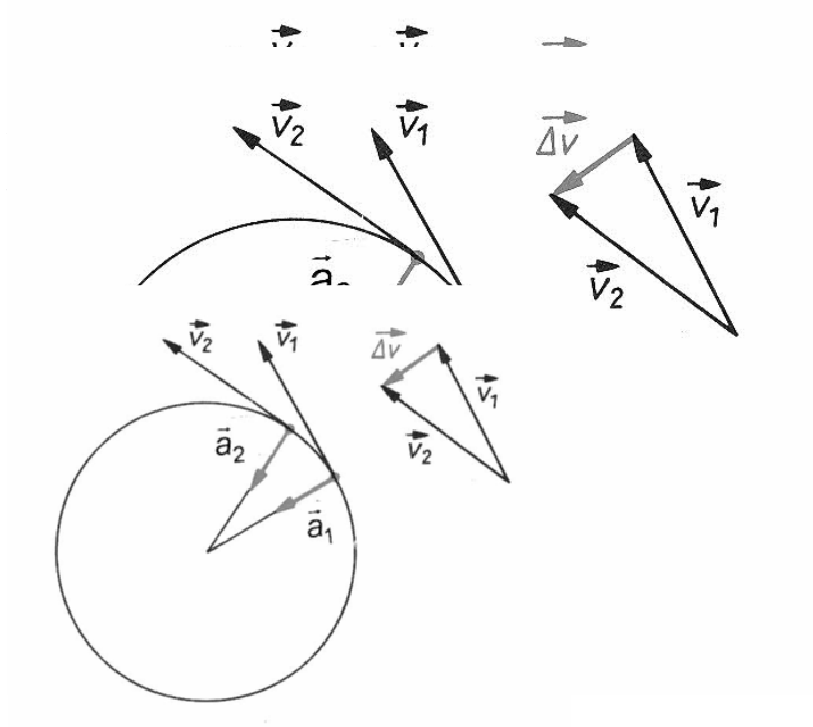


Abb. 29a: Radialbeschleunigung bei einer gleichförmigen Kreisbewegung

Mit Hilfe der Definition der Beschleunigung erhält man

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Die Beschleunigung \vec{a} erfolgt gemäß Abb. 29a in Richtung von $\Delta \vec{v}$ senkrecht zu \vec{v} . Sie stellt somit eine **Radialbeschleunigung** dar, die zum Zentrum der Drehbewegung hin gerichtet ist.

Die Geschwindigkeitsvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 sind betragsmäßig gleich, d. h. sie können wegen $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v = \text{konst.}$ in den gleichen Anfangspunkt gelegt werden (Abb. 29b). Der Vektor $\vec{v}(t)$, er beschreibt die Momentangeschwindigkeit des sich auf der Kreisbahn gleichförmig bewegenden Massenpunktes, bewegt sich dann auf einem Kreis mit dem Radius v .

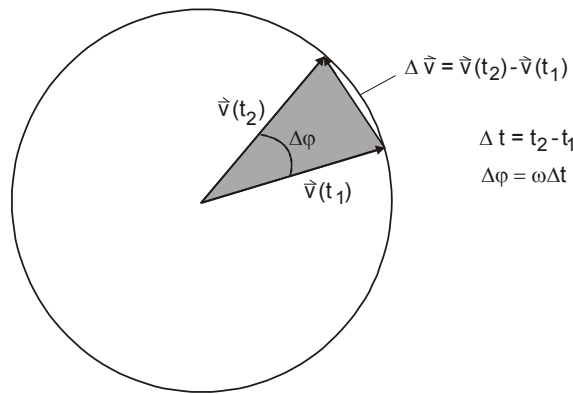


Abb. 29b: Geschwindigkeitsvektoren bei gleichförmiger Kreisbewegung

Für die Vektoren gilt: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \uparrow \uparrow \Delta \vec{v}$ und $\vec{a} \perp \vec{v}$.

5.2 Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft

Durch die Radialbeschleunigung wirkt auf eine sich auf den Kreis bewegnende Masse m eine Kraft, die **Zentripetalkraft** \vec{F}_Z :

$$\vec{F}_Z = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \quad (5.19)$$

Durch die Zentripetalkraft wird der sich bewegnende Massenpunkt m auf der Kreisbahn gehalten. Ein sich mit dem Massenpunkt auf der Kreisbahn mitbewegnender Beobachter stellt dagegen eine radial nach außen gerichtete Kraft fest, die **Zentrifugalkraft** oder **Fliehkraft** \vec{F}_F genannt wird:

$$\vec{F}_F = m\omega^2\vec{r} \quad (5.20)$$

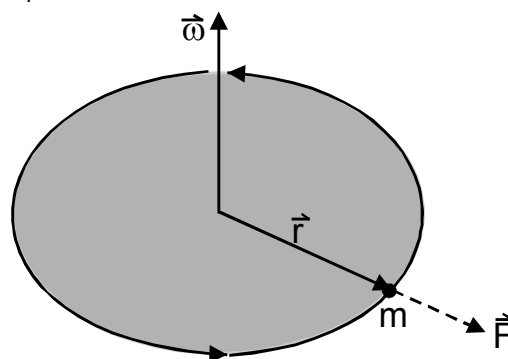


Abb. 30: Fliehkraft

Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft sind betragsmäßig gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet.

$$\vec{F}_Z = -\vec{F}_F \quad (5.21)$$

Die Zentrifugalkraft wirkt in Richtung des Radiusvektors nach außen, und wirkt nur auf Beobachter, die mitbewegt werden.

5.3 Drehmoment

Die Erfahrung zeigt, dass die Wirkung von Kräften allein noch nicht ausreicht, um eine Drehbewegung hervorzurufen. Die Kräfte müssen nämlich zusätzlich noch bestimmten Bedingungen genügen, um ein sog. *Drehmoment* erzeugen zu können. Zur Illustration sollen an einem ruhenden Körper zwei entgegengesetzt gleichgroße Kräfte angreifen. Sie erfüllen dann die Bedingung des statischen Gleichgewichts $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$, d.h. sie können den Körper nicht in eine beschleunigte Translationsbewegung versetzen. Ob der Körper aber tatsächlich in Ruhe bleibt oder in eine resultierende Rotationsbewegung versetzt wird, hängt von weiteren Details (Abb. 31) ab. Damit der Körper nicht einfach in Kraftrichtung beschleunigt wird, ist zur Erzeugung eines Drehmomentes immer ein Kräftepaar aus betragsmäßig gleich großen aber entgegengesetzt gerichteten Kräften erforderlich. Oft tritt eine dieser Kräfte nicht unmittelbar in Erscheinung, da sie als Lagerkraft im Drehzentrum der durch äußere Bedingungen fixierten Drehachse wirkt.

Der Körper bleibt in Ruhe, wenn die Kräfte in Richtung der Verbindungslinie zwischen den beiden Angriffspunkten A und B wirken (oberer Teil der Abb. 31). Ist das nicht der Fall, wie im mittleren Teil der Abb. 31, so wird der Körper in Drehung versetzt. Bleiben die Kraftwirkungen bei der Drehung des Körpers unverändert, geht der frei drehbare Körper schließlich in seine Gleichgewichtslage über (unterer Teil der Abb. 31).

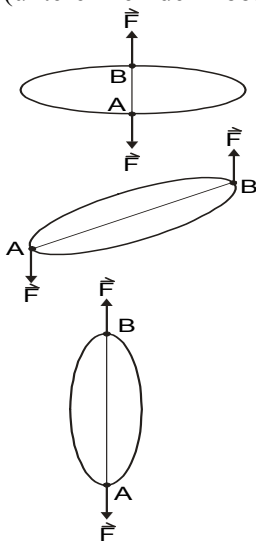


Abb. 31: Entgegengesetzt gleich große Kräfte, die an verschiedenen Punkten eines ausgedehnten Körpers angreifen

Eine Erklärung für dieses Verhalten liefert die experimentelle Erfahrung über das Gleichgewicht von Kräften am Hebel, der aus einem gewichtslos gedachten Balken oder Stab besteht, der um eine Aufhängung 0 drehbar gelagert ist. Bereits vor über 2200 Jahren entdeckte *Archimedes* das **Hebelgesetz**:

Gleiche Kräfte stehen im Gleichgewicht, wenn sie in gleichen Entfernungen von der Aufhängung 0 angreifen (gleicharmiger Hebel).

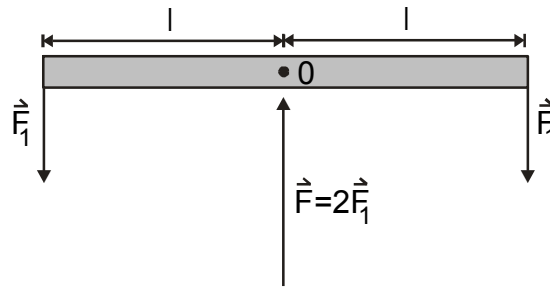


Abb. 32: Gleichgewicht von Kräften am gleicharmigen Hebel

Ferner zeigen experimentelle Untersuchungen:

Ungleiche Kräfte sind dann im Gleichgewicht, wenn die Bedingung $F_1 l_1 = F_2 l_2$ erfüllt ist.

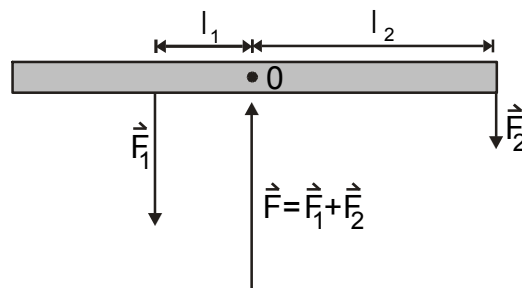


Abb. 33: Gleichgewicht von verschiedenen Kräften

Das Produkt aus einer Kraft vom Betrag F und der Länge ihres Hebelarmes l beschreibt ihre Hebelwirkung oder ihre Drehfähigkeit, für die sich heute der technische Begriff **Drehmoment** eingebürgert hat. Der Hebelarm ist derjenige Abstand vom Drehzentrum, auf dem die Wirkungslinie der Kraft \vec{F} senkrecht steht. Das Drehmoment bewirkt eine Änderung der Drehbewegung. Es beschreibt die Drehwirkung einer Kraft. Die Drehmomente von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 in Abb. 33 sind gleich groß, haben aber entgegengesetzte Richtungen. Wenn das eine positiv und das andere negativ gezählt wird, folgt für das Gleichgewicht gegenüber Drehbewegung:

Ein Körper, der sich unter der Einwirkung äußerer Kräfte um eine feste Achse drehen kann, ist im Gleich-

gewicht, wenn die Vektorsumme aller Drehmomente verschwindet, d.h. wenn das Gesamtdrehmoment gleich Null ist.

Aus der Bedingung des statischen Kräftegleichgewichts $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ folgt, dass im Drehpunkt 0 eine weitere Kraft $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ an der Hebelstange angreift. Zu dieser Kraft \vec{F} gehört der Hebelarm $l = 0$, so dass diese Kraft kein Drehmoment bezüglich des Drehpunktes ausübt.

Eine an einem drehbar gelagerten starren Körper in der vektoriellen Entfernung \vec{r} von der Drehachse angreifende Kraft \vec{F} kann ein Drehmoment \vec{M} hervorrufen, infolgedessen der Körper eine Rotationsbeschleunigung erfährt. Der Körper muss also um eine Achse A drehbar sein. Durch die Wahl eines Koordinatensystems kann dann sichergestellt werden, dass die Drehachse A beispielsweise mit der z-Achse zusammenfällt. Die an dem Körper angreifende Kraft \vec{F} möge zunächst nur in einer zur Drehachse A senkrechten Ebene wirken. Die Verallgemeinerung dieses Spezialfalles wird zunächst zurückgestellt. Das Drehmoment hängt von Betrag, Richtung und Angriffspunkt der Kraft \vec{F} ab. Der Angriffspunkt wird durch den Radiusvektor \vec{r} definiert. Durch den Betrag r des Radiusvektors ist gleichzeitig der Abstand Drehpunkt-Angriffspunkt festgelegt. Die Richtung des Drehmoments steht senkrecht auf der von den Vektoren \vec{r} und \vec{F} aufgespannten Ebene. Das Drehmoment \vec{M} der Kraft \vec{F} bezüglich des Koordinatennullpunktes, durch den die Drehachse verläuft, ist definiert als Vektorprodukt aus Radiusvektor \vec{r} und Kraft \vec{F} . Diese Kraft soll hier an einer **punktförmigen** Masse m angreifen, die sich an der Stelle \vec{r} befindet und die um die z-Achse drehbar ist (Abb. 34).

