Kompakt-Skript Mathematik I+II

Definitionen und Sätze des 1. und 2. Semesters der Studiengänge PHB,MFB
Kein vollständiges Skript der Vorlesung!

0. Notationen und Voraussetzungen

Mengenlehre

Element: $x \in A$ „x ist Element von A" ; $a, b, c \in M$ „a, b, c sind Elemente von M".

Mengenklammer: $\{a, b, c\}$ ist die Menge, die genau die Elemente a, b, c enthält.
$\{x \mid \text{für } x \text{ gilt } < \textit{Bedingung} >\}$, z.B. $\{1, 2, 3, 4\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq x \leq 4\}$,
$\{a, a^2, a^3, ..., a^{99}\} = \{c \mid c = a^n \text{ für eine ganze Zahl } n, 1 \leq n \leq 99\}$(sog. „Pünktchenschreibweise")

Vereinigung: $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ „A vereinigt mit B"
Sind A_i für $i \in I$ mehrere (evtl. auch unendlich viele) Mengen, so ist
$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid x \text{ ist Element von mindestens einem } A_i\}$.

Durchschnitt: $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ „A geschnitten mit B"
Sind A_i für $i \in I$ mehrere (evtl. auch unendlich viele) Mengen, so ist
$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \text{ ist Element von jedem } A_i\}$.

Teilmenge: $A \subset B$ bedeutet, dass für jedes $x \in A$ auch $x \in B$, also insbes. $A \subset A$.

Leere Menge: $\emptyset$:=$\{\ \}$; Menge, die kein Element enthält. ($\emptyset \neq \{\emptyset\}$!)

Komplement: Sei $A \subset B$. Dann heißt $\overline{A} := \{x \mid x \in B \text{ und } x \notin A\}$ das Komplement von A (bzgl. B).

Differenz: Für die Mengen $A, B \subset M$ ist $A \setminus B := A \cap \overline{B}$ „A ohne die Elemente von B"
Für die Mengen $A, B \subset M$ gilt:
$A \cap \overline{A} = \emptyset; A \cup \overline{A} = M; \overline{\overline{A}} = A;$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$ (Regel von DeMorgan)

Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$:=$\{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ und n und z sind teilerfremd$\}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$:= Menge aller unendlichen Dezimalbrüche

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind **abzählbar**, $\mathbb{R}$ heißt **überabzählbar.**

Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind durch die Kleiner-Relation $<$ **angeordnet**.

$\mathbb{Q}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$, d.h. für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $r < s < q$.

Auf den Zahlenbereichen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind die **Rechenoperationen** + („Addition"), - („Subtraktion"), $\cdot$ („Multiplikation") wie üblich definiert.
Die Operation : („Division") ist nur definiert als $a : b$, wenn $b \neq 0$.

Ein Zahlenbereich B heißt gegenüber einer Operation $\otimes$ **abgeschlossen**, wenn für $a, b \in B$ auch $a \otimes b \in B$.
Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind gegenüber Addition und Multiplikation abgeschlossen.
$\mathbb{Z}$ ist auch gegenüber Subtraktion abgeschlossen, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ auch gegenüber Subtraktion und Division.

Summenzeichen: $\sum_{i=k}^{m} a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_m$; z.B. $\sum_{j=2}^{5}(j+1) = 18$.
$\sum_{j=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$; (Arithmetische Summe)
$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; (Geometrische Summe)

Produktzeichen: $\prod_{i=k}^{m} a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot ... \cdot a_m$; z.B. $\prod_{j=2}^{5}(j+1) = 360$.

Potenzierung: $a^0 := 1$; für $0 < m \in \mathbb{N}$: $a^m := \prod_{i=1}^{m} a = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m-mal}$; („$a$ hoch m")

$a^{-m} := \frac{1}{a^m}$;
Es gelten: $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$;
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$;
$a^{n \cdot m} = (a^n)^m = (a^m)^n \neq a^{(n^m)}$ (!).

Fakultät: Für $n \in \mathbb{N}, n > 0$ definiert man $n! := \prod_{i=1}^{n} i$; $0! := 1$; z.B. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Binomialkoeffizient: Für $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$: $\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$ („n über m")
Es gilt: $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$. Bedeutet die Anzahl der Möglichkeiten, m viele aus n auszuwählen.

Binomische Formel: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$.

Wurzel: Für eine nichtnegative Zahl a und ein $0 \neq n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige, reelle Lösung der Gleichung: $x^n = a$. Diese wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet. Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man nur $\sqrt{a}$.
$a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$. Es gelten auch hier die Rechenregeln für Potenzen (s.o.). z.B. $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 8$.

Polynome: Für $a_0, a_1, ...a_n \in \mathbb{R}$ heißt $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ Polynom n-ten Grades in der Variablen x. Die a_i heißen **Koeffizienten**. Z.B. $P(x) = x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}x - 7$.

Lösung einer quadratischen Gleichung: Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann eine reelle Lösung, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$ ist.
Dann gibt es maximal zwei Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. („Mitternachtsformel")

Betrag: Für $a \in \mathbb{R}$ ist $|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

Es gelten: $|a+b| \leq |a| + |b|$; $|a-b| \leq |a| + |b|$; $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

Intervalle: Für $a < b \in \mathbb{R}$ definiert man:
$[a,b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$,,abgeschlossenes Intervall"
$(a,b) := \{x \mid a < x < b\}$,,offenes Intervall"
$(a,b] := \{x \mid a < x \leq b\}$,,linksoffenes Intervall"
$[a,b) := \{x \mid a \leq x < b\}$,,rechtsoffenes Intervall"
$[a,\infty) := \{x \mid a \leq x\}$; $(a,\infty) := \{x \mid x > a\}$;
$(-\infty,b] := \{x \mid x \leq b\}$; $(-\infty,b) := \{x \mid x < b\}$;
Man schreibt auch $\mathbb{R}^+$ für $(0,\infty)$ und $\mathbb{R}^-$ für $(-\infty,0)$.

ε-Umgebung: Für $0 < \varepsilon$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $U_\varepsilon(a) := \{x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$;

Maximum und Minimum: $c \in \mathbb{R}$ heißt Maximum (bzw. Minimum) der Menge $M \subset \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq c$ (bzw. $x \geq c$). Man schreibt dafür $\max(M)$ (bzw. $\min(M)$).

Supremum und Infimum:
Jede nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum
$\sup(M) := \min\{x \mid \text{für alle } y \in M \text{ ist } y \leq x\}$
Jede nach unten beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum
$\inf(M) := \max\{x \mid \text{für alle } y \in M \text{ ist } y \geq x\}$
Wenn $\max(M)$ bzw. $\min(M)$ existieren, ist $\sup(M) = \max(M)$ bzw. $\inf(M) = \min(M)$.

Funktionen

Sind A und B nichtleere Mengen, so bezeichnet man mit $f : A \longrightarrow B$ eine **Funktion** (oder auch **Abbildung**) aus dem **Definitionsbereich** A in den **Wertebereich** B.
Eine Funktion ordnet jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Element des Wertebereichs zu. Für $a \in A$ ist $f(a) \in B$ das Bild von a unter f, man schreibt auch $f : a \mapsto b$.

$f : A \longrightarrow B$ heißt **injektiv**, wenn aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt, dass $a_1 = a_2$.

$f : A \longrightarrow B$ heißt **surjektiv**, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass $f(a) = b$.

$f : A \longrightarrow B$ heißt **bijektiv**, wenn es injektiv und surjektiv ist.

Zu einer bijektiven Funktion $f : A \longrightarrow B$ gibt es eine **Umkehrfunktion** $f^{-1} : B \longrightarrow A$ mit $f^{-1}(f(a)) = a$.

Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Funktionen, so ist die **Hintereinanderausführung** $g \circ f : A \longrightarrow C$ eine Funktion mit $g \circ f(a) := g(f(a))$.
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$ ist.
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **ungerade**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$ ist.
Die Summe zweier gerader (bzw. ungerader] Funktionen ist wieder gerade (bzw. ungerade). Das Produkt zweier gerader Funktioinen ist wieder gerade. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Das Produkt zweier ungerader Funktionen ist gerade.

Vollständige Induktion

Aussagen über natürliche Zahlen werden mit Hilfe vollständiger Induktion bewiesen:
$A(n)$ sei eine Aussage über die Zahl $n \in \mathbb{N}$.
Wenn man zeigen kann, dass:

1) $A(0)$ trifft zu (sog."Induktionsanfang")
2) aus $A(n)$ folgt immer $A(n+1)$ (sog."Induktionsschritt")
dann ist damit bewiesen, dass $A(n)$ für alle $n \in I\!N$ gilt.

I. Grundlagen reeller Funktionen

Definition (I.1)

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $a_i \in A$. Dann heisst $(a_0, a_1, a_2, ...)$ eine ***Folge*** in A.
Man schreibt auch: $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ oder nur (a_i).
(a_i) ***konvergiert*** gegen $c \in \mathbb{R}$, wenn für beliebiges positives $\varepsilon \in \mathbb{R}$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N}$ $|c - a_i| \geq \varepsilon$ ist.
c heißt dann auch der ***Grenzwert*** der Folge (a_i). Man schreibt auch: $a_i \to c$.

Definition (I.2)

Sei $A \subset \mathbb{R}; b, c \in \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f ***konvergiert*** bei b gegen c (oder: f hat bei b den ***Grenzwert*** c, oder: $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$), wenn für jede Folge $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in A, die gegen b konvergiert, die Folge $(f(b_i))_{i \in \mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.

Definition (I.3)

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkte Menge; $c \in \mathbb{R}c$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f ***konvergiert im (negativ) Unendlichen*** gegen c (oder: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = c$),
wenn für jede nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkte, steigende (bzw. fallende) Folge (a_i) in A $f(a_i) \to c$.

Satz (I.4) (**Rechenregeln für Grenzwerte**)

Sei $A \subset \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Wenn $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to b} g(x)$ existieren, dann gilt:

(1) $\lim\limits_{x \to b}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to b} f(x) + \lim\limits_{x \to b} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x \to b}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to b} f(x) - \lim\limits_{x \to b} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to b}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to b} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to b} g(x)$

(4) $\lim\limits_{x \to b}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim\limits_{x \to b} f(x)}{\lim\limits_{x \to b} g(x)}$, falls $\lim\limits_{x \to b} g(x) \neq 0$

Definition (I.5)

Sei $A \subset \mathbb{R}, a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$.
f heißt ***stetig in*** a , wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
f heißt ***stetig*** , wenn f stetig in allen $a \in A$ ist.

