

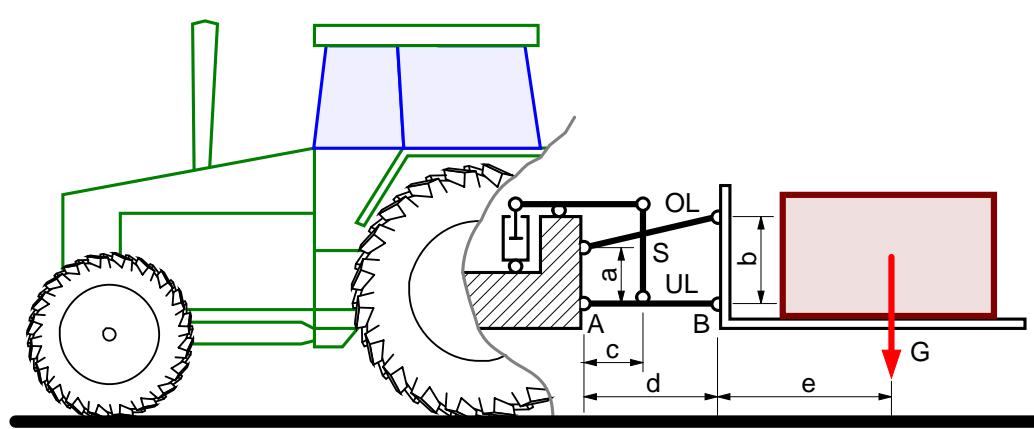
# Technische Mechanik I



OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

MASCHINENBAU

VORLESUNGSSKRIFT  
Prof. Dr. Georg Rill  
© Januar 2017



download unter: <https://hps.hs-regensburg.de/rig39165/>



# Inhalt

## Vorwort

<b>1 Vektoren in der Mechanik</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Darstellung . . . . .	1
1.3 Gleichheit . . . . .	1
1.4 Betrag . . . . .	2
1.5 Multiplikation mit Skalaren . . . . .	2
1.6 Einheitsvektoren . . . . .	2
1.7 Spalten- und Zeilenvektoren . . . . .	2
1.8 Skalarprodukt . . . . .	2
1.9 Kreuzprodukt . . . . .	2
1.10 Übungen . . . . .	3
<b>2 Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1 Ersatzmodelle . . . . .	4
2.2 Kräftearten . . . . .	4
2.3 Kraftdarstellung . . . . .	5
2.4 Kraft und Kraftwirkung . . . . .	5
2.5 Schwerpunkte . . . . .	10
2.6 Gleichgewicht . . . . .	13
2.7 Lager . . . . .	14
2.8 Spezielle Lagerelemente . . . . .	15
2.9 Übungen . . . . .	18
<b>3 Fachwerke</b>	<b>20</b>
3.1 Grundlegendes . . . . .	20
3.2 Ebene Fachwerke . . . . .	21
3.3 Nullstäbe . . . . .	23
3.4 Der Ritterschnitt . . . . .	24
3.5 Räumliche Fachwerke . . . . .	25
3.6 Übungen . . . . .	26
<b>4 Zug- und Druckbelastungen</b>	<b>27</b>
4.1 Festigkeits- und Verformungskenngrößen . . . . .	27
4.2 Statisch bestimmte Systeme . . . . .	31
4.3 Überbestimmte Systeme . . . . .	33
4.4 Übungen . . . . .	35
<b>5 Tragwerke</b>	<b>37</b>
5.1 Allgemeines . . . . .	37
5.2 Einfache Tragwerke . . . . .	37
5.3 Nichteinfache Tragwerke . . . . .	38
5.4 Räumliche Tragwerke . . . . .	40
5.5 Übungen . . . . .	42

---

<b>6 Schnittreaktionen</b>	<b>43</b>
6.1 Definition . . . . .	43
6.2 Beispiel . . . . .	43
6.3 Einteilige Tragwerke . . . . .	44
6.4 Differentielle Betrachtung . . . . .	46
6.5 Mehrteilige Tragwerke . . . . .	48
6.6 Übungen . . . . .	50
<b>7 Reibung</b>	<b>51</b>
7.1 Allgemeines . . . . .	51
7.2 Statisch bestimmte Systeme . . . . .	52
7.3 Statisch überbestimmtes System . . . . .	55
7.4 Seilreibung . . . . .	56
7.5 Übungen . . . . .	58
<b>8 Prinzipien der Statik</b>	<b>60</b>
8.1 Minimale Energie . . . . .	60
8.2 Virtuelle Arbeit . . . . .	61
8.3 Übungs-Beispiel . . . . .	62
<b>9 Zusätzliche Übungsbeispiele</b>	<b>63</b>
9.1 Kraftwirkung . . . . .	63
9.2 Schwerpunkte . . . . .	63
9.3 Gleichgewicht . . . . .	64
9.4 Fachwerke . . . . .	64
9.5 Zug- und Druckbelastungen . . . . .	65
9.6 Tragwerke . . . . .	66
9.7 Schnittgrößen . . . . .	67
9.8 Reibung . . . . .	68
9.9 Prinzipien . . . . .	69

# Vorwort

## Historie

Die Mechanik ist eine sehr alte Wissenschaft. Bereits Archimedes (285 – 212 v. Chr.), ein bedeutender Wissenschaftler des klassischen Altertums, formulierte die Hebelgesetze<sup>1</sup>, und untersuchte den Flaschenzug. Seine Formulierung des Gesetzes vom Auftrieb ist heute als Archimedisches Prinzip bekannt.

Im Mittelalter prägte Leonardo da Vinci (1452 – 1519) durch eine Vielzahl technischer Erfindungen<sup>2</sup> schließlich das Tätigkeitsfeld eines Ingenieurs.

Galileo Galilei (1564 – 1642) untersuchte die Fallgesetze und beschäftigte sich mit der Elastizität eines Balkens. Johannes Kepler (1571 – 1630) konnte zwar drei Gesetze zur Beschreibung der Planetenbahnen angeben, aber erst Isaac Newton (1643 – 1727) gelang es schließlich allgemeine Bewegungsgesetze (Newton'sche Axiome) zu formulieren.

Jacob Leupold (1674 – 1727) war ein deutscher “Mechanicus”, also einer der ersten Ingenieure. Er verfasste mit dem “Theatrum Machinarum” eine technische Enzyklopädie, die das damals bekannte Wissen im Maschinenwesen zusammenfasste. In seinem Vorwort schreibt er sogar “Das Studium Mechanicum ist eines von denen vornehmsten”

Leonhard Euler (1707 – 1783), einer der bedeutendsten Mathematiker, arbeitete auch auf dem Gebiet der Mechanik. Neben Beiträgen zur Hydrodynamik (Euler'sche Bewegungsgleichungen, Turbinengleichung) und zur Kreiseltheorie (Euler'sche Kreiselgleichungen) gelang ihm auch die erste analytische Beschreibung der Knickung eines mit einer Druckkraft belasteten Stabes.

Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) und Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) gelten als Begründer der Analytischen Mechanik. Ihre bahnbrechenden Arbeiten bilden bis heute die Grundlagen moderner Computer-Berechnungen.

## Problemstellung

Um die Grundgesetze und die Methoden der Technischen Mechanik zur Lösung von Problemen anwenden zu können sind folgende Schritte zu durchlaufen:

1. Formulieren der technischen Aufgabe,
2. Auswahl eines mechanischen Ersatzmodells,
3. mathematische Beschreibung,
4. analytische oder numerische Lösung,
5. Interpretation und Überprüfung der Ergebnisse.

In der Praxis müssen die Schritte 2 bis 5 oft mehrfach mit entsprechenden Erweiterungen oder Vereinfachungen durchlaufen werden.

## Lehrinhalte

Dieses Skript wurde bewusst kurz gehalten. Es deckt die Lehrinhalte des Moduls Technische Mechanik I in den Bachelor-Studiengängen Maschinenbau sowie Produktions- und Automatisierungstechnik an der Ostbayerischen Technischen Hochschule (OTH) Regensburg ab. Die Themengebiete

- Aufgaben und Einteilung der Mechanik
- Kräfte und ihre Darstellung, grundlegende Axiome und Prinzipien
- Schwerpunkt und Resultierende verteilter Kräfte
- Gleichgewicht
- Coulombsche Reibung
- Auflagerreaktionen und Stabkräfte bei Fachwerken und Tragwerken
- Schnittreaktionen in Balken, Rahmen und Bogen
- Spannungen, Verformungen, Materialgesetz
- Spannung-Dehnungs-Diagramm
- Spannungen und Verformungen bei Zug-Druck Beanspruchungen

<sup>1</sup>Gib mir einen Punkt, wo ich hintreten kann, und ich bewege die Erde

<sup>2</sup>Flugapparate, selbstangetriebenes Fahrzeug (Automobil), Tauherglöcke, Fallschirm, Druckpumpen, Schrauben, Brennspiegel und Kriegsmaschinen

umfassen die Statik und geben einen Einblick in die Festigkeitslehre. Das Modul Technische Mechanik II erweitert und vertieft dann die Festigkeitslehre. Schließlich wird die Dynamik, unterteilt in Kinematik und Kinetik im Modul Technische Mechanik III vermittelt.

Der Stoff wird überwiegend an Hand von Beispielen dargestellt.

Am Ende jedes Kapitels laden Übungsbeispiele zum Selbststudium ein. Lösungen können im PDF-Dokument durch entsprechende Vergrößerung sichtbar gemacht werden.

Für die Prüfungsvorbereitung sind im Abschnitt “Übungen” weitere Beispiele zusammengestellt. Dabei wird bewusst auf die Angabe von Lösungen verzichtet.

## Weiterführende Literatur

Für weiterführende Studien wird auf die Lehrbücher Technische Mechanik I bis III von Russel C. Hibbeler verwiesen, die von der Pearson<sup>3</sup> Education Deutschland GmbH unter ISBN 978-3-8273-7101-0 vertrieben werden.

---

<sup>3</sup>siehe auch [www.pearson-studium.de](http://www.pearson-studium.de)

# 1 Vektoren in der Mechanik

## 1.1 Motivation

Im Vorwort zu seinem Buch *Vorlesungen über Technische Mechanik* (Band I) schreibt A. Föppl<sup>1</sup> im Jahr 1898: *Die Mechanik macht ausgiebigen Gebrauch von den Hilfsmitteln der Mathematik. ··· Ich selbst habe mich schon seit langer Zeit dazu entschlossen, so weit es angesichts der mathematischen Vorkenntnisse, die man voraussetzen darf, zulässig ist, überall mit den Vektoren selbst zu rechnen. Vor allem kann die Mechanik ohne erhebliche Einbuße an Klarheit und Übersichtlichkeit nicht auf den Begriff der geometrischen Summe zweier gerichteter Größen verzichten. Die für die Technische Mechanik wichtigen Begriffe aus der Vektor-Algebra sind in den folgenden Abschnitten zusammengestellt.*

## 1.2 Darstellung

In der Mathematik und auch in der Mechanik werden Vektoren im Text häufig durch einen Pfeil über der Variablen (z.B.:  $\vec{a}$ ) gekennzeichnet.

In der grafischen Darstellung wird der Vektor  $\vec{a}$  dagegen nur mit seinem Betrag  $a = |\vec{a}|$  angegeben. Der skizzierte Pfeil legt ja bereits die Richtung fest.

In der Mechanik ist die Darstellung von Vektoren auf den  $R^3$  beschränkt. Vektoren im  $R^3$  können in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Die Komponenten des Vektors

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

geben dann die Entferungen an, die in Richtung der Koordinatenachsen zurückzulegen sind, um vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt des Vektors zu gelangen, Bild 1.1.

Die Komponentendarstellung von Vektoren hängt vom gewählten Koordinatensystem ab. Bei der Verwendung

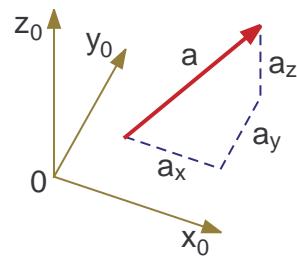


Bild 1.1: Darstellung von Vektoren im  $R^3$

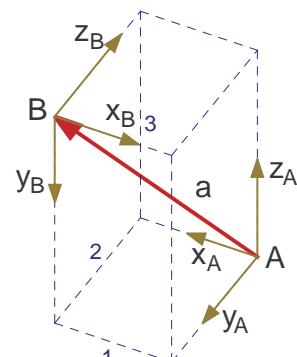


Bild 1.2: Koordinatensysteme

von mehreren Koordinatensystemen ist es deshalb notwendig, das zur Darstellung verwendete Koordinatensystem zusätzlich zu vermerken. Entsprechend Bild 1.2 kann der Vektor  $\vec{a}$  mit

$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{a}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

in dem Koordinatensystem A oder B dargestellt werden.

## 1.3 Gleichheit

Die Gleichheit zweier Vektoren

$$\vec{a} = \vec{b} \quad (1.3)$$

kann nur überprüft werden, wenn beide Vektoren in einem gemeinsamen Koordinatensystem K dargestellt werden. Dann folgt aus (1.3) auch die Gleichheit der

<sup>1</sup>August Otto Föppl (1854–1924) war von 1894 bis 1922 Professor für Technische Mechanik und grafische Statik an der Technischen Hochschule München

Komponenten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}}_{\vec{a},K} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}}_{\vec{b},K}. \quad (1.4)$$

## 1.4 Betrag

Der Betrag

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \geq 0 \quad (1.5)$$

gibt die Länge eines Vektors an und ist unabhängig von der Darstellung in unterschiedlichen Koordinatensystemen.

## 1.5 Multiplikation mit Skalaren

Bei der Multiplikation des Vektors  $\vec{a}$  mit einem Skalar  $\lambda$

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (1.6)$$

können die in der Tabelle 1.1 zusammengestellten Fälle unterschieden werden.

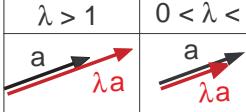
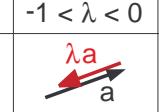
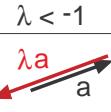
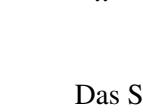
$\lambda > 1$	$0 < \lambda < 1$	$-1 < \lambda < 0$	$\lambda < -1$
			

Tabelle 1.1: Multiplikation mit einem Skalar

## 1.6 Einheitsvektoren

Jeder Vektor beinhaltet als Information Betrag und Richtung. Mit

$$\vec{a} = a \vec{e}_a \quad (1.7)$$

können diese Informationen aufgespalten werden. Der Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (1.8)$$

hat die Länge 1 und gibt nur noch die Richtung an.

## 1.7 Spalten- und Zeilenvektoren

Je nach dem, ob die Komponenten eines Vektors unter- oder nebeneinander angeschrieben werden, spricht man von einem Spalten-

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

oder Zeilenvektor

$$\vec{z} = [z_x \ z_y \ z_z]. \quad (1.10)$$

Mit einem hochgestellten  $T$ , dem „Transponiert-Zeichen“, werden in der Mathematik Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht, bzw. Spalten- in Zeilenvektoren,  $z = s^T$  oder Zeilen- in Spaltenvektoren  $s = z^T$  umgewandelt.

## 1.8 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine multiplikative Verknüpfung eines Zeilen- mit einem Spaltenvektor. Das Ergebnis ist eine Zahl (Skalar). Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  Spaltenvektoren, dann erhält man das Skalarprodukt aus

$$x = \vec{a}^T \vec{b} = [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.11)$$

Das Skalarprodukt ist kommutativ

$$\vec{a}^T \vec{b} = \vec{b}^T \vec{a}. \quad (1.12)$$

Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel zwischen den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , dann gilt

$$\vec{a}^T \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad (1.13)$$

Verschwindet das Skalarprodukt,  $\vec{a}^T \vec{b} = 0$ , dann stehen die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht aufeinander (Orthogonalitätsbedingung).

## 1.9 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist nur im dreidimensionalen Raum definiert und erzeugt über

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad (1.14)$$

den Vektor  $\vec{c}$ , der senkrecht auf der durch die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene steht. Die Orientierung kann über die Rechte-Hand-Regel festgelegt werden: zeigt der

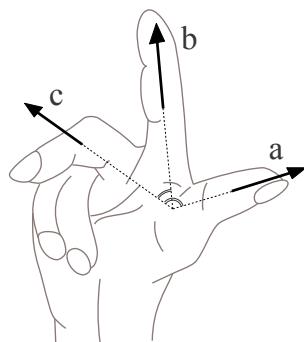


Bild 1.3: Rechte-Hand-Regel

Daumen der rechten Hand in Richtung von  $\vec{a}$ , der Zeigefinger in Richtung von  $\vec{b}$ , so zeigt der abgewinkelte Mittelfinger in Richtung von  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , Bild 1.3.

Zur Auswertung von (1.14) müssen wieder beide Vektoren im gleichen Koordinatensystem dargestellt werden. Die Komponenten des Vektors  $\vec{c}$  erhält man aus der Vorschrift

$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Das Kreuzprodukt ist anti-kommutativ. Aus (1.15) entnimmt man sofort, dass  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$  gilt.

Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , dann gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha. \quad (1.16)$$

Das Vektorprodukt verschwindet also, wenn die Vektoren parallel sind.

## 1.10 Übungen

### 1.10.1 Zahlenbeispiel

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Ermitteln Sie die Beträge, den Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sowie den Einheitsvektor zu  $\vec{c}$ . Überprüfen Sie mit den Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  die Richtigkeit der Beziehungen

$$(\vec{a} \times \vec{b})^T \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})^T \vec{a}$$

und

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}^T \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b}^T \vec{c}) \vec{a}.$$

Lösung:

### 1.10.2 Orts- und Einheitsvektoren

Ein bei  $D$  fest im Boden verankerter Antennenmast wird zusätzlich durch drei Seile gehalten. Die Seile sind im Punkt  $E$  am Mast ( $\overline{DE} = a$ ) und in den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  am Boden befestigt. Die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  bilden in der  $x$ -  $y$ -Ebene ein gleichseitiges Dreieck, wobei  $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a$  gilt.

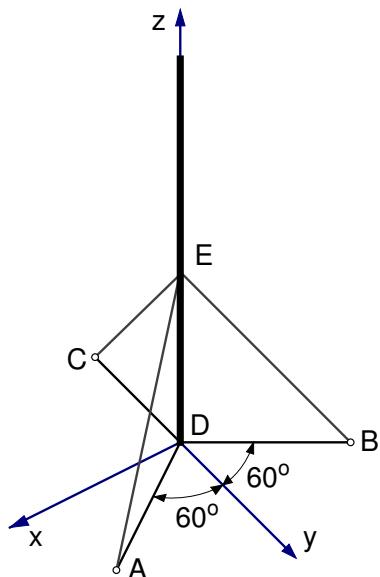


Bild 1.4: Antennenmast

Geben Sie die Ortsvektoren vom Koordinatenursprung  $D$  zu den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $E$  an und berechnen Sie die Einheitsvektoren  $\vec{e}_{EA}$ ,  $\vec{e}_{EB}$ ,  $\vec{e}_{EC}$ .

Lösung:

# 2 Grundlagen

## 2.1 Ersatzmodelle

Durch die Beschränkung auf das Wesentliche und durch eine geeignete Systemabgrenzung kann ein reales System über Vereinfachungen und Idealisierungen in ein mathematisch beschreibbares Ersatzmodell abgebildet werden.

Die Technische Mechanik kann basierend auf die physikalischen Eigenschaften der Ersatzmodelle in verschiedene Gebiete unterteilt werden, Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1: Verschiedene Ersatzmodelle

Ersatz- modelle	↗ starrer Körper	$\Leftrightarrow$	Stereo-Mechanik (TM I, TM III)
	↗ fester Körper	$\Leftrightarrow$	Festigkeitslehre (TM I, TM II)
	↗ deform. Körper	$\Leftrightarrow$	Plasto- Mechanik
	↗ flüssige Körper	$\Leftrightarrow$	Fluid-Mechanik
	↗ u. gasf. Körper	$\Leftrightarrow$	Strömungs- mechanik

Die Kontinuums-Mechanik fasst die Modellvorstellung fester, deformierbarer, flüssiger und gasförmiger Körper zusammen.

In der Statik und der Dynamik arbeitet man in der Regel mit der Modellvorstellung des starren Körpers. In der Ebene kann ein starrer Körper  $f = 3$  freie Bewegungsmöglichkeiten ausführen (zwei translatorische und eine rotatorische Bewegung). Im Raum sind es  $f = 6$  (drei translatorische und drei rotatorische Bewegungen).

Die Festigkeitslehre lässt mit der Modellvorstellung eines festen Körpers Bauteildeformationen zu, setzt aber voraus, dass diese im Vergleich zu den geometrischen Abmessungen vernachlässigbar klein bleiben. Die Bewegungen und die auf den Körper einwirkenden Kräfte und Momente können dann in der Regel weiterhin mit dem Modell des starren Körpers ermittelt werden.

## 2.2 Kräftearten

Das Gravitationsfeld oder elektro-magnetische Felder üben auf jedes Volumenelement  $\Delta V_i$  eines Körpers die

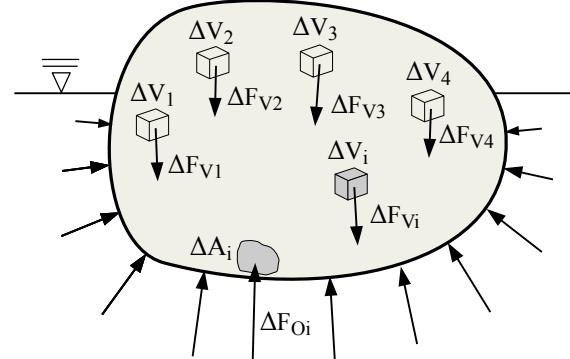


Bild 2.1: Volumen- und Oberflächenkräfte

Kräfte  $\Delta F_{Vi}$  aus. Auf einen starren oder festen Körper, der ganz oder teilweise in einer Flüssigkeit eingetaucht ist, werden an jedem Flächenelement  $\Delta A_i$  der benetzten Oberfläche die Kräfte  $\Delta F_{O_i}$  eingeprägt, Bild 2.1. Die auf das Volumen- oder das Flächenelement bezogenen Kräfte

$$q_V = \frac{\Delta F}{\Delta V} \quad \text{bzw.} \quad q_V = \frac{dF}{dV} \quad (2.1)$$

und

$$q_A = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \text{bzw.} \quad q_A = \frac{dF}{dA} \quad (2.2)$$

werden als Volumenkräfte  $q_V$  oder Flächenlasten  $q_A$  bezeichnet, wobei mit  $\Delta F \rightarrow dF$ ,  $\Delta V \rightarrow dV$  und  $\Delta A \rightarrow dA$  der Grenzübergang zu infinitesimal kleinen Kräften und Volumen- oder Flächenelementen durchgeführt wird. Resultieren die Oberflächenkräfte aus einer reinen Druckbelastung, dann gibt

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (2.3)$$

den Druck<sup>1</sup> am Flächenelement  $dA$  an. Die Streckenlast

$$q_L = \frac{dF}{dx} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Drücke werden in N/m<sup>2</sup> bzw. Pa (Pascal) oder in N/mm<sup>2</sup> bzw. MPa (Mega-Pascal) gemessen.

die auf ein Längenelement  $dx$  bezogene Kraft  $dF$ , stellt einen in der Praxis sehr häufig auftretenden Sonderfall der Flächenlast  $q_A$  dar.