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.22)$$

Aus dieser Definition folgt für die Einheit des Drehmomentes \vec{M} :

$$[M] = [F][r] = \text{Nm}$$

Dimensionsmäßig ist die Einheit der vektoriellen Größe Drehmoment $[M] = 1 \text{ Nm}$ identisch mit der Einheit Joule (J) der grundsätzlich anders definierten skalaren Größe Energie E.

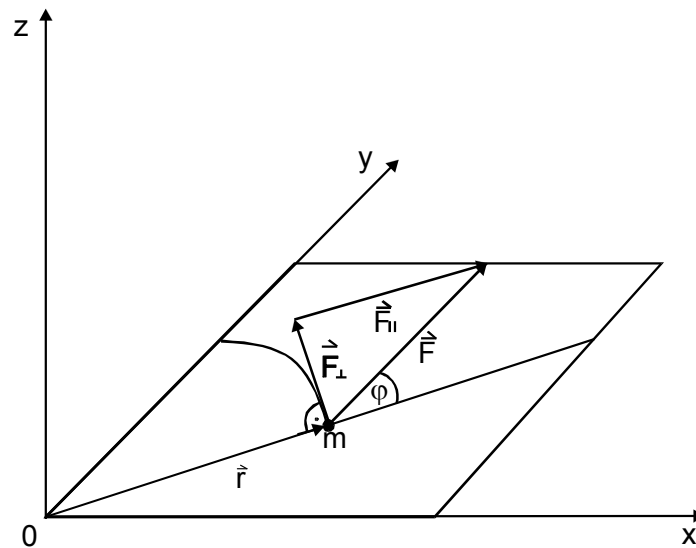


Abb. 34: Definition des Drehmomentes

Die o. g. Definition des Drehmomentes ist äquivalent zur folgenden Aussage:

Das Drehmoment $M = Fl = Fr \sin \varphi$ entspricht betragsmäßig dem Produkt aus einer Kraft F und dem senkrechten Abstand $l = r \sin \varphi$ ihrer Wirkungslinie vom Drehpunkt.

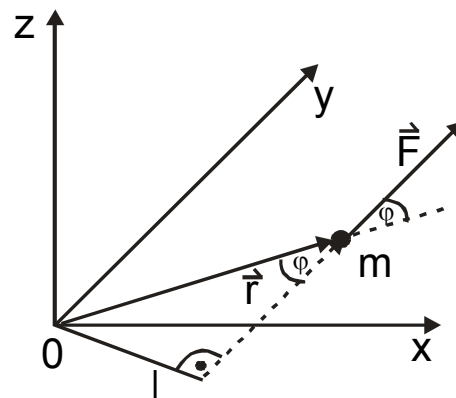


Abb. 35: Drehmoment als Ursache der Drehbewegung mit Darstellung des Hebelarmes l

Den Abstand r zwischen Drehpunkt und Angriffspunkt der Kraft nennt man **Hebelarm** oder auch Kraftarm. Das Produkt aus Hebelarm r und der Komponente der Kraft senkrecht zur Richtung des Hebelarmes $F_{\perp} = F \sin \varphi$, liefert den **Betrag** M des Drehmomentes:

$$M = r F_{\perp} = r F \sin \varphi \quad (5.23)$$

Damit entspricht das Drehmoment M offensichtlich dem Betrag des Vektorproduktes $\vec{r} \times \vec{F}$.

$$M = |\vec{r} \times \vec{F}| = r F \sin \varphi = Fr \sin \varphi = Fl \quad (5.24)$$

Der Hebelarm l entspricht dem senkrechten Abstand der Wirkungslinie der Kraft vom auf der Drehachse liegenden Drehzentrum, welches sich hier im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Das Drehmoment M ist maximal, wenn \vec{r} und \vec{F} senkrecht aufeinander stehen. Dann gilt: $M = rF$

Die Kraft \vec{F} kann vektoriell in ihre Komponenten parallel zu \vec{r} und senkrecht zu \vec{r} zerlegt werden.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel} \quad (5.25)$$

Die Kraft \vec{F}_{\parallel} ist radial nach außen gerichtet. Sie steht senkrecht auf der starren Drehachse und übt nur eine statische Zugkraft auf diese aus. Daher ist \vec{F}_{\parallel} ohne Beschleunigungswirkung und kann insbesondere keine Drehbewegung des Körpers mit der Masse m verursachen. Die Kraft \vec{F}_{\perp} bewirkt eine Beschleunigung dv/dt der Masse m längs eines Kreisbogens mit dem konstanten Radius r . Sie bewirkt das Drehmoment der Kraft \vec{F} mit dem Betrag

$$M = r F_{\perp} = r m \frac{d}{dt} v = r m \frac{d}{dt} (r \omega) = m r^2 \frac{d\omega}{dt} = J \alpha. \quad (5.26)$$

Die in dieser Gleichung auftretende Größe $\frac{d\omega}{dt}$ beschreibt die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit. Sie wird mit dem Formelzeichen α bezeichnet.

In Analogie zur Bahnbeschleunigung $a = \frac{dv}{dt}$ wird sie **Winkelbeschleunigung** α genannt. In vektorieller Schreibweise gilt folgende Definition

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (5.27)$$

Die Einheit der Winkelbeschleunigung ergibt sich zu $[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Für einen Massenpunkt der Masse m , der sich im Abstand r von einem Drehzentrum auf einer Kreisbahn vom Radius r bewegt, lässt sich eine neue Größe $J = m r^2$ definieren, die **Massenträgheitsmoment** des Massenpunktes genannt wird und die mit dem Formelzeichen J bezeichnet wird. Für das auf einen Massenpunkt m im Abstand r von einer Drehachse einwirkende Drehmoment folgt dann

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} . \quad (5.28)$$

Das Drehmoment stellt somit einen **axialen Vektor** dar. Axiale Vektoren sind **freie** Vektoren, d.h. sie sind parallel verschiebbar und daher an keine Wirkungslinie verbunden. Die Wirkungslinie ist dabei durch die Richtung des Kraftvektors festgelegt. Die Richtung der durch \vec{M} hervorgerufenen Drehbewegung folgt aus der Definition des Drehsinns axialer Vektoren: Blickt man in Richtung des axialen Vektors, so erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn. Diese Richtung des Drehmomentes ergibt sich auch aus der Definition des Vektorproduktes.

Die bisherigen Überlegungen waren auf den Spezialfall beschränkt, dass die an dem Körper angreifende Kraft \vec{F} in einer zur Drehachse A senkrechten Ebene lag. Wirkt dagegen eine Kraft \vec{F} in einer Ebene, die **nicht** senkrecht auf der Drehachse A steht, so lässt sich dieser allgemeine Fall auf den oben dargestellten Spezialfall zurückführen. Dazu wird die Kraft $\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_P$ vektoriell in zwei Komponenten \vec{F}_S senkrecht (Index s) und \vec{F}_P parallel (Index p) zur Drehachse zerlegt.

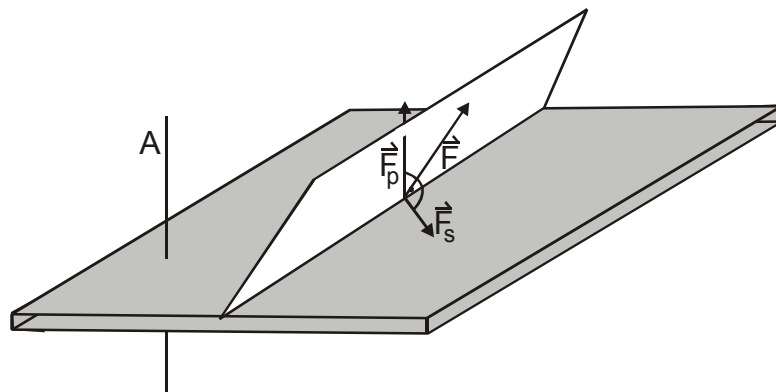


Abb. 36: Wirkung einer schiefgerichteten Kraft auf die Drehbewegung

Nur \vec{F}_S kann eine Drehbewegung des Körpers verursachen; sie entspricht der Projektion von \vec{F} auf die Drehbewegungsebene. \vec{F}_P übt dagegen nur eine parallel gerichtete Zugkraft auf die ortsfeste Drehachse A aus. Die Kraft \vec{F}_S liegt wieder in der zur Drehachse senkrechten Drehbewegungsebene und sie kann mit der in Abb. 34 dargestellten Kraft $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$ identifiziert werden.

Eine konstante Kraft \vec{F} , die **tangential** ($\vec{r} \perp \vec{F}$) am Umfang einer Welle vom Radius r angreift, verursacht ein konstantes Drehmoment vom Betrag $M = r F$. Die Welle dreht sich dann während des Zeitintervalls Δt um einen Drehwinkel $\Delta\varphi$. Der Angriffspunkt der Kraft legt dabei einen Weg $\Delta s = r\Delta\varphi$ zurück und das Drehmoment M verrichtet dabei an der Welle die Rotationsarbeit

$$\Delta W_{\text{rot}} = F \Delta s = \frac{M}{r} r \Delta \varphi = M \Delta \varphi. \quad (5.29)$$

Für die im Zeitintervall Δt vom Drehmoment hervorgerufene **Leistung** P folgt:

$$P = \frac{\Delta W_{\text{rot}}}{\Delta t} = \frac{M \Delta \varphi}{\Delta t} = M \omega \quad (5.30)$$

ω beschreibt die Winkelgeschwindigkeit der Welle.

Vektoriell gilt: $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Die Momentanleistung P ist durch das Skalarprodukt der Vektoren \vec{M} und $\vec{\omega}$ gegeben.

In der Praxis spielt das Drehmoment bei der Beschleunigung von Kraftfahrzeugen eine herausragende Rolle. Verbrennungsmotoren erzeugen kein über den gesamten Drehzahlbereich konstantes Drehmoment (Abb. 37). Die Motordrehzahl $n = U / \text{min}$ ist dabei definiert als die Anzahl der Umdrehungen pro Minute und ist proportional zur Anzahl der Zündungen pro Minute. Aufgrund komplizierter Strömungsvorgänge während des Verbrennungsvorganges im Zylinder nimmt das Drehmoment bei hohen Drehzahlen steil ab, so dass die maximale Leistung eines Kraftfahrzeugs nicht bei Höchstgeschwindigkeit erbracht wird.

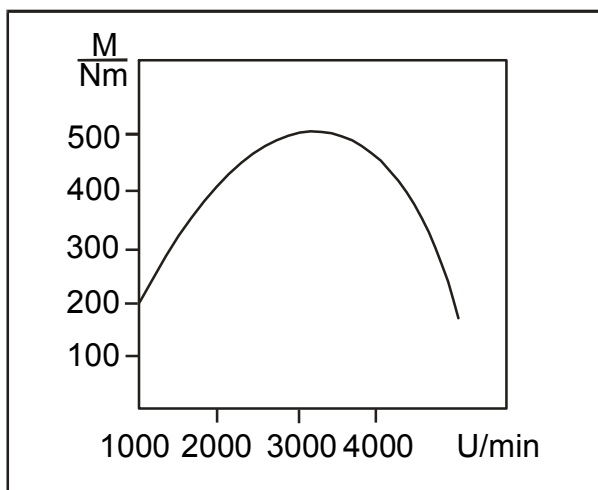


Abb. 37: Drehmoment als Funktion der Drehzahl eines Verbrennungsmotors

Für eine größtmögliche Beschleunigung ist daher die Kenntnis der Drehzahl mit maximalem Drehmoment erforderlich. Um den Kraftstoffverbrauch zu minimieren ist dagegen eine niedrigtourige Fahrweise bei geringer Drehzahl notwendig, bei der es zu möglichst wenigen Zündvorgängen kommt.