Satz (I.6)
Die Summe, die Differenz, das Produkt und (falls definiert) der Quotient zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig.
Ebenso ist die Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktion - falls definiert - wieder stetig. Also $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ ist stetig, falls f und g stetig und $Bild(g) \subset Def(f)$.

Definition (I.7)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig.
Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$ existiert, dann heißt er ***1.Ableitung*** von f an der Stelle a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.
f heißt dann ***differenzierbar in a*** .
Statt $f'(a)$ wird auch die Schreibweise $\dfrac{d}{dx} f(a)$ verwendet.
f heißt ***differenzierbar*** , wenn es in allen $a \in A$ differenzierbar ist.

Definition (I.8)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a.
Dann definiert man als ***Tangente an f bei a*** die Funktion $T_{f,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $T_{f,a}(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$.

Definition (I.9)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $y : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a.
Unter dem ***Differenzial*** von y an der Stelle a versteht man die Funktion $dy : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $dy(\varepsilon) := \varepsilon \cdot y'(a)$.
Statt $\varepsilon \in \mathbb{R}$ schreibt man häufig auch dx, und damit: $df(dx) = dx \cdot f'(a)$ oder vereinfacht $dy = dx \cdot y'(a)$, bzw. $y'(a) = \frac{dy}{dx}$, der sogenannte ***Differenzialquotient*** .

Satz (I.10) (**Rechenregeln für Ableitungen**)
Sei $A \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ und $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt:
(1) $c \cdot f : A \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.
(2) $f + g : A \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
(3) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \quad \textbf{(Produktregel)}$$

(4) Wenn für alle $x \in A$ $g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{g} : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad (\textbf{Kehrwertregel})$$

(5) Wenn für alle $x \in A$ $g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (\textbf{Quotientenregel})$$

(6) Wenn $Bild(g) \subset Def(f)$, dann ist die Hintereinanderausführung $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad (\textbf{Kettenregel})$$

Definition (I.11)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar (in a) .
f heißt ***stetig differenzierbar (in a)*** , wenn f' stetig (in a) ist.

Definition (I.12)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$.
Für $n \geq 1$ heißt f ***n-fach (stetig) differenzierbar*** , wenn
$f^{(n)} := \underbrace{(...((f')')....)'}_{n-mal\ abgeleitet}$ existiert (und stetig ist).
$f^{(n)}$ heißt die ***n-te Ableitung*** von f.
Ist $y = f(t)$, schreibt man statt $f'(t), f''(t), ...$ auch $\dot{y}, \ddot{y}, ...$

Definition (I.13)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$.
f hat einen ***relativen Extremwert (Maximum oder Minimum)*** an der Stelle a, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(a) \subset A$ gibt, so dass:
$f(y) \leq f(a)$ für alle $y \in U_\varepsilon(a)$ (Maximum) oder
$f(y) \geq f(a)$ für alle $y \in U_\varepsilon(a)$ (Minimum).
f hat einen ***Wendepunkt*** an der Stelle a, wenn $f''(a)$ existiert und f' einen relativen Extremwert an der Stelle a hat.
Wenn zudem $f'(a) = 0$, heißt der Wendepunkt auch ***Terrassenpunkt*** oder ***Sattelpunkt***
.

Satz (I.14)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$ 2-fach differenzierbar.
Wenn f an der Stelle a einen relativen Extremwert hat, so gilt: $f'(a) = 0$.
Wenn f an der Stelle a einen Wendepunkt hat, so gilt: $f''(a) = 0$.

Satz (I.15)
Sei $A \subset \mathbb{R}; a \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar, $f'(a) = 0$ und m die kleinste Zahl $1 < m \leq n$, so dass $f^{(m)}(a) \neq 0$. Dann gilt:
f hat einen relativen Extremwert bei a, wenn m gerade ist, und zwar ein
Maximum, wenn $f^{(m)}(a) < 0$, bzw. ein
Minimum, wenn $f^{(m)}(a) > 0$.
f hat einen Sattelpunkt bei a, wenn m ungerade ist.

Satz (I.16) **(Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)**
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Dann gibt es $x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b$, so dass $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Definition (I.17)
Sei $A \subset \mathbb{R}; f : A \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : A \to \mathbb{R}$ heißt ***Stammfunktion*** zu f, wenn $F' = f$.

Satz (I.18) (**Regel von L'Hospital**)
Sei $A \subset \mathbb{R}$; $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen; $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$;
sei außerdem $g'(x) \neq 0$ für alle x aus einer Umgebung von c.
Gilt entweder $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ (Fall: $\frac{0}{0}$)
oder $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$ (Fall: $\frac{\infty}{\infty}$),
dann ist $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Satz (I.19) **Newton-Verfahren**
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar, $f(a) < 0, f(b) > 0$,
und für alle $x \in [a, b]$ $f'(x) \neq 0$ und $f''(x) \geq 0$ (d.h. linksgekrümmt oder konvex).
Für einen beliebigen Anfangswert $x_0 \in [a, b]$, für den $f(x_0) \geq 0$ ist, definiert man die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ induktiv durch $x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.
Dann konvergiert $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen die einzige Nullstelle von f.
Entsprechend gilt dieser Satz auch im Falle von Rechtskrümmung (konkav). Dabei setzt man voraus, dass $f(a) > 0, f(b) < 0, f''(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) \leq 0$.

Definition (I.20)
Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Die unendliche Summe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ heißt die zu (a_i) gehörige ***Reihe*** .
Wenn die Folge der ***Partialsummen*** $(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe ***konvergent*** und man schreibt $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = c$. Andernfalls heißt sie ***divergent*** .

Satz (I.21)
Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert, wenn eines (oder mehrere) der drei Kriterien erfüllt ist:

1) ***Majorantenkriterium*** : Es gibt eine konvergente Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ mit $|a_i| \leq |b_i|$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
2) ***Quotientenkriterium*** $: = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$.
3) ***Wurzelkriterium*** : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

Definition (I.22)
Sei (a_i) eine Folge in $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.
Dann bestimmt die Reihe $P(x) := \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x-a)^i$ eine Funktion, die man die ***Potenzreihe*** zur Folge (a_i) mit ***Entwicklungspunkt*** a nennt.

Satz und Definition (I.23)

Zu jeder Potenzreihe $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x-a)^i$ gibt es eine Zahl $r \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$, den sog. ***Konvergenzradius*** von $P(x)$, so dass gilt:
$P(x)$ konvergiert für alle $x \in (a-r, a+r)$ und divergiert für alle x mit $|x| > r$.
Für $|x| = r$ kann $P(x)$ konvergieren oder divergieren!
$r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Satz (I.24)

Potenzreihen dürfen innerhalb ihrer Konvergenzradien gliedweise addiert, subtrahiert und abgeleitet werden.
Für $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x-a)^i$ ist $P'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i \cdot (x-a)^{i-1}$.

Satz (I.25) Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i$.
Wenn für alle x aus einem Intervall $P(x) = Q(x)$, dann sind alle $a_i = b_i$.

Definition (I.26)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar und $x_0 \in A$.
$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt das ***Taylor-Polynom n-ter Ordnung*** von f mit Entwicklungspunkt x_0.
$R_n(x) := f(x) - P_n(x)$ heißt ***Taylor-Restglied n-ter Ordnung*** .

Satz (I.27) **(Satz von Taylor)**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in I$.
$P_n(x)$ und $R_n(x)$ seien die Taylor-Polynome und Taylor-Restglieder zu f mit Entwicklungspunkt x_0. Dann gilt:

1) $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $0 \le k \le n, n \in \mathbb{N}$.

2) $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3) Wenn $R_n(x) \to 0$, dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

II. Trigonometrische Funktionen

Definition (II.1)

Die Menge $E := \left\{ \binom{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ heißt ***Einheitskreis*** um 0 mit Radius 1.
Zu $\varphi \in \mathbb{R}$ gibt es genau einen Punkt P_φ auf E, so dass die positive x-Achse mit der Verbindungslinie von 0 zu P_φ den Winkel φ (gegen den Uhrzeigersinn) bildet.
Damit definiert man die Funktionen ***Sinus*** ***(***$\sin$***)*** und ***Kosinus*** ***(***$\cos$***)*** als:
$\sin(\varphi) :=$ y-Koordinate von P_φ;
$\cos(\varphi) :=$ x-Koordinate von P_φ.

Satz (II.2)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gelten:
$-1 \leq \sin(x) \leq 1; \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1; \quad \sin(-x) = -\sin(x); \quad \cos(-x) = \cos(x);$
$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}); \quad \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}); \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1;$
$\sin(x \pm 2\pi) = \sin(x); \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos(x);$
$\sin(0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0; \quad \cos(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1;$
$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2};$

Satz (II.3) **(Additionssatz)**

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta);$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta);$

Satz (II.4)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2});$$
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2});$$

Satz (II.5)

Im Dreieck ABC, in dem den Ecken A, B, C die Winkel α, β, γ zugeordnet sind und die Seiten a, b, c gegenüberliegen, gelten:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \qquad \textbf{(Sinussatz)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \qquad \textbf{(Kosinussatz)}$$

Definition (II.6)

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ mit $\cos(\varphi) \neq 0, \sin(\psi) \neq 0$. Man definiert:

$\tan(\varphi) := \dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ ***Tangens***

$\cot(\psi) := \dfrac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)}$ ***Kotangens***

Satz (II.7)
Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi, \psi, \varphi + \psi \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{1 + \cos(2\varphi)};$$

$$\tan(\varphi \pm \psi) = \frac{\tan(\varphi) \pm \tan(\psi)}{1 \mp \tan(\varphi) \cdot \tan(\psi)};$$

Satz (II.8) **(Ableitung trigonometrischer Funktionen)**

$$\frac{d}{d\varphi} \sin(\varphi) = \cos(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \cos(\varphi) = -\sin(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \tan(\varphi) = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} = 1 + \tan^2(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \cot(\varphi) = \frac{-1}{\sin^2(\varphi)} = -1 - \tan^2(\varphi)$$

Satz (II.9) **(Taylor-Entwicklung)**
Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \mp \ldots$$

Definition (II.10) **(Arkus-Funktionen)**
Die trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan, cot sind auf geeigneten Definitionsbereichen umkehrbar, und zwar:

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$ ***Arkussinus***

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arccos(x) := \cos^{-1}(x)$ ***Arkuskosinus***

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$ ***Arkustangens***

$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $\operatorname{arccot}(x) := \cot^{-1}(x)$ ***Arkuskotangens***

Satz (II.11)

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \text{ für } x \in [-1, 1]$$

$$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Satz (II.12) **(Ableitungen der Arkusfunktionen)**

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Definition (II.13)
Eine Funktion der Form:
$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta)$ oder $f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$ mit $A, \omega, \delta \in \mathbb{R}$
heißt ***harmonische Schwingung (HS)*** . A nennt man die ***Amplitude*** ,
ω die ***Winkelgeschwindigkeit*** , $\frac{\omega}{2\pi}$ die ***Frequenz*** und δ den ***Phasenwinkel*** .