## 2.3 Kraftdarstellung

Die einzelnen Kräfte  $\Delta F_{Vi}$  bzw.  $\Delta F_{Oi}$  sind gerichtete Größen, die im dreidimensionalen Raum als Vektoren dargestellt werden.

In der Mechanik werden ausschließlich rechtwinklige und rechtshändige Koordinatensysteme verwendet. Die Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  zeigen dabei in die Richtung von Daumen, Zeigefinger und abgewinkelten Mittelfinger einer rechten Hand, Bild 2.2.

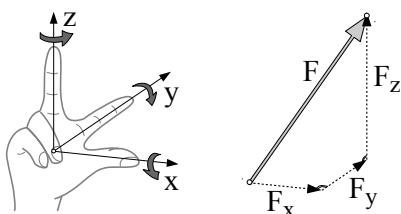


Bild 2.2: Koordinatensystem und Kraftvektor

Die Rechtshändigkeit hat zur Folge, dass mit einer Drehung der  $x$ -Achse in Richtung der  $y$ -Achse eine positive Drehung um die  $z$ -Achse definiert wird. Ferner erzeugt die Drehung der  $y$ -Achse in Richtung der  $z$ -Achse eine positive Drehung um die  $x$ -Achse und im Sinne einer zyklischen Vertauschung ergibt die Drehung der  $z$ -Achse in Richtung der  $x$ -Achse eine positive Drehung um die  $y$ -Achse.

Die Orientierung einer Kraft gegenüber den Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  gibt der Kraftvektor<sup>2</sup>

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

über die Komponenten  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$  an. Der Betrag

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.6)$$

liefert die Größe der Kraft. Mit dem Kraftvektor allein kann allerdings die Wirkung auf starre oder feste Körper noch nicht eindeutig beschrieben werden.

## 2.4 Kraft und Kraftwirkung

### 2.4.1 Allgemein

Die Wirkung einer Kraft kann sehr komplex sein. So schreibt Wilhelm Busch im sechsten Kapitel von Balduin Bählamm:

*Hier strotzt die Backe voller Saft;  
da hängt die Hand, gefüllt mit Kraft.  
Die Kraft infolge von Erregung,  
verwandelt sich in Schwungbewegung.  
Bewegung, die in schnellem Blitz  
zur Backe eilt, wird hier zur Hitze.  
Die Hitze aber, durch Entzündung  
der Nerven, brennt als Schmerzempfindung  
bis in den tiefsten Seelenkern,  
und dies Gefühl hat keiner gern.  
Ohrfeige heißt man diese Handlung,  
der Forscher nennt es Kraftverwandlung.*

In der Technischen Mechanik wird die Wirkung einer Kraft durch das Vermögen beschrieben, Deformationen hervorzurufen und/oder einen Körper zu beschleunigen. Bei dem in Bild 2.3 skizzierten Schnappverschluss sor-

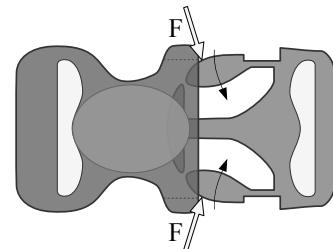


Bild 2.3: Schnappverschluss am Schließbeginn

gen die Kontaktkräfte  $F$  dafür, dass beim Schließen die Bügel zunächst nach innen gebogen werden, dann aber wieder in die Ausgangslage zurückfedern und so eine formschlüssige Verbindung gewährleisten. Ein Golfball wird beim Abschlag extrem deformiert, Bild 2.4.

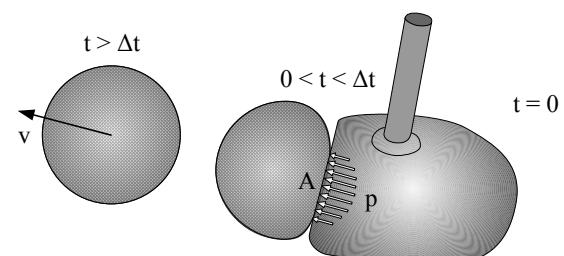


Bild 2.4: Golfball beim Abschlag erst deformiert und dann beschleunigt

<sup>2</sup>In der Mechanik werden in der Regel Spaltenvektoren verwendet.

Die aus dem über die Kontaktfläche  $A$  verteilten Druck  $p = dF/dA$  resultierende Kraft

$$F = \int_A dF = \int_A p dA \quad (2.7)$$

beschleunigt dann aber den Golfball im Zeitintervall  $\Delta t$  (Kontaktphase) auf die Geschwindigkeit  $v$ .

## 2.4.2 Kraftwirkung auf starre Körper

Bei einem starren Körper treten per Definition keine Deformationen auf. Die Wirkung einer Kraft kann somit nur durch das Vermögen beschrieben werden, den Körper zu beschleunigen. In Bild 2.5 ist ein quaderförmiger Körper mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  dargestellt, der im Eckpunkt  $P$  mit der Kraft  $\vec{F}$  belastet wird.

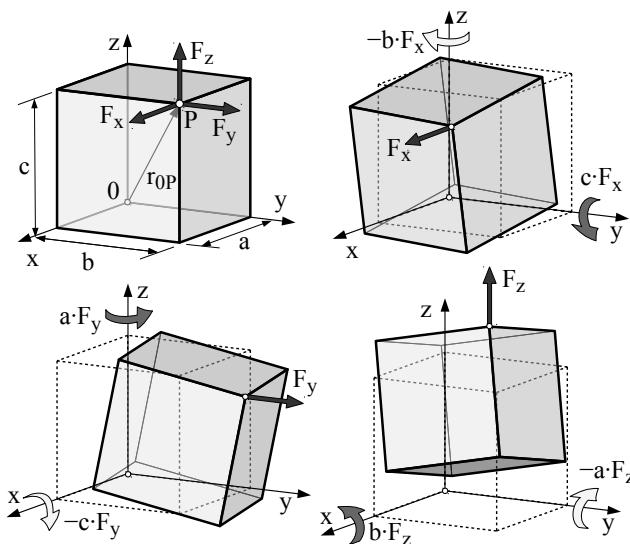


Bild 2.5: Kraftwirkung auf einen starren Körper

Im Koordinatensystem, das sich hier an den Kanten des Quaders orientiert, beschreiben dann die Vektoren

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{0P} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

die Kraft und ihren Angriffspunkt. Wie in Bild 2.5 rechts oben dargestellt, verursacht die Kraftkomponente  $F_x$  eine Verschiebung in  $x$ -Richtung (translatorische Beschleunigung) sowie Drehungen um die  $y$ - und die  $z$ -Achse (rotatorische Beschleunigungen). Die Verschiebung in  $x$ -Richtung ist proportional zur Kraftkomponente  $F_x$ . Neben der Kraftkomponente  $F_x$  entscheiden auch ihre Abstände  $c$  und  $b$  von der  $x$ - und  $z$ -Achse über die Größe der Drehungen. Die Wirkung einer im Punkt  $P$  angreifenden Kraft in  $x$ -Richtung, kann bezüglich des Koordinatenursprungs 0 somit durch die

Kraftkomponente  $F_x$  selbst und die im Folgenden als Momente<sup>3</sup> bezeichneten Produkte  $M_y(F_x) = c F_x$  sowie  $M_z(F_x) = -b F_x$  beschrieben werden. Im Sinne, der in Bild 2.2 definierten positiven Drehrichtungen, erfolgt dabei die Drehung um die  $y$ -Achse in positiver und die um die  $z$ -Achse in negativer Drehrichtung, was durch entsprechende Vorzeichen in  $M_{0y}^{F_x}$  und  $M_{0z}^{F_x}$  berücksichtigt wird.

Analog dazu wird die Wirkung einer Kraft in  $y$ -Richtung durch die Kraftkomponente  $F_y$  selbst und die Momente  $M_{0x}(F_y) = -c F_y$  sowie  $M_{0z}(F_y) = a F_y$  beschrieben. Ferner charakterisieren die Kraftkomponente  $F_z$  und die Momente  $M_{0x}(F_z) = b F_z$  sowie  $M_{0y}(F_z) = -a F_z$  die Wirkung einer Kraft in  $z$ -Richtung.

Fasst man nun die Komponenten  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  wieder im Kraftvektor zusammen, dann kann die Wirkung von  $\vec{F}$  auf den starren Körper durch die Vektoren

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{M}_0 = \begin{bmatrix} b F_z - c F_y \\ c F_x - a F_z \\ a F_y - b F_x \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

beschrieben werden. Da die Kraft  $F$  im Punkt  $P$  angreift und die Wirkung auf den Punkt 0 bezogen wurde, tauchen im Momentenvektor  $M_0$  die Komponenten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des Ortsvektors  $\vec{r}_{0P}$  auf. Der Momentenvektor entsteht also aus einer multiplikativen Verknüpfung des Ortsvektors mit dem Kraftvektor. Wegen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b F_z - c F_y \\ c F_x - a F_z \\ a F_y - b F_x \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

kann ganz allgemein die Momentenwirkung einer Kraft auf einen starren Körper durch das Kreuz- oder Vektorprodukt

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{0P} \times \vec{F} \quad (2.11)$$

ermittelt werden. Greift eine Kraft  $\vec{F}$  im Punkt  $P$  an einem starren Körper an, dann kann deren Wirkung auf einen starren Körper durch die Kraft  $\vec{F}$  selbst und das Moment  $\vec{M}_0 = \vec{r}_{0P} \times \vec{F}$ , das die Kraft  $\vec{F}$  bezüglich eines beliebigen Punktes 0 erzeugt, eindeutig beschrieben werden. Die Kombination  $[\vec{F}, \vec{M}_0]$  wird auch als Kraftwinder bezeichnet.

## 2.4.3 Wirkungslinie

Ein Linie in Richtung der Kraft  $\vec{F}$ , die durch den Angriffspunkt  $P$  läuft, markiert die Wirkungslinie der Kraft, Bild 2.6. Unterteilt man den Vektor vom Bezugs-

<sup>3</sup>Moment = Hebelarm  $\times$  Kraft

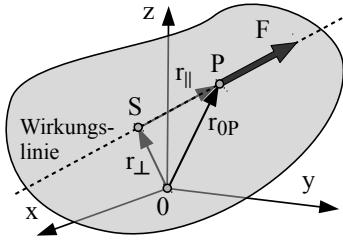


Bild 2.6: Wirkungslinie einer Kraft

punkt 0 zum Angriffspunkt  $P$  der Kraft  $\vec{F}$  gemäß

$$\vec{r}_{0P} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel \quad (2.12)$$

in die Anteile  $\vec{r}_\perp$  und  $\vec{r}_\parallel$ , die senkrecht und parallel zum Kraftvektor  $\vec{F}$  verlaufen, dann gilt für die Momentwirkung der Kraft

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{0P} \times \vec{F} = (\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times \vec{F} = \vec{r}_\perp \times \vec{F} + \vec{r}_\parallel \times \vec{F} \quad (2.13)$$

Wegen  $\vec{r}_\parallel \parallel \vec{F}$  verschwindet aber der letzte Term,  $\vec{r}_\parallel \times \vec{F} = \vec{0}$  und es bleibt

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_\perp \times \vec{F} \quad \text{mit} \quad |\vec{M}_0| = |\vec{r}_\perp| \cdot |\vec{F}|, \quad \text{da} \quad \vec{r}_\perp \perp \vec{F}. \quad (2.14)$$

Für die Momentenwirkung einer Kraft auf einen starren Körper ist also lediglich der durch den Vektor  $\vec{r}_\perp$  beschriebene Abstand vom Bezugspunkt zur Wirkungslinie entscheidend. Folglich kann eine Kraft längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne dass sich dadurch ihre Wirkung auf einen starren Körper ändert.

#### 2.4.4 Nullkraft

Ein starrer Körper wird in den Punkten  $P$  und  $Q$  durch Kräfte belastet, die mit  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  und  $\vec{F}_2 = -\vec{F}$  gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind und auch noch die gleiche Wirkungslinie haben, Bild 2.7. Die Wirkung

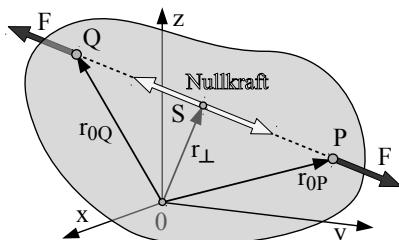


Bild 2.7: Nullkraft

der in  $P$  und  $Q$  angreifenden Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  auf einen starren Körper beschreiben die resultierende Kraft

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.15)$$

und das resultierende Moment, das auf den Bezugspunkt 0 bezogen wurde.

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{0P} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{0Q} \times \vec{F}_2 \quad (2.16)$$

beschreiben dann Nach Verschieben der Kräfte längs der gemeinsamen Wirkungslinie  $\overline{PQ}$  in den Punkt  $S$ , der den Abstand der Wirkungslinie vom Bezugspunkt 0 markiert, bleibt

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{0P} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{0Q} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_1 + \vec{r}_\perp \times \vec{F}_2 = \vec{r}_\perp \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \quad (2.17)$$

Wegen  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  und  $\vec{F}_2 = -\vec{F}$  verschwindet die resultierende Kraft

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0} \quad (2.18)$$

und entsprechend Gleichung (2.17) dann auch das resultierende Moment

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_\perp \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r}_\perp \times (\vec{F} - \vec{F}) = \vec{0}. \quad (2.19)$$

Die Kräfte  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  und  $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ , die auf der gleichen Wirkungslinie liegen, entsprechen folglich einer Nullkraft, da sich ihre Wirkungen auf einen starren Körper aufheben. Verlässt man allerdings die Modellvorstellung des starren Körpers, dann ist zu beachten, dass Kräfte, die in verschiedenen Punkten angreifen, stets Deformationen hervorrufen.

#### 2.4.5 Dehnung

Im Zugversuch nach DIN EN 10 002 wird eine Probe mit kreisförmigen oder rechteckigen Querschnitten in Achsrichtung durch gleichgroße aber entgegengesetzte gerichteten Kräfte vom Betrag  $F$  belastet, Bild 2.8. Der

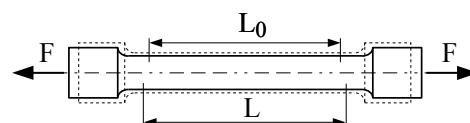


Bild 2.8: Zugstab

auf der Probe markierte Abschnitt der Länge  $L_0$  wird dabei auf die Länge  $L$  gedehnt. Bezieht man die Längenänderung  $\Delta L = L - L_0$  auf die unverformte Länge  $L_0$ , dann erhält man mit

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.20)$$

eine dimensionslose Größe, die als Längsdehnung bezeichnet wird. In der Praxis werden Dehnungen meist in % angegeben. Neben einer Dehnung in Belastungsrichtung kommt es auch zu einer Kontraktion in Querrichtung. Die Querkontaktionszahl  $\nu$  beschreibt diesen Effekt.

## 2.4.6 Kräftepaar

Die Kräfte  $\vec{F}_1 = -\vec{F}$  und  $\vec{F}_2 = \vec{F}$ , die in den Punkten  $P$  und  $Q$  an einem starren Körper angreifen, sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet. Ihre Wirkungslinien sind parallel und haben den Abstand  $a$ , Bild 2.9. Die Wirkung der beiden Kräfte auf den starren Kör-

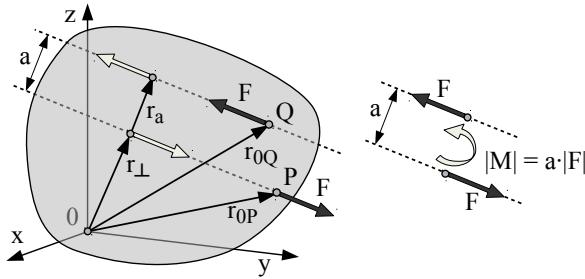


Bild 2.9: Kräftepaar äquivalent zu Einzelmoment

per wird analog zu Gleichung (2.18) wieder durch eine verschwindende resultierende Kraft

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F} + \vec{F} = \vec{0} \quad (2.21)$$

beschrieben. Im Unterschied zu Gleichung (2.19) bleibt nun allerdings eine Momentenwirkung, die sich nach geeignetem Verschieben der beiden Kräfte längs ihrer Wirkungslinien aus

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_a) \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{\perp} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{r}_a \times \vec{F}_2 \quad (2.22)$$

ergibt. Wobei der Vektor  $\vec{r}_a$  mit der Länge  $|\vec{r}_a| = a$  den Abstand der Wirkungslinien beschreibt. Mit  $\vec{F}_1 = -\vec{F}$  und  $\vec{F}_2 = \vec{F}$  bleibt

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{\perp} \times (-\vec{F} + \vec{F}) + \vec{r}_a \times \vec{F} = \vec{r}_a \times \vec{F} = \vec{M} \quad (2.23)$$

ein Moment  $\vec{M}_0 = \vec{M}$ , das nicht mehr von einem speziellen Bezugspunkt 0 abhängt.

Ein Kräftepaar, aus zwei gleich großen, aber entgegengesetzten Kräften mit dem Betrag  $F$ , deren Wirkungslinien den Abstand  $a$  haben, ist in der Wirkung auf einen starren Körper einem reinem Einzelmoment (die resultierende Kraft ist ja Null) mit dem Betrag

$$|\vec{M}| = |\vec{r}_a| \cdot |\vec{F}| = a \cdot F \quad (2.24)$$

äquivalent. Der Momentenvektor  $\vec{M}$  steht dabei senkrecht zu der Ebene, die durch die beiden Kräfte aufgespannt wird. In der Zeichenebene wird er in der Regel durch einen kreisförmigen Pfeil angedeutet.

## 2.4.7 Scherverformung

Zwei Kräftepaare, die sich in ihrer Wirkung auf einen starren Körper neutralisieren, erzeugen an einem festen Körper eine Verformung, die als Scherung oder Gleitung bezeichnet wird, Bild 2.10. Der Winkel  $\gamma$ , der die

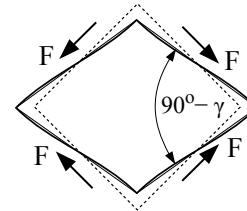


Bild 2.10: Scherverformung

Abweichung des verformten Winkels vom ursprünglich rechten Winkel angibt, beschreibt den Grad der Verformung. Er wird als Gleitung bezeichnet.

## 2.4.8 Das Äquivalenzprinzip

Jedes System von Kräften,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$  und Einzelmomenten  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_M$ , die die Wirkung von Kräftepaaren zusammenfassen, kann in seiner Wirkung auf einen starren Körper in äquivalenter Weise durch einen Kraftwinder  $[\vec{F}, \vec{M}_0]$  beschrieben werden Bild 2.11.

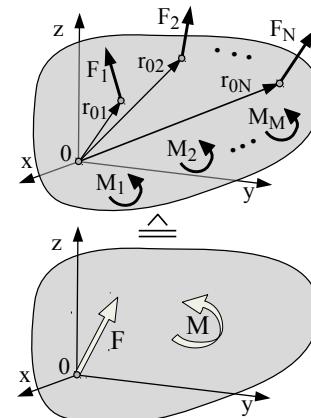


Bild 2.11: Das Äquivalenzprinzip

Der Kraftwinder besteht aus der resultierenden Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (2.25)$$

und dem resultierenden Moment

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^M \vec{M}_i \quad (2.26)$$

bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes 0, das sich aus der Momentenwirkung der Einzelkräfte und den Einzelmomenten zusammensetzt.

## 2.4.9 Streckenlast

### 2.4.9.1 Definition

In der Praxis kommt es häufig vor, dass Kräfte längs einer Linie verteilt sind, Bild 2.12. Die bereits in Gle-

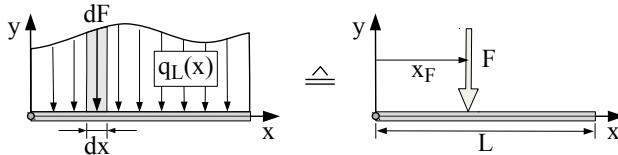


Bild 2.12: Streckenlast und äquivalente Einzelkraft

chung (2.4) definierte Streckenlast

$$q_L(x) = \frac{dF}{dx} \quad (2.27)$$

bezieht die an der Stelle  $x$  wirkende Kraft  $dF$  auf das Streckenelement  $dx$  und beschreibt so diese Form von Belastungen.

Die Wirkung einer Streckenlast  $q_L = q_L(x)$  auf einen starren Körper kann durch eine an der Stelle  $x_F$  wirkende Kraft  $F$  ersetzt werden. Dem Äquivalenzprinzip entsprechend, ist die resultierende Kraft die Summe der Einzelkräfte. Anstelle der Summe tritt hier das Integral über die Länge  $L$  der Streckenlast und liefert

$$F = \int_{\text{Länge}} dF = \int_{\text{Länge}} q_L(x) dx. \quad (2.28)$$

Die Momentenwirkung der Kraft  $F$  bezüglich dem Punkt 0, die über den Hebelarm  $x_F$  mit  $x_F F$  bestimmt ist, muss der Momentenwirkung der verteilten Kräfte  $dF$  entsprechen

$$x_F F = \int_{\text{Länge}} x dF. \quad (2.29)$$

Mit der Definition der Streckenlast (2.27) erhält man schließlich

$$x_F = \frac{1}{F} \int_{\text{Länge}} x q_L(x) dx, \quad (2.30)$$

wobei die resultierende Kraft  $F$  aus Gleichung (2.28) folgt.

### 2.4.9.2 Beispiel

Als Beispiel wird die Belastung einer Staumauer durch den mit der Wassertiefe ansteigenden Druck betrachtet, Bild 2.13. Bezeichnet  $\varrho$  die Wasserdichte und  $g$  die

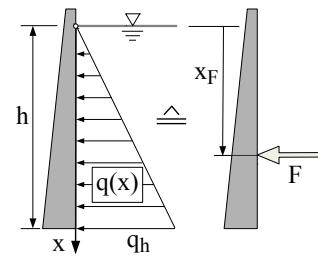


Bild 2.13: Staumauer

Erdbeschleunigung, dann ist der Druck in der Tiefe  $h$  mit  $p_h = \varrho g h$  gegeben. Die Streckenlast

$$q(x) = q_h \frac{x}{h} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq h \quad (2.31)$$

beschreibt dann mit  $q_h = b p_h$  die auf eine Staumauer der Breite  $b$  wirkende Belastung. Gemäß Gleichung (2.28) ist die äquivalente Einzelkraft dann durch

$$\begin{aligned} F &= \int_{x=0}^{x=h} q_h \frac{x}{h} dx = \frac{q_h}{h} \int_{x=0}^{x=h} x dx \\ &= \frac{q_h}{h} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=h} = \frac{1}{2} h q_h \end{aligned} \quad (2.32)$$

gegeben. Schließlich erhält man aus Gleichung (2.30) den Hebelarm

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{1}{F} \int_{x=0}^{x=L} x q_h \frac{x}{h} dx = \frac{2}{hq_h} \frac{q_h}{h} \int_{x=0}^{x=h} x^2 dx \\ &= \frac{2}{h^2} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=h} = \frac{2}{3} h. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Man erkennt, dass die Fläche der dreiecksförmigen Belastung, die hier durch die Länge  $h$  und die Höhe  $q_h$  gekennzeichnet ist, mit dem Wert der resultierenden Kraft  $F$  übereinstimmt. Zudem läuft die Wirkungslinie von  $F$ , deren Lage durch den Hebelarm  $x_F$  beschrieben wird, durch den Schwerpunkt der dreiecksförmigen Belastung. Diese Zusammenhänge gelten allgemein für beliebige Streckenlasten.