Beispiel: Drehmoment M_R als Ursache für die Rollbewegung

Eine auf einer waagrechten Ebene rollende Kugel kommt infolge der Rollreibung allmählich zur Ruhe. Für das beschleunigungsfreie Abrollen der Kugel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit muss ein bestimmtes Drehmoment M um den Auflagepunkt B aufgewendet werden, welches das entgegen gesetzte Drehmoment M_R der Rollreibung gerade kompensiert. Die experimentelle Beobachtung führt zu folgendem Ansatz:

$$M_R = \mu_{RL} \cdot F_N$$

Der Proportionalitätsfaktor μ_{RL} wird **Rollreibungslänge** genannt und besitzt die Dimension einer Länge.

$$[\mu_{RL}] = \text{m}$$

Die Rollreibungslänge μ_{RL} wird durch den Rollreibungskoeffizienten μ_R bestimmt und lässt sich auf einer schiefen Ebene mit verstellbarem Neigungswinkel φ ermitteln. Wird der Neigungswinkel langsam von Null an erhöht, so rollt eine Kugel oder ein Kreiszylinder nicht die schiefe Ebene herunter, solange φ kleiner als der Grenzwinkel φ_R ist. Dabei gilt:

$$\varphi_R < \varphi_G < \varphi_H \quad (5.31)$$

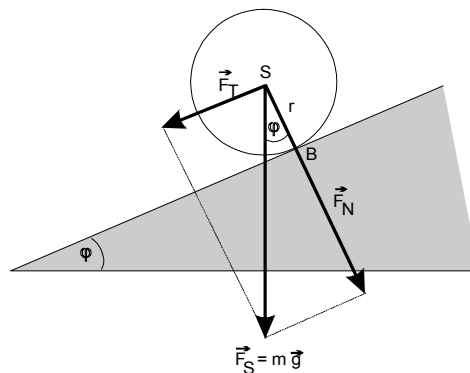


Abb. 38: Bestimmung des Rollreibungskoeffizienten μ_R

Die Größe r stellt dabei den Radius der Kugel oder des Zylinders dar. B ist der Berührungspunkt der Kugel bzw. die Berührlinie des Zylinders mit der schiefen Ebene. Bei dem Grenzwinkel φ_R ist das durch die Gewichtskraft $\vec{F}_S = m\vec{g}$ im Gegenuhrzeigersinn wirkende Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_S$ um den Auflagepunkt B be-

tragsmäßig gleich dem durch die Rollreibungskraft

$F_{RR} = \mu_R \cdot F_N$ im Uhrzeigersinn wirkenden Drehmoment

$$|\vec{M}_R| = |\vec{r} \times \vec{F}_{RR}| = \mu_R mgr \cos \varphi_R = \mu_{RL} \cdot F_N = \mu_{RL} mg \cos \varphi_R.$$

Die Rollreibungskraft greift im Schwerpunkt der Kugel an und ist antiparallel zur Bewegungsrichtung orientiert. Damit ergibt sich für den Zusammenhang zwischen μ_{RL} und μ_R :

$$\mu_{RL} = r \cdot \mu_R.$$

Aus $M = M_R$ folgt schließlich: $mgr \sin \varphi_R = \mu_R mgr \cos \varphi_R$.

Für den Rollreibungskoeffizienten μ_R erhält man:

$$\mu_R = \tan \varphi_R. \quad (5.32)$$

5.4 Massenträgheitsmoment

Jeder Körper widersetzt sich der Translationsbeschleunigung infolge seiner *trägen* Masse. Dies gilt auch für die Drehbeschleunigung einer Rotationsbewegung. Die Trägheitswirkung eines starren Körpers wird dabei jedoch nicht nur durch seine Masse m , sondern zusätzlich durch ihren Abstand r von der Drehachse bestimmt. Je weiter ein Massenelement von dieser Achse entfernt ist, um so mehr trägt es zum Beharrungsvermögen bei. Bei ausgedehnten Körpern wird daher die Trägheitswirkung durch die Massenverteilung bestimmt. Ein quantitatives Maß für den Widerstand gegen Drehbeschleunigungen ist das **Massenträgheitsmoment** J . Für eine **punktförmige** Masse m im Abstand r von der Drehachse ist das Massenträgheitsmoment J definiert durch

$$J = m r^2. \quad (5.33)$$

Mit Hilfe des Massenträgheitsmomentes J kann eine weitere Definition des Drehmoments \vec{M} angegeben werden

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \vec{\alpha}. \quad (5.34)$$

Diese Gleichung stellt das **Grundgesetz für Rotationsbewegungen** dar.

Unter der Wirkung eines Drehmomentes erfährt ein drehbarer Körper eine Winkelbeschleunigung.

Dabei ist das Verhältnis der Beträge von wirkendem Drehmoment zur verursachten Winkelbeschleunigung eine konstante Größe, nämlich das Massenträgheitsmoment J .

Für die Berechnung des Massenträgheitsmomentes J eines ausgedehnten Körpers gilt: Besteht der Körper aus N verschiedenen Massenelementen Δm_i , die sich in senkrechten Abständen r_i von der Drehachse befinden, so ist J gegeben durch die Summe der Beiträge aller Massenelemente:

$$J = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2. \quad (5.35)$$

Im Grenzübergang $\Delta m \rightarrow 0$ geht die diskrete Summe (5.35) über in eine „kontinuierliche“ Summe, die durch ein Riemannsches Integral dargestellt wird. Für das **Massenträgheitsmoment** gilt dann

$$J = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_m r_{\perp}^2 dm. \quad (5.36)$$

Das Integral erstreckt sich über die Massenverteilung des ausgedehnten Körpers mit der Gesamtmasse m .

Beispiel: Massenträgheitsmoment J eines Vollzylinders

Für das Massenträgheitsmoment J bezüglich der z -Achse eines um diese Achse rotationssymmetrischen Kreiszylinders (Radius R , Länge L), der Gesamtmasse m und der homogenen Dichte ρ gilt:

$$J = \int_0^m r_{\perp}^2 dm$$

Wegen $dm = \rho dV$ folgt

$$J = \int_0^V r_{\perp}^2 \rho dV = \rho \int_0^V r_{\perp}^2 dV.$$

Wird der Vollzylinder in dünnwandige Hohlzylinder zerlegt, so gilt für das Massenträgheitsmoment dJ eines Hohlzylinderelements mit dem Radius r , der Masse dm und der infinitesimal dünnen Wandstärke dr :

$$dJ = r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \rho 2\pi r L dr$$

Durch Summation aller Elemente dJ folgt für das Massenträgheitsmoment J des Kreiszylinders mit dem Radius R und der Länge L :

$$J = \int_0^J dJ = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r L dr = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi L \rho \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

Das Volumen des Vollzylinders beträgt $V = \pi R^2 L$ und seine Masse m ergibt sich zu $m = \rho V = \rho \pi R^2 L$.

Eine wichtige technische Anwendung des Massenträgheitsmomentes stellen Schwungräder und Schwungscheiben dar. Sie werden als moderne Energiespeicher eingesetzt.

Die Berechnung des Massenträgheitsmomentes ist nur möglich, wenn die Masse und ihre Verteilung bezüglich der jeweiligen Drehachse bekannt sind.

Das Massenträgheitsmoment eines zusammengesetzten Körpers bezüglich der gleichen Drehachse berechnet sich durch Addition als Summe der Trägheitsmomente seiner Teile.

In Abb. 39 sind die Massenträgheitsmomente einiger wichtiger rotationssymmetrischer Körper der Masse m und der homogenen Dichte ρ zusammenfassend dargestellt. Die Rotationsachse entspricht dabei der Symmetrieachse durch den Schwerpunkt.

Natürlich können durch den Schwerpunkt eines Körpers beliebig viele Drehachsen gelegt werden, die im Allgemeinen zu verschiedenen Massenträgheitsmomenten führen.

Die experimentelle Beobachtung zeigt: Das Trägheitsmoment hängt von der Drehachse ab. Dabei stellt sich heraus, dass immer zwei bestimmte, senkrecht aufeinander stehende Drehachsen existieren, für die das Massenträgheitsmoment minimal (J_{\min}) bzw. maximal (J_{\max}) wird. Diese beiden Achsen werden als **freie** Achsen des Körpers bezeichnet. Ein frei beweglicher Körper kann nur um diese beiden Achsen stabil rotieren. Zusammen mit einer auf diesen beiden Achsen senkrecht stehenden dritten Achse, um die keine stabile Rotation möglich ist, bilden sie die **Hauptträgheitsachsen** eines Körpers. Durch parallele Verlagerung einer Schwerpunktsachse S zu einer Drehachse A wird das Massenträgheitsmoment vergrößert. Im Folgenden soll das Massenträgheitsmoment, bezogen auf eine Drehachse S durch den **Schwerpunkt** mit J_S bezeichnet werden. Das Massenträgheitsmoment des gleichen Körpers, bezogen auf eine zu S parallele Drehachse A im Abstand a soll mit J_A gekennzeichnet werden.

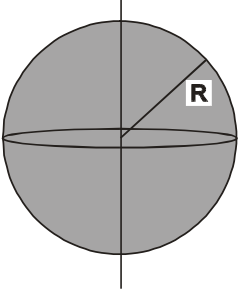
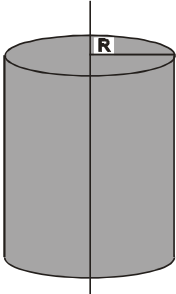
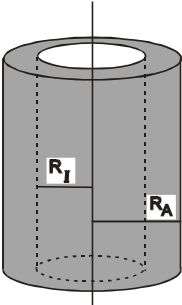
Körper	Massenträgheitsmoment J
Kugel 	Vollkugel $J = \frac{2}{5} m R^2$ Kugelschale (dünnwandig) $J = \frac{2}{3} m R^2$ R: Kugelradius Hohlkugel $J = \frac{2}{5} m \frac{R_A^5 - R_I^5}{R_A^3 - R_I^3}$
Vollzylinder 	$J = \frac{1}{2} m R^2$ R: Zylinderradius
Hohlzylinder 	$J = \frac{1}{2} m (R_A^2 + R_I^2)$ R_A : Außenradius R_I : Innenradius

Abb. 39: Massenträgheitsmomente

Zwischen den beiden Massenträgheitsmomenten J_S und J_A existiert ein Zusammenhang, der vom schweizer Mathematiker *Jakob Steiner* (1796 – 1863) formuliert wurde und heute als **Steinerscher Satz** bezeichnet wird.

$$J_A = J_S + ma^2 \quad (5.37)$$

m ist dabei die Gesamtmasse des rotierenden Körpers und a der Abstand zwischen den beiden parallelen Achsen S und A . Die Aussage des Satzes von Steiner kann durch eine einfache Energiebetrachtung begründet werden: Die kinetische Energie des um S rotierenden Körpers ist $E = \frac{1}{2} J_S \omega^2$. Bei Rotation um die Drehachse A führt der Körper gleichzeitig zwei Bewegungen aus:

Er rotiert um S und zusätzlich bewegt sich die im Schwerpunkt S vereint gedachte Masse m mit der Bahngeschwindigkeit v_S im Abstand a um die Rotationsachse A , wobei beide Bewegungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit erfolgen. Für die gesamte kinetische Energie E_{kin} des Körpers folgt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J_S \omega^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 \quad (5.38)$$

Die gesamte kinetische Energie eines starren Körpers ist die Summe aus der Rotationsenergie für die Drehbewegung um den Schwerpunkt S und der Translationsenergie des Schwerpunktes.