Satz (II.14)
Die Überlagerung (d.h. Addition) zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz ist wieder eine harmonische Schwingung.
Ist $f(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ und $g(t) = B \cdot \sin(\omega t)$, so ist

$f(t) + g(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \delta)$, wobei $\tan(\delta) = \frac{B}{A}$.

III. Komplexe Zahlen

Definition (III.1)

$\mathbb{C} := \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der ***Komplexen Zahlen***
oder ***Gauss'sche Zahlenebene*** .
Man definiert die Addition: $(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$
und die Multiplikation: $(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$
Schreibweise: $0 := (0,0)$; $1 := (1,0)$; $i := (0,1)$;
für $a,b \in \mathbb{R}$ bezeichnet man mit ***a*** auch die komplexe Zahl ***(a,0)*** und schreibt statt ***(a,b)*** auch ***a+ib*** .

Satz (III.2)

$\mathbb{C}$ mit Addition (+) und Multiplikation ($\cdot$) ist ein Körper,
d.h. für $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gelten:
(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
(2) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
(3) $0 + z = z$
(4) $1 \cdot z = z$
(5) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
(6) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
(7) $z \cdot (z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2$
(8) es gibt genau eine Zahl $(-z) \in \mathbb{C}$, so dass $z + (-z) = 0$
(9) ist $z \neq 0$, so gibt es genau eine Zahl $(z^{-1}) \in \mathbb{C}$, so dass $z \cdot (z^{-1}) = 1$

Definition (III.3)

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
$\mathrm{Re}\,(z) := a$ heißt ***Realteil*** von z. $\mathrm{Im}\,(z) := b$ heißt ***Imaginärteil*** von z.
$\mid z \mid := \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt ***Betrag*** von z.
$\overline{z} := a - ib$ heißt die ***konjugiert komplexe Zahl*** zu z.
Ist $z \neq 0$ und φ der Winkel zwischen der Strecke $\overline{0z}$ und der positiven Realachse, also
$\sin\varphi = \mathrm{Im}\,(z)/ \mid z \mid$ und $\cos\varphi = \mathrm{Re}\,(z)/ \mid z \mid$,
so heißt $\arg(z) := \varphi$ das ***Argument*** von z.

Satz (III.4)

Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gelten:
$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(\overline{z}); \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(-\overline{z})$;
$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{R}$
$z \cdot \overline{z} = \mid z \mid^2 \in \mathbb{R}$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$\mid z_1 \cdot z_2 \mid = \mid z_1 \mid \cdot \mid z_2 \mid$
$\mid z_1 + z_2 \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid$
$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Satz (III.5)

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist eindeutig durch ihren Betrag und ihr Argument bestimmt:
$z = \mid z \mid \cdot(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$.

Definition (III.6)

Sei $z \in \mathbb{C}$. $U_\varepsilon(z) := \{u \in \mathbb{C} \mid \ | u - z | < \varepsilon\}$ heißt offene ***ε-Umgebung*** von z.

Ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$, so ***konvergiert*** sie gegen c, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow c$, genau dann, wenn die reelle Folge $(| z_k - c |)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$.

Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Konvergenz der zugehörigen ***Reihe*** ist definiert durch:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = c :\Longleftrightarrow (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow c$$

Für den ***Entwicklungspunkt*** $z_0 \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

die zugehörige ***Potenzreihe*** in $\mathbb{C}$.

Definition und Satz (III.7) (**Komplexe e-Funktion**)

Die Potenzreihe: $\quad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent. $\exp(z)$ heißt ***Komplexe Exponentialfunktion*** und wird auch mit e^z bezeichnet.

Satz (III.8)

Seien $u, v \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$. Dann gelten:

(1) $\exp(u + v) = \exp(u) \cdot \exp(v)$

(2) $\frac{d}{du} \exp(u) = \exp(u)$

(3) $\exp(\frac{n}{m}) = \sqrt[m]{e^n}$

Satz (III.9) (**Euler'sche Formel**)

Sei $a, b \in \mathbb{R}$.

$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

Somit: $| e^{a+ib} | = e^a$ und $\arg(e^{a+ib}) = b$.

Definition (III.10) (**Kartesische und Polar-Koordinaten**)

Eine komplexe Zahl z kann dargestellt werden:

(1) in ***kartesischen Koordinaten:*** $z = (a, b) = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}, a, b$ eindeutig) oder

(2) in ***Polarkoordinaten*** : $\quad z = x \cdot e^{iy}$ ($x, y \in \mathbb{R}, x$ eindeutig, aber $0 \leq y < 2\pi$ nur eindeutig für $z \neq 0$).

Satz (III.11) (**Umrechnungsregeln**)

Hat z die kartesische Form $z = a + ib$, dann ist die Polarform: $z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i\varphi}$, wobei $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$, also

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{für } z \text{ im I. oder IV.Q.} \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{für } z \text{ im II. oder III.Q.} \end{cases}$$

Hat z die Polarform $z = x \cdot e^{iy}$, dann ist die kartesische Form: $z = x(\cos(y) + i \sin(y))$

<u>Satz (III.12)</u>
Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
Dann hat z genau n ***n-te Wurzeln*** ,d.h. Zahlen $z_0, z_1....z_{n-1} \in \mathbb{C}$, alle paarweise verschieden, mit $z_0^n = z_1^n = ... = z_{n-1}^n = z$.

$$z_k = \sqrt[n]{|\, z \,|} \cdot e^{i\frac{\arg(z)+2k\pi}{n}} \qquad (k = 0, ..., n-1)$$

<u>Satz (III.13)</u> (**Fundamentalsatz der Algebra**)
Jedes Polynom in $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.
Deshalb lässt sich jedes Polynom in $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren aufspalten:
$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)....(z - z_n)$, wobei n der Grad von $P(z)$ ist, und z_i die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen von $P(z)$ sind.

<u>Satz (III.14)</u>
Sei $P(z)$ ein Polynom in $\mathbb{C}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$, also $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$.
Dann ist zu jeder Nullstelle u von $P(z)$ auch $\overline{u}$ eine Nullstelle von $P(z)$.

<u>Definition (III.15)</u> (**Komplexifizierung**)
Sei $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$.
Aus der reellen Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ kann die komplexe Funktion
$\underline{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gebildet werden:
$\underline{y}(t) := A \cdot e^{i\cdot(\omega t+\varphi)} = (A \cdot e^{i\cdot\varphi}) \cdot (e^{i\omega t})$.
$\underline{y}$ heißt die " ***Komplexifizierte*** " zu y.
Mit $\underline{A}$ wird die komplexe Zahl $A \cdot e^{i\cdot\varphi}$ bezeichnet.

IV. Exponentialfunktion u. Logarithmus

Definition und Satz (IV.1) (**Exponentialfunktion**)
Die Potenzreihe:

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent. $\exp(x)$ heißt ***Exponentialfunktion*** und wird auch mit e^x bezeichnet.
$exp(1) = \mathbf{e} = 2.7182818284...$ heißt die ***Euler'sche Konstante*** .

Satz (IV.2)
(1) $\frac{d}{dx} exp(x) = exp(x)$
(2) Gilt für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass $f = f'$, so ist $f(x) = c \cdot exp(x)$.

Satz (IV.3)
Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$. Dann gelten:
(1) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(2) $\exp(\frac{n}{m}) = \sqrt[m]{e^n}$

Satz (IV.4)
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

Satz (IV.5)
Die Exponentialfunktion e^x wächst stärker als jedes Polynom.

Definition (IV.6) (**Nat. Logarithmus**)
$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion zur e-Funktion und heißt ***Natürlicher Logarithmus*** .
$\ln(x) = y :\Longleftrightarrow e^y = x$.

Satz (IV.7) (**Rechenregeln für Logarithmus**)

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y); \qquad \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y); \qquad \ln(x^n) = n \cdot \ln(x).$$

Definition (IV.8)
Zu $a \in \mathbb{R}$ definiert man: $a^x := e^{\ln(a)\cdot x}$.

Definition (IV.9) (**Allg. Logarithmus**)
Für $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ ist $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\log_b(x) = y :\Longleftrightarrow b^y = x$.
$\log_b$ heißt ***Logarithmus zur Basis b*** .

Satz (IV.10)
Sei $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. Dann gilt:

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}.$$

Satz (IV.11) (**Ableitung und Taylorentwicklung**)

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = 1/x \quad . \qquad \frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)\cdot x} \quad .$$

$$\ln(x) = \tfrac{x-1}{1} - \tfrac{(x-1)^2}{2} + \tfrac{(x-1)^3}{3} - \ldots \pm (-1)^{k+1}\tfrac{(x-1)^k}{k} \text{ für } 0 < x < 2.$$

Definition (IV.12)
Sei $f : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Eine Gleichung, in der die Variable x und die abhängige Variable $y(x)$ auftreten können, und die Ableitung $y'(x)$ (aber keine höhere Ableitung, y”, y”',..) mindestens einmal vorkommt, heißt ***Differentialgleichung 1. Ordnung (DGL)*** . $f(x)$ ist eine ***Lösung*** der DGL, wenn bei der Ersetzung von y durch $f(x)$ und $y'(x)$ durch $f'(x)$ die Gleichung erfüllt ist.