## 2.4.10 Flächenlast

Wind- oder Kontaktkräfte sind häufig über die Ober- oder die Kontaktfläche verteilt. Die bereits in Gleichung (2.2) definierte Flächenlast

$$q_A(x, y) = \frac{dF}{dA} \quad (2.34)$$

beschreibt diese Form von Belastung, wobei die über die Fläche  $A$  verteilten Kräfte  $dF$  auf ein Flächenelement  $dA$  bezogen werden, Bild 2.14. Analog zu Abschnitt 2.4.9

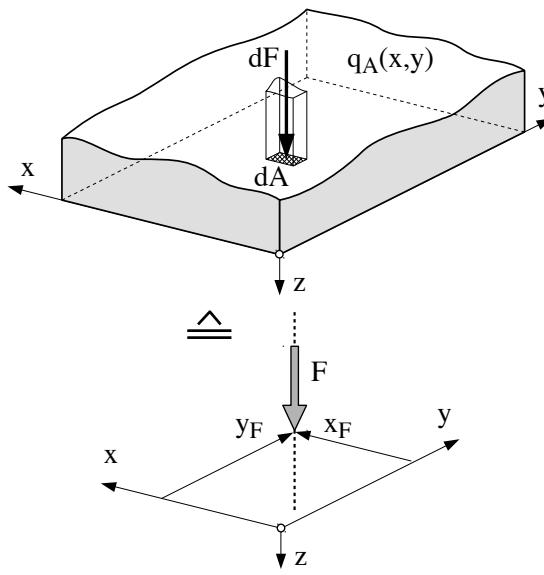


Bild 2.14: Flächenlast

kann die Wirkung einer Flächenlast auf einen starren Körper wieder durch eine resultierende Einzelkraft

$$F = \int_{\text{Fläche}} dF = \int_{\text{Fläche}} q_A dA \quad (2.35)$$

beschrieben werden. Die Koordinaten

$$x_F = \frac{1}{F} \int_{\text{Fläche}} x q_A dA \quad \text{und} \quad y_F = \frac{1}{F} \int_{\text{Fläche}} y q_A dA \quad (2.36)$$

legen dann die Wirkungslinie der resultierenden Kraft  $F$  fest, die hier entsprechend der Belastung in  $z$ -Richtung verläuft.

## 2.5 Schwerpunkte

### 2.5.1 Gewichtsmittelpunkt

Die Gewichtskraft, die auf der Massenanziehung zwischen der Erde und einem Körper beruht, ist eine Volumenkraft. Auf jedem Massenelement  $dm = \rho dV$  wird die Kraft  $dG$  eingeprägt, Bild 2.15.

Die Integration über den ganzen Körper liefert mit

$$\vec{G} = \int_{\text{Körper}} d\vec{G} \quad (2.37)$$

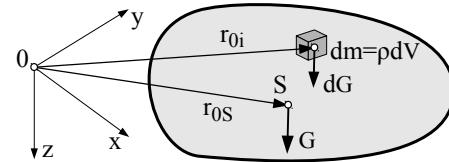


Bild 2.15: Gewichtsmittelpunkt

die resultierende Gewichtskraft. Die über den Körper verteilten Kräfte  $d\vec{G}$  und die resultierende Kraft  $\vec{G}$  haben die gleiche Wirkung auf den starren Körper, wenn die entsprechenden Momente bezüglich 0 übereinstimmen

$$\vec{r}_{0S} \times \vec{G} = \int_{\text{Körper}} \vec{r}_{0i} \times d\vec{G}. \quad (2.38)$$

Der Vektoren  $\vec{r}_{0S}$  beschreibt dabei den Angriffspunkt  $S$  der resultierenden Gewichtskraft  $\vec{G}$  und der Vektor  $\vec{r}_{0i}$  zeigt der Reihe nach auf alle Massenelemente  $dm$  des Körpers.

In Erdnähe kann die Massenanziehung zwischen einem Körper und der Erde durch ein homogenes Schwerefeld approximiert werden. Die Gewichtskräfte  $d\vec{G}$  sind dann alle parallel. Orientiert man die Achsen des Koordinatensystems so, dass die  $z$ -Achse in Richtung der Gewichtskräfte zeigt, dann gilt

$$d\vec{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dG \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

wobei die Beziehung (2.37) auf die  $z$ -Komponente der resultierenden Gewichtskraft  $\vec{G}$  angewendet wurde. Mit der Koordinatendarstellung der Ortsvektoren

$$\vec{r}_{0i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{0S} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

lautet die Äquivalenzbeziehung (2.38)

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} = \int_{\text{Körper}} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dG \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Nach dem Auflösen der Kreuzprodukte bleibt

$$y_S G = \int y_i dG, \quad -x_S G = \int -x_i dG \quad \text{und} \quad 0 = 0 \quad (2.42)$$

Die beiden ersten Gleichungen liefern mit  $x_S$  und  $y_S$  die  $x$ - und  $y$ -Komponente des Ortsvektors  $\vec{r}_{0S}$ . Da sich die Wirkung der Gewichtskraft  $\vec{G}$  hier nicht ändert, wenn sie längs ihrer Wirkungslinie, der  $z$ -Achse, verschoben wird, bleibt die  $z$ -Komponente, die Koordinate  $z_S$ , zunächst unbestimmt. Dreht man den starren Körper so,

dass die Gewichtskräfte  $d\vec{G}$  nicht mehr in  $z$ - sondern z.B. in  $x$ -Richtung wirken, dann liefert die Äquivalenzbeziehung (2.38) auch eine Bestimmungsgleichung für die  $z$ -Komponente des Ortsvektors  $\vec{r}_{0S}$ .

Der Gewichtsmittelpunkt  $S$ , der auch als Schwerpunkt bezeichnet wird, ist allgemein durch die Komponenten

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{G} \int_{\text{Körper}} x_i dG & y_S &= \frac{1}{G} \int_{\text{Körper}} y_i dG \\ z_S &= \frac{1}{G} \int_{\text{Körper}} z_i dG \end{aligned} \quad (2.43)$$

oder den Ortsvektor

$$\vec{r}_{0S} = \frac{1}{G} \int_{\text{Körper}} \vec{r}_{0i} dG \quad (2.44)$$

definiert, wobei das Gewicht des Körpers durch

$$G = \int_{\text{Körper}} dG \quad (2.45)$$

bestimmt ist. Da über den räumlich ausgedehnten Körper integriert wird, entspricht das Integralsymbol hier einem Dreifachintegral.

## 2.5.2 Massenmittelpunkt

Analog zu den Definitionen (2.44) und (2.45) kann mit

$$\vec{r}_{0S} = \frac{1}{m} \int_{\text{Körper}} \vec{r}_{0i} dm, \quad \text{und} \quad m = \int_{\text{Körper}} dm \quad (2.46)$$

auch der Massenmittelpunkt definiert werden, wobei  $m$  die Masse des Körpers bezeichnet. Im homogenen Schwerefeld sind der Gewichts- und der Massenmittelpunkt eines starren Körpers identisch. Mit dem Gewicht  $G = mg$ , dem Differential  $dG = g dm$  und der als konstant vorausgesetzten Erdbeschleunigung  $g$  können die Beziehungen (2.44) und (2.45) direkt in die Definition (2.46) überführt werden.

## 2.5.3 Volumenmittelpunkt

Der Volumenmittelpunkt eines starren Körpers ist durch die Definitionen

$$\vec{r}_{0S} = \frac{1}{V} \int_{\text{Körper}} \vec{r}_{0i} dV \quad \text{mit} \quad V = \int_{\text{Körper}} dV \quad (2.47)$$

festgelegt. Bei homogener Massenverteilung ist die Masse des Körpers mit  $m = \rho V$  proportional zum Volumen  $V$ , wobei  $\rho$  die Dichte bezeichnet. Dann sind auch der Massen- und der Volumenmittelpunkt identisch.

## 2.5.4 Flächenmittelpunkt

Der Mittelpunkt einer Fläche sowie ihre Größe sind durch

$$\vec{r}_{0S} = \frac{1}{A} \int_{\text{Fläche}} \vec{r}_{0i} dA \quad \text{und} \quad A = \int_{\text{Fläche}} dA \quad (2.48)$$

definiert. Da jetzt nur mehr über eine Fläche integriert wird, entspricht das Integralsymbol hier einem Doppelintegral.

Bei Blechen mit dünner Wandstärke  $t$  kann das Volumenelement auf ein Flächenelement reduziert werden, Bild 2.16. Mit der Erdbeschleunigung  $g$ , der Dichte  $\rho$

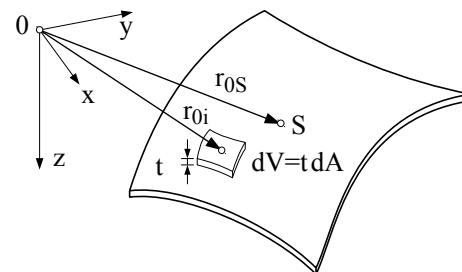


Bild 2.16: Dünnewandiges Blech

und der Wandstärke  $t$ , die alle als Konstante betrachtet werden, gilt dann

$$dG = g dm = g \rho dV = g \rho t dA \quad \text{und} \quad G = g \rho t A. \quad (2.49)$$

Damit können die in den Gleichungen (2.44) und (2.45) erforderlichen Integrationen über den Körper (Dreifachintegral) auf die in Gleichung (2.48) auftretenden Integrationen über eine Fläche (Doppelintegral) zurückgeführt werden.

## 2.5.5 Linienmittelpunkt

Analog zu (2.48) definieren die Beziehungen

$$\vec{r}_{0S} = \frac{1}{L} \int_{\text{Linie}} \vec{r}_{0i} ds \quad \text{mit} \quad L = \int_{\text{Linie}} ds \quad (2.50)$$

den Mittelpunkt  $S$  sowie die Länge  $L$  einer Linie, wobei  $ds$  ein infinitesimal kleines Linienstück bezeichnet.

## 2.5.6 Zusammengesetzte Körper

### 2.5.6.1 Definition

Setzt sich ein Körper aus zwei oder mehreren Teilkörpern zusammen, dann können bei der Schwerpunktsberechnung die Integrale aufgeteilt werden, Bild 2.17. Analog zu (2.46) gilt für zwei Teilkörper

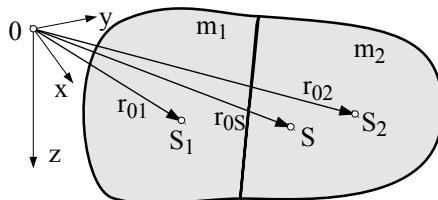


Bild 2.17: Zusammengesetzter Körper

$$m = \int_{K_1} dm_1 + \int_{K_2} dm_2 \quad \text{oder} \quad m = m_1 + m_2 \quad (2.51)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{r}_{0S} &= \frac{1}{m} \left\{ \int_{K_1} \vec{r}_{01i} dm_1 + \int_{K_2} \vec{r}_{02i} dm_2 \right\} \\ &= \frac{1}{m} \left\{ m_1 \vec{r}_{01} + m_2 \vec{r}_{02} \right\} = \frac{m_1 \vec{r}_{01} + m_2 \vec{r}_{02}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Auf mehrere Körper verallgemeinert erhält man

$$\vec{r}_{0S} = \frac{\sum_{i=1}^n \{m_i \vec{r}_{0i}\}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.53)$$

wobei  $m_i$  die Masse des  $i$ -ten Teilkörpers bezeichnet und der Vektor  $\vec{r}_{0i}$  die Lage des  $i$ -ten Teilkörperschwerpunktes  $S_i$  angibt. Die Beziehung (2.53) kann sinngemäß auch für alle anderen Schwerpunkte angewendet werden.

### 2.5.6.2 Beispiel L-Profil

Der Querschnitt eines L-Profs setzt sich aus zwei Rechtecken zusammen. Die in Bild 2.18 realisierte Auf-

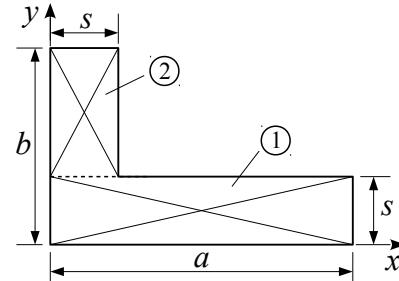


Bild 2.18: Schwerpunkt eines L-Profs

teilung führt auf Rechtecke mit den Kanten  $a$  und  $s$  sowie  $s$  und  $b - s$ . Analog zu (2.51) ist die Querschnittsfläche dann durch

$$A = \underbrace{as}_{A_1} + \underbrace{(b-s)s}_{A_2} \quad (2.54)$$

gegeben. Die Koordinaten des Flächenmittelpunktes erhält man gemäß (2.53) aus

$$x_S = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2}, \quad y_S = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}. \quad (2.55)$$

Mit den Schwerpunktsabständen  $x_1 = a/2$ ,  $y_1 = s/2$ ,  $x_2 = s/2$ ,  $y_2 = s + (b-s)/2 = (b+s)/2$  und den Teilflächen aus (2.54) ergibt sich

$$x_S = \frac{as \frac{1}{2} a + (b-s)s \frac{1}{2} s}{as + (b-s)s} = \frac{1}{2} \frac{a^2 + bs - s^2}{a + b - s} \quad (2.56)$$

und

$$y_S = \frac{as \frac{1}{2} s + (b-s)s \frac{1}{2}(b+s)}{as + (b-s)s} = \frac{1}{2} \frac{b^2 + as - s^2}{a + b - s}. \quad (2.57)$$

## 2.5.7 Rotationskörper

### 2.5.7.1 Guldinsche Regeln

Eine Linie der Länge  $L$ , die in einer Ebene liegt und die um eine in dieser Ebene liegenden Achse rotiert, erzeugt einen rotationssymmetrischen Hohlkörper mit der Oberfläche  $O$ , Bild 2.19. Dann ist die Oberfläche gemäß der 1. Guldinsche Regel durch

$$O = 2\pi L x_S \quad (2.58)$$

bestimmt, wobei die Drehachse die Linie berühren aber nicht schneiden darf und  $L$  die Länge der Kurve und  $x_S$  der Abstand des Linienmittelpunktes von der Drehachse ist.

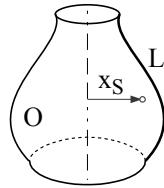


Bild 2.19: Oberfläche eines Drehkörpers

Die Rotation einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegenden und die Fläche nicht schneidende Achse erzeugt einen Drehkörper, Bild 2.20. Sein Volumen er-

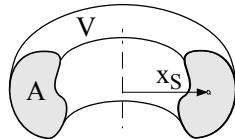


Bild 2.20: Volumen eines Drehkörpers

rechnet sich gemäß der 2. Guldinsche Regel aus

$$V = 2\pi A x_S, \quad (2.59)$$

wobei  $A$  der Inhalt der erzeugenden Fläche und  $x_S$  der Abstand des Flächenmittelpunktes von der Drehachse ist.

### 2.5.7.2 Beispiel: L-Profil

Mit den Guldinschen Regeln können auch Schwerpunktsabstände berechnet werden.

Lässt man das in Bild 2.18 skizzierte L-Profil um die  $y$ -Achse rotieren, dann entsteht ein Rotationskörper, dessen Volumen durch

$$V = \pi a^2 s + \pi s^2 (b - s) \quad (2.60)$$

gegeben ist. Mit (2.60) und der Querschnittsfläche  $A$ , die bereits in (2.54) berechnet wurde, kann aus (2.59) sofort die  $x$ -Koordinate des Flächenmittelpunktes berechnet werden

$$x_s = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\pi a^2 s + \pi s^2 (b - s)}{2\pi (as + (b-s)s)}. \quad (2.61)$$

Nach Kürzen mit  $\pi$  und  $s$  führt (2.61) auf das Ergebnis in (2.56).

Eine Rotation des L-Profiles um die  $x$ -Achse würde über (2.59) zur Schwerpunktskoordinate  $y_S$  führen.

## 2.6 Gleichgewicht

### 2.6.1 Das Gleichgewichtsaxiom

Nach Newton<sup>4</sup> befindet sich ein mechanisches System im Zustand der Ruhe (Gleichgewicht) oder im Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn die angreifenden Kräfte und Momente in ihrer Wirkung auf einen starren Körper einem verschwindenden Kraftwandler mit  $\vec{F} = 0$  und  $\vec{M}_0 = 0$  äquivalent sind. Wegen (2.25) und (2.26) bedeutet dies

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^M \vec{M}_i = 0, \quad (2.62)$$

wobei der Momentenbezugspunkt 0 beliebig gewählt werden kann. Mit der Komponentendarstellung der Vektoren

$$\vec{F}_i = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{0i} = \begin{bmatrix} x_{0i} \\ y_{0i} \\ z_{0i} \end{bmatrix}, \quad \vec{M}_i = \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

folgen aus (2.62) sechs skalare Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= 0, \\ \sum F_{yi} &= 0, \\ \sum F_{zi} &= 0, \\ \sum (y_{0i} F_{zi} - z_{0i} F_{yi}) + \sum M_{xi} &= 0, \\ \sum (z_{0i} F_{xi} - x_{0i} F_{zi}) + \sum M_{yi} &= 0, \\ \sum (x_{0i} F_{yi} - y_{0i} F_{xi}) + \sum M_{zi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Bei ebenen Problemen stehen nur drei Gleichungen zur Verfügung. In der  $x$ -,  $z$ -Ebene zum Beispiel verschwinden alle  $y$ -Komponenten und es bleiben mit

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= 0, \\ \sum F_{zi} &= 0, \\ \sum (z_{0i} F_{xi} - x_{0i} F_{zi}) + \sum M_{yi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

nur noch die Kraftkomponenten in der Ebene und die Momentenkomponente senkrecht zur Ebene übrig.

### 2.6.2 Gegenwirkungsprinzip

Wenn zwei Körper Kräfte (und/oder Momente) aufeinander ausüben, dann sind Kraft und Gegenkraft, bzw. Moment und Gegenmoment entgegengesetzt gerichtet und dem Betrage nach gleich groß (actio = reactio).

<sup>4</sup> Sir Isaac Newton (1643-1727) war Naturwissenschaftler und Philosoph. Mit der Philosophiae Naturalis Principia Mathematica legte er den Grundstein für die klassische Mechanik.

## 2.6.3 Schnittprinzip

Befindet sich ein mechanisches System im Gleichgewicht, dann sind auch beliebige Teilsysteme zusammen mit den entsprechenden Schnittreaktionen im Gleichgewicht. Im Raum stehen damit pro Teilsystem  $n = 6$  und in der Ebene  $n = 3$  Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung.

## 2.7 Lager

### 2.7.1 Definition und Wertigkeit

Lager sind Bauelemente zwischen einem mechanischen System und der Umgebung oder zwischen zwei Körpern. In der Modellbildung werden aus realen Lagern Elemente, die in idealer Weise einzelne Bewegungen (Verschiebungen und/oder Drehungen) ungehindert zu lassen oder vollständig sperren.

Die Wertigkeit eines Lagers ist gleichbedeutend mit der Anzahl der dadurch gesperrten Bewegungsmöglichkeiten.

### 2.7.2 Reaktionen

Wird ein mechanisches System durch Kräfte und/oder Momente belastet, dann kann es sich nur im Gleichgewicht befinden, wenn in den Lagern den Wertigkeiten entsprechende Reaktionen, d.h. Kräfte und/oder Momente, auftreten. Beim Freischneiden eines mechanischen Systems, d.h. beim Zerlegen des Systems in Teilsysteme im Extremfall bis herunter zu den einzelnen Körpern, werden die Lagerreaktionen sichtbar (actio = reactio beachten!).

### 2.7.3 Lager in der Ebene

Die verschiedenen Lagertypen in der Ebene sind in der Tabelle 2.2 zusammengestellt.

Um einen Körper in der Ebene zu fixieren, sind Lager erforderlich, die insgesamt über drei Wertigkeiten verfügen. Dies kann z.B. mit einer festen Einspannung, einem festen und einem verschieblichen Gelenklager, drei verschieblichen Gelenklagern oder mit einer Führung und einem verschieblichen Gelenklager realisiert werden.

Bei der Kombination von Lagern muss darauf geachtet werden, dass die Wertigkeiten der einzelnen Lager sich nicht gegenseitig behindern.

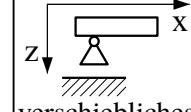
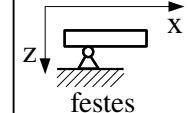
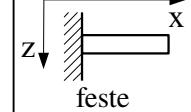
Symbol und Name	Kinematik Bewegungsmöglichkeiten	Statik Wertigkeit
 verschiebliches Gelenklager	Drehung um $y$ Verschiebung in $x$	Kraft in $z$ "einwertig"
 festes Gelenklager	Drehung um $y$	Kräfte in $x$ und $z$ "zweiwertig"
 Führung	Verschiebung in $x$	Kraft in $z$ Moment um $y$ "zweiwertig"
 feste Einspannung	keine	Kräfte in $x$ und $z$ Moment um $y$ "dreiwertig"

Tabelle 2.2: Lager in der Ebene

### 2.7.4 Räumliche Lager

Mit einem Kugel- und einem Scharniergelenk sind in der Bild 2.21 zwei räumliche Lagerelemente dargestellt. Beim räumlichen Kugelgelenk kann der Körper 2 gegen-

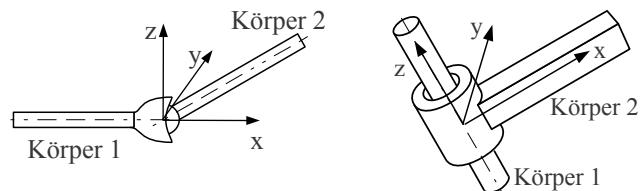


Bild 2.21: Kugel- und Scharniergelenk

über Körper 1 sämtliche Drehbewegungen ausführen. Im Gelenkpunkt werden jedoch alle translatorischen Bewegungen gesperrt. Das räumliche Kugelgelenk überträgt in allen 3 Raumrichtungen Kräfte und ist damit ein 3-wertiges Lager. Das skizzierte Scharniergelenk zwischen Körper 1 und Körper 2 lässt eine Drehung um die  $z$ -Achse und eine Verschiebung in  $z$ -Richtung zu. Die restlichen 4 Bewegungen werden verhindert. Das skizzierte Scharniergelenk überträgt Kräfte in  $x$ - und  $y$ -Richtung sowie Momente um die  $x$ - und  $y$ -Achse und stellt damit ein 4-wertiges Lager dar.

## 2.7.5 Bestimmtheit einer Lagerung

In der Ebene bzw. im Raum verfügt jeder Teilkörper eines mechanischen Systems über  $b = 3$ , bzw.  $b = 6$  freie Bewegungsmöglichkeiten.

Werden diese Bewegungsmöglichkeiten durch Lager eingeschränkt, dann muss beim Freischneiden des Körpers die Wirkung der Lager durch unbekannte Lagerreaktionen ersetzt werden. Die Anzahl  $u$  der unbekannten Lagerreaktionen ist durch die Summe der Wertigkeiten bestimmt.