Wegen $v_S = a\omega$ folgt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J_S \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (J_S + m a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad (5.39)$$

Auch bei Rotation um eine zu S parallele Achse A gilt für die gesamte Rotationsenergie

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_A \omega^2, \quad (5.40)$$

wobei

$$J_A = J_S + m a^2 \quad (5.41)$$

ist. Bei jeder Rotation ist das Massenträgheitsmoment für $a = 0$ am kleinsten, d.h. wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt S verläuft. Wenn das Massenträgheitsmoment J_S bekannt ist, können die

Trägheitsmomente für alle dazu parallelen Achsen A mithilfe des Steinerschen Satzes berechnet werden.

Beispiel: Ableitung des Steinerschen Satzes

Ein Zylinder soll sich um zwei parallele Achsen S und A drehen können, die senkrecht zur Zeichenebene in Abb. 40 stehen und den Abstand a besitzen. Das herausgegriffene Volumenelement dV habe vom Schwerpunkt S den Abstand r_S und von der Drehachse A den Abstand r_A . Definitionsgemäß gilt:

$$J_S = \int r_S^2 dm = \rho \int r_S^2 dV$$

$$J_A = \int r_A^2 dm = \rho \int r_A^2 dV$$

Der Kosinussatz liefert für r_A^2 : $r_A^2 = r_S^2 - 2ar_S \cos \alpha + a^2$

$$J_A = \rho \int (r_S^2 - 2ar_S \cos \alpha + a^2) dV$$

$$J_A = \rho \int r_S^2 dV + \rho \int a^2 dV - 2a\rho \int r_S \cos \alpha dV$$

$$J_A = J_S + a^2 \rho \int dV = J_S + a^2 \rho V = J_S + ma^2$$

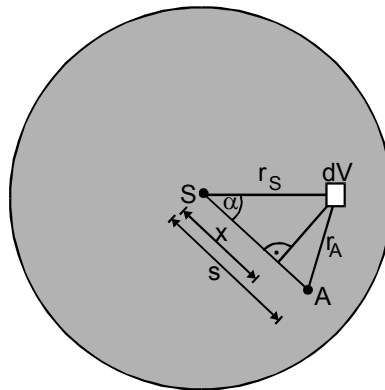


Abb.40: Ableitung des Satzes von Steiner

Der Term $\int r_S \cos \alpha dV$ verschwindet. Es ist

$$2a\rho \int r_S \cos \alpha dV = 2a\rho \int x dV = 0. \text{ Denn } x_S = \frac{\rho \int x dV}{m} \text{ ist die}$$

über die Massenverteilung gemittelte x-Koordinate des Schwerpunktes $S(x_S, y_S, z_S)$, der hier im Ursprung des gewählten Koordinatensystems liegt ($x_S = 0$). Folglich gilt:

$$J_A = J_S + ma^2$$

5.5 Drehimpuls

Die dem Impuls $\vec{p} = m \vec{v}$ der geradlinigen Bewegung entsprechende Größe der Drehbewegung ist der **Drehimpuls** \vec{L} . Bewegt sich ein Massenpunkt der Masse m , dessen Lage durch den Ortsvektor \vec{r} charakterisiert ist mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}$, dann besitzt er den Impuls $\vec{p} = m \vec{v}$. Der Drehimpuls des Massenpunktes ist dann folgendermaßen definiert

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (5.42)$$

Definitionsgemäß ist der **Drehimpuls** \vec{L} ebenfalls ein **axialer Vektor** (Abb. 41).

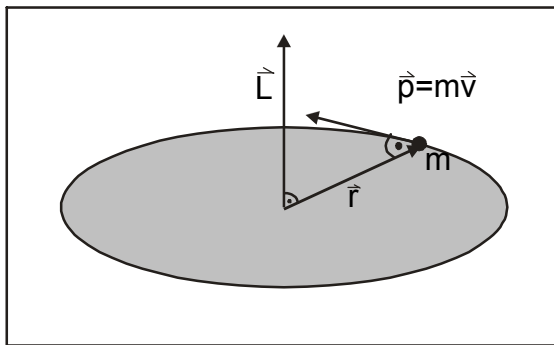


Abb. 41: Definition des Drehimpulses

Ausgehend von dieser Definition ist folgende vektorielle Umformung möglich:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad (5.43)$$

Mit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ folgt $\vec{L} = \vec{r} \times (m \vec{\omega} \times \vec{r})$.

Die Anwendung des Entwicklungssatzes für dreifache Vektorprodukte liefert:

$$\vec{L} = m [(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] \quad (5.44)$$

Da bei einer Kreisbewegung der Ortsvektor \vec{r} senkrecht auf dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ steht folgt $\vec{r} \times \vec{\omega} = 0$. Für den Drehimpuls \vec{L} ergibt sich damit

$$\vec{L} = m r^2 \vec{\omega}. \quad (5.45)$$

Mit Hilfe des Massenträgheitsmoments eines Massenpunktes $J = m r^2$ erhält man für den Drehimpuls \vec{L} schließlich die Beziehung

$$\vec{L} = J \vec{\omega}. \quad (5.46)$$

Der Drehimpuls \vec{L} ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Drehbewegung. Gl. 5.46 ist allgemein gültig und weist jedem mit $\vec{\omega}$ rotierenden Körper einen Drehimpuls \vec{L} zu.

5.6 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Der Drehimpuls \vec{L} kann sich unter bestimmten Bedingungen im Laufe der Zeit ändern. Für die zeitliche Änderung des Drehimpulses ergibt sich mit Hilfe der Produktregel der Differenzialrechnung

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p}. \quad (5.47)$$

Da die Bahngeschwindigkeit $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ und der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ gleichgerichtet sind, fällt das erste Glied auf der rechten Seite weg. Aufgrund des 2. Newtonschen Axioms ist $\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$. Daraus folgt für die zeitliche Änderung des Drehimpulses

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}. \quad (5.48)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment \vec{M} der äußeren Kraft \vec{F} .

Das Drehmoment steht senkrecht zu \vec{r} und \vec{F} und verschwindet, wenn \vec{r} und \vec{F} auf einer Linie liegen. Wirken keine äußeren Momente, dann ist $\vec{M} = \vec{0}$. Es gilt dann:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{0} \text{ oder } \vec{L} = \vec{c} \text{ (konst.)} \quad (5.49)$$

Der Drehimpuls bleibt erhalten, wenn kein Drehmoment wirkt.

Diese Aussage wird als **Satz von der Erhaltung des Drehimpulses** bezeichnet.

Beispiel: Gravitation als Zentralkraft

Zentralkräfte sind Kräfte, die zum Ursprung eines Koordinatensystems hin oder von ihm weg weisen. So ist die dem Radiusvektor \vec{r} entgegengesetzt gerichtete *Gravitationskraft*, mit der ein Planet mit der Masse m_P von der Sonne mit der Masse m_S angezogen wird, stets zur Sonne gerichtet. Wird der Ursprung des Koordinatensystems in die Sonne gelegt, so übt die Gravitationskraft auf die Planetenmasse kein Drehmoment aus. Der Bahndrehimpuls ist dann eine Konstante der Bewegung, d. h. er ändert sich nicht im Laufe der Zeit. Da der Drehimpuls direkt proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Planetenbewegung um die Sonne ist, bleibt diese ebenfalls konstant. Wegen

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ist auch die Umlaufzeit } T \text{ des Planeten konstant. Diese}$$

Konstanz wird für die Festlegung des *astronomischen Zeitnormales* ausgenutzt. So ist beispielsweise die Umlaufzeit der Erde um die Sonne und damit die Dauer eines Erdjahres konstant. Im Einzelnen gilt

$$\vec{F}_G = -G(m_P m_S / r^2) \frac{\vec{r}}{r}.$$

\vec{r}/r ist dabei ein Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors \vec{r} . Wegen $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$ folgt:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}_G = \vec{r} \times \left[-G(m_P m_S / r^2) \frac{\vec{r}}{r} \right] = \vec{0}.$$

Die gleiche Argumentation gilt auch für die elektrische Coulombkraft, die ebenfalls eine Zentralkraft darstellt. Durch die anziehende Coulombkraft werden die Hüllenelektronen auf Bahnen um den Atomkern gezwungen. Die Coulombkraft übt dabei kein Drehmoment auf die Elektronen aus. Die Elektronen bewegen sich daher mit zeitlich konstanten Drehimpulsen um den Atomkern.

5.7 Rotationsenergie

Im Folgenden soll die Rotation eines starren Körpers, z. B. eines Schwungrades betrachtet werden. Der *starre Körper* ist ein räumlich ausgedehnter idealisierter Modellkörper. Er kann als ein System von gegenseitig fixierten Massenpunkten mit einer Gesamtmasse m aufgefasst werden. Die relativen Abstände der Massenpunkte untereinander sind unveränderbar oder starr. Auch unter Einwirkung von äußeren Kräften treten im starren Körper im Gegensatz zum elastischen Körper keine Deformationen auf. Der starre Körper stellt eine Abstraktion dar, die in der Natur nur näherungsweise gültig ist. Absolut starre Körper gibt es nicht.

Die Gesamtmasse m eines starren Körpers kann in eine Summe von endlich vielen Massenelementen Δm_i zerlegt werden.

$$m = \sum_i \Delta m_i \quad (5.50)$$

Eine Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse liegt dann vor, wenn die Rotationsachse im Körper festliegt und außerhalb in einer Lagerung geführt wird. Der senkrechte Abstand eines beliebigen Massenelementes Δm_i von der Drehachse sei r_i und seine momentane Bahngeschwindigkeit \vec{v}_i . Die kinetische Energie eines solchen Elements bei Rotation um die Drehachse ist

$$E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2. \quad (5.51)$$

Bei Rotation um eine feste Drehachse werden alle Punkte des Körpers in der gleichen Zeit um den gleichen Winkel gedreht, d. h. alle Massenelemente Δm_i besitzen dieselbe Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ (Abb. 42).

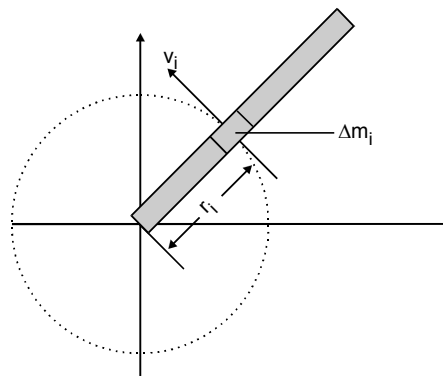


Abb. 42: Rotation eines starren Stabes um eine Achse

Für den Betrag der Bahngeschwindigkeit v_i des Massenelementes Δm_i gilt

$$v_i = r_i \omega. \quad (5.52)$$

Damit folgt:
$$E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2.$$

Die kinetische Gesamtenergie des rotierenden starren Körpers ist die Summe der kinetischen Energien aller seiner Massenelemente:

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 \quad (5.53)$$

Bei der Rotation eines starren Körpers steht somit im Ausdruck für die kinetische Energie die Summe $\sum_i \Delta m_i r_i^2$, die das Massenträgheitsmoment J darstellt.

Die kinetische Energie eines rotierenden Körpers, die im Folgenden als Rotationsenergie E_{rot} bezeichnet wird, ergibt sich damit zu

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (5.54)$$

In Tabelle 3 sind die korrespondierenden Größen, die die lineare Bewegung (Translationsbewegung) beziehungsweise die Kreisbewegung (Rotationsbewegung) beschreiben, zusammenfassend gegenübergestellt worden.