Satz (IV.13)
Gegeben sei die Differentialgleichung: $y' = g(x)\cdot y$ (***Homogene Lineare DGL***), wobei $g : A \to \mathbb{R}$. Dann haben die Lösungen der DGL alle die Form:

$$y = C \cdot e^{G(x)},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ und G eine Stammfunktion von g ist.

Satz (IV.14)
Sei $y' = g(x)\cdot y + s(x)$ (***Inhomogene Lineare DGL***),
wobei $g : A \to \mathbb{R}$, $s : A \to \mathbb{R}$ und $\dfrac{s(x)}{g(x)}$ sei konstant.
Dann haben die Lösungen der DGL alle die Form:

$$y = C \cdot e^{G(x)} - \frac{s(x)}{g(x)},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ und G eine Stammfunktion von g ist.

Definition (IV.15) **Hyperbelfunktionen**

$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ”Sinus hyperbolicus”

$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ”Cosinus hyperbolicus”

$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ ”Tangens hyperbolicus”

Satz (IV.16)

Additionssatz: $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cdot\cosh(y) \pm \cosh(x)\cdot\sinh(y)$
$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cdot\cosh(y) \pm \sinh(x)\cdot\sinh(y)$

Ableitung: $\sinh'(x) = \cosh(x)$
$\cosh'(x) = \sinh(x)$

Taylor-Reihe: $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$

V. Integration

Definition (V.1)
Eine Funktion $T : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt ***Treppenfunktion*** , wenn es $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ und für alle $i < n$ T auf $[x_i, x_{i+1})$ konstant ist.

$$F_T := \sum_{k=1}^{n} T(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad \text{"}\textit{Summe der Stufenflächen}\text{"}$$

Definition (V.2) (**Riemann-Integral**)
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Dann heißt:

$$\int_a^b f(x)dx := \sup(F_T \mid \ T \text{ ist Treppenfunktion auf } [a,b] \ \texttt{und} \ T(x) \leq f(x) \ )$$

das ***Bestimmte Integral (Riemann-Integral)*** über f von a bis b.

Satz (V.3) (**Hauptsatz der Differenzial-und Integralrechnung**)
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und F eine Stammfunktion zu f. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x) \mid_a^b .$$

Definition (V.2)* (Erweitertete Def. des Riemann-Integrals, wg. Satz (V.3))
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und F eine Stammfunktion von f. Dann heißt:

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a)$$

das ***Bestimmte Integral (Riemann-Integral)*** über f von a bis b.

Definition (V.4) (**Unbestimmtes Integral**)
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktionen von f.
$\int f(x)dx = \{F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\}$ heißt das ***Unbestimmte Integral*** von f.
Man schreibt auch: $\int f(x)dx = F(x) + C$, wobei F eine Stammfunktion von f und $C \in \mathbb{R}$.
f heißt ***integrierbar*** , wenn es eine Stammfunktion hat, wenn also $\int f(x)dx \neq \emptyset$.

Satz (V.5)
Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \lambda, c \in \mathbb{R}, a \leq c \leq b$. Dann gelten:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Satz (V.6)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in [a, b]$.Dann ist

$$F_c(x) := \int_c^x f(y)dy$$

eine Stammfunktion von f.

Definition (V.7)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und sei $a = u_1 < u_2 < ... < u_n = b$ eine Zerlegung von [a,b]. Ist f in jedem Abschnitt (u_i, u_{i+1}) integrierbar, so definiert man:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{u_1}^{u_2} f(x)dx + \int_{u_2}^{u_3} f(x)dx... + \int_{u_{n-1}}^{u_n} f(x)dx.$$

Satz (V.8) (**Mittelwertsatz der Integralrechnung**)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt ein $x_0 \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(x_0).$$

Satz (V.9) (**Substitution**)
Sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ integrierbar,F eine Stammfunktion von f und sei $g : [a, b] \to [c, d]$ differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t)) + C.$$

Satz (V.10) (**Häufige Substitutionen**)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, F eine Stammfunktion von f, $a, b, z \in \mathbb{R}, z \neq -1$.

(1) $$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C$$

(2) $$\int f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{2} \cdot f(x)^2 + C$$

(3) $$\int f(x)^z \cdot f'(x)dx = \frac{1}{z + 1} \cdot f(x)^{z+1} + C$$

(4) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln | f(x) | + C$$

Satz (V.11) (**Partielle Integration**)
Seien $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist

$$\int g(x) \cdot h'(x)dx = g(x) \cdot h(x) - \int g'(x) \cdot h(x)dx.$$

Definition (V.12)

Eine Funktion der Form $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ und $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$
heißt ***Rationale Funktion*** . Ist $m > n$, so heißt sie ***echt rational*** .

Satz (V.13)

Seien $P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ und $Q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m$ Polynome. Wenn für alle $x \in \mathbb{R} : P(x) = Q(x)$, dann ist $m = n$ und $a_i = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$.

Satz (V.14)

Jedes Polynom $P(x)$ in $\mathbb{R}$ lässt sich eindeutig schreiben als Produkt aus Linearfaktoren der Form $(x-a)$ und irreduziblen quadratischen Polynomen der Form (x^2+bx+c), wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Satz (V.15) (**Partialbruchzerlegung**)

Jede echt rationale Funktion $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lässt sich darstellen als Summe von rationalen Funktionen der Gestalt $\dfrac{A}{(x-b)^j}$ oder der Gestalt $\dfrac{Bx+C}{(x^2+cx+d)^j}$, wobei $A, B, C, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$.

Definition (V.16) (**Durchschnittswerte**)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann heißt

$$\overline{f} := \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

der ***Durchschnittswert*** (oder ***Mittelwert***) von f zwischen a und b.

Definition (V.17) (**Uneigentliches Integral**)

Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrierbar wobei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{s \to b} \int_a^s f(x)dx$$

existiert, so heißt er ***uneigentliches (rechtsseitiges) Integral*** und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.
Entsprechend definiert man ein uneigentliches linksseitiges bzw. beidseitiges Integral.

Satz (V.18) (**Gamma-Funktion**)

Die Funktion $\Gamma(\alpha) := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{\alpha-1}dt$ ist für alle $\alpha > 0$ definiert und heißt ***Gamma-Funktion*** .
Es gilt $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

VI. Vektorrechnung

Definition (VI.1)

Ein zweidimensionaler ***Vektor*** ist ein Paar $\binom{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

x und y heißen ***Koordinaten*** .

$\mathbb{R}^2 := \left\{ \binom{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist der zweidimensionale ***$\mathbb{R}$-Vektorraum*** .

Definition (VI.2)

Seien $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}, \vec{b} = \binom{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Man definiert:

$$\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad (\textbf{Vektoraddition})$$

$$\lambda \cdot \vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix} \qquad (\textbf{Muliplikation mit Skalar})$$

Satz (VI.3)

Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.
2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
3) $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$.
4) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$.

Definition (VI.4)

Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$.

$$|\vec{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

heißt ***Betrag*** (oder ***Länge***) von $\vec{a}$ und wird auch mit a bezeichnet.

Satz (VI.5)

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1) $|\lambda \cdot \vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|$.
2) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$. (**Dreiecksungleichung**)
3) $|\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Definition (VI.6)

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

$$\vec{x} \bullet \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2$$

heißt ***Skalarprodukt*** .

$$\vec{x} \perp \vec{y} :\Longleftrightarrow \vec{x} \bullet \vec{y} = 0$$ ***"x steht zu y senkrecht"***

$$\vec{x}^{\perp} := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$ ***"x orthogonal, d.h. Drehung um 90° gegen Uhrzeigersinn"***

Satz (VI.7)

Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1) $\vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}$
2) $(\vec{x} + \vec{y}) \bullet \vec{z} = \vec{x} \bullet \vec{z} + \vec{y} \bullet \vec{z}$
3) $\lambda \cdot (\vec{x} \bullet \vec{y}) = (\lambda \vec{x}) \bullet \vec{y} = \vec{x} \bullet (\lambda \vec{y})$
4) $\vec{x} \bullet \vec{x} = |\vec{x}|^2$

Satz (VI.8)

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \vec{x}, \vec{y} \neq 0$, und sei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$.
Dann ist $\vec{x} \bullet \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\varphi)$.
Somit gilt $|\vec{x} \bullet \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$. (***"Cauchy-Schwarz-Ungleichung"***)

Definition (VI.9)

Seien $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Dann heißt
$\mathbf{G} := \{\vec{a} + \lambda \vec{v} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine ***Gerade*** .
Man schreibt auch $\mathbf{G} = \vec{a} + \lambda \vec{v}$.
$\vec{a}$ heißt ***Aufhängepunkt*** , $\vec{v}$ ***Richtungsvektor*** von $\mathbf{G}$.

Satz (VI.10)

Gegeben sei die Gleichung $(*)$ $ax + by + c = 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Dann ist
$\mathbf{G} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,|\, ax + by + c = 0\}$ eine Gerade.
Die Gleichung $(*)$ heißt ***implizite Geradengleichung*** . Es gilt:
$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b/a \\ -1 \end{pmatrix}$.

Satz und Definition (VI.11)

Sei $\mathbf{G}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ und $\vec{z} \in \mathbf{G}$, so dass $|\vec{z}|$ minimal ist. Dann ist $\mathbf{G}$ darstellbar durch die implizite Geradengleichung

$$x \cos\gamma + y \sin\gamma - |\vec{z}| = 0,$$

wobei γ der Winkel zwischen $\vec{z}$ und der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn ist.
Diese Darstellung heißt ***Hesse'sche Normalform*** der Geraden $\mathbf{G}$.

Satz (VI.12)

Sei $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$v_2 x - v_1 y + a_2 v_1 - a_1 v_2 = 0$$

eine implizite Geradengleichung zu $\mathbf{G}$.

Satz (VI.13)

Sei die Gerade $\mathbf{G}$ gegeben durch die Hesse'sche Normalform $ax + by - c = 0$ und sei $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$.
Dann ist $|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 - c|$ der Abstand von $\mathbf{P}$ zu $\mathbf{G}$.