Können bei gegebener Belastung die unbekannten Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbeziehungen allein bestimmt werden, dann wird das System als "statisch bestimmt" bezeichnet. Die statische Bestimmtheit eines Systems kann aus der Beziehung

$$n = u - t \quad (2.66)$$

berechnet werden, wobei  $u$  die Anzahl der unbekannten Lagerreaktionen und  $t$  die Anzahl der tatsächlich zur Verfügung stehenden Gleichungen angibt. In der Ebene bzw. im Raum stehen zwar für jeden Teilkörper 3 bzw. 6 Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung, doch in Sonderfällen können einige Gleichungen zur trivialen Beziehung  $0 = 0$  entarten. Deshalb kann die Anzahl der tatsächlich zur Verfügung stehenden Gleichungen mit  $t \leq 3$ , bzw.  $t \leq 6$  nur nach oben begrenzt, nicht aber vorab eindeutig bestimmt werden.

In vielen Fällen kann einem mechanischen System angesehen werden, ob es trotz Lagerung noch über Bewegungsmöglichkeiten verfügt. Die Anzahl der Freiheitsgrade (verbleibende Bewegungsmöglichkeiten) genügt der Beziehung

$$f = b - t. \quad (2.67)$$

Die Anzahl der freien Bewegungsmöglichkeiten kann pro Teilsystem in der Ebene mit  $b = 3$  und im Raum mit  $b = 6$  angegeben werden. Bei bekanntem  $f$  kann damit  $t$  sehr leicht aus (2.67) bestimmt werden.

Bei  $n > 0$  ist das System  $n$ -fach statisch überbestimmt. In solchen Fällen ist eine vollständige Berechnung der Lagerreaktionen nur möglich, wenn auch Bauteil- und/oder Lagerverformungen mit einbezogen werden. In einigen Fällen können zumindest einige Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbeziehungen berechnet werden.

Bei statisch überbestimmter Lagerung besteht die Gefahr einer inneren Verspannung, die zu erheblichen Lagerbelastungen führen kann. Eine statisch überbestimmte Lagerung wird in der Regel nur bei sehr nachgiebigen Bauteilen verwendet. Die überzähligen Lager stützen

das Bauteil zusätzlich ab und verhindern so zu große Verformungen.

## 2.8 Spezielle Lagerelemente

### 2.8.1 Die Umlenkscheibe

Zum Heben einer Last mit dem Gewicht  $G$  wird ein Seil um eine an der Decke befestigte Scheibe geführt, Bild 2.22. Die Scheibe mit dem Radius  $r$  ist in ihrer Mitte

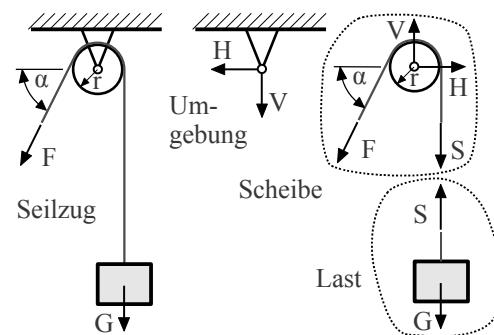


Bild 2.22: Umlenkscheibe

reibungsfrei drehbar gelagert. Durch einen Schnitt im Seil kann das Teilsystem Last abgetrennt werden. Hier liefert das Gleichgewicht in vertikaler Richtung sofort das Ergebnis

$$S = G. \quad (2.68)$$

Ein weiterer Schnitt im Lager legt das Teilsystem Scheibe frei. Aus der Momentensumme bezüglich der Scheibenmitte

$$Sr - Fr = 0 \quad (2.69)$$

folgt sofort

$$F = S. \quad (2.70)$$

Da eine widerstandslos drehbare Scheibe die Seilkraft bei statischer Belastung nicht verändert, wird sie als Umlenkscheibe bezeichnet. Das Ergebnis  $F = S$  kann dann bereits beim Freischneiden berücksichtigt werden.

Die Lagerbelastungen  $H$  und  $V$  können aus dem Kräftegleichgewicht am Teilsystem Scheibe

$$\begin{aligned} -G \cos \alpha + H &= 0, \\ -G \sin \alpha + V - G &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

ermittelt werden, wobei die Beziehungen (2.68) und (2.70) bereits berücksichtigt wurden.

## 2.8.2 Das frei rollende Rad

Bild 2.23 zeigt einen einachsigen Karren, der von einem Esel eine unter dem Winkel  $\alpha$  geneigte Ebene hinauf gezogen wird. Der beladene Karren hat das Gewicht  $G$  und

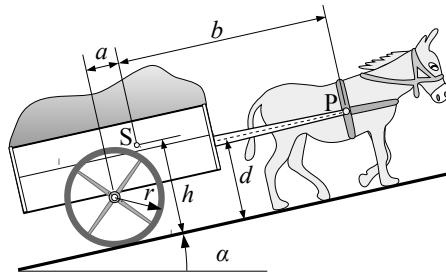


Bild 2.23: Eselskarren auf schiefer Ebene

der Schwerpunkt  $S$  liegt im Abstand  $a$  vor der Achsmitte und im Abstand  $h$  über der Fahrbahn. Die mit dem Karren fest verbundene Deichsel befindet sich auf der Höhe  $d$  über der Fahrbahn und ist in  $P$  gelenkig am Geschirr befestigt. Der Abstand zwischen  $S$  und  $P$  ist mit  $b$  gegeben. Für die weitere Betrachtung wird angenommen, dass der Esel stehen bleibt und das System sich im Gleichgewicht befindet.

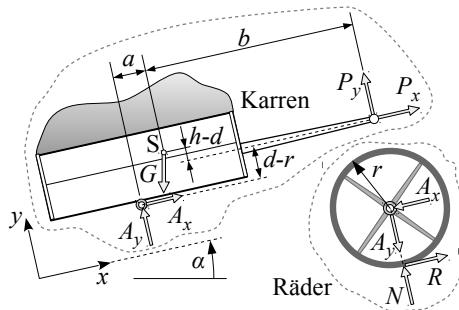


Bild 2.24: Wesentliche Teilkörper

Die wesentlichen Teilkörper sowie die Schnittreaktionen sind in Bild 2.24 dargestellt. Dabei orientiert sich das  $x$ - $y$ -Koordinatensystem an der unter dem Winkel  $\alpha$  geneigten Ebene. In den Kontaktstellen zwischen den Rädern und der Fahrbahn treten Normal- und Reibungskräfte auf, die in  $N$  und  $R$  zusammengefasst sind. Die Schnittreaktionen im Gelenk  $P$  und im Achslager  $A$  verfügen jeweils über eine  $x$ - und eine  $y$ -Komponente. Die Gleichgewichtsbeziehungen für die beiden Teilsysteme

Karren und Räder liefern

$$A_x - G \sin \alpha + P_x = 0 \quad (2.72)$$

$$A_y - G \cos \alpha + P_y = 0 \quad (2.73)$$

$$b G \cos \alpha + (h-d) G \sin \alpha + (d-r) A_x - (a+b) A_y = 0 \quad (2.74)$$

$$R - A_x = 0 \quad (2.75)$$

$$N - A_y = 0 \quad (2.76)$$

$$r R = 0 \quad (2.77)$$

wobei das Gewicht der Räder gegenüber dem Gewicht der Karre vernachlässigt wurde. Am Karren wurde die Momentensumme bezüglich Punkt  $P$  und bei den Rädern bezüglich der Achsmitte  $A$  angesetzt. Da ein reibungsfrei drehbares Achslager angenommen wurde, können auf Grund von (2.77) in den Kontaktstellen keine Reibkräfte auftreten. Wegen  $R = 0$  verschwindet gemäß (2.75) auch die  $x$ -Komponente im Achslager. Setzt man  $A_x = 0$  und die aus (2.76) folgende Beziehung  $A_y = N$  in die Gleichungen (2.72) bis (2.74) ein, dann erhält man

$$-G \sin \alpha + P_x = 0 \quad (2.78)$$

$$N - G \cos \alpha + P_y = 0 \quad (2.79)$$

$$b G \cos \alpha + (h-d) G \sin \alpha - (a+b) N = 0 \quad (2.80)$$

Dies entspricht aber genau den Gleichgewichtsbeziehungen für das im Bild 2.25 dargestellten System Karren mit Rädern. Die aus den Gleichgewichtsbezie-

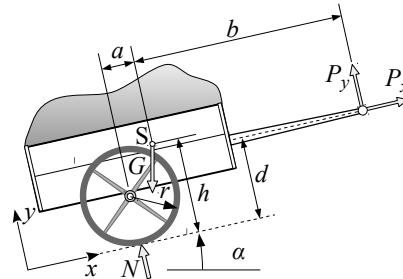


Bild 2.25: Karren mit frei drehbaren Rädern

hungen (2.78) bis (2.80) folgenden Unbekannten, die Normalkraft  $N = G(b \cos \alpha + (h-d) \sin \alpha) / (a+b)$  sowie die Kräfte im Gelenkpunkt  $P_x = G \sin \alpha$  und  $P_y = G(a \cos \alpha - (h-d) \sin \alpha) / (a+b)$  hängen dann nicht mehr von der Radius der Räder  $r$  ab.

## 2.8.3 Die Pendelstütze

Ein unbelastetes Bauelement mit vernachlässigbarem Eigengewicht, das an beiden Enden gelenkig gelagert ist, wird als Pendelstütze bezeichnet, Bild 2.26. Das Kräf-

<sup>5</sup> Kontaktkräfte und insbesondere Reibungseffekte werden im Kapitel 7 ausführlich behandelt.

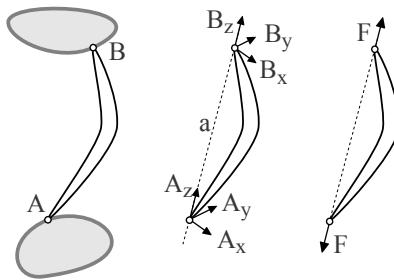


Bild 2.26: Pendelstütze

tegleichgewicht an der freigeschnittenen Pendelstütze liefert zunächst

$$\begin{aligned} A_x + B_x &= 0, \\ A_y + B_y &= 0, \\ A_z + B_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

wobei die  $z$ -Achse in Richtung der Linie AB zeigt. Aus dem Momentengleichgewicht bezüglich Gelenkpunkt A erhält man

$$\begin{aligned} -a B_y &= 0, \\ a B_x &= 0, \\ 0 &= 0, \end{aligned} \quad (2.82)$$

wobei  $a$  den Abstand der Gelenkpunkte angibt. Wegen  $a \neq 0$  folgt aus (2.82)  $B_y = 0$  und  $B_x = 0$ . Damit liefert (2.81) dann auch  $A_y = 0$  und  $A_x = 0$ . Die Pendelstütze kann also senkrecht zur Verbindungslinie AB der Lagerungspunkte keine Kräfte übertragen.

Die dritte Gleichung in (2.81) kann folglich beim Freischneiden mit  $B_z = F$  und  $A_z = -F$  durch das Prinzip "actio = reactio" ersetzt werden.

## 2.8.4 Beispiel: Motorhaube

Die in A und B gelagerte Motorhaube mit dem Gewicht  $G = 50 \text{ N}$  wird durch einen in C und D gelenkig gelagerten Stab abgestützt, Bild 2.27. Der Lagerungspunkt A fällt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen. Der Schwerpunkt und die restlichen Lagerungspunkte werden durch die Koordinaten

$$\begin{aligned} B &= [ \quad 0 \quad | \quad 1500 \quad | \quad 0 \quad ], \\ C &= [ \quad 500 \quad | \quad 750 \quad | \quad 866 \quad ], \\ D &= [ \quad 1000 \quad | \quad 1500 \quad | \quad 0 \quad ], \\ S &= [ \quad 250 \quad | \quad 750 \quad | \quad 433 \quad ] \end{aligned} \quad (2.83)$$

festgelegt. Damit es nicht zu Verspannungen kommt, muss die Motorhaube in A und B gelenkig gelagert sein, wobei eines der Lager, z.B. das Lager in B, in  $y$ -Richtung verschieblich sein muss und damit in dieser Richtung keine Kraft aufnehmen kann. Der an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab ist eine Pendelstütze; er

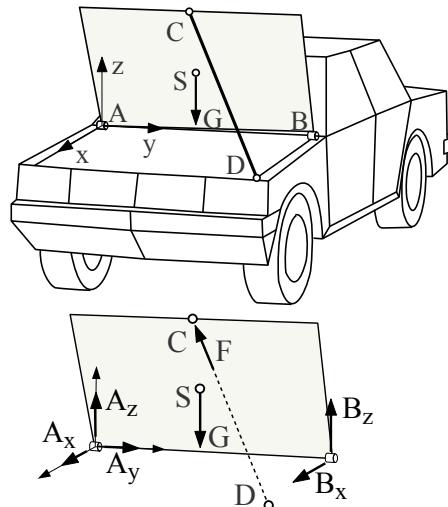


Bild 2.27: Abstützung einer Motorhaube und Motorhaube freigeschnitten

kann deshalb nur eine Kraft in Richtung der Linie DC übertragen, vgl. Abschnitt 2.8.3.

Für die 6 Unbekannten  $A_x, A_y, A_z, B_x, B_z$  und  $F$  stehen 6 Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung. In Vektorschreibweise lauten sie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}}_{\vec{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{bmatrix}}_{\vec{B}} + \underbrace{F \vec{e}_{DC}}_{\vec{F}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{bmatrix}}_{\vec{G}} = \vec{0} \quad (2.84)$$

und

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{B} + \vec{r}_{AC} \times F \vec{e}_{DC} + \vec{r}_{AS} \times \vec{G} = \vec{0}, \quad (2.85)$$

wobei als Momentenbezugspunkt der Lagerpunkt A gewählt wurde und der Einheitsvektor

$$\vec{e}_{DC} = \frac{\vec{r}_{DC}}{|\vec{r}_{DC}|} = \frac{\vec{r}_{AC} - \vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AC} - \vec{r}_{AD}|} \quad (2.86)$$

die Richtung der Stabkraft angibt.

Mit den Zahlenwerten aus (2.83) erhält man

$$\vec{r}_{DC} = \begin{bmatrix} -500 \\ -750 \\ 866 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_{DC} = \frac{\vec{r}_{DC}}{|\vec{r}_{DC}|} = \begin{bmatrix} -0.400 \\ -0.600 \\ 0.693 \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

wobei der Betrag mit

$$|\vec{r}_{DC}| = \sqrt{(-500)^2 + (-750)^2 + 866^2} = 1250 \quad (2.88)$$

gegeben ist. Das Momentengleichgewicht (2.85) liefert dann

$$\begin{bmatrix} 1500 B_z \\ 0 \\ -1500 B_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1040 F \\ -693 F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -750 G \\ 250 G \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

wobei die Kreuzprodukte bereits ausmultipliziert wurden. Aufgelöst bleibt

$$B_x = 0, \quad F = \frac{250}{693} G = 18.05 \text{ N}$$

und

$$B_z = \frac{-1040 F + 750 G}{1500} = 12.486 \text{ N}.$$

Damit können aus dem Kräftegleichgewicht (2.84) auch die Lagerreaktionen in A berechnet werden

$$\begin{aligned} A_x &= -(B_x + (-0.400) * F) = 7.22 \text{ N}, \\ A_y &= -(-0.600) * F = 10.82 \text{ N}, \\ A_z &= -(B_z + 0.693 * F - G) \\ &= -(12.486 + 12.5086 - 50) = 25 \text{ N}. \end{aligned}$$

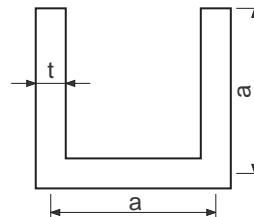


Bild 2.29: U-Profil

## 2.9.2 U-Profil

Berechnen Sie für das skizzierte U-Profil die Lage des Flächenmittelpunktes.

Kann das Ergebnis für  $t \ll a$  vereinfacht werden?

Lösung:

## 2.9 Übungen

### 2.9.1 Handbohrer

Ein Handbohrer wird in den Punkten P und Q mit den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  belastet.

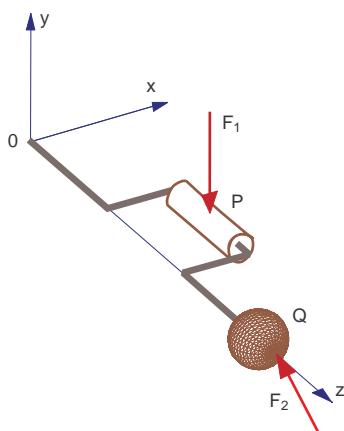


Bild 2.28: Handbohrer

Berechnen Sie mit

$$\vec{r}_{0P} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.0 \\ 0.25 \end{bmatrix} \text{ m} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{0Q} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{ m}$$

die Wirkung der Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} \quad \text{und} \quad \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ -120 \end{bmatrix} \text{ N}$$

bezüglich der Bohrspitze (Punkt 0). Lösung:

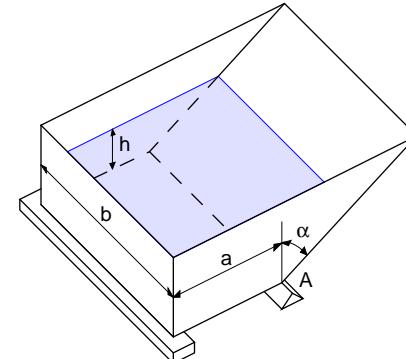


Bild 2.30: Behälter

Bei welcher Höhe  $h$  beginnt der Behälter um die Kante bei A zu kippen?

Lösung:

### 2.9.4 Fahrzeug

Bei einem Fahrzeug mit dem Achsabstand  $a = 2700 \text{ mm}$  und der Spurbreite  $s = 1500 \text{ mm}$  werden an den Rädern die Aufstands Kräfte  $F_{z1} = 4.5 \text{ kN}$ ,  $F_{z2} = 4.1 \text{ kN}$ ,  $F_{z3} = 3.6 \text{ kN}$  und  $F_{z4} = 3.8 \text{ kN}$  gemessen.

- Wie schwer ist das Fahrzeug?
- Wie weit liegt der Schwerpunkt des Fahrzeugs vor der Hinterachse?
- Liegt der Schwerpunkt links oder rechts von der Fahrzeugmitte? Wenn ja, wie weit?

Lösung:

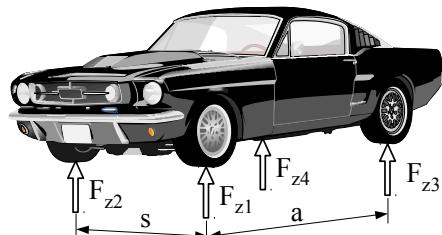


Bild 2.31: Fahrzeug

### 2.9.5 Verschiedene Lagerungsfälle

Für das skizzierte Bauteil, das mit der Kraft  $F$  und dem Einzelmoment  $M$  belastet wird, sollen verschiedene Lagerungsfälle untersucht werden.

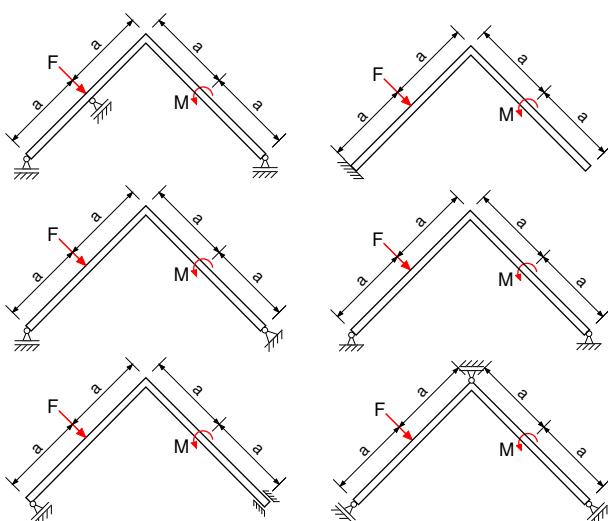


Bild 2.32: Verschiedene Lagerungsfälle

Zeichnen Sie jeweils das Freikörperbild und berechnen Sie, soweit möglich, die Lagerreaktionen.

Lösung:

### 2.9.6 Flaschenzug

Der skizzierte Flaschenzug wird durch das Gewicht  $G_L$  belastet. Die an der Decke gelagerten Scheiben haben jeweils das Gewicht  $G_R$ . In  $G_B$  sind das Gewicht der unteren Scheibe und des Bügels zusammengefasst.

Bei welcher Kraft  $F$  ist das System im Gleichgewicht? Wie groß sind dabei die Lagerreaktionen in den oberen Scheibenlagern?

Lösung:

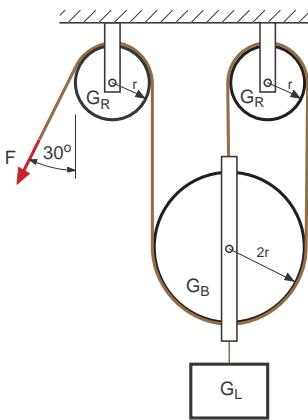


Bild 2.33: Flaschenzug

### 2.9.7 Kiste

Der Deckel einer Kiste wird durch zwei Scharniere in  $A$  und  $B$  sowie durch einen Faden zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$  in horizontaler Lage gehalten.

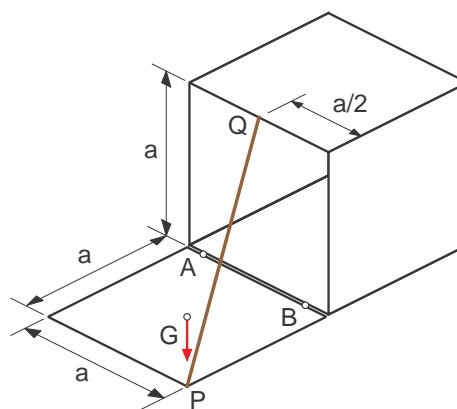


Bild 2.34: Kiste mit geöffnetem Deckel

Wie groß ist die Fadenkraft, wenn der Deckel das Gewicht  $G$  hat?

Lösung:

# 3 Fachwerke

## 3.1 Grundlegendes

### 3.1.1 Definition

Ein Fachwerk ist ein aus Stäben zusammengesetztes Tragwerk, bei dem die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- die Stäbe sind in den Knoten zentrisch und gelenkig miteinander verbunden,
- Kräfte greifen nur in den Knoten an,
- das Eigengewicht der Stäbe kann auf die Knoten verteilt oder gegenüber der äußeren Belastung vernachlässigt werden.

Diese Annahmen sind in der Praxis nur näherungsweise erfüllt. So sind bei der in Bild 3.1 dargestellten Brücke



Bild 3.1: Brücke als Fachwerk ausgeführt

die Stäbe nicht gelenkig sondern durch vernietete Knotenbleche mit einander verbunden.

### 3.1.2 Stäbe

Jeder Stab in einem Fachwerk ist an beiden Enden gelenkig gelagert. Da zudem auch das Eigengewicht stets vernachlässigt oder auf die Knoten verteilt wird, stellt er eine Pendelstütze dar, vgl. Abschnitt 2.8.3.