Translation	Einheit	Rotation	Einheit
Größe und Formelzeichen		Größe und Formelzeichen	
Weg $\vec{s}, d\vec{s}$	m	Winkel $\varphi, d\vec{\varphi}$	rad = 1
Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$	m/s	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	rad/s = 1/s
Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	m/s ²	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	rad/s ² = 1/s ²
Masse m	kg	Massenträgheitsmoment $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$	kg m ²
Kraft $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	N	Drehmoment $\vec{M} = J\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	N m
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	kg m/s	Drehimpuls $\vec{L} = J\vec{\omega}$	kg m ² /s
kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	J	kinetische Energie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$	J

Leistung $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	W	Leistung $P = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$	W
---	---	--	---

Tab. 3: Gegenüberstellung der physikalischen Größen für Translations- und Rotationsbewegung

5.8 Verfahrenstechnische Anwendung: Zentrifugen

In der Verfahrenstechnik werden Zentrifugen zur Trennung von Stoffgemischen eingesetzt. Zentrifugen bestehen aus schnell rotierenden Hohlzylindern. Ihre Wirkungsweise basiert auf der Zentrifugalkraft \vec{F}_F , für die betragsmäßig gilt

$$F_F = m \frac{v^2}{r}. \quad (5.55)$$

Die Zentrifugalkraft ist direkt proportional zur Masse der Teilchen. Wird beispielsweise ein Stoffgemisch aus zwei Komponenten mit den Teilchenmassen m_1 und m_2 ($m_1 > m_2$) in den Hohlzylinder einer Zentrifuge gegeben, so sammeln sich bei Rotation die schwereren Teilchen des Stoffgemisches mit der Masse m_1 am äußeren Rand der Zylinderwand an (Abb. 43). Die leichteren Teilchen mit der geringeren Masse m_2 bleiben in der Nähe der Rotationsachse zurück. Durch die Zentrifugalkraft wird das Stoffgemisch in räumlich voneinander getrennte Komponenten separiert. Der obere Teil der Abb. 43 zeigt die Verteilung des Stoffgemisches vor Beginn der Rotation, während im unteren Teil die Verteilung zu einem späteren Zeitpunkt nach dem Einsetzen der Rotation zu sehen ist.

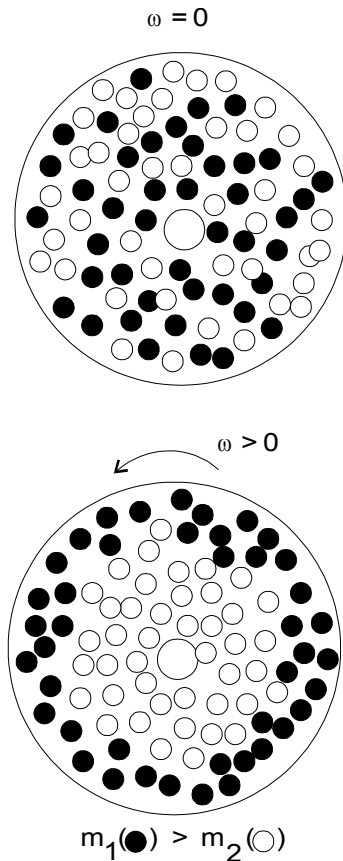


Abb. 43: Stofftrennung mit Hilfe einer Zentrifuge

Durch den Einsatz von Gaszentrifugen, die mit extrem hohen Drehzahlen von etwa 10^5 Umdrehungen pro Minute rotieren (dies entspricht Winkelgeschwindigkeiten von etwa $\omega \approx 10^4 \text{ s}^{-1}$), können sogar die verschiedenen schweren Atomarten eines Elementes voneinander getrennt werden. Dieses Gaszentrifugenverfahren wird zur **Isotopentrennung** bei der Herstellung von Kernbrennstoffen für Kernreaktoren ausgenutzt. Das natürlich vorkommende Element Uran besteht aus zwei Isotopen: U-238 mit einer Häufigkeit von 99,3 % und U-235 mit einer Vorkommenswahrscheinlichkeit von 0,7 %. Durch Isotopentrennung wird der Kernbrennstoff mit etwa 3 - 4% mit dem für thermische Neutronen leicht spaltbaren Isotop U-235 angereichert. Ultrazentrifugen können heute Drehzahlen in der Größenordnung von $n \approx 10^6 \text{ min}^{-1}$ erreichen.

5.9 Schleudern, Kippen und Rekuperation im Straßenverkehr

Ausgangspunkt dieser Betrachtung soll zunächst die Untersuchung einiger einfacher Gleichgewichtszustände sein. Ein Körper befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ und die Summe aller an ihm angreifenden Drehmomente $\vec{M}_1, \dots, \vec{M}_m$ gleich Null ist. Die Kräfte werden dabei

auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen, die Drehmomente auf eine ortsfeste Drehachse.

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \vec{M} = (M_x, M_y, M_z) = \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = 0$$

In Komponentenschreibweise erhält man für die verschwindende Gesamtkraft \vec{F} :

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

5.9.1 Schleudern

Ein Anwendungsbeispiel von Gleichgewichtsbedingungen stellt das Durchfahren einer Kurve mit einem Fahrzeug dar. Ist die Fahrgeschwindigkeit so groß, dass die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr erfüllt sind, kommt das Fahrzeug ins Schleudern. Dieser für die Verkehrssicherheit gefährliche Vorgang soll im Folgenden näher betrachtet werden.

Das Schleudern kommt dadurch zustande, dass für ein Radpaar (eine Achse), auf dem das halbe Gewicht des Fahrzeugs ruhen möge, der Betrag der Haftreibungskraft F_{HR} nicht mehr ausreicht, um die Zentrifugalkraft F_F das Gleichgewicht zu halten. Da der Schwerpunkt beispielsweise eines Pkws etwa in der Mitte zwischen den beiden Achsen liegt folgt für die Achslast, d.h. die Gewichtskraft, die auf eine Achse wirkt:

$$F_s = \frac{m}{2} g$$

Solange die Haftreibungskraft die Fliehkraft überwiegt tritt kein Schleudern auf. Mit wachsender Geschwindigkeit wird die Fliehkraft immer größer, sie überschreitet schließlich für $v > v_s$ die Haftreibungskraft und das Fahrzeug bricht gleitend aus der Kurve. Im Grenzfall $v = v_s$ gilt für die beiden Kräfte betragsmäßig

$$F_F = F_{HR}$$

$$\frac{m v_s^2}{2 R} = \mu_H F_N.$$

Unter Annahme einer ebenen Fahrbahn gilt

$$F_N = F_s = \frac{m}{2} g$$

$$\frac{m}{2} \frac{v_s^2}{R} = \mu_H \frac{m}{2} g.$$

Damit folgt für die Grenzgeschwindigkeit v_s :

$$v_s = \sqrt{\mu_H g R} \quad (5.56)$$

Beispiel:

Ein Fahrzeug durchfährt eine Kurve mit einem Krümmungsradius von $R = 50$ m. Bei welcher Geschwindigkeit kommt das Fahrzeug ins Schleudern?

Es sollen zwei verschiedene Situationen betrachtet werden:

a) Bei trockener Fahrbahn: $\mu_H = 0,9$

b) Bei nasser Fahrbahn: $\mu_H = 0,3$

Schleudern des Fahrzeugs tritt dann auf, wenn folgende Geschwindigkeiten überschritten werden:

a) Für trockene Fahrbahn: $v_s = 21 \text{ m/s} = 76 \text{ km/h}$

b) Für nasse Fahrbahn: $v_s = 12 \text{ m/s} = 44 \text{ km/h}$

Für den Zusammenhang $R = R(v_s)$, die sog. **Kurven-Grenzgeschwindigkeit** gilt dann

$$R = \frac{1}{\mu_H g} v_s^2. \quad (5.57)$$

Die in Abb. 44 graphisch dargestellte Kurvenschar zeigt die Kurven-grenzgeschwindigkeiten für verschiedene Werte des Parameters μ_H .

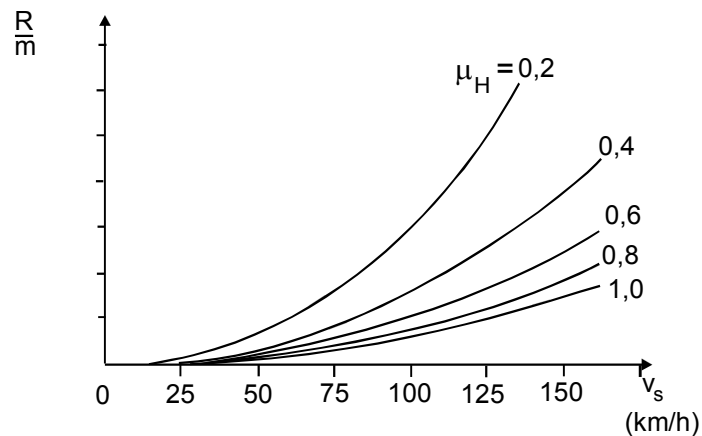


Abb. 44: Kurvengrenzgeschwindigkeiten für verschiedene Haftreibungskoeffizienten μ_H

Neben dem Luftwiderstand ist beim Kurvenfahren jedes Fahrzeug zwei wesentlichen Kräften ausgesetzt: Der Zentrifugalkraft F_F , die im Schwerpunkt des Fahrzeugs angreift und der Haftreibungskraft F_{HR} , die an den Auflagepunkten der Reifen auf der Fahrbahndecke angreift. Die Haftreibungskräfte halten das Fahrzeug auf der Straße solange sie größer sind als die Zentrifugalkräfte, die es radial aus der Kurve tragen wollen. Für jede Kurve, charakterisiert durch ihren Krümmungsradius R existiert somit eine Grenzgeschwindigkeit v_s . Soll eine Kurve mit doppelter Geschwindigkeit gefahrlos durchfahren werden, so muss der Krümmungsradius vervierfacht werden. Umgekehrt kann eine Kurve mit halben Krümmungsradius nur mit einem Viertel der ursprünglichen Geschwindigkeit sicher durchfahren werden. Für die Verkehrssicherheit verhängnisvoll wird es, wenn das Fahrzeug umkippt.

5.9.2 Kippen

Die für das Umkippen erforderliche Grenzgeschwindigkeit v_K , der so genannte **Kipp-Punkt**, soll im Folgenden berechnet werden. Ausgangspunkt der Berechnung ist dabei die Fragestellung: Wann berührt ein Fahrzeug mit der Masse m , das mit der Geschwindigkeit v durch eine horizontale Kurve mit dem Krümmungsradius R fährt, nur noch mit den beiden Außenrädern den Boden? Oder: Wann heben die Innenräder ab? Zur Erläuterung dieses Sachverhaltes dient Abb. 44. Das Zentrum des Krümmungskreises der Kurve soll sich auf der linken Seite der Abbildung befinden. Dem Zentrum zugewandt sind die Innenräder, ihm abgewandt sind die Außenräder. Die Verbindungslinie der Auflagepunkte der Außenräder auf der Straße stellt zugleich die Drehachse der Kippbewegung dar.

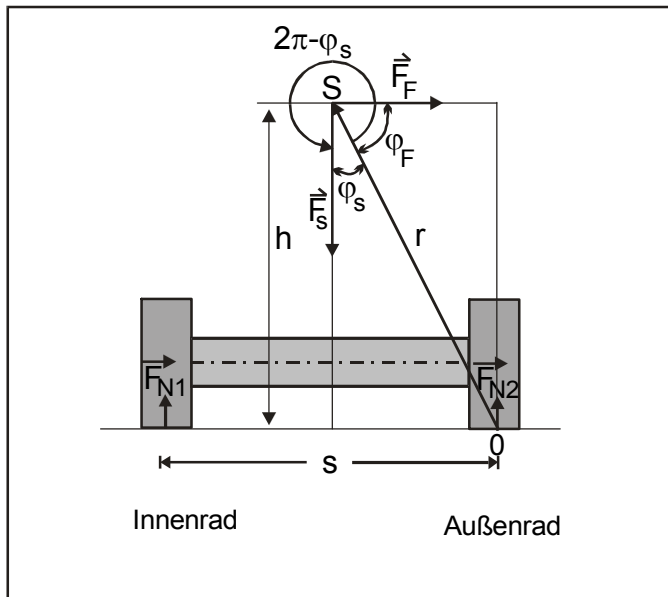


Abb. 45: Kräfte und Drehmomente beim Kurvenfahren

Es werden die folgenden abkürzenden Bezeichnungen eingeführt:

- h: Höhe des Schwerpunktes S über dem Schnittpunkt der Diagonalen zwischen den 4 Berührungspunkten der 4 Räder mit der Straße
- s: Spurweite des Wagens
- $F_{N1,2}$: Normalkräfte infolge der Gewichtskraft, die an den beiden Rädern einer Achse wirken. In der Zeichnung sind die gleich großen aber entgegengesetzt gerichteten Reaktionskräfte des Bodens dargestellt.