Definition (VI.14)

Ein dreidimensionaler Vektor ist ein Tripel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ ist der dreidimensionale ***$\mathbb{R}$-Vektorraum*** .

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ definiert man:

$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ (Vektoraddition)

$\lambda \cdot \vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ (Multiplikation mit Skalar)

$\vec{x} \bullet \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ (Skalarprodukt)

$|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (Betrag od. Länge)

$\vec{x} \perp \vec{y} :\Longleftrightarrow \vec{x} \bullet \vec{y} = 0$ (x steht zu y senkrecht)

Die Sätze VI.3, VI.5, VI.7, VI.8 gelten auch für Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

Satz (VI.15)

Sei durch $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ ein Viereck in $\mathbb{R}^3$ bestimmt mit den Seiten
$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A}, \vec{b} = \vec{C} - \vec{B}, \vec{c} = \vec{D} - \vec{C}, \vec{d} = \vec{A} - \vec{D}$.
Dann spannen die Mittelpunkte der Seiten ein Parallelogramm auf.

Definition (VI.16)

Die Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n} \in \mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^2$). heißen ***linear unabhängig voneinander*** , wenn es keine $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + ... + \lambda_n \vec{v_n} = 0$, außer für $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Definition (VI.17)

Drei Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ bilden eine ***Basis*** $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ von $\mathbb{R}^3$, wenn sich jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ als $\vec{x} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \lambda_3 \vec{b_3}$ darstellen lässt.
[entsprechend: zwei Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$, wenn sich jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ als $x = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}$ darstellen lässt.]
Eine Basis heißt ***orthogonal*** , wenn all ihre Vektoren zueinander senkrecht stehen.
Eine Basis heißt ***Einheitsbasis*** , wenn all ihre Vektoren die Länge 1 haben.
Eine orthogonale Einheitsbasis heißt ***Orthonormalbasis*** .

Satz (VI.18)

In $\mathbb{R}^3$ [bzw. $\mathbb{R}^2$] bilden drei [bzw. zwei] Vektoren eine Basis genau dann, wenn sie linear unabhängig sind.

Definition (VI.19)

Sei $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$.
B heißt ***rechtshändig orientiert*** , wenn $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ diesselbe Orientierung aufweisen wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.

Definition (VI.20)

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ heißt ***Vektorprodukt*** aus $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Satz (VI.21)

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.
2) $\lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \lambda\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \lambda\vec{y}$.
3) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$.
4) $|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = (\vec{x} \bullet \vec{x})(\vec{y} \bullet \vec{y}) - (\vec{x} \bullet \vec{y})^2$.
5) Ist φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, so ist $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot |\sin\varphi|$.

Satz (VI.22)

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, \vec{x}, \vec{y} \neq 0$.

Dann sind $0, \vec{x}, \vec{x} + \vec{y}, \vec{y}$ die Ecken eines Parallelogramms mit dem Flächeninhalt $|\vec{x} \times \vec{y}|$.

Definition (VI.23)

Seien $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

$\mathbf{G} := \{\vec{a} + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ heißt ***Gerade*** in $\mathbb{R}^3$ mit Aufhängepunkt $\vec{a}$ und Richtungsvektor $\vec{v}$.

Man schreibt auch $\mathbf{G} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$.

Satz (VI.24)

Seien $\mathbf{G} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$ und $\mathbf{H} = \vec{b} + \lambda\vec{w}$. Dann gilt entweder:

1) $\mathbf{G} = \mathbf{H}$,

oder

2) $\mathbf{G} \parallel \mathbf{H}$, d.h. $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$ und es gibt ein $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{v} = \mu\vec{w}$ (Geraden sind parallel)

oder

3) $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\}$ (Geraden schneiden sich in einem Punkt)

oder

4) $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \emptyset$ (Geraden sind windschief)

Wenn $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ nicht parallel sind, ist

$$d = \frac{|(\vec{v} \times \vec{w}) \bullet (\vec{a} - \vec{b})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

der kürzeste Abstand zwischen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$.

Satz (VI.25)

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ liegen auf einer Geraden genau dann, wenn $(\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{y} \times \vec{z}) + (\vec{z} \times \vec{x}) = 0$.

Satz (VI.26)

Seien $\vec{a}, \vec{v}, \vec{p} \in \mathrm{I\!R}^3$. und **G**$= \vec{a} + \lambda\vec{v}$. Dann ist

$$d = \frac{|(\vec{v} \times (\vec{p} - \vec{a})|}{|\vec{v}|}$$

der kürzeste Abstand zwischen **G** und dem Punkt $\vec{p}$.

Definition (VI.27)

Seien $\vec{a}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathrm{I\!R}^3$, wobei $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind. Dann heißt
$\mathbf{E} := \{\vec{a} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \,|\, \lambda, \mu \in \mathrm{I\!R}\,\}$ ***Ebene*** in $\mathrm{I\!R}^3$.
Man schreibt auch $\mathbf{E} = \vec{a} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

Definition (VI.28)

Sei $\mathbf{E} = \vec{a} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ eine Ebene in $\mathrm{I\!R}^3$.
$\vec{n} \in \mathrm{I\!R}^3$ heißt ***Normalenvektor*** zu **E**, wenn $\vec{n} \perp \vec{v}$ und $\vec{n} \perp \vec{w}$. Wenn $|\vec{n}|= 1$, heißt er auch ***Normaleneinheitsvektor*** und wird mit $\vec{n_0}$ bezeichnet. Es gilt

$$\vec{n_0} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|}.$$

Satz (VI.29)

Sei **E** eine Ebene in $\mathrm{I\!R}^3$ und $\vec{p} \in \mathrm{I\!R}^3$. Dann ist

$$d = |\vec{n_0} \bullet (\vec{p} - \vec{a})|$$

der Abstand von $\vec{p}$ zu **E**, wobei $\vec{n_0}$ der Normaleneinheitsvektor zu **E** und $\vec{a} \in \mathbf{E}$ beliebig ist.

Definition und Satz (VI.30)

Seien $a, b, c, d \in \mathrm{I\!R}$, wobei mindestens eines der a, b, c ungleich Null ist. Dann ist
$\mathbf{E} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, ax + by + cz + d = 0 \right\}$ eine Ebene in $\mathrm{I\!R}^3$. Die Gleichung $ax + by + cz + d = 0$
heißt ***implizite Ebenengleichung*** . Die Gleichung

$$\frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - d = 0 \quad \text{mit } d \geq 0$$

heißt ***Hesse'sche Normalform*** der Ebenengleichung. Dabei ist d der Abstand von **E** zum Nullpunkt.

Satz (VI.31)

Sei die Ebene **E** gegeben durch die implizite Ebenengleichung $ax + by + cz + d = 0$.

Falls $a \neq 0$, gilt $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Falls $b \neq 0$, gilt $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d/b \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \\ 1 \end{pmatrix}$

VII. Vektorräume und lineare Abbildungen

Definition (VII.1)

Sei $n \geq 1$. Ein n-dimensionaler Vektor ist ein n-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit den Koordinaten $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$ ist der n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist die Addition $\vec{a} + \vec{b}$ sowie die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda\vec{a}$ koordinatenweise definiert wie für $n = 2$ oder $n = 3$.

$|\vec{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$.

$\vec{a} \bullet \vec{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... a_n b_n$.

Die Sätze VI.3, VI.5, VI.7, VI.8 gelten auch für Vektoren aus $\mathbb{R}^n$.

Definition (VII.2)

Sei $n \geq 1$. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***Unterverktorraum*** von $\mathbb{R}^n$, wenn sie gegen Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, d.h. wenn

1) für $\vec{x}, \vec{y} \in U : \vec{x} + \vec{y} \in U$
2) für $\vec{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\vec{x} \in U$

Definition (VII.3)

Die Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen ***linear unabhängig voneinander*** , wenn es keine $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + ... + \lambda_m\vec{v_m} = 0$, außer für $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$.

Definition (VII.4)

Sei $n \geq 1, M \subset \mathbb{R}^n$.

Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren in M nennt man die Dimension von M und bezeichnet sie mit $\dim(M)$.

Satz und Definition (VII.5)

Sei $n \geq 1, M \subset \mathbb{R}^n$.

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M \subset U$ und $\dim(M) = \dim(U)$.

Dieser Unterraum heißt der von M ***erzeugte (oder aufgespannte)*** Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und wird auch mit $\text{span}(M)$ bezeichnet.

Definition (VII.6)

Sei $n \geq 1$ und $B = \{\vec{b_1}, ..., \vec{b_m}\} \subset \mathbb{R}^n$.

Wenn $\dim(B) = m$ heißt B ***Basis*** des von B erzeugten Untervektorraumes.

Ist insbesondere $m = n$, so ist B eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

B heißt ***orthogonal*** , wenn $\vec{b_i} \perp \vec{b_j}$ für $i \neq j \leq m$.

B heißt ***Einheitsbasis*** , wenn $|\vec{b_i}| = 1$ für $i \leq m$.

Eine orthogonale Einheitsbasis heißt ***Orthonormalbsis*** .

Satz (VII.7)
Seien U und W Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:
1) $U+W := \{\vec{u}+\vec{w} \mid \vec{u} \in U, \vec{w} \in W\}$ ist ein Untervektorraum. (sog. ***Summenraum***
)
2) $U \cap W$ ist ein Untervektorraum.

Satz (VII.8) (**Dimensionssatz**)
Seien U und W Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$.
Dann ist $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Satz (VII.9)
Sei $B = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\}$ eine Basis des Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$.
Dann ist $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m\}$ eine Orthonormalbasis von U, wobei

$$\vec{a}_1 := \frac{1}{|\vec{b}_1|}\vec{b}_1$$

$$\text{und für} \quad 2 \leq k \leq m: \quad \vec{a}_k := \frac{1}{|\vec{d}_k|}\vec{d}_k, \quad \text{wobei} \quad \vec{d}_k := \vec{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\vec{b}_k \bullet \vec{a}_i)\vec{a}_i$$

Definition (VII.10)
Seien U und V Vektorräume.
Eine Funktion $f: U \longrightarrow V$ heißt ***lineare Abbildung*** , wenn gilt:
1) $f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in U$.
2) $f(\lambda\vec{a}) = \lambda f(\vec{a})$ für alle $\vec{a} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Satz (VII.11)
Seien $f, g: U \longrightarrow V$ und $h: V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann sind:
1) $f+g: U \longrightarrow V,\ (f+g)(\vec{a}) := f(\vec{a}) + g(\vec{a})$ und
2) $h \circ f: U \longrightarrow W,\ (h \circ f)(\vec{a}) := h(f(\vec{a}))$
ebenfalls lineare Abbildungen.