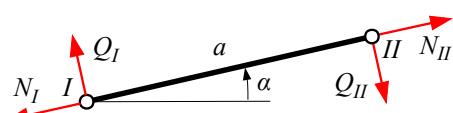


Bild 3.2: Stabkräfte

Die Gleichgewichtsbeziehungen für einen freigeschnittenen Stab, Bild 3.2 lauten in der Ebene

$$\begin{aligned} -N_I + N_{II} &= 0, \\ -Q_I + Q_{II} &= 0, \\ Q_{II} a &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Fachwerkstäbe übertragen also keine Querkräfte

$$Q_I = Q_{II} = 0. \quad (3.2)$$

Stabkräfte sind Normalkräfte,  $S = N_I = N_{II}$ . Die Stabkraft ist positiv, wenn der Stab auf Zug belastet wird.

### 3.1.3 Knoten

Die an einem Knoten zusammenlaufenden Stäbe bilden ein zentrales Kräftesystem, Bild 3.3. Die Gleich-

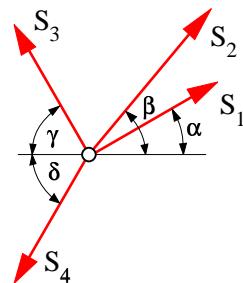


Bild 3.3: Knoten

gewichtsbeziehungen am Knoten reduzieren sich somit auf die Summe der Kräfte

$$\begin{aligned} -S_4 \cos \delta - S_3 \cos \gamma + S_2 \cos \beta + S_1 \cos \alpha &= 0, \\ -S_4 \sin \delta + S_3 \sin \gamma + S_2 \sin \beta + S_1 \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

In der Ebene (im Raum) stehen folglich pro Knoten zwei (drei) Gleichungen zur Verfügung.

### 3.1.4 Bestimmtheit

Ein Fachwerk ist **kinematisch bestimmt**, wenn die Lage aller Knotenpunkte eindeutig fixiert ist; es ist **statisch bestimmt**, wenn die Stabkräfte und die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmt werden können.

Ist ein ebenes Fachwerk mit  $s$  Stäben und  $k$  Knoten statisch und kinematisch bestimmt gelagert, dann gilt

$$s + r = 2k, \quad (3.4)$$

wobei  $r$  die Anzahl der Lagerreaktionen angibt. Bei räumlichen Fachwerken muss (3.4) durch

$$s + r = 3k, \quad (3.5)$$

ersetzt werden.

Die Bedingungen (3.4), bzw. (3.5) sind notwendig aber nicht hinreichend.

## 3.2 Ebene Fachwerke

### 3.2.1 Einfache Fachwerke

Bild 3.4 zeigt ein einfaches, ebenes Fachwerk.

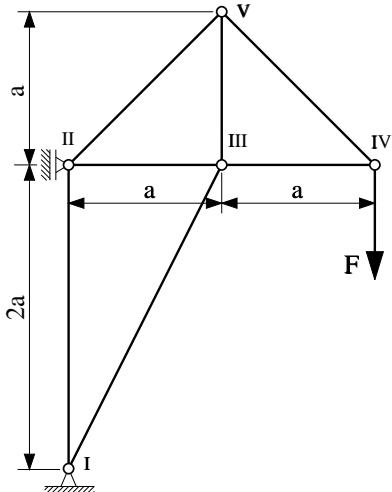


Bild 3.4: Einfaches Fachwerk

Zur Bestimmung der 10 Unbekannten (7 Stabkräfte  $S_1$  bis  $S_7$  und 3 Lagerreaktionen  $H_I$ ,  $V_I$  und  $H_{II}$ ) stehen an den 5 Knoten jeweils 2 Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung.

Mit den Bezeichnungen aus Bild 3.5 erhält man

$$H_I + S_2 \sin \alpha = 0, \quad (3.6)$$

$$V_I + S_1 + S_2 \cos \alpha = 0, \quad (3.7)$$

$$H_{II} + S_3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_4 = 0, \quad (3.8)$$

$$-S_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_4 = 0, \quad (3.9)$$

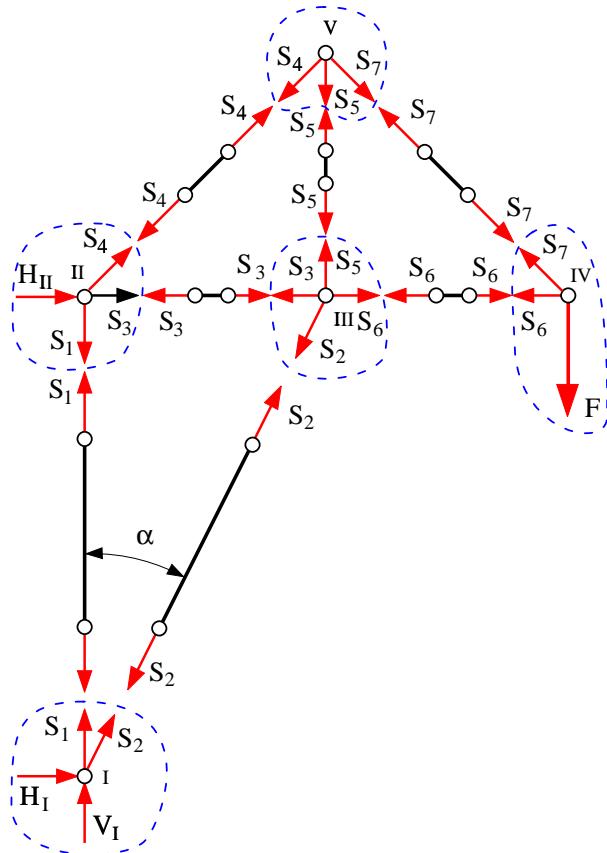


Bild 3.5: Fachwerk freigeschnitten

$$-S_3 - S_2 \sin \alpha + S_6 = 0, \quad (3.10)$$

$$-S_2 \cos \alpha + S_5 = 0, \quad (3.11)$$

$$-S_6 - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_7 = 0, \quad (3.12)$$

$$-F + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_7 = 0, \quad (3.13)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}S_4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_7 = 0, \quad (3.14)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}S_4 - S_5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_7 = 0, \quad (3.15)$$

wobei der Winkel zwischen den Stäben 1 und 2 als Hilfsgröße verwendet wurde. Aus der Geometrie folgt

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad (3.16)$$

$$\cos \alpha = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Das Anschreiben der Gleichgewichtsbeziehungen für jeden freigeschnittenen Knoten wird als Knotenpunktverfahren bezeichnet. Ist ein Fachwerk statisch und kinematisch bestimmt, dann liefert das Knotenpunktverfahren stets genügend Gleichungen um alle Stabkräfte und die Lagerreaktionen zu berechnen.



$$H_I = -\frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 = F_1, \quad (3.45)$$

$$V_I = -S_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 = 0 + F_1 = F_1, \quad (3.46)$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 = 0 - F_1 = -F_1, \quad (3.47)$$

$$S_5 = -\sqrt{2}F_2 \quad (3.48)$$

$$S_6 = S_4 - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_5 = -F_1 + F_2, \quad (3.49)$$

$$S_9 = \sqrt{2}S_6 = \sqrt{2}(F_2 - F_1), \quad (3.50)$$

$$S_7 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}S_9 = F_1 - F_2, \quad (3.51)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}S_9 = F_1 - F_2, \quad (3.52)$$

$$V_{VII} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}S_9 = F_1 - F_2, \quad (3.53)$$

$$H_{VI} = \frac{1}{2}\sqrt{2}S_5 - S_8 = -F_2 - F_1 + F_2 = -F_1, \quad (3.54)$$

$$V_{VI} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}S_5 - S_7 = F_2 - F_1 + F_2 = 2F_2 - F_1. \quad (3.55)$$

Die Gleichgewichtsbeziehungen für das Gesamtsystem

$$H_I + H_{VI} = 0, \quad (3.56)$$

$$V_I - F_1 - F_2 + V_{VI} + V_{VII} = 0, \quad (3.57)$$

$$3aV_{VI} + 4aV_{VII} - aF_1 - 2aF_2 = 0. \quad (3.58)$$

reichen zwar nicht aus, um die Lagerreaktionen zu bestimmen, können aber trotzdem zur Kontrolle verwendet werden.

### 3.3 Nullstäbe

#### 3.3.1 Allgemeines

Bei spezieller Stabanordnung und unter besonderen Belastungsbedingungen können in einem Fachwerk Nullstäbe erkannt werden.

Das Erkennen von Nullstäben reduziert den Aufwand und gestattet in einigen Fällen einen Neueinstieg beim Auflösen der Gleichgewichtsbeziehungen.

#### 3.3.2 Der unbelastete Zweischlag

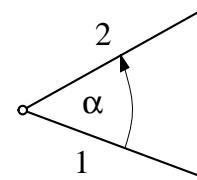
Sind an einem unbelasteten Knoten zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtung liegen, dann sind beide Stäbe Nullstäbe.

$$S_2 \sin \alpha = 0,$$

$$S_1 + S_2 \cos \alpha = 0,$$

Mit  $\sin \alpha \neq 0$  folgt sofort

$$S_2 = 0 \quad \text{und} \quad S_1 = 0.$$



#### 3.3.3 Der belastete Zweischlag

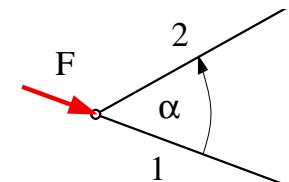
Wird ein Knoten, an dem zwei Stäbe mit unterschiedlichen Richtungen angeschlossen sind, durch eine äußere Kraft in Richtung eines Stabes belastet, dann ist der andere Stab eine Nullstab.

$$S_2 \sin \alpha = 0,$$

$$F + S_1 + S_2 \cos \alpha = 0.$$

Mit  $\sin \alpha \neq 0$  folgt sofort

$$S_2 = 0 \quad \text{und} \quad S_1 = -F.$$



#### 3.3.4 Der unbelastete Dreischlag

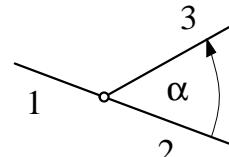
Sind an einem unbelasteten Knoten drei Stäbe angeschlossen von denen zwei in gleicher Richtung liegen, dann ist der dritte Stab ein Nullstab.

$$S_3 \sin \alpha = 0,$$

$$-S_1 + S_2 + S_3 \cos \alpha = 0.$$

Mit  $\sin \alpha \neq 0$  folgt sofort

$$S_3 = 0 \quad \text{und} \quad S_1 = S_2.$$



Das Erkennen von Nullstäben kann in Einzelfällen die Berechnung von Fachwerken stark vereinfachen. Man sollte jedoch beachten, dass ein nichterkannter Nullstab ohne Folgen bleibt, während ein fälschlicherweise als Nullstab angenommener Stab die gesamte Berechnung in Frage stellt.

### 3.3.5 Beispiel Fachwerk mit Nullstäben

Das in Bild 3.8 dargestellte Fachwerk enthält vier Nullstäbe.

Der Knoten *V* ist ein unbelasteter Zweischlag,

$$S_6 = 0 \quad \text{und} \quad S_9 = 0. \quad (3.59)$$

Die Belastung im Knoten *II* erfolgt in Richtung von Stab 2,

$$S_1 = 0 \quad \text{und} \quad S_2 = -F_1. \quad (3.60)$$

Der Knoten *IV* ist unbelastet und die Stäbe 4 und 8 haben die gleiche Richtung

$$S_5 = 0 \quad \text{und} \quad S_4 = S_8. \quad (3.61)$$

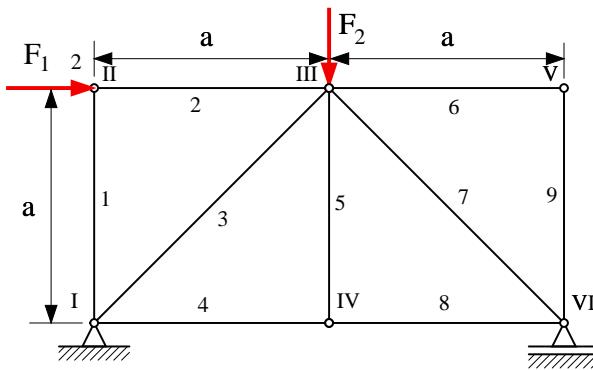


Bild 3.8: Fachwerk mit Nullstäben

Die Lagerreaktionen folgen aus dem Gleichgewichtsbeziehungen für das Gesamtsystem

$$F_1 + H_I = 0, \quad (3.62)$$

$$V_I + V_{VI} - F_2 = 0, \quad (3.63)$$

$$a F_1 + a F_2 - 2a V_{VI} = 0, \quad (3.64)$$

wobei mit  $a$  die Breite und Höhe eines quadratischen Fachwerkfeldes bezeichnet wurde.

Unter Berücksichtigung der Nullstäbe

$$S_1 = 0, \quad S_5 = 0, \quad S_6 = 0, \quad S_9 = 0 \quad (3.65)$$

und mit den Lagerreaktionen

$$H_I = -F_1, \quad (3.66)$$

$$V_{VI} = \frac{1}{2}(F_1 + F_2), \quad (3.67)$$

$$V_I = -\frac{1}{2}(F_1 - F_2) \quad (3.68)$$

genügen die Gleichgewichtsbeziehungen an den Knoten *I* und *VI*

$$H_I + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_3 + S_4 = 0, \quad (3.69)$$

$$V_I + S_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_3 = 0 \quad (3.70)$$

und

$$-S_8 - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_7 = 0, \quad (3.71)$$

$$V_{VI} + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_7 + S_9 = 0 \quad (3.72)$$

um die restlichen Stabkräfte zu bestimmen.

Man erhält

$$S_3 = -\sqrt{2}V_I = \frac{1}{2}\sqrt{2}(F_1 - F_2), \quad (3.73)$$

$$S_4 = -H_I - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_3 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2), \quad (3.74)$$

$$S_7 = -\sqrt{2}V_{VI} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(F_1 + F_2), \quad (3.75)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}S_7 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2). \quad (3.76)$$

Die Nullstabbestimmung (3.60) am Knoten *V* liefert auch die Belastung von Stab 2,  $S_2 = -F_1$ .

### 3.4 Der Ritterschnitt

Mit dem Ritterschnitt können bei geeigneten Fachwerken einzelne Stabwerke direkt berechnet werden. In vielen Fällen genügt das zur Dimensionierung.

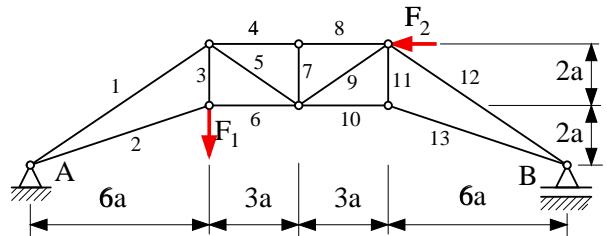


Bild 3.9: Langgestrecktes Fachwerk

Gelingt es, ein ebenes Fachwerk so zu durchtrennen, dass maximal 3 unbekannte Stäbe geschnitten werden, dann können die Belastungen dieser Stäbe aus den Gleichgewichtsbeziehungen eines Teilsystems ermittelt werden. Zuvor müssen allerdings die Lagerreaktionen berechnet werden.

Durch einen Ritterschnitt können bei dem langgestreckten Fachwerk, Bild 3.9, z.B. die Stabkräfte  $S_8$ ,  $S_9$  und  $S_{10}$  sofort berechnet werden.

Die Gleichgewichtsbeziehungen für das Teilsystem in Bild 3.10 lauten

$$\begin{aligned} -S_8 - S_9 \cos \alpha - S_{10} - F_2 &= 0, \\ V_B - S_9 \sin \alpha &= 0, \\ 6a V_B - 2a S_{10} &= 0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

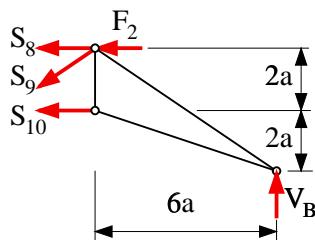


Bild 3.10: Ritterschnitt

wobei  $\alpha$  den Winkel zwischen Stab 9 und Stab 8 angibt.  
Aus der Geometrie folgen

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}}. \quad (3.78)$$

Die Lagerreaktion in  $B$  erhält man mit

$$V_B = \frac{1}{3} F_1 - \frac{2}{9} F_2 \quad (3.79)$$

sofort aus der Momentenbilanz für das Gesamtsystem

$$18a V_B + 4a F_2 - 6a F_1 = 0. \quad (3.80)$$

Damit können auch die gesuchten Stabkräfte berechnet werden. Aus (3.77) entnimmt man

$$\begin{aligned} S_{10} &= 3 V_B, \\ S_9 &= \frac{V_B}{\sin \alpha}, \\ S_8 &= -S_9 \cos \alpha - S_{10} - F_2. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Selbstverständlich kann das Knotenpunktverfahren mit einem oder mehreren Ritterschnitten kombiniert werden.

### 3.5 Räumliche Fachwerke

Der Ritterschnitt und das Knotenpunktverfahren können auch bei räumlichen Fachwerken zur Berechnung der Stabkräfte eingesetzt werden. Im Raum stehen pro Knoten drei Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung und beim Ritterschnitt können sechs unbekannte Stäbe berechnet werden. Wegen der Komplexität räumlicher Fachwerkstrukturen entstehen dabei gekoppelte Gleichungssysteme, die meist nur mehr numerisch gelöst werden können.

Das räumliche Fachwerk in Bild 3.11 besteht aus 15 Stäben. Mit den jeweils 3 Reaktionen in den 6 Gelenken  $A$  bis  $F$  ergibt das 33 Unbekannte. In jedem der 9 Gelenke muß das Kräftegleichgewicht in den 3 Raumrichtungen erfüllt sein. Hinzu kommen noch 6 Gleichgewichtsbeziehungen für den freigeschnittenen Behälter. Damit stehen auch  $27 + 6 = 33$  Gleichungen zur Verfügung.

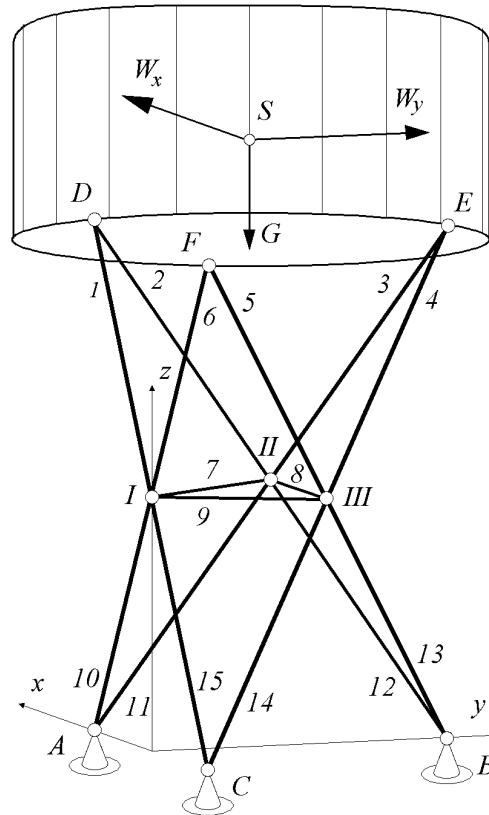


Bild 3.11: Räumliches Fachwerk

Bei dem räumlichen Fachwerk aus Bild 3.11 kann zweimal der Ritterschnitt angewendet werden. Horizontale Schnitte oberhalb und unterhalb des Dreiecks  $I$ ,  $II$ ,  $III$  ergeben jeweils ein Teilsystem mit sechs unbekannten Stabkräften,  $S_1$  mit  $S_6$ , bzw.  $S_{10}$  mit  $S_{15}$ . Die aus den Gleichgewichtsbeziehungen für die entsprechenden Teilsysteme resultierenden Gleichungen sind jedoch so stark miteinander gekoppelt, daß eine analytische Lösung nur mit erheblichen Rechenaufwand durchgeführt werden kann. Mit den Stabkräften,  $S_1$  mit  $S_6$  und  $S_{10}$  mit  $S_{15}$  können dann die restlichen Stabkräfte  $S_7$ ,  $S_8$ ,  $S_9$  und die Gelenk- und Lagerreaktionen ermittelt werden.

In der Praxis werden räumliche Fachwerke in der Regel mit der Methode der Finiten Elemente berechnet. Neben den Stabkräften erhält man dabei auch die elastischen Verformungen.

## 3.6 Übungen

### 3.6.1 Einfaches Fachwerk

Für das skizzierte Fachwerk bestimme man die Lagerreaktionen und alle Stabkräfte.

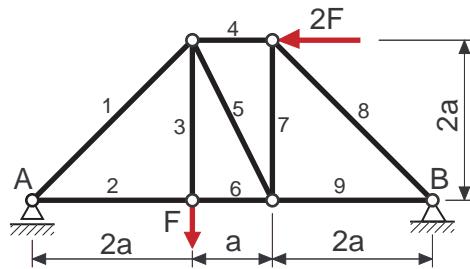


Bild 3.12: Einfaches Fachwerk

Kontrollieren Sie das Ergebnis mit einem Ritterschnitt durch die Stäbe 4, 5 und 6.

Lösung:

### 3.6.2 Abspannmast

Ein Abspannmast für eine Fahrleitung ist als Fachwerk ausgeführt.

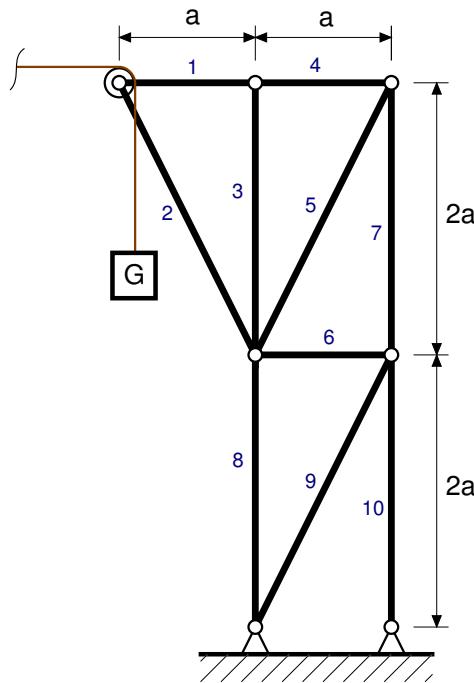


Bild 3.13: Abspannmast

Wie groß sind die Stabkräfte?

Lösung:

### 3.6.3 Nichteinfaches Fachwerk

Bestimmen Sie für das nichteinfache Fachwerk die Reaktionen in den Lagern A, B und C sowie die Stabkräfte  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  und  $S_6$ .