Für das Kräftegleichgewicht der Normalkräfte gilt in betragsmäßiger Schreibweise:

$$F_{N1} + F_{N2} - F_s = 0$$

Da der Schwerpunkt etwa in der Mitte zwischen Vorder- und Hinterachse liegt, folgt für die Achslast F_s :

$$F_s = \frac{m}{2} g$$

Beim Kippen heben die Innenräder von der Fahrbahn ab und das Fahrzeug dreht sich um eine durch die Auflagepunkte der äußeren Räder festgelegten Drehachse 0. Die Drehachse verläuft dabei senkrecht zur Zeichenebene. Wird die Verbindungslinie der Auflage-

punkte der äußeren Räder als Drehachse betrachtet, so kann die Bedingung des Gleichgewichtes der Drehmomente formuliert werden:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

Unter dem Einfluss der vier einwirkenden Kräfte $\vec{F}_s, \vec{F}_F, \vec{F}_{N1}$ und \vec{F}_{N2} ergeben sich bezogen auf die oben definierte Drehachse vier Drehmomente, die jeweils in vektorieller und skalarer Schreibweise angegeben sind:

$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}_F$$

$$M_F = r F_F \sin \varphi_F = F_F h$$

$$\vec{M}_s = \vec{r} \times \vec{F}_s$$

$$M_s = r F_s \sin \varphi_s = -F_s \frac{s}{2}$$

$$\vec{M}_{N2} = \vec{r} \times \vec{F}_{N2}$$

$$M_{N2} = 0$$

$$\vec{M}_{N1} = \vec{r} \times \vec{F}_{N1}$$

$$M_{N1} = F_{N1} s$$

Das Drehmoment M_{N2} ist Null, da der zugehörige Hebelarm r im Drehpunkt Null ist. Es gelten dabei die folgenden trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin \varphi_F = \frac{h}{r}$$

$$\varphi_s + \varphi'_s = 2\pi$$

$$\sin \varphi_s = \sin (2\pi - \varphi'_s) = -\sin \varphi'_s$$

$$-\sin \varphi'_s = -\frac{s/2}{r}$$

Aus dem Gleichgewicht der Drehmomente

$$\vec{M}_F + \vec{M}_s + \vec{M}_{N1} + \vec{M}_{N2} = \vec{0} \quad \text{folgt:}$$

$$F_F h - F_s \frac{s}{2} + F_{N1} s = 0$$

Mit der Zentrifugalkraft pro Achse

$$F_F = \frac{m}{2} \frac{v^2}{R}$$

folgt für den Betrag der Normalkräfte:

$$F_{N1} = \frac{m}{4} g - \frac{m v^2}{2R} \frac{h}{s}$$

$$F_{N2} = \frac{m}{4} g + \frac{m v^2}{2R} \frac{h}{s}$$

Für den Grenzfall des Kippens, bei dem die Innenräder gerade von der Fahrbahn abheben, muss $F_{N1} = 0$ sein. Dies geschieht bei der kritischen Geschwindigkeit v_K :

$$v_K = \sqrt{\frac{g R s}{2 h}}. \quad (5.58)$$

Mit $v_s = \sqrt{\mu_H g R}$ und $v_K = \sqrt{\frac{g s R}{2 h}}$ folgt

$$v_K = v_s \sqrt{\frac{s}{2 h \mu_H}} = k v_s \quad (5.59)$$

$$k = \sqrt{\frac{s}{2 h \mu_H}}.$$

Ist der Koeffizient $k < 1$, so gilt $v_K < v_s$, d. h. die Grenzggeschwindigkeit für Kippen liegt unterhalb der Grenzggeschwindigkeit für Schleudern. Dieser Sachverhalt spielt bei Lkws eine wichtige Rolle. Sie können ohne zu schleudern umkippen, wenn eine Kurve mit zu hoher Geschwindigkeit durchfahren wird. Durch konstruktive Maßnahmen wie größere Spurweite und niedrigere Schwerpunktslage kann die Kippstabilität insbesondere von Tanklastzügen und Gefahrguttransportern vergrößert werden. Bei Lkws hat natürlich auch die Art des Ladegutes im Hinblick auf Form und Masse einen Einfluss auf die Höhe h des Schwerpunktes. Mit zunehmenden h nimmt die Grenzggeschwindigkeit v_K ab.

5.9.3 Rekuperation

Unter Rekuperation (lat. *recuperare*: wiedererlangen oder wiedergewinnen) versteht man ein technisches Verfahren zur Energierückführung, dass beispielsweise bei Pkw-Antrieben eingesetzt wird. Beim Bremsen wird Bewegungsenergie in Wärmeenergie umgewan-

delt. Dabei werden die Bremsscheiben heiß. Die entstehende Reibungswärme wird dann ungenutzt an die Umgebung abgegeben. Eine rekuperative Bremse ermöglicht während Schub- und Bremsphasen eines PKWs eine Bremsenergie-Rückgewinnung. Diese Energiespeicherung kann in Schwungradspeichern mechanisch erfolgen. Über einen Generator (Lichtmaschine) wird die mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt und in einer Batterie gespeichert.

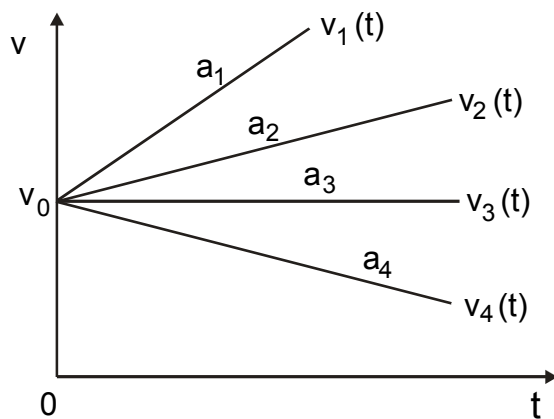
6 Wiederholungstest

Die nachfolgend aufgeführten Testfragen haben eine oder mehrere richtige Lösungen. Von den vorgegebenen Antwortalternativen sind jeweils die Buchstaben der richtigen Lösungen anzugeben.

6.1 Testfragen

Aufgabe 1

In dem dargestellten Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm sind 4 verschiedene Kurven skizziert. Markieren Sie die richtigen Aussagen!



- (A) Alle vier Kurven stellen ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen dar.
- (B) Alle vier Kurven stellen gleichförmige Bewegungen dar.
- (C) Die drei Kurven mit a_1 , a_2 und a_3 stellen gleichmäßig beschleunigte Bewegungen dar.
- (D) Die Beschleunigung a_3 ist identisch Null ($a_3 = 0$).
- (E) $v_4(t)$ ist die Bewegung mit der größten Beschleunigung a_4 .
- (F) $v_1(t)$ ist die Bewegung mit der kleinsten Beschleunigung a_1 .

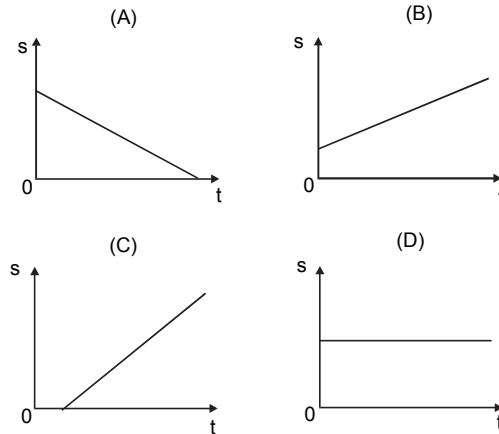
Aufgabe 2

Die Geschwindigkeit von $v = 72 \text{ km/h}$ ist gleich

- (A) $2,5 \text{ m/s}$
- (B) 25 m/s
- (C) 15 m/s
- (D) 150 m/s
- (E) 20 m/s

Aufgabe 3

Durch welche der graphischen Darstellungen (A) bis (D) wird die Weg-Zeit-Funktion $s(t) = s_0 + vt$ einer gleichförmigen Bewegung richtig skizziert?



Aufgabe 4

Eine **gleichförmig** beschleunigte Bewegung

- (A) ist im Weg-Zeit-Diagramm ein linearer Graph
- (B) führt ein Körper aus, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt
- (C) ist durch eine gleichförmig zunehmende Beschleunigung zu erreichen
- (D) ist im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ein linearer Graph
- (E) ist durch eine konstante Geschwindigkeit gekennzeichnet

Aufgabe 5

Eine gleichförmige **Kreisbewegung** ($|\vec{v}| = \text{konst.}$) einer Punktmasse ist eine

- (A) gleichmäßig beschleunigte Bewegung
- (B) nicht beschleunigte Bewegung
- (C) ungleichmäßig beschleunigte Bewegung
- (D) eine Bewegung mit konstantem Beschleunigungsbetrag

Aufgabe 6

Ein Stein mit der Masse m falle infolge seiner Gewichtskraft im freien Fall nach unten. Wo greift dabei die nach dem 3. Newtonschen Axiom (*actio = reactio*) zugehörige Gegenkraft an?

- (A) an der Masse m des fallenden Steins
- (B) an der Erdmasse M_E
- (C) an der Sonnenmasse M_S

Aufgabe 7

Für welche Kräfte ist der Begriff der potentiellen Energie einführbar?

- (A) für alle Kräfte
- (B) nur für dissipative Kräfte
- (C) nur für konservative Kräfte

Aufgabe 8

Durchfährt ein Fahrzeug eine Kurve, so treten Zentrifugalkräfte auf. Das Fahrzeug kommt dabei ins Schleudern, wenn betragsmäßig die

- (A) Zentrifugalkraft die Rollreibungskraft überschreitet
- (B) Haftreibungskraft die Zentrifugalkraft überschreitet
- (C) Zentrifugalkraft die Gleitreibungskraft überschreitet
- (D) Haftreibungskraft die Zentrifugalkraft unterschreitet

Aufgabe 9

Die Haftreibungskraft besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) sie beschreibt die Reibung zwischen festen Körpern
- (2) sie ist der Geschwindigkeit des Körpers proportional
- (3) sie ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers
- (4) sie ist der Masse des Körpers proportional
- (5) sie ist dem Quadrat der Körper-Geschwindigkeit proportional
- (6) sie ist umgekehrt proportional zum Haftreibungskoeffizienten

- (A) nur (1), (2) und (6) sind richtig
- (B) nur (1), (2) und (4) sind richtig
- (C) nur (1), (3) und (4) sind richtig
- (D) nur (1), (3) und (6) sind richtig

Aufgabe 10

Welche der angegebenen Einheiten entspricht dem Quotienten aus Joule und Sekunde?

- (A) Newton
- (B) Pascal
- (C) Becquerel
- (D) Watt
- (E) Kelvin

6.2 Lösungen der Testfragen

Aufgabe 1	C, D
Aufgabe 2	E
Aufgabe 3	B
Aufgabe 4	D
Aufgabe 5	C, D
Aufgabe 6	B
Aufgabe 7	C
Aufgabe 8	D
Aufgabe 9	C
Aufgabe 10	D

7 Zusammenfassung

Die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} eines Körpers während einer Zeitdauer Δt ist der Quotient aus der zurückgelegten Wegdifferenz Δs und der dazu benötigten Zeitdauer Δt .