Definition und Satz (VII.12)
Sei $f: U \longrightarrow V$ eine lineare Abblidung. Man definiert:
$\text{Bild}(f) := \{f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U\} \subset V$ und
$\text{Kern}(f) := \{\vec{u} \mid \vec{u} \in U, f(\vec{u}) = 0\} \subset U$.
Bild(f) und Kern (f) sind Untervektorräume von V bzw. U.
dim(Bild(f)+dim(Kern(f)=dim(U).

Satz (VII.13)
Ein rechteckiges Schema von Zahlen aus $\mathbb{R}$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1}a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt ***m-n-Matrix*** mit m Zeilen und n Spalten und wird auch mit (a_{ij}) bezeichnet.

$(a_{i1}...a_{in})$ heißt i-ter ***Zeilenvektor*** ,

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ heißt i-ter ***Spaltenvektor.***

Eine Matrix heißt ***Diagonalmatrix*** , wenn nur die Felder der Diagonale, also die Felder a_{ii}, von Null verschieden sein dürfen.
Die n-n-Diagonalmatrix, deren Diagonale nur Einsen enthält, heißt ***Einheitsmatrix*** und wird mit E bezeichnet.
Eine Matrix heißt ***Dreiecksmatrix*** , wenn alle Felder unterhalb der Diagonale 0 enthalten.
Eine Matrix hat ***Zeilenstufenform (ZSF)*** , wenn ab der zweiten Zeile jeder Zeilenvektor mit einer Folge von Nullen beginnt, die länger ist als die Folge von Nullen im darüberstehenden Zeilenvektor.

Satz (VII.14)

Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kann eindeutig durch eine m-n-Matrix A_f dargestellt werden. Die n Spaltenvektoren von A_f sind die m-dimensionalen Vektoren $f(\vec{e}_1), ..., f(\vec{e}_n)$, wobei $\vec{e}_i$ der i-te Einheitsvektor ist, d.h. der Vektor, der nur in der i-ten Koordinate 1 und sonst 0 ist.
Umgekehrt definiert jede m-n-Matrix A eindeutig eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, dadurch dass $f_A(\vec{e}_i)$ gleich dem i-ten Spaltenvektor von A ist.

Definition (VII.15)

Sei A eine m-n-Matrix, $A = (a_{ij})$ mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.

Die n-m-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11}a_{21} & . & . & . & a_{m1} \\ a_{12}a_{22} & . & . & . & a_{m2} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{1n}a_{2n} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$, die durch Spiegelung an der Diagonalen entsteht, heißt ***Transponierte*** von A und wird mit A^T bezeichnet.

Definition (VII.16)

Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ n-m-Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man definiert:

$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$ Addition

$\lambda A := (\lambda a_{ij})$ Skalarmultiplikation

Definition (VII.17)

Seien A eine n-m-Matrix und B eine m-k-Matrix.
Dann ist das ***Produkt*** $A \cdot B$ definiert als die n-k-Matrix (c_{ij}) mit

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{m} a_{ip}b_{pj} \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k.$$

Satz (VII.18)

Seien A, B n-m-Matrizen , C eine m-k-Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$f_{A+B} = f_A + f_B$
$f_{\lambda A} = \lambda f_A$
$f_{A \cdot C} = f_A \circ f_C$

Satz (VII.19)

Seien A, B, C Matrizen. Dann gilt (falls die jeweiligen Summen und Produkte definiert sind):
1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
3) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$
4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Satz und Definition (VII.20)

Sei A eine Matrix. Dann ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilenvektoren gleich der maximalen Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren. Diese Zahl heißt ***Rang*** von A und wird mit Rang(A) bezeichnet.

Definition (VII.21)

Unter einer ***elementaren Zeilenumformung*** einer Matrix A versteht man eine der folgenden Operationen:
I) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.
II) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile für $\lambda \in \mathbb{R}$.
III) Vertauschung zweier Zeilen.
Entsprechend definiert man ***elementare Spaltenumformung*** .
Elementare Zeilenumformungen [Spaltenumformungen] verändern den von den Zeilenvektoren [Spaltenvektoren] einer Matrix aufgespannten Untervektorraum nicht.

Satz (VII.22)

Jede Matrix kann durch eine Folge von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen in eine Diagonalmatrix umgewandelt werden.
Jede Matrix kann durch eine Folge von elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform gebracht werden.

Definition und Satz (VII.23)

Sei A eine n-n-Matrix. A heißt ***regulär*** , wenn Rang(A)=n.
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ***Isomorphismus*** , wenn sie bijektiv ist, d.h. wenn es eine lineare Abbildung $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f^{-1}(f(\vec{x})) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn A_f regulär ist.

Definition und Satz (VII.24)

Die Matrix A^{-1} heißt Inverse zur Matrix A, wenn $A^{-1} \cdot A = E$.
Zu einer Matrix A gibt es eine Inverse, genau dann wenn A regulär ist.

Satz (VII.25)

Seien A und B reguläre Matrizen. Dann gilt:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Definition und Satz (VII.26)

Jeder n-n-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Zeilenvektoren $\vec{a}_1 ... \vec{a}_n$ wird eine Zahl $\det(A) \in \mathbb{R}$, die ***Determinante*** von A, zugeordnet mit folgenden Eigenschaften:

E1) $\det(D) = d_{11} \cdot d_{22} \cdot ... \cdot d_{nn}$, wenn $D = (d_{ij})$ eine Dreiecksmatrix ist.

E2) $\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ . \\ \lambda \vec{a}_i \\ . \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ . \\ \vec{a}_i \\ . \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$, für $1 \le i \le n, \lambda \in \mathbb{R}$.

E3) $\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ . \\ \vec{b} + \vec{c} \\ . \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ . \\ \vec{b} \\ . \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ . \\ \vec{c} \\ . \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$, wenn $\vec{b} + \vec{c}$, bzw. $\vec{b}, \vec{c}$ auf gleicher Koordinatenposition $1 \le i \le n$sind, und alle anderen Koordinaten gleich bleiben.

E4) $\det \begin{pmatrix} . \\ \vec{a}_k \\ . \\ \vec{a}_l \\ . \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} . \\ \vec{a}_l \\ . \\ \vec{a}_k \\ . \end{pmatrix}$, wenn nur $\vec{a}_k$ und $\vec{a}_l$ vertauscht sind.

Die Determinante ist durch die Eigenschaften E1) bis E4) eindeutig bestimmt.
Man schreibt statt $\det(A)$ auch $|A|$.

Satz (VII.27) **(Regel von Sarrus)**

Für eine 2-2-Matrix gilt: $\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
Für eine 3-3-Matrix gilt:
$\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.

Satz (VII.28)

Für die n-n-Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
Wenn A regulär ist, gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Satz (VII.29)

Sei A eine n-n-Matrix. Dann sind die sechs folgenden Aussagen gleichbedeutend:

1) A ist regulär.
2) A ist invertierbar.
3) $\det(A) \neq 0$.
4) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
5) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
6) f_A ist ein Isomorphismus.
7) Kern(f_A)=0.

VIII. Lineare Gleichungssysteme

Definition (VIII.1)
Seien $n, m \geq 1$. n Gleichungen der Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2$$

$$....$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ nennt man ein ***Lineares Gleichungssystem (LGS)*** mit den ***Unbekannten (oder Variablen)*** $x_1, ..., x_m$.
Gilt $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, so heißt das LGS ***homogen*** , andernfalls ***inhomogen*** .
Das LGS kann auch dargestellt werden durch die Gleichung:

$A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $A = (a_{ij}), \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Die Matrix $(A, \vec{b}) := \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & . & . & . & a_{1m} & b_1 \\ a_{21}a_{22} & . & . & . & a_{2m} & b_2 \\ . & & & & . & \\ . & & & & . & . \\ a_{n1}a_{n2} & . & . & . & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$ heißt ***erweiterte Koeffizientenmatrix***
.

Die Menge $L = \{\vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{b}\,\}$ heißt ***Lösungsmenge*** des LGS.

Satz(VIII.2)
Sei A eine n-m-Matrix und L die Lösungsmenge des homogenen LGS $A\vec{x} = 0$.
Dann ist L ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$ und $\dim(L) = m-$Rang(A).

Satz(VIII.3)
Sei A eine n-m-Matrix, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Sei $\vec{s}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und L_0 die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS $A\vec{x} = 0$.
Dann ist $\vec{s} + L_0 := \{\vec{s} + \vec{v} \,|\, \vec{v} \in L_0\,\}$ die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Satz (VIII.4)
Sei A eine n-m-Matrix, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar genau dann, wenn Rang(A) =Rang$(A, \vec{b})$.

Satz (VIII.5)
Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS mit Lösungsmenge L. Wenn man mit elementaren Zeilenumformungen aus $(A, \vec{b})$ $(A', \vec{b'})$ erhält, hat $A'\vec{x} = \vec{b'}$ diesselbe Lösungsmenge L.

Satz (VIII.6) (**Gauß-scher Algorithmus**)
Sei $(A, \vec{b})$ eine erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform.
Wenn eine Stufe breiter als 1 ist, also von Spalte j bis Spalte $j+k$ reicht, nennt man die Variablen $x_{j+1}, .., x_{j+k}$ ***freie*** Variable. Es gebe insgesamt m freie Variable.

I) Für jede dieser freien Variablen errechnet man einen Lösungsvektor $\vec{l_i}$ $(1 \leq i \leq m)$ des homogenen LGS $A\vec{x} = 0$, indem man sie auf 1, und alle anderen freien Variablen auf 0 setzt und dann durch Lösen der homogenen Gleichungen von unten her die anderen (nicht-freien) Variablen bestimmt.
II) Dann setzt man *alle* freien Variablen auf 0 und ermittelt durch Lösen der Gleichungen von $A\vec{x} = \vec{b}$ ebenfalls von unten her die Werte der anderen (nicht-freien) Variablen. Dies ergibt einen Lösungsvektor $\vec{s}$ für das (ggf. inhomogene) LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.
III) Die vollständige Lösungsmenge ist $L = \{\vec{s} + \lambda_1\vec{l}_1 + \lambda_2\vec{l}_2 + ... + \lambda_m\vec{l}_m \,|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\,\}$.