Lösung:

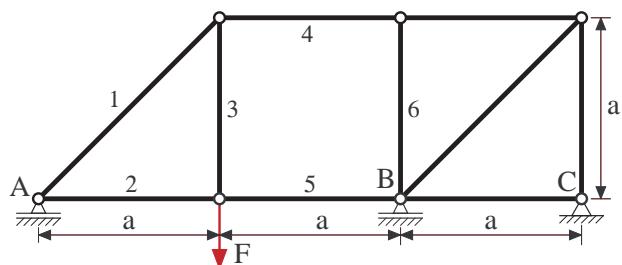


Bild 3.14: Nichteinfaches Fachwerk

# 4 Zug- und Druckbelastungen

## 4.1 Festigkeits- und Verformungskenngrößen

### 4.1.1 Der Zugversuch

Beim Zugversuch nach DIN EN 10 002 wird eine Zugprobe bei Raumtemperatur in Achsrichtung belastet, Bild 4.1. Neben Proben mit Kreisquerschnitt werden häufig auch Proben mit rechteckigen Querschnitten verwendet. Die auf der unbelasteten Probe markierte Länge

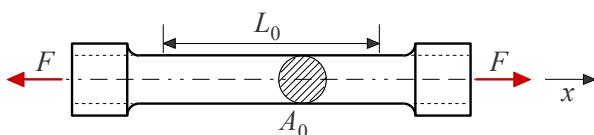


Bild 4.1: Zugstab

$L_0$  vergrößert sich unter der Belastung durch die Kraft  $F$  auf die Länge  $L$ . Die auf die ursprüngliche Länge bezogene Längenänderung wird als Längsdehnung

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (4.1)$$

bezeichnet. Die dimensionslose Wert einer Dehnung wird häufig in % angegeben. Im Probenquerschnitt, der im unbelasteten Zustand durch  $A_0$  gegeben ist, sorgen infinitesimal kleine Kräfte  $dF$  für den Zusammenhalt des Materials, Bild 4.2. Mit der daraus abgeleiteten Spannung

$$\sigma = \frac{dF}{dA} \quad (4.2)$$

kann die Belastung eines Materials besser bewertet werden. Genau wie die gesamte Zugprobe ist auch das abge-

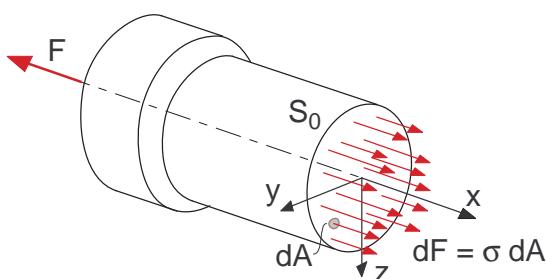


Bild 4.2: Verteilte Kräfte im Probenquerschnitt

schnittene Bauteil im Gleichgewicht. Die aus den Längsspannungen resultierende Normalkraft

$$N = \int_{A_0} \sigma_x dA \quad (4.3)$$

muss also hier gleich der Zugkraft  $F$  sein. Im allgemeinen kann die Spannung mit  $\sigma_x = \sigma_x(y, z)$  über dem Querschnitt variabel sein. In genügender Entfernung von der Krafteinleitung ist entsprechend dem Prinzip von Saint-Venant<sup>1</sup> hier die Spannung über dem Querschnitt konstant. Mit  $\sigma_x = \text{const.}$  und dem Kräftegleichgewicht  $F = N$  erhält man aus (4.3)

$$F = N = \sigma_x \int_{A_0} dA = \sigma_x A_0 . \quad (4.4)$$

Für den Zugstab gilt somit der einfache Zusammenhang

$$\sigma = \frac{F}{A_0} . \quad (4.5)$$

Die Kraft  $F$  wird in [N] und die Querschnittsfläche  $A_0$  in [ $\text{mm}^2$ ] gemessen. Spannungen werden deshalb mit der Dimension [ $\text{N/mm}^2$ ] angegeben. Häufig verwendet man statt dessen auch die aus Pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ) abgeleitete Einheit Mega Pascal ( $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$ ).

### 4.1.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Messtechnisch wird in einem Zugversuch zunächst ein Kraft-Verlängerungs-Diagramm  $F = F(\Delta L)$  aufgezeichnet. Über die Beziehungen (4.5) und (4.1) kommt man dann sehr einfach zum Spannungs-Dehnungs-Diagramm  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ .

Beim Übergang von elastischen zu plastischen (bleibenden) Verformungen zeigen verschiedene Metalle unterschiedliches Verhalten. Bei weichem Stahl (Baustahl) markieren  $(\sigma_F)_o$  als obere und  $(\sigma_F)_u$  als untere Fließ- oder Streckgrenze den Beginn der plastischen Verformungen, Bild 4.3.

<sup>1</sup>Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797 – 1886) Französischer Mathematiker und Physiker

Ursache für die Streckgrenzerhöhung sind bei Baustahl Bereiche gelöster Kohlenstoff- und Stickstoff-Atome, die „Cottrell-Wolken“. Diese behindern zunächst das Gleiten von Versetzungen. Beim Erreichen der oberen Fließgrenze können sich die ersten Versetzungen von ihren Cottrell-Wolken befreien. Die daraus resultierende Dehnung lässt die Spannung abfallen. Beim Erreichen der unteren Streckgrenze konzentriert sich die plastische Verformung auf schmale Bereiche, die „Lüdersbänder“, die unter  $45^\circ$  in Richtung der maximalen Schubspannung verlaufen. Die maximal gemess-

wie auch bei Aluminium tritt ein kontinuierlicher Übergang von elastischen zu plastischen Verformungen auf, Bild 4.4. Da hier die Fließgrenze  $\sigma_F$  nicht eindeutig aus dem Kurvenverlauf bestimmt werden kann, verwendet man statt dessen mit der Ersatzstreckgrenze  $(\sigma_F)_{0.2}$  die Spannung, die zu einer bleibenden Dehnung von 0.2% führt.

### 4.1.3 Das Hookesche Gesetz

Bei kleinen Dehnungen nimmt die Probe nach der Entlastung wieder die Ausgangslänge ein. Die Elastizitätsgrenze wird durch die Spannung  $\sigma_E$  begrenzt. Innerhalb des elastischen Bereiches zeigen insbesondere Metalle ein linear elastisches Verhalten. Unterhalb der durch  $\sigma_P$  festgelegten Proportionalitätsgrenze ist dann die Spannung  $\sigma$  proportional zur Dehnung  $\epsilon$ . Diesen Zusammenhang erkannte erstmals der Physiker Hooke<sup>4</sup>, nach dem dieser Bereich auch Hookescher Bereich des Werkstoffs genannt wird. Das Hookesche Gesetz

$$\sigma = E \epsilon \quad \text{mit} \quad |\sigma| < \sigma_P \quad (4.6)$$

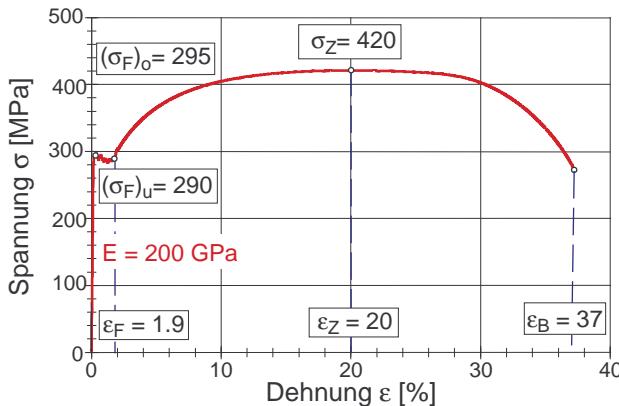


Bild 4.3:  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm für Baustahl<sup>2</sup>

senen Kraft  $F_{max}$  liefert mit  $\sigma_Z$  die Zugfestigkeit. Die entsprechende Dehnung  $\epsilon_Z$  wird als Gleichmaßdehnung bezeichnet. Die Probe reißt bei der Bruchspannung  $\sigma_B$ . Auf Grund einer lokalen Einschnürungen an der späteren Bruchstelle ist die auf den Ausgangsquerschnitt  $A_0$  bezogene Bruchspannung kleiner als die Zugfestigkeit. Die Größe der Bruchdehnung  $\epsilon_B$  ist ein Maß für die Zähigkeit eines Materials. Bei hochfesten Stählen so-

stellt über den Elastizitätsmodul  $E$  einen Zusammenhang zwischen der Dehnung  $\epsilon$  und der Spannung  $\sigma$  her. Obwohl der Elastizitätsmodul  $E$  in der Regel aus dem Zugversuch ermittelt wird, gilt das Hookesche Gesetz im entsprechend eingeschränkten Bereich auch für Druckspannungen. Bei den meisten metallischen Werkstoffen unterscheiden sich die Proportionalitätsgrenze  $\sigma_P$ , die Elastizitätsgrenze  $\sigma_E$  und die Fließspannung  $\sigma_F$  nur sehr wenig. Deshalb kann die Fließspannung  $\sigma_F$  oder die Ersatzspannung  $(\sigma_F)_{0.2}$  in der Regel als Begrenzung des Hookeschen Bereichs verwendet werden.

Da bei vielen technischen Anwendungen bleibende Verformungen unerwünscht sind, stellt (4.6) ein sehr einfaches aber geeignetes Materialgesetz dar.

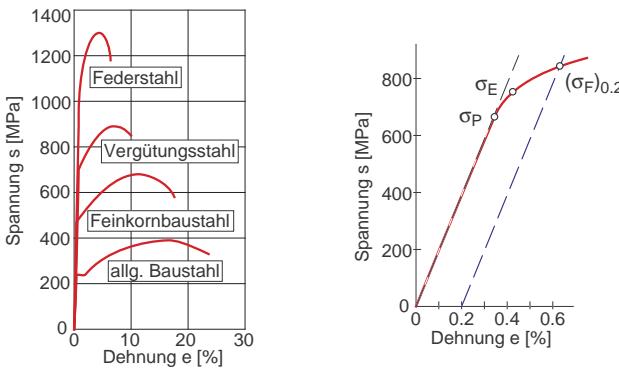


Bild 4.4: Verschiedene  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramme<sup>3</sup> und Bestimmung der Ersatzstreckgrenze

### 4.1.4 Wärmedehnung

Der Einfluss einer Wärmedehnung kann näherungsweise über den Ansatz

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma + \alpha_T \Delta T \quad (4.7)$$

berücksichtigt werden, wobei  $\alpha_T$  der Wärmeausdehnungskoeffizient mit der Dimension  $[1/K]$  ist und  $\Delta T$  =

<sup>2</sup>Die Messung wurde freundlicherweise vom Lehrstuhl für Umformtechnik und Gießerei (UTG) an der TU München zur Verfügung gestellt.

<sup>3</sup>aus: [www.imwf.uni-stuttgart.de/lehre/p/01\\_Zugversuch/Zugversuch.htm](http://www.imwf.uni-stuttgart.de/lehre/p/01_Zugversuch/Zugversuch.htm) (21.08.2008)

vd/wk-

<sup>4</sup>Robert Hooke (1635-1703) englischer Physiker, Mathematiker und Erfinder

$T - T_0$  die Änderung der Temperatur  $T$  gegenüber einem Referenzwert  $T_0$  angibt. Bei  $T = T_0$  ist das Material spannungs- und dehnungsfrei. Da in (4.7) nur die Temperaturdifferenz benötigt wird, können  $T$  und  $T_0$  sowohl nach Kelvin [K] als auch nach Celsius [°C] gemessen werden. Bei Stahl liegen die Werte für den Wärmeausdehnungskoeffizienten zwischen  $\alpha_T = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/K$  und  $\alpha_T = 19 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/K$ . Große Temperaturänderungen beeinflussen auch den E-Modul,  $E = E(T)$ . Bei Kunststoffen ist das meist schon bei relativ geringen Temperaturänderungen zu berücksichtigen.

#### 4.1.5 Innere Arbeit

Die Arbeit einer Kraft  $F$ , die längs einer Koordinate  $s$  verschoben wird, ist durch

$$W = \int dW = \int F ds \quad (4.8)$$

gegeben. Beim Zugstab erzeugt die Kraft  $F$  eine über die Querschnittsfläche  $A$  gleichmäßig verteilte Normalspannung. Mit  $F = \sigma A$  bleibt dann

$$W = \int dW = \int \sigma A ds \quad (4.9)$$

Auf das Volumen  $dV = A dx$  eines infinitesimal kleinen Teilstücks bezogen, erhält man

$$W_V = \int \frac{dW}{dV} = \int \frac{\sigma A ds}{A dx} = \int \sigma \frac{ds}{dx} \quad (4.10)$$

Ein Vergleich mit (4.8) zeigt, dass bei der Volumen bezogenen Arbeit  $W_V$  die Kraft  $F$  durch die Spannung  $\sigma$  und das Wegelement  $ds$  durch die Dehnung  $ds/dx = d\epsilon$  des infinitesimal kleinen Teilstücks ersetzt wird. Die spezifische innere Arbeit, die auch als spezifische Formänderungsenergie bezeichnet wird, ist somit durch

$$W_V = \int \sigma d\epsilon \quad (4.11)$$

bestimmt. Sie entspricht der Fläche unter dem Spannungsdehnungsdiagramm, wenn das Bauteil von 0 bis zur Dehnung  $\epsilon_x$  belastet wird, Bild 4.5. Bleiben die Deh-

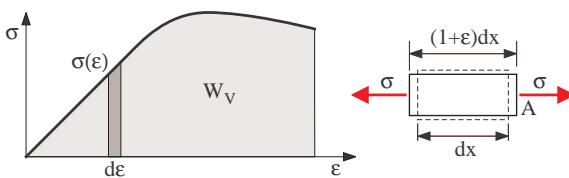


Bild 4.5: Spezifische innere Arbeit

nungen im linearen Bereich, dann kann die spezifische

innere Arbeit (4.11) mit dem Hookeschen Gesetz (4.6) in der Form

$$W_V = \int E \epsilon d\epsilon = E \int \epsilon d\epsilon \quad (4.12)$$

angeschrieben werden. Nach der Integration von  $\epsilon = 0$  bis  $\epsilon = \Delta L/L$  bleibt

$$W_V = E \int_0^{\Delta L/L} \epsilon d\epsilon = \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta L}{L} \right)^2 \quad (4.13)$$

Die gesamte in einem Stab mit dem Querschnitt  $A$  und der Länge  $L$  gespeicherte Energie ist dann durch

$$W = W_V \int dV = W_V V = W_V A L \quad (4.14)$$

oder

$$W = \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta L}{L} \right)^2 A L = \frac{1}{2} \frac{E A}{L} \Delta L^2 \quad (4.15)$$

gegeben. Das Produkt  $E A$  mit der Dimension N beschreibt die Dehnsteifigkeit und der Ausdruck  $EA/L$  mit der Dimension N/m gibt die Steifigkeit des Stabes an.

#### 4.1.6 Veränderliche Querschnitte

Bei plötzlich veränderlichen Querschnitten, wie bei Wellenabsätzen oder Kerben, sind die Normalspannungen nicht mehr gleichmäßig über dem Querschnitt verteilt, Bild 4.6. Die dabei auftretenden Spannungsspitzen wer-

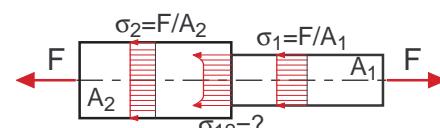


Bild 4.6: Spannungsspitzen

den bei der Dimensionierung über zusätzliche Faktoren (z.B. Kerbfaktor) erfasst. Eine rechnerische Ermittlung erfordert komplexe Ansätze aus der Kontinuumsmechanik, die Berechnung mit Finiten Elementen (FEM) oder aufwändige diskrete Modelle („Particle Method“).

Verändert sich der Querschnitt  $A$  über die Bauteillänge  $L$  nur sehr langsam, dann kann in guter Näherung wieder eine über den Querschnitt konstante Spannungsverteilung angenommen werden, Bild 4.7.

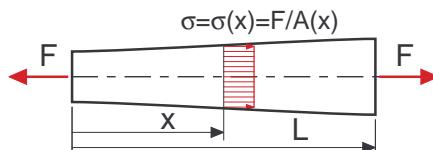


Bild 4.7: Langsam veränderlicher Querschnitt

Variiert auch noch die Normalkraft  $N = N(x)$ , dann ist Normalspannung durch

$$\sigma = \sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad (4.16)$$

definiert, wobei vorausgesetzt wird, dass die Änderung der Querschnittsfläche und der Normalkraft genügend klein sind.

#### 4.1.7 Flächenpressung

Werden zwei Körper gegeneinander gepresst, dann wird in der Berührfläche  $A$  über Druckspannungen  $p$  die Normalkraft  $N$  übertragen. Analog zu (4.3) gilt auch hier

$$N = \int_A p \, dA. \quad (4.17)$$

Erfolgt der Kontakt über eine ebene Flächenberührungsfläche, dann kann in guter Näherung eine gleichmäßige Druckverteilung angenommen werden, Bild 4.8. Die Flächenpressung ist dann durch

$$p = \frac{N}{A} \quad (4.18)$$

gegeben. In vielen Fällen, wie z.B. beim Rad-Schiene-

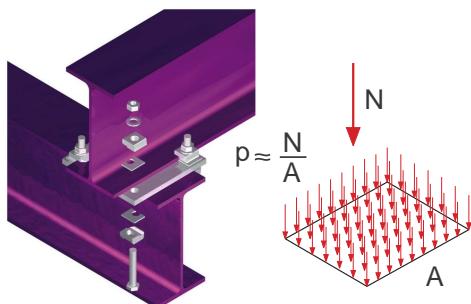


Bild 4.8: Ebene Kontaktflächen

Kontakt, sind die Körperkonturen an der Berührstelle gekrümmt, Bild 4.9. Die Form und die Größe der Berührfläche  $A$  und die genaue Druckverteilung  $p = p(x, y)$  hängen jetzt von den lokalen Deformationen der Körper ab. Unter der Voraussetzung, dass beide Körper

als linear-elastische Halbräume betrachtet werden können und die Kontaktfläche klein gegenüber den Körperrabmessungen bleibt, gelang es Hertz<sup>5</sup> die Form und die Größe der Kontaktfläche sowie die Flächenpressung zu ermitteln. Die Hertz'sche Theorie findet Anwendung bei Kontakten zwischen Zahnrädern, zwischen Wälzkörper und Laufbahn von Wälzlagern sowie beim Rad-Schiene-Kontakt.

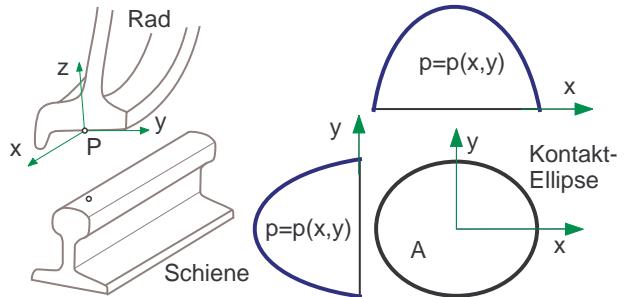


Bild 4.9: Rad-Schiene-Kontakt

Die bei Bolzen und Nieten auftretende Flächenpressung bezeichnet man als Lochleibungsdruck. Der Kontakt erfolgt dabei über eine Zylinderhalbschale. Die Flächenpressung verschwindet an den Rändern und erreicht ihr Maximum in der Mitte, Bild 4.10. Für Auslegungsbe-

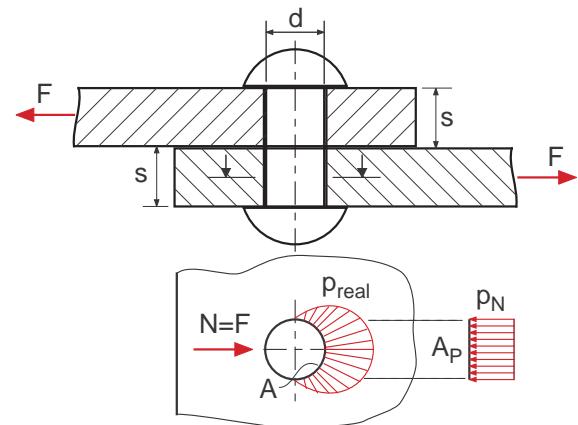


Bild 4.10: Nietverbindungen

rechnungen wird die komplexe Druckverteilung  $p_{real}$  durch eine konstante Druckverteilung angenähert. Die gemittelte Flächenpressung wird dabei aus

$$p_M = \frac{N}{A_P} \quad (4.19)$$

ermittelt, wobei  $A_P$  eine Fläche darstellt, die durch Projektion der tatsächlichen Kontaktfläche in eine Ebene senkrecht zur Belastungsrichtung erzeugt wird. Bezeichnet  $s$  die Blechdicke und  $d$  den Durchmesser einer

<sup>5</sup>Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) deutscher Physiker

Niete, dann ist die in (4.19) benötigte projizierte Fläche durch

$$A_P = s d \quad (4.20)$$

gegeben, während die tatsächliche Kontaktfläche (Zylinderhalbschale) durch  $A = s \frac{1}{2}d$  bestimmt ist.

## 4.1.8 Dimensionierung

Das Funktionieren eines technischen Systems oder bestimmter Bauteile setzt in der Regel voraus, dass kein Versagen durch Brüche oder große Verformungen auftritt. Der Nachweis erfolgt meist durch rechnerische Ermittlung der Spannung  $\sigma$  oder einer Verformung  $u$ , die bei bestimmten tatsächlichen oder geschätzten Belastungen auftreten. Diese Werte werden dann mit

$$\nu \sigma < \sigma_{zul} \quad \text{oder} \quad \nu u < u_{zul} \quad (4.21)$$

in Bezug zu zulässigen Spannungen  $\sigma_{zul}$  oder Verformungen  $u_{zul}$  gesetzt. Mit Sicherheitsbeiwerten  $\nu > 1$  versucht man dabei Unsicherheiten in der Berechnung (Lastannahme), in den Annahmen (gleichmäßige Spannungsverteilung) oder in Umwelteinflüssen (Temperatur) zu berücksichtigen. Auch die Folgen eines Versagens (Gefährdung von Menschen), die Belastungsart (statisch, dynamisch, konstant, schwelend oder wechselnd) und die Dauer (technische Dauerfestigkeit) müssen im Sicherheitsbeiwert  $\nu$  oder in  $\sigma_{zul}$  erfasst werden.

Bei der Druckbelastung schlanker oder dünnwandiger Bauteile kann die zulässige Spannung auch durch Instabilitäten wie Knicken und Beulen bestimmt sein.

Bei komplizierten Belastungsfällen treten neben Normalspannungen in den drei Raumrichtungen auch noch Schubspannungen auf. Die Beurteilung mehrachsiger Spannungszustände erfolgt in der Regel über Vergleichsspannungen.

## 4.2 Statisch bestimmte Systeme

### 4.2.1 Gleichgewicht

Das in Bild 4.11 dargestellte System aus zwei Stäben oder Seilen wird durch die Kraft  $F$  belastet.

Die festen Lager in  $A$  und  $B$  haben den Abstand  $P+Q$ . Im unverformten (unbelasteten) Zustand liegt das Gelenk in  $C$  im Abstand  $H$  unterhalb der Linie  $\overline{AB}$ . Die elastischen Deformationen der beiden Stäbe führen bei der Belastung durch die vertikale Kraft  $F$  zu horizontalen

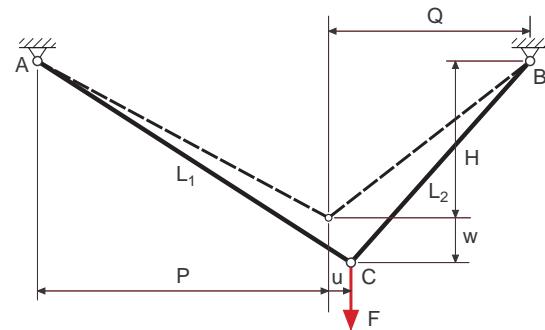


Bild 4.11: Verformungen durch Belastung

und vertikalen Verschiebungen am Kraftangriffspunkt  $C$ . Diese werden mit  $u$  und  $w$  bezeichnet.