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Für die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t gilt:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

Die Durchschnittsbeschleunigung \bar{a} während einer Zeitdauer Δt ist der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung Δv und der Zeitdauer Δt , in der die Geschwindigkeitsänderung erfolgt:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Für die Momentanbeschleunigung $a(t)$ gilt:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit heißt gleichförmig. Erfolgt die Bewegung mit konstanter Beschleunigung ($a > 0$), so heißt sie gleichmäßig beschleunigt. Für eine solche Bewegung lauten die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t)$ und die Weg-Zeit-Funktion $s(t)$:

$$v(t) = v_0 \pm at$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$$

Das untere (negative) Vorzeichen gilt bei konstanter Verzögerung infolge Abbremsung. Befindet sich ein gleichmäßig beschleunigter Körper zum Zeitpunkt t_1 mit der Geschwindigkeit $v_1 = v(t_1)$ an der Wegposition $s_1 = s(t_1)$ und zum späteren Zeitpunkt t_2 mit der Geschwindigkeit $v_2 = v(t_2)$ an der Wegposition $s_2 = s(t_2)$, so gelten die Beziehungen:

$$v_2 = v_1 \pm a(t_2 - t_1)$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = v_1(t_2 - t_1) \pm \frac{1}{2} a(t_2 - t_1)^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)(t_2 - t_1)$$

$$\Delta s = \frac{1}{2a} (v_2^2 - v_1^2)$$

Nach dem 2. Newtonschen Axiom erfährt ein frei beweglicher Körper mit der Masse m eine Beschleunigung a , wenn eine Kraft vom Betrag F auf ihn einwirkt.

$$F = ma$$

Zwei Massen m und M , die einen Abstand r voneinander besitzen, unterliegen der anziehenden Wirkung der Newtonschen Gravitationskraft vom Betrag F_G :

$$F_G = G \frac{mM}{r^2}$$

Die Newtonsche Gravitationskraft $F_G = F(r)$ ist eine Zentralkraft. Auf der Erdoberfläche ist $r \approx R_E$ und die Newtonsche Gravitationskraft der Erde auf eine Masse m kann dann durch die konstante Schwerkraft $F_S = mg$ ersetzt werden.

Zwischen zwei Festkörperoberflächen existieren Reibungskräfte, die proportional zur Normalkraft (Auflagekraft) F_N sind:

$$F_{HR} = \mu_H F_N \quad (\text{Haftreibung})$$

$$F_{GR} = \mu_G F_N \quad (\text{Gleitreibung})$$

$$F_{RR} = \mu_R F_N \quad (\text{Rollreibung})$$

Für die Arbeit ΔW , die eine ortsunabhängige (konstante) Kraft \vec{F} bei Verschiebung eines Körpers längs eines geraden Wegstückes $\Delta \vec{s}$ verrichtet, gilt:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = F \Delta s \cos \alpha$$

α ist der Winkel zwischen \vec{F} und $\Delta \vec{s}$. Für eine ortsabhängige Kraft vom Betrag $F(r)$ ergibt sich die Arbeit längs eines geraden Weges von r_A nach r_E durch Auswertung des bestimmten Integrals

$$W = \int_{r_A}^{r_E} F(r) dr.$$

Die Hubarbeit, die beim senkrechten Anheben eines Körpers der Masse m auf die Höhe h gegen die Schwerkraft $F_S = mg$ verrichtet wird, wird als potentielle Energie E_{pot} von dem Körper gespeichert.

$$E_{\text{pot}} = mgh$$

Die an einem frei beweglichen, ruhenden Körper mit der Masse m , durch eine Kraft F verrichtete Beschleunigungsarbeit, wird in Form von kinetischer Energie E_{kin} von dem sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Körper gespeichert.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Gravitationskraft und Schwerkraft sind konservative Kräfte. Für sie gilt die Erhaltung der mechanischen Gesamtenergie, der so genannte **Energieerhaltungssatz**:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konst.}$$

Reibungskräfte sind nichtkonservative Kräfte: Sie sind dissipativ. Die Arbeit W_R gegen dissipative Kräfte führt zu einer Erwärmung des bewegten Körpers, die mit einer Änderung (Abnahme) seiner mechanischen Gesamtenergie verbunden ist.

$$E_{\text{kin}}(t_1) + E_{\text{pot}}(t_1) = E_{\text{kin}}(t_2) + E_{\text{pot}}(t_2) - W_R$$

Wirken auf einen Körper der Masse m keine äußeren Kräfte, so ist sein Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ eine Erhaltungsgröße. Für ein System aus zwei Körpern, auf die keine äußeren Kräfte einwirken, lautet der **Impulserhaltungssatz** für beliebige Zeiten t_1 und t_2 :

$$\vec{p} = \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) = \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2) = \text{konst.}$$

Eine äußere Kraft \vec{F} führt nach dem 2. Newtonschen Axiom zu einer Impulsänderung:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Eine durch den Ortsvektor \vec{r} charakterisierte Punktmasse m mit dem Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ besitzt einen Drehimpuls \vec{L} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Ein sich auf einer Kreisbahn vom Radius r mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ bewegender Massenpunkt besitzt die Bahngeschwindigkeit $v = r\omega$.

Für eine um eine feste Achse durch den Koordinatenursprung drehbare Masse m , die sich an der Ortsposition \vec{r} befindet, gilt: Eine

an der Masse angreifende Kraft \vec{F} verursacht ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Das Drehmoment ist von der Wahl der Lage des Ursprungs des Koordinatensystems abhängig und besitzt den Betrag $M = rF \sin \varphi$. Das Drehmoment bewirkt eine zeitliche Änderung des Drehimpulses.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J\vec{\alpha}$$

J ist das Massenträgheitsmoment und $\vec{\alpha}$ die Winkelbeschleunigung des Körpers. Für das Massenträgheitsmoment J einer Punktmasse m , die sich auf einer Kreisbahn vom Radius r bewegt, gilt:

$$J = mr^2$$

Der Massenpunkt besitzt dann einen Drehimpuls mit dem Betrag

$$L = J\omega.$$

Für das Trägheitsmoment eines ausgedehnten Körpers mit der Masse m und der homogenen Dichte ρ erhält man

$$J = \int_m r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV.$$

Für die Rotationsenergie E_{rot} des Körpers folgt dann:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J\omega^2$$

Bei Rotation um eine Achse A , die sich im Abstand a von der parallelen Achse S durch den Schwerpunkt befindet, wird das Massenträgheitsmoment J_A mithilfe des Satzes von Steiner berechnet:

$$J_A = J_S + ma^2$$

8 Übungen

8.1 Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (E)

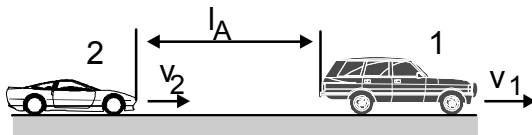
Ein ICE-Zug soll beim Bremsvorgang auf gerader, ebener Strecke mit $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ gleichmäßig verzögern. Welche Höchstgeschwindigkeit v_{\max} darf der Zug haben, damit der Bremsweg von $s_B = 2500 \text{ m}$ nicht überschritten wird?

Aufgabe 2 (E)

Welche Reibungsarbeit W_R muss aufgewendet werden, um eine Kiste mit der Masse $m = 20 \text{ kg}$ auf einer horizontalen Unterlage bei einem Gleitreibungskoeffizienten von $\mu_G = 0,6$ um $s = 10 \text{ m}$ zu verschieben?

Aufgabe 3 (S)

Zwei Pkw 1 und 2 befahren mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 50 \text{ km/h}$ und $v_2 = 60 \text{ km/h}$ in gleicher Richtung eine gerade, ebene und trockene Straße. Zu dem Zeitpunkt, an dem der erste Pkw aufgrund abgefahrener Reifen mit der konstanten Verzögerung $a_1 = 6 \text{ m/s}^2$ zu bremsen beginnt, beträgt ihr lichter Abstand $l_A = 15 \text{ m}$. Der zweite Pkw beginnt mit dem Bremsvorgang wegen der sog. *Schrecksekunde* eine halbe Sekunde später. Seine konstante Verzögerung beträgt $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$.



- Untersuchen Sie, ob es bei diesem Bremsmanöver zu einem Zusammenstoß kommt!
- Berechnen Sie im Falle einer Kollision den Zeitpunkt t_S und die Ortsposition $s(t_S)$ des Zusammenstoßes und geben Sie an, wie groß ist in diesem Augenblick ihre Geschwindigkeit gegeneinander ist!

Hinweis: Der Zeitnullpunkt ($t_0 = 0$) wird durch den Beginn des Bremsvorganges von Pkw 1 definiert.

Aufgabe 4 (E)

- a) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der Erdoberfläche am Äquator infolge der Erdrotation. Der Erdradius sei $R_E = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.
- b) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der Erdoberfläche in **Hamburg** mit der im Gradmaß angegebenen geographischen (nördlichen) Breite $\varphi = 53^\circ 30' \text{ N}$.

Aufgabe 5 (M)

Zwei Zylinder Z_V und Z_H mit identischen Abmessungen (Radius R , Länge L) und identischer Masse $m_V = m_H$ rollen gleichzeitig aus der Ruhelage und der Anfangshöhe h quasi reibungsfrei auf einer Rampe mit gegebenem Neigungswinkel φ herunter. Zylinder Z_V ist ein Vollzylinder aus Holz mit homogener Dichte. Zylinder Z_H ist ein dünnwandiger Hohlzylinder ohne Deckelflächen, dessen Mantelfläche aus Stahlblech gefertigt ist. Begründen Sie *qualitativ*, welcher Zylinder am schnellsten die schiefe Ebene herabrollt.

Aufgabe 6 (M)

Ein gleichmäßig beschleunigter Körper ($a = \text{konst.}$) habe zum Zeitpunkt t_1 die Geschwindigkeit v_1 und zum späteren Zeitpunkt t_2 die Geschwindigkeit v_2 . Zeigen Sie, dass für die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Aufgabe 7 (M)

Auf einer abschüssigen Straße mit dem Neigungswinkel $\varphi = 4^\circ$ ereignet sich ein Auffahrunfall. Ein Pkw mit der Masse $m_1 = 2,0 \text{ t}$ fährt zunächst ungebremst auf einen stehenden Pkw mit der Masse $m_2 = 1,5 \text{ t}$ auf. Nach dem Aufprall rutscht der gestoßene Pkw gebremst $s_{B,2} = 8 \text{ m}$ weit. Der auffahrende Pkw hat eine unmittelbar nach dem Aufprall einsetzende Bremsspur der Länge $s_{B,1} = 6 \text{ m}$. Der Gleitreibungskoeffizient sei konstant mit $\mu_G = 0,8$ und beide Bremsvorgänge erfolgen gleichmäßig verzögert. Berechnen Sie die Auffahrgeschwindigkeit v_1 unmittelbar vor dem Zusammenstoß. Hinweis: Der Stoß erfolge zentral.