Satz (VIII.7)
Sei A eine n-n-Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ genau dann eine einzige Lösung, wenn A regulär ist.

Satz (VIII.8) (**Cramer'sche Regel**)
Sei A eine reguläre n-n-Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ die eindeutige Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$s_i := \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(B_i)$ und B_i aus A entsteht, indem man die i-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt.

Definition (VIII.9)
Sei A eine n-n-Matrix. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt ***Eigenwert*** von A und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt zu λ gehöriger ***Eigenvektor*** von A , wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Definition (VIII.10)
Sei A eine n-n-Matrix. $\det(A - \lambda E)$ ist ein Polynom in der Variablen λ und heißt ***charakteristisches Polynom*** von A.

Satz (VIII.11)
Sei A eine n-n-Matrix. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A.
Die von 0 verschiedenen Lösungsvektoren des LGS $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$ sind die zum Eigenwert λ gehörenden Eigenvektoren.

Definition (VIII.12)
Seien $y_1, y_2, ..., y_n$ Funktionsvariable und $A = (a_{ij})$ eine n-n-Matrix.
n Gleichungen der Form:

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n$$

nennt man ein ***System von linearen Differenzialgleichungen (DGL)*** .
Man schreibt auch $\vec{y'} = A\vec{y}$.
Sind $s_1, ..., s_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ und $1 \leq i \leq n$ alle Gleichungen:

$$s_i'(t) = a_{i1}s_1(t) + a_{i2}s_2(t) + ... + a_{in}s_n(t)$$

erfüllt sind, so heißt $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ eine ***Lösung*** des Systems.

Satz (VIII.13)

Sei $\vec{y'} = A\vec{y}$ ein System linearer DGL.
Seien $\lambda_1, .., \lambda_k$ alle Eigenwerte von A und zu jedem λ_i sei v_i ein zugehöriger Eigenvektor.
Dann ist für jedes i mit $1 \leq i \leq k$ der Vektor von Funktionen $\vec{v_i}\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ eine Lösung.
Wenn die λ_i für $1 \leq i \leq k$ alle verschieden sind, dann hat jede Lösung die Gestalt $\mu_1\vec{v_1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + ... + \mu_k\vec{v_k}\mathrm{e}^{\lambda_k t}$ mit $\mu_1, .., \mu_k \in \mathbb{R}$.

IX. Differenzialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Definition (IX.1)

Sei $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$.
$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \quad |x - a| < \varepsilon\}$ heißt ***offene ε -Umgebung*** von a.

Definition (IX.2)

Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$.
$a \in \mathbb{R}^n$ heißt ***Grenzwert*** von (a_i), [oder $\lim_{i\to\infty}(a_i) = a$ oder $(a_i) \longrightarrow a$] , wenn in jeder offenen ϵ-Umgebung von a fast alle a_i liegen.

Satz(IX.3)

Sei (a_i) eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ .. \\ a_{in} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt $(a_i) \longrightarrow b$ genau dann, wenn für jedes $k \leq n$: $\quad (a_{ik}) \longrightarrow_{i\to\infty} b_k$.

Definition(IX.4)

Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$.
f ***konvergiert*** an der Stelle x_0 gegen b [oder $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$] , wenn für jede Folge (a_i), die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(a_i))$ gegen b konvergiert.

Definition(IX.5)

Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^m$.
f heißt ***stetig*** in x_0, wenn $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
f heißt ***stetig*** , wenn f stetig in allen $x \in \mathbb{R}^m$.

Definition(IX.6)

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, j \leq n$.

f heißt ***partiell differenzierbar*** nach der j-ten Variablen an der Stelle a, wenn die Funktion $x \mapsto f(a_1, .., a_{j-1}, x, a_{j+1}, .., a_n)$ an der Stelle a_j differenzierbar ist.
Den Differenzialquotienten $\lim_{x\to a_i} \frac{f(a_1,..,x,..,a_n) - f(a_1,..,a_i,..,a_n)}{x - a_i}$ nennt man die ***j-te partielle Ableitung*** und bezeichnet sie mit $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ oder auch mit f_{x_j}.
f heißt partiell differenzierbar, wenn es für alle $j \leq n$ und für alle $a \in \mathbb{R}^n$ an der Stelle a nach der j-ten Variablen partiell differenzierbar ist.

Definition(IX.7)

Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x_1, .., x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, .., x_m) \\ .. \\ f_n(x_1, .., x_m) \end{pmatrix}$.
f heißt partiell differenzierbar, wenn jedes $f_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar ist.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bezeichnet dann den Vektor der j-ten partiellen Ableitungen der f_1 bis f_n: $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \cdot\cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \end{pmatrix}$.

Definition(IX.8)
Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar und $a \in \mathbb{R}^m$.
Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdot\cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$ heißt die ***Ableitungsmatrix*** von f in a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.
Wenn $n = 1$, also $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, dann ist $f'(a)$ ein Zeilenvektor und wird ***Gradient*** genannt (grad f) .

Man verwendet auch den ***Nabla-Operator*** $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$, also ∇f=(grad f)^T.

Definition(IX.9)
Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^m$. Wenn

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{|x-a|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann nennt man f ***vollständig differenzierbar*** in a und die Funktion
$T_{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$ heißt Tangential-"Ebene" zu f in a.

Satz (IX.10)
Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^m$ und seien alle partiellen Ableitungen stetig in a.
Dann ist f vollständig differenzierbar in a.

Satz (IX.11)
Seien $f, g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vollständig differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^m$, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Dann ist $\lambda f + \mu g$ vollständig differenzierbar in a und $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

Satz (IX.12) **(Kettenregel)**
Seien $g := \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ vollständig differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vollständig differenzierbar in $g(a)$.
Dann ist $f \circ g$ vollständig differenzierbar in a und $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ (Matrixmultiplikation!).

Definition und Satz (IX.13)
Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vollständig differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^n$ und sei $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.
Dann heißt $f'(a) \cdot \frac{v}{|\, v \,|}$ die ***Steigung*** von f bei a in Richtung v.
f hat die größte Steigung bei a in Richtung $\nabla f(a)$.

Definition (IX.14)

Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.
f heißt ***k-fach partiell*** [***stetig***] ***differenzierbar*** , wenn
für $k = 1$ f partiell differenzierbar ist [und alle partiellen Ableitungen stetig sind], oder für $k > 1$ alle $(k-1)$-fachen partiellen Ableitungen von f wieder partiell differenzierbar sind [und alle diese partiellen Ableitungen stetig sind].
Ist $s_1, s_2, ..., s_j$ eine Folge von Variablen $\in \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, dann bezeichnet man die Funktion, die entsteht, wenn man zuerst nach s_1, dann nach s_2 usw. ableitet, auch mit $f_{s_1 s_2 .. s_j}$.

Satz (IX.15)

Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n k$-fach partiell stetig differenzierbar für ein $k > 1$.
Dann sind die höheren Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge des Differenzierens.
D.h. wenn $s_1, s_2, .., s_j$ eine Folge von Variablen $\in \{x_1, .., x_m\}$ist, und π eine Permutation der Zahlen 1 bis j, so ist $f_{s_1 s_2 \ldots s_j} = f_{s_{\pi(1)} s_{\pi(2)} \ldots s_{\pi(j)}}$.

Definition (IX.16)

Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.
f hat bei $x_0 \in \mathbb{R}^m$ ein ***lokales Maximum*** [***Minimum***], wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$] für alle $x \in U$.
f hat bei $x_0 \in \mathbb{R}^m$ einen ***Sattelpunkt*** , wenn $f'(x_0) = 0$ ist, jedoch bei x_0 weder Maximum noch Minimum vorliegen.

Definition (IX.17)

Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-fach partiell differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^m$.
Die Matrix $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{(i,j \leq m)}$ heißt ***Hesse-Matrix*** von f.

Satz (IX.18)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-fach partiell differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $f'(x_0) = 0$.
Sei Δ die Determinante der Hesse-Matrix von f.
Ist $\Delta > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Maximum.
Ist $\Delta > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, so hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
Ist $\Delta < 0$, so hat f bei x_0 einen Sattelpunkt.

X. Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

Definition (X.1)

Die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***Normalbereich*** , wenn $a, b \in \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $g_1, g_2, .., g_{n-1}, h_1, h_2, .., h_{n-1}$ gibt mit $g_i, h_i : \mathbb{R}^i \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g_i \leq h_i$, so dass

$$B = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a \leq x_1 \leq b, \quad g_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \leq x_{i+1} \leq h_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}, \quad i < n \}.$$

Definition (X.2)

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich (mit den Bezeichnungen aus Def. (X.1)) und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt:

$$\iint\limits_B f(\vec{x})\, \mathrm{d}B := \iint\limits_B f(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x} := \iint\limits_B f(\vec{x}) \mathrm{d}x_1..\mathrm{d}x_n := \int_a^b \int_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} .. \int_{g_{n-1}(x_1,..,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,..,x_{n-1})} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} dx_n dx_{n-1}...dx_1$$

das (n-dimensionale) Integral von f über B.

$\iint\limits_B d\vec{x}$ heißt das ***Volumen*** von B.

Definition (X.3)

Sei $A = \bigcup_{i=1}^k B_i$, wobei die $B_i \subset \mathbb{R}^n$ Normalbereiche sind und für $i \neq j$ $\iint\limits_{B_i \cap B_j} d\vec{x} = 0$.

Sei $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $I_j := \iint\limits_{B_j} f(\vec{x}) d\vec{x}$ für $j \leq k$.

Dann heißt f ***integrierbar*** über A mit $\iint\limits_A f(\vec{x}) d\vec{x} := \sum\limits_{j=1}^k I_j$.

Satz (X.4) **(Substitutionsregel)**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und auf A injektiv und sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über $g(A)$. Dann gilt: $\iint\limits_A f(g(\vec{x})) \cdot |\det(g'(\vec{x}))|\, d\vec{x} = \iint\limits_{g(A)} f(\vec{y}) d\vec{y}$.