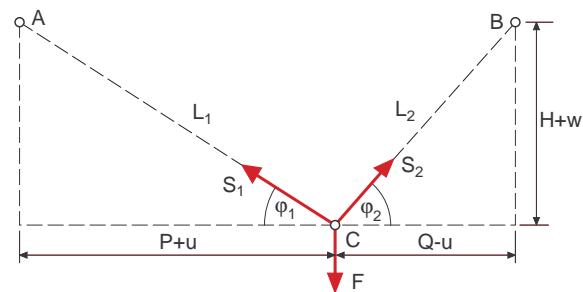


Bild 4.12: Knoten frei geschnitten

Das Kräftegleichgewicht in horizontaler und vertikaler Richtung liefert am Knoten in  $C$  die Gleichungen

$$-S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad (4.22)$$

$$-F + S_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2 = 0. \quad (4.23)$$

Aus dem Bild 4.12 entnimmt man für die Winkelfunktionen

$$\sin \varphi_1 = \frac{H+w}{L_1}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{P+u}{L_1}, \quad (4.24)$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{H+w}{L_2}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{Q-u}{L_2}, \quad (4.25)$$

wobei die aktuellen Stablängen durch

$$L_1 = \sqrt{(P+u)^2 + (H+w)^2}, \quad (4.26)$$

$$L_2 = \sqrt{(Q-u)^2 + (H+w)^2} \quad (4.27)$$

gegeben sind. In (4.22) eingesetzt erhält man mit

$$\begin{aligned} -S_1 \frac{P+u}{\sqrt{(P+u)^2 + (H+w)^2}} \\ + S_2 \frac{Q-u}{\sqrt{(Q-u)^2 + (H+w)^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

und

$$\begin{aligned} S_1 \frac{H+w}{\sqrt{(P+u)^2+(H+w)^2}} \\ + S_2 \frac{H+w}{\sqrt{(Q-u)^2+(H+w)^2}} = F \end{aligned} \quad (4.29)$$

zwei Gleichungen, die zwar formal nach den Stabkräften aufgelöst werden können

$$S_1 = \frac{\sqrt{(P+u)^2+(H+w)^2}}{P+Q} \frac{Q-u}{H+w} F, \quad (4.30)$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{(Q-u)^2+(H+w)^2}}{P+Q} \frac{P+u}{H+w} F, \quad (4.31)$$

aber keine Lösung ermöglichen, da sie ja noch die unbekannten Verschiebungen  $u$  und  $w$  enthalten.

## 4.2.2 Materialgesetz

Beschränkt man sich auf elastische Deformationen, dann kann das Hookesche Materialgesetz  $\sigma = E \epsilon$  auf die beiden Stäbe angewendet werden. Nimmt man an, dass beide Stäbe den Querschnitt A haben und aus dem gleichen Material (Elastizitäts-Modul  $E$ ) gefertigt sind, dann liefert (4.6) mit (4.5) und (4.1) die Beziehungen

$$\frac{S_1}{A} = E \frac{\Delta L_1}{L_{10}} \quad \text{und} \quad \frac{S_2}{A} = E \frac{\Delta L_2}{L_{20}} \quad (4.32)$$

oder

$$S_1 = \frac{EA}{L_{10}} \left( \sqrt{(P+u)^2+(H+w)^2} - L_{10} \right), \quad (4.33)$$

$$S_2 = \frac{EA}{L_{20}} \left( \sqrt{(Q-u)^2+(H+w)^2} - L_{20} \right), \quad (4.34)$$

wobei die aktuellen Stablängen  $L_1$ ,  $L_2$  durch (4.26), (4.27) bestimmt und die unverformten durch

$$L_{10} = \sqrt{P^2 + H^2}, \quad L_{20} = \sqrt{Q^2 + H^2} \quad (4.35)$$

gegeben sind. Die Terme  $EA/L_{10}$  und  $EA/L_{20}$  mit der Dimension  $[N/m]$  kennzeichnen dabei die Steifigkeit der beiden Stäbe.

## 4.2.3 Nichtlineare Lösung

Das Gleichsetzen der aus dem Gleichgewicht resultierenden Beziehungen (4.30), (4.31) mit den aus dem Hookeschen Gesetz folgenden Gleichungen (4.33), (4.34) liefert zwei nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der Verschiebungen  $u$  und  $w$ . Auf Grund der

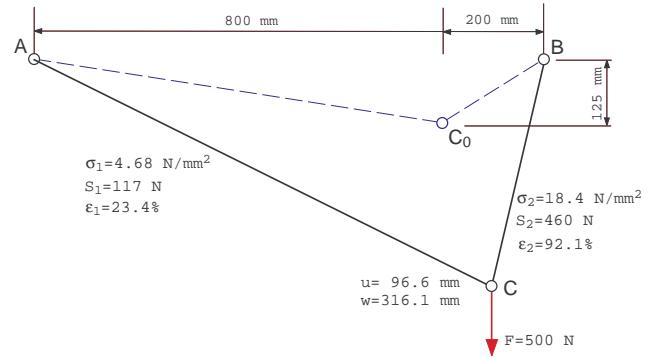


Bild 4.13: Gummiseile unter Belastung

Nichtlinearität ist nur mehr eine numerische Lösung möglich.

Gummi ist ein sehr nachgiebiger Werkstoff. Allerdings ist die Dehnung nicht proportional zur Belastung. Für erste Abschätzungen kann trotzdem das Hookesche Gesetz angewendet werden. Der Elastizitätsmodul für Gummi<sup>6</sup> liegt im Bereich von  $E = 0.01 \text{ GPa} = 10 \text{ MPa}$  bis  $E = 0.1 \text{ GPa} = 100 \text{ MPa}$ . Die Ergebnisse für zwei Gummiseile mit dem Elastizitäts-Modul  $E = 20 \text{ MPa}$  und einem Querschnitt von  $A = 25 \text{ mm}^2$ , die durch die vertikale Kraft  $F = 500 \text{ N}$  belastet werden, sind in Bild 4.13 zusammengestellt. Das zweite Seil wird mit  $\epsilon_2 = 92.1\%$  fast auf die doppelte Länge gedehnt. Trotzdem bleiben die Spannungen klein. Der Knoten in C verschiebt sich infolge der Belastung durch die vertikale Kraft  $F$  deutlich nach unten und nach rechts in Richtung des kürzeren Seils.

Die Gummiseile werden nun durch Stäbe aus Aluminium mit dem Elastizitäts-Modul  $E = 62800 \text{ MPa}$  und dem Querschnitt von  $A = 25 \text{ mm}^2$  ersetzt. Eine vertikale Kraft von  $F = 3166 \text{ N}$  belastet den zweiten Stab bis an die Fließgrenze  $\sigma_2 = (\sigma_F)_{0.2} = 187 \text{ N/mm}^2$ , Bild 4.14.

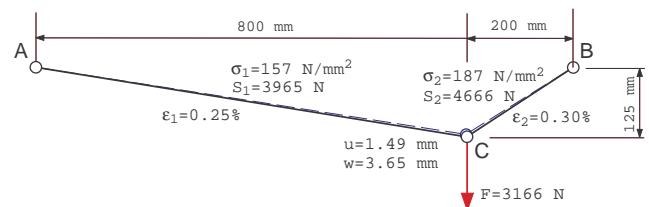


Bild 4.14: Aluminiumstäbe unter Belastung

Da die Verschiebungen des Knotens C im Vergleich zu den geometrischen Abmessungen nun mit  $u = 1.49 \text{ mm}$  und  $w = 3.65 \text{ mm}$  sehr klein sind, stellt sich die Frage, ob die komplizierte nichtlineare Berechnung hier gerechtfertigt ist.

<sup>6</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Young's\\_modulus](http://en.wikipedia.org/wiki/Young's_modulus)



### 4.3.2 Linear elastisches Materialgesetz

Nimmt man an, dass die Seile aus dem gleichen Material gefertigt sind und auch gleiche Querschnitte aufweisen, dann liefert das Hookesche Materialgesetz mit

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{S_1}{A} = E \frac{\Delta L_1}{L_{10}} = E \epsilon_1 \\ \sigma_2 &= \frac{S_2}{A} = E \frac{\Delta L_2}{L_{20}} = E \epsilon_2\end{aligned}\quad (4.49)$$

zwei weitere Gleichungen, die die Stabkräfte  $S_1$  und  $S_2$  über die Querschnittsflächen  $A$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  mit den Längenänderungen  $\Delta L_1$  und  $\Delta L_2$  verknüpfen. Die unverformten Längen der Stäbe sind hier durch

$$L_{10} = L \quad \text{und} \quad L_{20} = L \quad (4.50)$$

gegeben. Mit (4.49) hat man zwar zwei zusätzliche Gleichungen erhalten, aber mit  $\Delta L_1$  und  $\Delta L_2$  auch zwei neue Unbekannte eingeführt.

Da die Stäbe zwischen der starren Decke und dem Bauteil, das hier ebenfalls als starr betrachtet wird, befestigt sind, können die Längenänderungen der zwei Stäbe nicht unabhängig voneinander erfolgen.

### 4.3.3 Kompatibilitätsbedingungen

Berücksichtigt man die Dehnung der Seile, dann kann das als starr angenommene Bauteil eine kleine Drehung mit dem Winkel  $\Delta\varphi$  um den Lagerungspunkt ausführen, Bild 4.16.

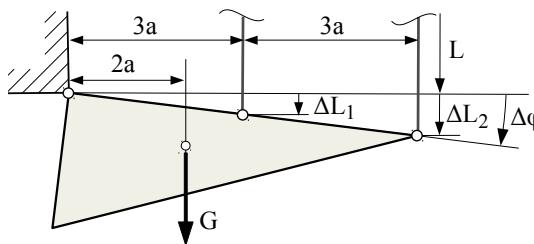


Bild 4.16: Kompatible Längenänderungen

Wegen  $\Delta\varphi \ll 1$  sind die Längenänderungen dann durch

$$\Delta L_1 = 3a \Delta\varphi \quad \text{und} \quad \Delta L_2 = 6a \Delta\varphi \quad (4.51)$$

gegeben. Mit den Gleichgewichtsbeziehungen (4.46) bis (4.48) den Materialgesetzen (4.49) und den Kompatibilitätsbedingungen (4.51) stehen nun sieben Gleichungen für die sieben Unbekannten, die Lagerreaktionen  $H$  und  $V$ , die Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$ , die Längenänderungen  $\Delta L_1$  und  $\Delta L_2$  sowie die Bauteildrehung  $\Delta\varphi$  zur Verfügung.

### 4.3.4 Lösung

Im vorliegenden Fall können die Gleichungen sukzessive gelöst werden. Fasst man die Gleichungen (4.51) und (4.49) zusammen, dann erhält man

$$S_1 = \frac{EA}{L} 3a \Delta\varphi \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{EA}{L} 6a \Delta\varphi \quad (4.52)$$

wobei die Beziehung (4.50) bereits verwendet wurde. In das Momentengleichgewicht (4.48) eingesetzt bleibt

$$2aG - 3a \frac{EA}{L} 3a \Delta\varphi - 6a \frac{EA}{L} 6a \Delta\varphi = 0. \quad (4.53)$$

Nach dem Drehwinkel aufgelöst und das Ergebnis in (4.52) eingesetzt, erhält man

$$\Delta\varphi = \frac{L}{EA} \frac{2G}{45a} \quad (4.54)$$

und

$$S_1 = \frac{2}{15} G \quad \text{sowie} \quad S_2 = \frac{4}{15} G. \quad (4.55)$$

Aus (4.47) folgt dann die vertikale Komponente im Gelenklager zu

$$V = G - \frac{2}{15} G - \frac{4}{15} G = \frac{9}{15} G = \frac{3}{5} G. \quad (4.56)$$

Gemäß (4.46) tritt hier mit  $H = 0$  keine horizontale Belastung im Lager auf. Die gilt allerdings nur, solange die Verformungen, wie vorausgesetzt, klein bleiben.

### 4.3.5 Nichtlineare Lösung

Für beliebige, auch geße Drehwinkel sind die momentanen Positionen der unteren Seilanlenkpunkte durch die Koordinaten

$$\begin{aligned}x_1 &= 3a \cos \varphi, & y_1 &= 3a \sin \varphi, \\ x_2 &= 6a \cos \varphi, & y_2 &= 6a \sin \varphi\end{aligned} \quad (4.57)$$

gegeben, wobei der Ursprung eines Koordinatensystems mit der  $x$ -Achse nach rechts und der  $y$ -Achse nach unten in den Lagerungspunkt liegt. Während die unverformten Seillängen weiterhin durch (4.50) festgelegt sind, sind die aktuellen nun durch

$$\begin{aligned}L_1 &= \sqrt{(3a \cos \varphi - 3a)^2 + (3a \sin \varphi + L)^2} \\ L_2 &= \sqrt{(6a \cos \varphi - 6a)^2 + (6a \sin \varphi + L)^2}\end{aligned} \quad (4.58)$$

bestimmt. Mit  $s$  als Schwerpunktshöhe des dreieckförmigen Körpers kann die vertikale Lage des Schwerpunktes durch

$$y_S = 2a \sin \varphi + s \cos \varphi \quad (4.59)$$

angeben werden. Die Gleichgewichtslage ist durch ein Minimum der potenziellen Energie gekennzeichnet. Die potenzielle Energie ist bei linear elastischem Materialverhalten durch

$$E_{pot} = \frac{1}{2}c_1(L_1 - L_{10})^2 + \frac{1}{2}c_2(L_2 - L_{10})^2 - G y_S \quad (4.60)$$

bestimmt, wobei  $c_1 = c_2 = EA/L$  die Seilsteifigkeiten bezeichnen. Aufgrund der geometrischen Nichtlinearität kann das Minimum der potenziellen Energie nur mehr numerisch berechnet werden.

Das MATLAB-Skript

```
1 global a s L G EA % Definition globaler Variablen
2
3 a=0.3; s=0.1; L=1; % Abmessungen [m]
4 EA=25000; % Dehsteifigkeit Seile [-]
5 G = 6000; % Gewicht [N]
6
7 phi0 = 0; % Startwert und Epot --> Min
8 phi = fminsearch(@schweres_Bauteil_Epot,phi0);
9
10 disp('Vergleich phi: nichtlinear, linear')
11 disp([ phi L/EA^2*G/(45*a) ]*180/pi )
```

definiert Zahlenwerte, setzt mit  $\varphi_0 = 0$  eine triviale Anfangsbedingung und minimiert über die MATLAB-Funktion fminsearch die potentielle Energie, die in der Funktion

```
1 function Epot = schweres_Bauteil_Epot(x)
2
3 global a s L G EA
4
5 % Drehwinkel und Winkelfunktionen
6 phi= x(1); sph=sin(phi); cph=cos(phi);
7
8 % unverformte Laengen
9 L10 = L; L20 = L;
10
11 % aktuelle Laengen und vertikale Schwerpunktlage
12 L1 = sqrt( (3*a*cph - 3*a)^2 + (3*a*sph+L)^2 );
13 L2 = sqrt( (6*a*cph - 6*a)^2 + (6*a*sph+L)^2 );
14 yS = 2*a*sph + s*cph ;
15
16 % Steifigkeiten
17 c1 = EA/L10; c2 = EA/L20;
18
19 % potentielle Energie
20 Epot = 0.5*(c1*(L1-L10)^2+c2*(L2-L20)^2) - yS*G;
21
22 end
```

zur Verfügung gestellt wird. Mit den angegeben Zahlenwerten ergibt sich ein Neigungswinkel von  $\varphi = 2.027^\circ$ , Bild 4.17.

Die lineare Näherung (4.54) liefert

$$\Delta\varphi = \frac{L}{EA} \frac{2G}{45a} = \frac{1m}{25000N} \frac{2*6000N}{45*0.3m} = 2.037^\circ \quad (4.61)$$

Aufgrund des kleinen Neigungswinkels stimmten die Ergebnisse recht gut überein. Auch die daraus ableitbaren Werte für die Seilkräfte und die Lagerreaktionen zeigen kaum Abweichungen.

	$S_1/G$	$S_2/G$	$H/G$	$V/G$
linear	0.1333	0.2667	0	0.6000
nichtlinear	0.1324	0.2648	-0.00035	0.6028

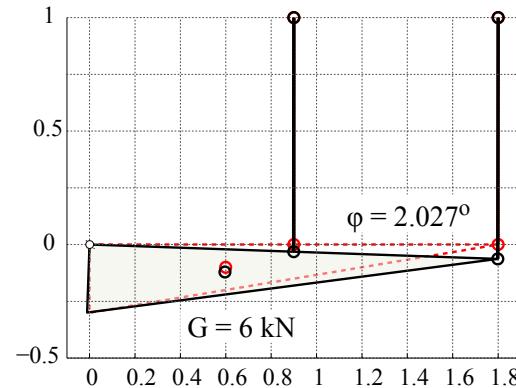


Bild 4.17: Nichtlineare Verformungen

Die nichtlineare Lösung berücksichtigt die verformungsbedingte Schräglage der Seile und führt so zu einer, wenn auch sehr geringen, horizontalen Lagerreaktion. In den meisten Fällen ist die weniger aufwändige lineare Lösung völlig ausreichend.

## 4.4 Übungen

### 4.4.1 Kettenglied

Eine Rundstahlkette wird mit  $F = 15 kN$  belastet.

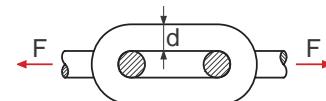


Bild 4.18: Rundstahlkette

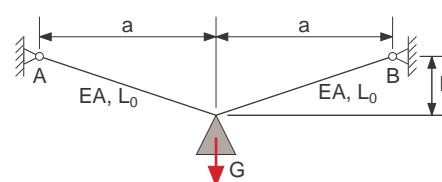
Welche Dicke  $d$  muss ein Kettenglied mindestens haben, wenn die zulässige Spannung  $\sigma_{zul} = 80 N/mm^2$  nicht überschritten werden soll?

Wie groß ist dann die Flächenpressung zwischen den Gliedern?

Lösung:

### 4.4.2 Lampe

Zwei Stahldrähte mit der Dehnsteifigkeit  $EA$  tragen eine Lampe vom Gewicht  $G$ . Unbelastet haben die Drähte jeweils die Länge  $L_0$ . Die Befestigungspunkte A und B haben den Abstand  $2a$ .

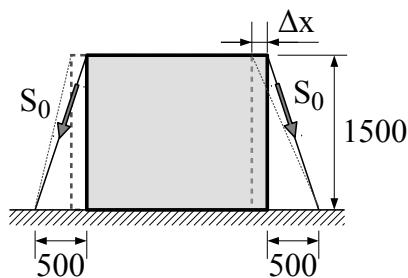


Ermitteln Sie für  $EA = 800\,000\text{ N}$ ,  $a = 2000\text{ mm}$ ,  $L_0 = 2030\text{ mm}$  und  $G = 50\text{ N}$  die Dehnung  $\epsilon$  der Drähte sowie den Durchhang  $h$ .

Lösung:

#### 4.4.3 Transportkiste

Eine Kiste wird wie skizziert durch Stahlbänder auf einem Fahrzeug fixiert. Die Stahlbänder mit dem Querschnitt  $A = 20\text{ mm}^2$  und dem Elastizitätsmodul  $E = 205\,000\text{ N/mm}^2$  sind anfangs symmetrisch angeordnet und werden auf beiden Seiten mit der Kraft  $S = S_0 = 3000\text{ N}$  vorgespannt.



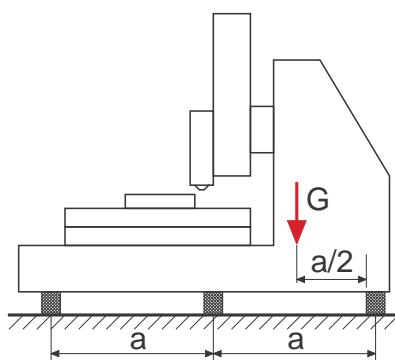
- Welche Spannung herrscht anfangs in beiden Bändern und um wie viel Prozent wurden die Bänder gedehnt?
- Welche Werte erreichen die Dehnungen und die Spannungen im linken und rechten Band, wenn die Kiste nach einer scharfen Kurvenfahrt um  $\Delta x = 3\text{ mm}$  verrutscht ist? Wie groß sind jetzt die Kräfte in den Bändern?

Lösung:



#### 4.4.4 Werkzeugmaschine

Eine Werkzeugmaschine wird zur Schwingungsisolation auf drei Gummielemente gestellt, die jeweils die Dehnsteifigkeit  $EA$  und unbelastet die Höhe  $h$  haben.



Wie groß sind die Kräfte in den Gummielementen?

Lösung:

# 5 Tragwerke

## 5.1 Allgemeines

Tragwerke sind Konstruktionen, bei denen die einzelnen Bauteile fest oder durch Lagerelemente miteinander verbunden sind.

Im Unterschied zu Fachwerken unterliegen hier die Verbindungselemente keinerlei Einschränkungen und Belastungen können auch direkt an den Körpern angreifen.

## 5.2 Einfache Tragwerke

### 5.2.1 Lagerung

Das Bild 5.1 zeigt ein einfaches Tragwerk, das mit der Einzelkraft  $Q$  belastet wird.

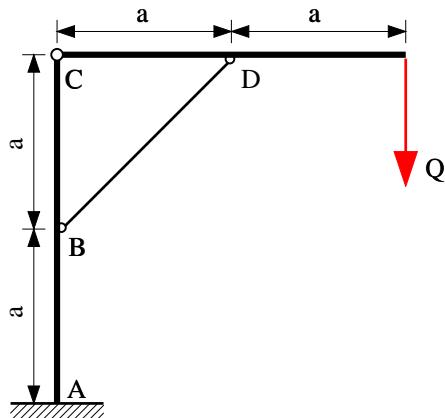


Bild 5.1: Tragwerk 1

Einfache Tragwerke sind in sich starr. Zur statisch und kinematisch bestimmten Lagerung einfacher ebener Tragwerke sind insgesamt drei unabhängige Lagerwertigkeiten erforderlich. Ein Lager mit drei Wertigkeiten (feste Einspannung in A) übernimmt diese Aufgabe beim Tragwerk 1.

### 5.2.2 Gesamtsystem

Durchtrennt man beim Tragwerk im Bild 5.1 die Verbindung zur Umgebung, dann müssen dort, entsprechend

der festen Einspannung, Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung sowie ein Moment als Lagerreaktionen angetragen werden, Bild 5.2.