8.2 Lösungen der Übungsaufgaben

Lösung der Aufgabe 1

Das Weg-Zeit-Gesetz für eine gleichmäßig verzögerte Bewegung lautet:

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

Dabei sind: $s = s_B$ und $v_0 = v_{\max}$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz für diese Bewegung lautet:

$$v(t) = v_0 - at$$

Für die Dauer des Bremsvorganges t_B folgt: $0 = v_{\max} - at_B$

$$t_B = \frac{v_{\max}}{a}$$

Nach Einsetzen in $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ folgt:

$$s_B = v_{\max} \frac{v_{\max}}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_{\max}^2}{a^2}$$

Auflösung nach v_{\max} :

$$v_{\max} = \sqrt{2s_B a}$$

$$v_{\max} = 50 \text{ m/s} = 180 \text{ km/h}$$

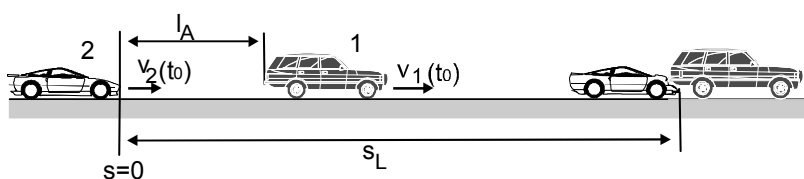
Lösung der Aufgabe 2:

$$W_R = F_{GR} s$$

$$F_{GR} = \mu_G F_N = \mu_G mg$$

$$W_R = \mu_G mgs = 1177,2 \text{ J}$$

Lösung der Aufgabe 3:



Für die Geschwindigkeiten der Pkw 1 und 2 gilt:

$$v_{1,0} = v_1(t_0) \text{ und } v_{2,0} = v_2(t_0)$$

Abbremsung Pkw 1:

Zum Anfangszeitpunkt ($t_0 = 0$) setzt der Bremsvorgang von Pkw 1 ein. Der Bremsvorgang geschieht mit konstanter Verzögerung.

$$v_1(t) = v_{1,0} - a_1 t$$

Für den Bremsweg von Pkw 1 mit $l_A = 15 \text{ m}$ Vorsprung ($s(t_0 = 0) = 15 \text{ m}$) folgt:

$$v_1(t_{B,1}) = 0$$

Daraus folgt für die Abbremszeit $t_{B,1}$ folgt:

$$t_{B,1} = \frac{v_{1,0}}{a_1}$$

$$t_{B,1} = 2,315 \text{ s}$$

Für den Bremsweg von Pkw 1 folgt:

$$s_1(t_{B,1}) = s(t_0) + \int_0^{t_{B,1}} v_1(t) dt = 10 \text{ m} + \int_0^{t_{B,1}} (v_{1,0} - a_1 t) dt$$

$$s_1(t_{B,1}) = 15 \text{ m} + v_{1,0} t_{B,1} - \frac{1}{2} a_1 t_{B,1}^2 = 31,07 \text{ m}$$

Abbremsung Pkw 2:

Der Bremsvorgang von Pkw 2 beginnt bezogen auf den durch Pkw 1 definierten Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ um $0,5 \text{ s}$ später.

$$v_2(t) = v_{2,0} - a_2 \cdot (t - 0,5 \text{ s})$$

$$v_2(t_{B,2}) = 0$$

Daraus folgt für die Abbremszeit $t_{B,2}$:

$$t_{B,2} = 0,5 \text{ s} + \frac{v_{2,0}}{a_2} = 0,5 \text{ s} + t_{B,2}^*$$

$$t_{B,2} = 3,83 \text{ s}$$

$$s_2(t_{B,2}) = v_{2,0} \cdot 0,5 \text{ s} + \int_0^{t_{B,2}^*} v_2(t) dt = v_{2,0} \cdot 0,5 \text{ s} + \int_0^{t_{B,2}^*} (v_{2,0} - a_2 t) dt$$

$$s_2(t_{B,2}) = v_{2,0} \cdot 0,5 \text{ s} + v_{2,0} t_{B,2}^* - \frac{1}{2} a_2 t_{B,2}^{*2} = 36,11 \text{ m}$$

Auffahrzusammenstoß zum Zeitpunkt t_S an der Stelle

$$s_1(t_S) = s_2(t_S) :$$

$$s_1(t) = s(t_0) + \int_0^t v_1(t) dt = 15 \text{ m} + v_{1,0} t - \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$s_2(t) = \int_0^t v_2(t) dt = v_{2,0} t - \frac{1}{2} a_2 (t - 0,5 \text{ s})^2$$

Aus $s_1(t_S) = s_2(t_S)$ folgt:

$$15 \text{ m} + v_{1,0} t_S - \frac{1}{2} a_1 t_S^2 = v_{2,0} t_S - \frac{1}{2} a_2 (t_S - 0,5 \text{ s})^2$$

Mit den Daten der Übungsaufgabe folgt für den Zeitpunkt t_S des Auffahrunfalls die Gleichung:

$$t_S^2 + 10,554 \text{ s} \cdot t_S - 31,25 \text{ s}^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat nur für $t_S > 0$ eine physikalisch sinnvolle Lösung:

$$t_S = 2,41 \text{ s}$$

$$s_1(t_S) = s_2(t_S) = 31,07 \text{ m.}$$

Dieser Wert stimmt mit der Länge des Bremsweges von Pkw 1 überein, d. h. Pkw 2 fährt auf den bereits stehenden Pkw 1 auf.

Conclusio:

Der Zusammenstoß findet nach 2,41 s an der Stelle $s(t_S) = 31,07 \text{ m}$ statt.

Für die Relativgeschwindigkeit Δv zum Zeitpunkt des Auffahrunfalls gilt:

$$\Delta v = v_2(t_S) - v_1(t_S)$$

$$v_1(t) = v_{1,0} - a_1 t \quad \text{für } t \leq t_{B,1} \quad \text{und} \quad v_1(t) = 0 \quad \text{für } t > t_{B,1}$$

$$t_S = 2,41 \text{ s} > t_{B,1} = 2,315 \text{ s}$$

$$v_1(t_S) = 0$$

$$v_2(t_S) = v_{2,0} - a_2 \cdot (t_S - 0,5 \text{ s}) = 7,12 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 7,12 \text{ m/s} = 25,63 \text{ km/h.}$$

Lösung der Aufgabe 4:

a) Die Erde vollführt eine gleichförmige Kreisbewegung mit der äquatorialen Bahngeschwindigkeit v .

$$v = r\omega = R_E \omega$$

$$R_E = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

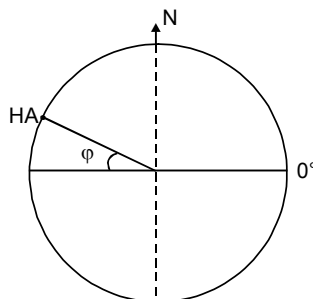
$$v = 463 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } v = r\omega = R_E \cos \varphi \cdot \omega$$

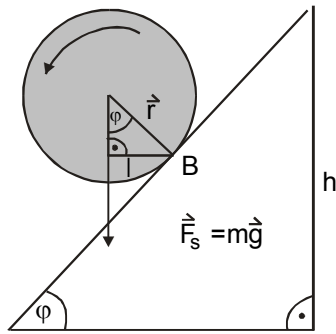
r entspricht dem senkrechten Abstand von der Erdachse. Hamburg bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r = R_E \cos \varphi$ um die Erdachse.

Für Hamburg (HA) gilt: $\varphi = 53^\circ 30' \text{ N}$

$$v = 275 \text{ m/s}$$



Lösung der Aufgabe 5:



B ist die Berührlinie des Zylinders mit der schiefen Ebene. Sie stellt die momentane Drehachse der Rotationsbewegung dar. Das Koordinatensystem zur Beschreibung der Drehbewegung wird so gewählt, dass sein Ursprung 0 auf der Drehachse B liegt. Es gilt dann:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_S$$

Gemäß dem Grundgesetz der Rotationsbewegung gilt für die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{J_B}$$

J_B ist das Massenträgheitsmoment bezüglich Rotation um die Achse B, die parallel zur Achse S durch den Schwerpunkt verläuft. Die Achse S stellt zugleich die Symmetrieachse des Zylinders dar. Ein Körper mit großem Massenträgheitsmoment J_B wird demnach

durch ein gegebenes Drehmoment \vec{M} wesentlich weniger beschleunigt als ein Körper gleicher Masse m und gleichen geometrischen Abmessungen aber aufgrund unterschiedlicher Massenverteilung kleinerem Massenträgheitsmoment. Für die Massenträgheitsmomente gilt nach Anwendung des Steinerschen Satzes:

$$J_B = J_S + ma^2 = J_S + mR^2$$

Mit $J_{S,V} = \frac{1}{2}mR^2$ und $J_{S,H} = mR^2$ folgt:

$$J_{B,V} = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

und

$$J_{B,H} = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

Mit dem Grundgesetz der Rotationsbewegung folgt:

$$\alpha_V = \frac{4}{3} \alpha_H$$

Nach Ablauf eines Zeitintervalls Δt gilt für die beiden Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_V = \alpha_V \Delta t = \frac{4}{3} \alpha_H \Delta t = \frac{4}{3} \omega_H$$

Der Vollzylinder wird schneller beschleunigt, bewegt sich daher schneller und erreicht vor dem Hohlzylinder den Auslauf der schiefen Ebene.

Lösung der Aufgabe 6:

Für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung gilt:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\text{Speziell ist: } v_1 = v_0 + at_1 \quad \text{und} \quad v_2 = v_0 + at_2$$

$$\text{Definitionsgemäß gilt: } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\bar{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Einsetzen der Weg-Zeit-Funktionen $s(t)$ liefert:

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2} a(t_2 + t_1)$$

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2} at_1 + \frac{1}{2} at_2 = \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} at_1 + \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} at_2$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (v_0 + at_1) + \frac{1}{2} (v_0 + at_2) = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$$

Spezialfälle:

a) $v_1 = v_0$ und $v_2 = v$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

b) $v_1 = v_0$ und $v_2 = 0$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}v_0$$

In allen Fällen gilt für die im Zeitintervall Δt zurückgelegte Wegstrecke $\Delta s = \bar{v}\Delta t$.

Lösung der Aufgabe 7:

Die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 unmittelbar nach dem Aufprall werden aus den Bremspurlängen $s_{B,1}$ und $s_{B,2}$ berechnet. Die effektive Bremskraft $F_B = ma_B$ ergibt sich aus der Differenz aus Gleitreibungskraft F_{GR} und Hangabtriebskraft F_T :

$$F_B = F_{GR} - F_T$$

$$ma_B = \mu_G mg \cos \varphi - mg \sin \varphi$$

$$a_B = g(\mu_G \cos \varphi - \sin \varphi) = 7,145 \text{ m/s}^2$$

Für die Bremsweglänge gilt: $s_B = \frac{1}{2} \frac{u^2}{a_B}$

$$u_1 = \sqrt{2s_{B,1}a_B} = 9,3 \text{ m/s}$$

$$u_2 = \sqrt{2s_{B,2}a_B} = 10,7 \text{ m/s}$$

Der Impulserhaltungssatz liefert:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Da sich beide Pkw auf einer Geraden in die gleiche Richtung bewegen, kann der Impulssatz in skalarer Form verwendet werden.

Für die Auffahrgeschwindigkeit v_1 folgt:

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1} = 17,3 \text{ m/s} = 62,3 \text{ km/h}$$

A1 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	ο	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

A2 Formelzeichen

Symbol	Benennung	Einheit
α	Winkelbeschleunigung	rad/s ²
μ_H	Haftreibungszahl	1
μ_G	Gleitreibungszahl	1
μ_R	Rollreibungszahl	1
φ	Winkel	rad; Grad
ω	Winkelgeschwindigkeit	rad/s
ω	Kreisfrequenz	rad/s
a	Beschleunigung	m/s ²
E	Energie	J
E _{kin}	kinetische Energie	J
E _{pot}	potentielle Energie	J
E _{rot}	Rotationsenergie	J
f	Frequenz	1/s = Hz
F	Kraft	N
F _F	Fliehkraft	N
F _{GR}	Gleitreibungskraft	N
F _{HR}	Haftreibungskraft	N
F _N	Normalkraft	N
F _R	Reibungskraft	N
F _{RR}	Rollreibungskraft	N
F _T	Tangentialkraft	N
F _Z	Zentripetalkraft	N
g	Erdbeschleunigung	m/s ²
G	Gravitationskonstante	Nm ² kg ⁻²
h	Höhe	m
J	Massenträgheitsmoment	kgm ²
L	Drehimpuls	kgm ² /s
m	Masse	kg
M	Drehmoment	Nm
p	Impuls	kgm/s
P	Leistung	W
q	elektrische Ladung	As
r	Abstand, Radius	m
s, s _B	Weg, Bremsweg	m
t	Zeit	s
T	Umlaufzeit	s
v	Geschwindigkeit	m/s
W	Arbeit	J

A3 Literaturauswahl

Kuchling, H.:	Taschenbuch der Physik, Hanser, München
Lindner, H.:	Physik für Ingenieure, Vieweg, Braunschweig
Lindner, H.:	Physikalische Aufgaben Hanser, München
Pitka, R. et al. :	Physik – Der Grundkurs Harri Deutsch, Frankfurt
Roth, S. u. Stahl, A.:	Mechanik und Wärmelehre, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg

Aufgrund fortlaufender Aktualisierung seitens der Verlage, wurde auf die Nennung der jeweils gültigen Auflage sowie auf das Erscheinungsjahr verzichtet.