Definition und Satz (X.5) **(Polarkoordinaten)**

Die Abbildung $T : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $T\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ ist eine stetige Bijektion und heißt ***Transformation von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten*** .

$\det(T'\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}) = r$.

Ist $B \subset \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$, $T(B) \subset \mathbb{R}^2$ und $f : T(B) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass f integrierbar über $T(B)$ und $f \circ T$ integrierbar über B, so gilt:

$$\iint\limits_{T(B)} f(\vec{x})d\vec{x} = \iint\limits_{B} f(T\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix})r \;\; d\varphi dr.$$

Definition und Satz (X.6) **(Kugelkoordinaten)**

Die Abbildung $T : \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$T\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$ ist eine stetige Bijektion und heißt

Transformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten .

$\det(T'\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}) = r^2\sin\vartheta.$

Ist $B \subset \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$, $T(B) \subset \mathbb{R}^3$ und $f : T(B) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass f integrierbar über $T(B)$ und $f \circ T$ integrierbar über B, so gilt:

$$\iint\limits_{T(B)} f(\vec{x})d\vec{x} = \iint\limits_{B} f(T\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix})r^2\sin\vartheta \;\; d\varphi d\vartheta dr.$$

Definition (X.7) **(Volumen und Schwerpunkt)**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann heisst $V(A) := \iint\limits_{A} d\vec{x}$ das ***Volumen*** von A.

Der Vektor $\vec{S} := \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ mit $s_i := \frac{1}{V(A)} \iint\limits_{A} x_i d\vec{x}$ heisst ***Schwerpunkt*** von A.

Definition (X.8) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ***Weg*** in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, dann heisst γ ***geschlossen*** .
Die Menge $C_\gamma := \{\gamma(t) \mid a \le t \le b\}$ heißt ***Kurve*** in $\mathbb{R}^n$.

Definition und Satz (X.9)

Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer, injektiver Weg.
Dann heisst $L_\gamma := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ die ***Länge*** von γ.
Wenn $C_\gamma = C_\delta$, so ist $L_\gamma = L_\delta$.

Satz (X.10)

Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein differenzierbarer, geschlossener Weg mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
Dann ist die von γ umschlossene (***algebraische***) Fläche $F_\gamma = \int_a^b y(t) \cdot x'(t)\, dt$

Ist mit $r(\varphi) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine ebene Kurve in Polarkordinaten gegeben, so ist die Fläche des von der Kurve und dem Nullpunkt begrenzten Segments $F = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b r(\varphi)^2 \, \mathrm{d}\varphi.$.

XI. Vektoranalysis

Definition (XI.1)

Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst ***ebenes Skalarfeld*** .

Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst ***(räumliches) Skalarfeld*** .

Eine Funktion $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ heisst ***ebenes Vektorfeld (VF)*** .

Eine Funktion $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ heisst ***(räumliches) Vektorfeld (VF)*** .

Definition (XI.2) **(Divergenz)**

Sei $\vec{F}$ ein räumliches partiell differenzierbares Vektorfeld.

$\mathbf{div}\vec{F} := \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

heisst ***Divergenz*** von $\vec{F}$.

Für ein ebenes Vektorfeld ist $\mathbf{div}\vec{F} := \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$.

Punkte $\vec{r}$, für die $\mathbf{div}\vec{F}(\vec{r}) > 0$ heißen ***Quellen*** , ist $\mathbf{div}\vec{F}(\vec{r}) < 0$ heißen sie ***Senken*** .

Satz (XI.3)

Seien $\vec{F}$ und $\vec{G}$ partiell differenzierbare Vektorfelder, φ ein partiell differenzierbares Skalarfeld, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $\mathbf{div}(\varphi\vec{F}) = \nabla\varphi \cdot \vec{F} + \varphi \cdot \mathbf{div}\vec{F}$.
2) $\mathbf{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \mathbf{div}\vec{F} + \mathbf{div}\vec{G}$.
3) $\mathbf{div}(\alpha\vec{F}) = \alpha\ \mathbf{div}\vec{F}$.

Definition (XI.4) **(Rotation)**

Sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ ein räumliches partiell differenzierbares Vektorfeld.

$\mathbf{rot}\vec{F} := \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$ heißt ***Rotation*** von $\vec{F}$.

Für ein ebenes Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ definiert man $\mathbf{rot}\vec{F} := \mathbf{rot}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Satz (XI.5)

Seien $\vec{F}$ und $\vec{G}$ partiell differenzierbare Vektorfelder, φ ein partiell differenzierbares Skalarfeld, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $\mathbf{rot}(\varphi\vec{F}) = \nabla\varphi \times \vec{F} + \varphi \cdot \mathbf{rot}\vec{F}$.
2) $\mathbf{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \mathbf{rot}\vec{F} + \mathbf{rot}\vec{G}$.
3) $\mathbf{rot}(\alpha\vec{F}) = \alpha\mathbf{rot}\vec{F}$.

Satz (XI.6)

Sei $\vec{F}$ ein 2-fach stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und φ ein 2-fach stetig partiell differenzierbares Skalarfeld, Dann gilt:

1) $\mathbf{div}(\mathbf{rot}\vec{F}) = 0$ ("Wirbelfeld ist quellenfrei")

2) $\mathbf{rot}(\nabla\varphi) = 0$ ("Gradientenfeld ist wirbelfrei")

3) Wenn $\vec{F}$ überall definiert, stetig differenzierbar und wirbelfrei (d.h.$\mathbf{rot}(\vec{F}) = 0$) ist, dann gibt es ein Skalarfeld f, so dass $\vec{F} = \nabla f$.

Definition (XI.7) **(Kurvenintegral)**

Sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ ein räumliches Vektorfeld und sei

$\boldsymbol{C}{=}\boldsymbol{C}_\gamma$ eine Kurve in $\mathbb{R}^3$ mit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}} \vec{F}\ d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

heisst das ***Kurvenintegral*** von $\vec{F}$ entlang $\boldsymbol{C}$.

Ist $\boldsymbol{C}$ geschlossen, schreibt man auch $\oint\limits_{\boldsymbol{C}} \vec{F}\ d\vec{r}$.

Definition (XI.8)

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ heisst ***konservativ*** , wenn $\int\limits_{\boldsymbol{C}} \vec{F} d\vec{r}$ nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve $\boldsymbol{C}$ abhängt.

Satz (XI.9)

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist konservativ genau dann, wenn $\vec{F}$ der Gradient eines Skalarfelds φ ist, d.h. wenn $F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ und $F_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, d.h. $\vec{F} = \nabla\varphi$.

Für eine Kurve $\boldsymbol{C}_\gamma$ mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ist dann:

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}_\gamma} \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Definition (XI.10)

$A \subset \mathbb{R}^3$ heisst ***Fläche*** in $\mathbb{R}^3$, wenn es eine stetige Funktion $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und einen Normalbereich $B \subset \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $A = \{\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B\}$.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ heisst ***Parametrisierung*** von A.

Die Vektoren $\vec{t}_x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{t}_y\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ heißen ***Tangenten*** im Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in x- bzw. y-Richtung.

Der Vektor $N := \dfrac{\vec{t}_x\binom{a}{b} \times \vec{t}_y\binom{a}{b}}{|\vec{t}_x\binom{a}{b} \times t_y\binom{a}{b}|}$ heißt die ***Flächennormale*** von A in $\binom{a}{b}$.

A heisst geschlossen, wenn es eine stetige Bijektion zwischen der Kugeloberfläche $K = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und A gibt.

Satz (XI.11)
Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Fläche mit Parametrisierung $\vec{r} : B \longrightarrow \mathbb{R}^3, \vec{r}$ differenzierbar. Dann ist die ***Fläche*** von A:

$$F(A) := \iint\limits_A \mathrm{d}A = \iint\limits_B |\vec{t}_u\binom{u}{v} \times \vec{t}_v\binom{u}{v}| \, \mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

Definition und Satz (XI.12) **(Flächenintegral)**
Sei A eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $\vec{r} : B \longrightarrow \mathbb{R}^3, \vec{r}$ differenzierbar, und sei $\vec{F}$ ein räumliches Vektorfeld.

$$\iint\limits_A \vec{F}\, d\vec{A} := \iint\limits_A \vec{F}(\vec{r}\binom{x}{y}) \cdot \vec{N}(\vec{r}\binom{x}{y})\, dA = \iint\limits_B \vec{F}(\vec{r}\binom{x}{y}) \cdot (\vec{t}_x \times \vec{t}_y)\, dxdy$$

heisst das ***Oberflächenintegral*** von $\vec{F}$ über A. Es ist von der Parametrisierung $\vec{r}$ unabhängig. $d\vec{A} := \vec{N} dA$ bezeichnet das gerichtete Flächenelement.

Ist A geschlossen, so schreibt man auch $\oiint\limits_A \vec{F}\, d\vec{A}$.

Satz (XI.13) **(Gauß-scher Integralsatz)** Sei A eine geschlossene Fläche in $\mathbb{R}^3$ und sei $\vec{F}$ ein räumliches Vektorfeld. Dann gilt:

$$\oiint\limits_A \vec{F}\, d\vec{A} = \iint\limits_{V(A)} \mathbf{div}\vec{F}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$ wobei $V(A)$ der von A umschlossene Bereich ist.

Satz (XI.14) **(Satz von Stokes)**
Sei $\vec{F}$ ein räumliches Vektorfeld und $\boldsymbol{C}$ eine geschlossene, differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^3$, und sei A eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, die von $\boldsymbol{C}$ umrandet wird. Dann gilt:

$$\oint\limits_{\boldsymbol{C}} \vec{F}\, d\vec{r} = \iint\limits_A \mathbf{rot}\vec{F}\, d\vec{A}.$$

Folgerung: (Satz von Green)
Ist $\vec{F}$ ein ebenes Vektorfeld, so gilt

$$\oint\limits_{\boldsymbol{C}} \vec{F}\, d\vec{r} = \iint\limits_A \frac{\partial}{\partial x}\vec{F}_y - \frac{\partial}{\partial y}\vec{F}_x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$