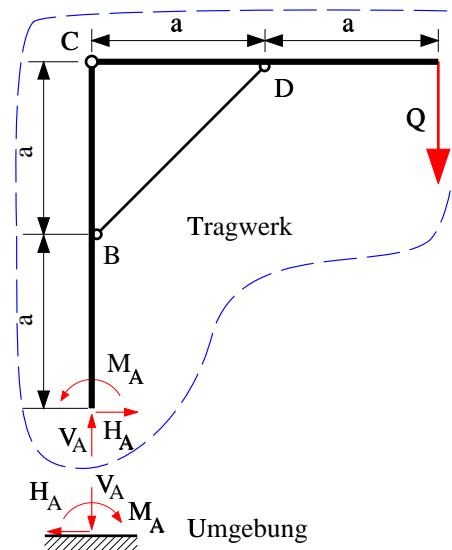


Bild 5.2: Tragwerk 1 freigeschritten

Die Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem können hier sofort nach den unbekannten Lagerreaktionen  $H_A$ ,  $V_A$  und  $M_A$  aufgelöst werden

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A - Q &= 0 \quad \text{bzw. } V_A = Q \\ M_A - 2aQ &= 0 \quad \text{bzw. } M_A = 2aQ \end{aligned} \quad (5.1)$$

Gleichgewichtsbeziehungen für die Umgebung können nicht aufgestellt werden, da hier nicht alle, auf die Umgebung wirkenden Kräfte bekannt sind.

### 5.2.3 Teilsysteme

Unter Berücksichtigung des Schnittprinzips und des Gegenwirkungsprinzips kann das Tragwerk aus dem Bild 5.1 in einzelne Teilsysteme zerlegt werden, Bild 5.3.

Die Gleichgewichtsbeziehungen für die Teilsysteme vertikaler Träger, Strebe und horizontaler Träger lauten

$$\begin{aligned} H_A + H_B + H_C &= 0, \\ V_A + V_B + V_C &= 0, \\ M_A - aH_B - 2aH_C &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

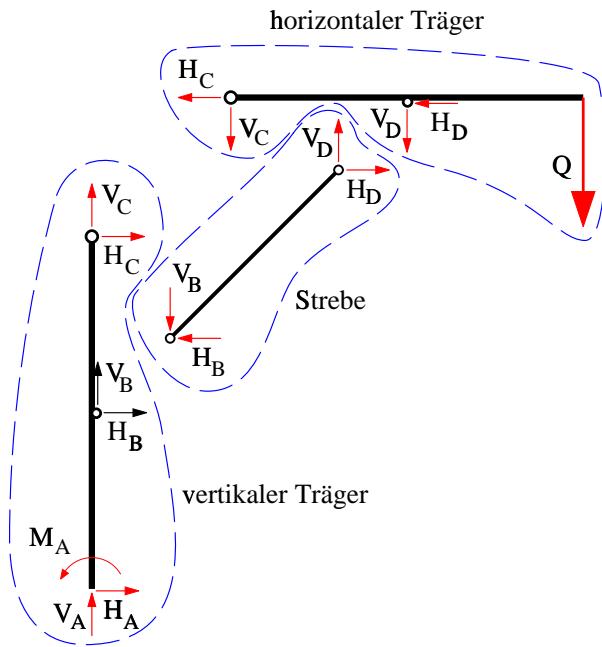


Bild 5.3: Tragwerk 1 zerlegt in Teilsysteme

$$\begin{aligned} -H_B + H_D &= 0, \\ -V_B + V_D &= 0, \\ -a H_D + a V_D &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} -H_C - H_D &= 0, \\ -V_C - V_D - Q &= 0, \\ a V_C - a Q &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Hier liegt ein gestaffeltes Gleichungssystem vor. Aus (5.4) erhält man sofort

$$V_C = Q \quad (5.5)$$

und

$$V_D = -V_C - Q = -2Q. \quad (5.6)$$

Damit folgt aus (5.3)

$$V_B = V_D = -2Q, \quad (5.7)$$

$$H_D = V_D = -2Q \quad (5.8)$$

und

$$H_B = H_D = -2Q. \quad (5.9)$$

Nun können auch die restlichen Unbekannten bestimmt werden. Der 1. Gleichung in (5.4) entnimmt man

$$H_C = -H_D = +2Q \quad (5.10)$$

und aus (5.2) folgt schließlich

$$H_A = -H_B - H_C = +2Q - 2Q = 0, \quad (5.11)$$

$$V_A = -V_B - V_C = +2Q - Q = Q \quad (5.12)$$

und

$$\begin{aligned} M_A &= a H_B + 2a H_C \\ &= a(-2Q) + 2a(2Q) = 2aQ. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die Berechnung der Lagerreaktionen aus dem Gleichgewicht für das Gesamtsystem (5.1) ist hier einfacher und damit auch weniger fehleranfällig.

Kombiniert man die Betrachtung am Gesamtsystem mit geeigneten Teilsystemen, dann kommt man bei einfachen Tragwerken meist schneller zur Lösung.

## 5.3 Nichteinfache Tragwerke

### 5.3.1 Lagerung

Das Bild 5.4 zeigt ein nichteinfaches Tragwerk. Die Belastung erfolgt durch die Einzelkräfte  $Q_1$  und  $Q_2$ .

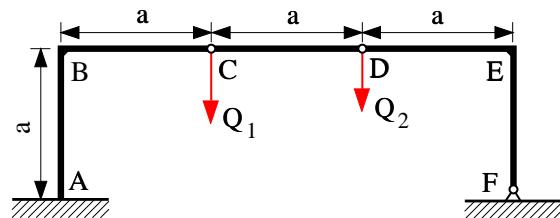


Bild 5.4: Tragwerk 2

Nichteinfache Tragwerke verfügen im Inneren über Bewegungsmöglichkeiten, die durch entsprechende Lagerungen gegen die Umgebung ausgeglichen werden müssen. Die statische Bestimmtheit vom Tragwerk 2 erfordert neben der festen Einspannung in A noch ein festes Gelenklager in F.

### 5.3.2 Gesamtsystem

Im Bild 5.5 ist das freigeschnittene Tragwerk aus dem Bild 5.4 dargestellt.

Mit  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $M_A$  (feste Einspannung in A) und  $H_F$ ,  $V_F$  (festes Gelenklager in D) treten jetzt 5 unbekannte Lagerreaktionen auf.

Die Gleichgewichtsbeziehungen für das Gesamtsystem liefern jedoch nur 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} H_A + H_F &= 0, \\ V_A + V_F - Q_1 - Q_2 &= 0, \\ M_A - a Q_1 - 2a Q_2 + 3a V_F &= 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

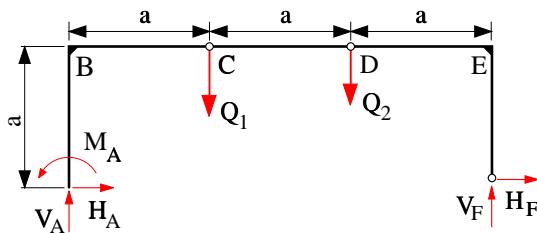


Bild 5.5: Tragwerk 2 freigeschritten

die zur Berechnung der 5 Lagerreaktionen nicht ausreichen.

Bei mehrteiligen Tragwerken bleibt meist nur der Weg über die Teilsysteme.

### 5.3.3 Teilsysteme

Mit Schnitten in  $A$ ,  $C$ ,  $D$  und  $F$  zerfällt das nichteinfache Tragwerk aus dem Bild 5.4 in drei Teilsysteme, Bild 5.6.

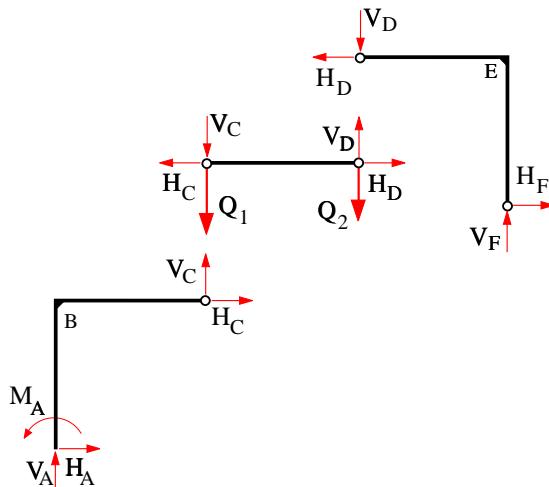


Bild 5.6: Tragwerk 2 zerlegt in Teilsysteme

Die äußeren Kräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  können an ihren Einleitungsstellen  $C$  und  $D$  beliebig einem der beiden Teilsysteme zugeordnet werden. Selbst eine beliebige Aufteilung der Kräfte auf die entsprechenden Teilsysteme ist möglich, meist aber nicht zweckmäßig. Hier wurden die Kräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  beim Freischneiden dem mittleren Teilsystem ( $CD$ ) zugeordnet.

Die Gleichgewichtsbeziehungen für die Teilsysteme lauten

$$\begin{aligned} H_A + H_C &= 0, \\ V_A + V_C &= 0, \\ M_A + aV_C - aH_C &= 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} -H_C + H_D &= 0, \\ -V_C - Q_1 + V_D - Q_2 &= 0, \\ aV_D - aQ_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} -H_D + H_F &= 0, \\ -V_D + V_F &= 0, \\ aH_D + aV_D &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Auch hier kann das Gleichungssystem sukzessive aufgelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} V_D &= +Q_2, & H_D &= -Q_2, \\ V_F &= +Q_2, & H_C &= -Q_2, \\ V_C &= -Q_1, & H_F &= -Q_2, \\ V_A &= Q_1, & H_A &= Q_2, \\ M_A &= aQ_1 - aQ_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Gleichgewichtsbeziehungen für das Gesamtsystem (5.14) können hier als Kontrolle verwendet werden.

### 5.3.4 Matrzenschreibweise

Bei komplizierten Tragwerken kann das Auflösen der Gleichungen schwierig werden. In solchen Fällen empfiehlt sich eine numerische Lösung. Die Gleichgewichtsbeziehungen werden dazu in der Form

$$Ax = b \quad (5.19)$$

angeschrieben, wobei  $A$  die Koeffizientenmatrix,  $x$  der Vektor der Unbekannten und  $b$  der Belastungsvektor ist.

In Matrzenschreibweise lauten die Gleichungen (5.15) mit (5.17)

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ H_C \\ V_C \\ H_D \\ V_D \\ H_F \\ V_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_1 + Q_2 \\ aQ_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Programmpakete wie MATLAB stellen Verfahren zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme vom Typ (5.20) zur Verfügung. Dazu müssen allerdings die geometrischen Abmessungen und die Belastungen als Zahlenwerte vorgegeben werden.

Das folgende MATLAB-Beispiel

```

1 % Zahlenwerte
2 a=3;      % [m]
3 Q1=1;     % [kN]
4 Q2=2;     % [kN]
5 %
6 % Koeffizientenmatrix
7 A = [ 1   0   0   1   0   0   0   0   0   0 ; ...
8   0   1   0   0   1   0   0   0   0   0 ; ...
9   0   0   1   -a   a   0   0   0   0   0 ; ...
10  0   0   0   -1   0   1   0   0   0   0 ; ...
11  0   0   0   0   -1   0   1   0   0   0 ; ...
12  0   0   0   0   0   0   a   0   0   0 ; ...
13  0   0   0   0   0   -1   0   1   0   0 ; ...
14  0   0   0   0   0   0   -1   0   1   0 ; ...
15  0   0   0   0   a   a   0   0   0   0 ]; ...
16 %
17 % Rechte Seite
18 b=[0; 0; 0; 0; Q1+Q2; a*Q2; 0; 0; 0];
19 %
20 % Loesung
21 x = A\b;

```

liefert mit

$$x = 2 \quad 1 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2$$

ein Ergebnis, das wie erwartet mit der Lösung (5.18) übereinstimmt.

## 5.4 Räumliche Tragwerke

### 5.4.1 Allgemeines

Räumliche Tragwerke sind häufig statisch überbestimmt gelagert und können deshalb nur mit zusätzlich vereinfachenden Annahmen näherungsweise oder sehr aufwändig unter Berücksichtigung von Bauteilverformungen<sup>1</sup> berechnet werden.

Selbst wenn bei dem in Bild 5.7 dargestellten Portalkran die Lager in  $A$  und  $B$  jeweils als Kugelgelenke und die

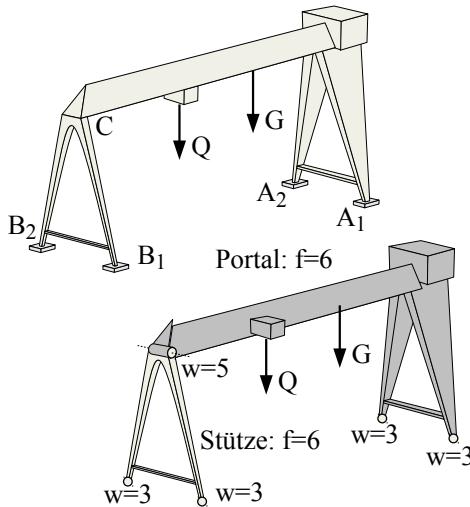


Bild 5.7: Prinzipskizze und räumliches Modell eines Portalkranks

Verbindung zwischen dem Portal und der Stütze in  $C$

<sup>1</sup>Dazu wird meist die Finite Elemente Methode (FEM) verwendet.

als Scharniergelenk modelliert werden, ist das resultierende Tragwerk 5-fach statisch überbestimmt. Im Raum verfügen das Portal und die Stütze jeweils über  $f = 6$  freie Bewegungsmöglichkeiten. Ein Kugelgelenk besitzt im Raum die Wertigkeit  $w = 3$ . Ein Scharniergelenk ermöglicht lediglich eine Drehung und hat somit im Raum die Wertigkeit  $w = 5$ . Die statische Bestimmtheit ergibt hier dann  $n = 2 * 6 - (4 * 3 + 5) = -5$ , was aufgrund des negativen Wertes eine entsprechend hohe statische Überbestimmtheit ausdrückt.

Für eine Überschlagsrechnung kann jedoch ein ebenes und statisch bestimmtes Ersatzmodell verwendet werden, Bild 5.8. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Ge-

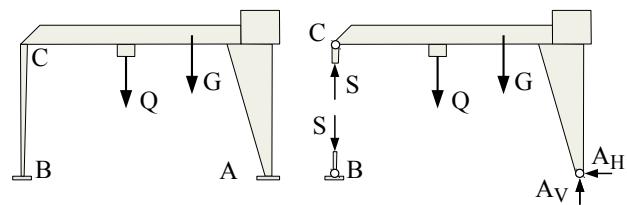


Bild 5.8: Ebenes Ersatzmodell und Freikörperbild

wicht  $G$  und die Last  $Q$  in der Mittelebene des Portalkrans angreifen und, dass die Belastung gleichmäßig auf die Lager in  $A$  und  $B$  verteilt wird. Die Stütze, die jetzt einer Pendelstütze entspricht, überträgt die Kraft  $S$  auf das Portal. Die Wirkung des Gelenklagers in  $A$  wird durch die Kraftkomponenten  $A_H$  und  $A_V$  beschrieben. Die drei Gleichgewichtsbeziehungen für das Portal reichen dann aus, um die Unbekannten  $S$ ,  $A_H$  und  $A_V$  zu bestimmen.

### 5.4.2 Beispiel Kiste auf Palette

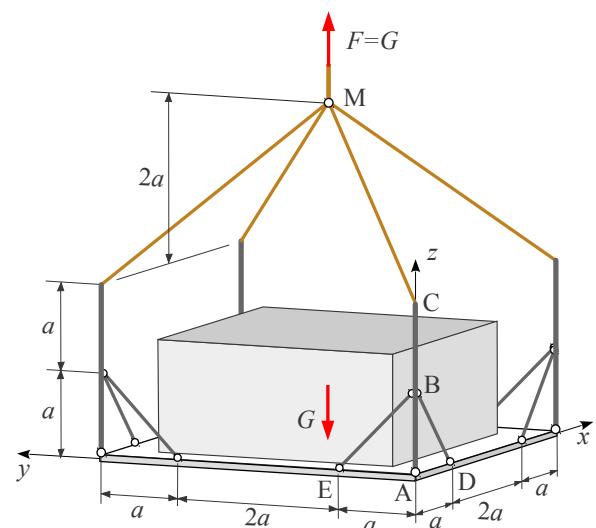


Bild 5.9: Räumliches Tragwerk

Eine Kiste mit dem Gewicht  $G$  liegt mittig auf einer Palette, Bild 5.9.

Die vier im Punkt  $M$  zusammenlaufenden Seile bilden ein zentrales Kräftesystem, Bild 5.10.

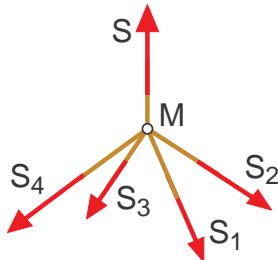


Bild 5.10: Seilknoten

Das Kräftegleichgewicht lautet

$$\vec{F} + S_1 \vec{e}_1 + S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3 + S_4 \vec{e}_4 = \vec{0}, \quad (5.21)$$

wobei die Seilkräfte  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4$  in Betrag und Richtung aufgespalten wurden und die Kraft im vertikalen Halteseil gemäß Bild 5.9 durch den Vektor

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

beschrieben werden kann. Für den Einheitsvektor in Richtung der Seilkraft  $S_1$  erhält man zum Beispiel

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_{MC} = \frac{\vec{r}_{MC}}{|\vec{r}_{MC}|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} \sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Aus (5.21) erhält man dann 3 Gleichungen für die 4 unbekannten Seilkräfte

$$\begin{aligned} -\frac{S_1}{\sqrt{3}} + \frac{S_2}{\sqrt{3}} + \frac{S_3}{\sqrt{3}} - \frac{S_4}{\sqrt{3}} &= 0, \\ -\frac{S_1}{\sqrt{3}} - \frac{S_2}{\sqrt{3}} + \frac{S_3}{\sqrt{3}} + \frac{S_4}{\sqrt{3}} &= 0, \\ G - \frac{S_1}{\sqrt{3}} - \frac{S_2}{\sqrt{3}} - \frac{S_3}{\sqrt{3}} - \frac{S_4}{\sqrt{3}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Infolge der symmetrischen Anordnung muss  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$  gelten. Aus der 3. Gleichung folgt dann

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{\sqrt{3}G}{4}. \quad (5.25)$$

Der Eckpfosten  $A-C$  wird demnach durch die Kraft

$$\vec{S}_C = -\vec{S}_1 = -S_1 \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}G \\ \frac{1}{4}G \\ \frac{1}{4}G \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

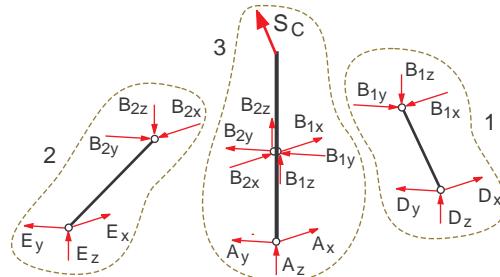


Bild 5.11: Teilsysteme

belastet. Schnitte in den Kugelgelenken  $A, B, D$  und  $E$  liefern 3 Teilsysteme mit 15 Unbekannten, Bild 5.11.

Die Gleichgewichtsbeziehungen für die 3 Teilsysteme lauten

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_{1x} \\ -B_{1y} \\ -B_{1z} \end{bmatrix} = \vec{0}, \quad (5.27)$$

$$\begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -B_{1x} \\ -B_{1y} \\ -B_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aB_{1y} \\ -aB_{1x} - aB_{1z} \\ -aB_{1y} \end{bmatrix} = \vec{0}, \quad (5.28)$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_{2x} \\ -B_{2y} \\ -B_{2z} \end{bmatrix} = \vec{0}, \quad (5.29)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -B_{2x} \\ -B_{2y} \\ -B_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aB_{2z} + aB_{2y} \\ -aB_{2x} \\ -aB_{2x} \end{bmatrix} = \vec{0}, \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G}{4} \\ \frac{G}{4} \\ \frac{G}{4} \end{bmatrix} = \vec{0}, \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{G}{4} \\ \frac{G}{4} \\ \frac{G}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA_y - a\frac{G}{4} \\ -aA_x + a\frac{G}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}, \quad (5.32)$$

wobei die Momentensummen bezüglich der Punkte  $E, B$  und  $D$  angeschrieben wurden.

Da jeweils nur zwei Momentengleichungen verwendet werden können, stehen insgesamt 15 Gleichungen zur Verfügung.

Aus (5.28), (5.30) und (5.32) erhält man

$$\begin{aligned} B_{2x} &= 0, \\ A_x &= \frac{1}{4}G, \\ A_y &= \frac{1}{4}G; \\ B_{1y} &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

und

$$\begin{aligned} B_{1z} &= -B_{1x}; \\ B_{2z} &= -B_{2y}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Damit folgt aus (5.29)

$$\begin{aligned} B_{1x} &= -\frac{1}{2}G, \\ B_{2y} &= -\frac{1}{2}G. \end{aligned} \quad (5.35)$$

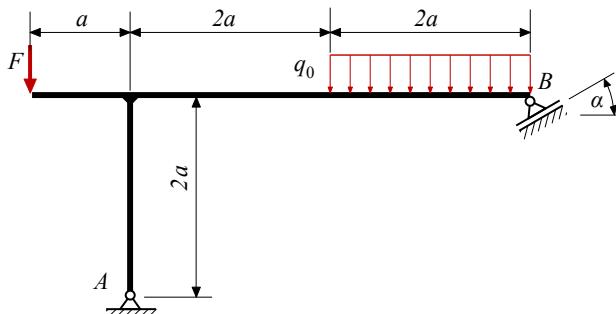
Nun können auch die restlichen Lagerreaktionen angegeben werden. Man erhält

$$\begin{aligned} B_{1z} &= \frac{1}{2}G, \\ B_{2z} &= \frac{1}{2}G, \\ A_z &= -\frac{5}{4}G, \\ E_x &= 0, \\ E_y &= -\frac{1}{2}G, \\ E_z &= \frac{1}{2}G, \\ D_x &= -\frac{1}{2}G, \\ D_y &= 0, \\ D_z &= \frac{1}{2}G. \end{aligned} \quad (5.36)$$

## 5.5 Übungen

### 5.5.1 Einfaches Tragwerk

Das skizzierte Tragwerk ist mit einer vertikalen Kraft  $F$  und der konstanten Streckenlast  $q_0$  belastet.



Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A und B.

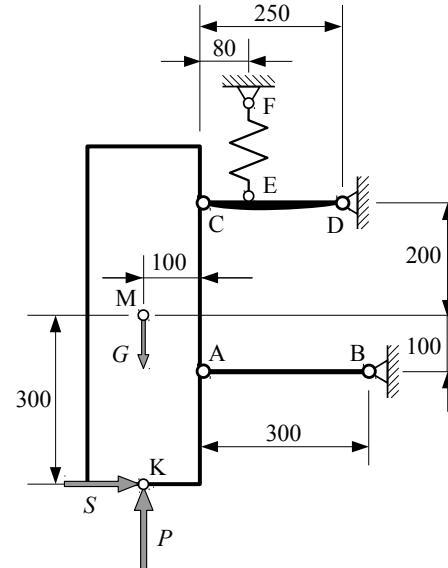
Zahlenwerte:

$$\alpha = 30^\circ; a = 1 \text{ m}; F = 4 \text{ kN}, q_0 = 2 \text{ kN/m}.$$

Lösung:

### 5.5.2 Radaufhängung

Mit dem skizzierten Modell können die Belastungen in einer Doppelquerlenkerradaufhängung abgeschätzt werden. Bei stationärer Kurvenfahrt wird das Rad im Kontaktspur K durch die Seitenkraft  $S$  und die Radlast  $P$



belastet; Das Eigengewicht des Rades ist mit  $G$  bezeichnet.

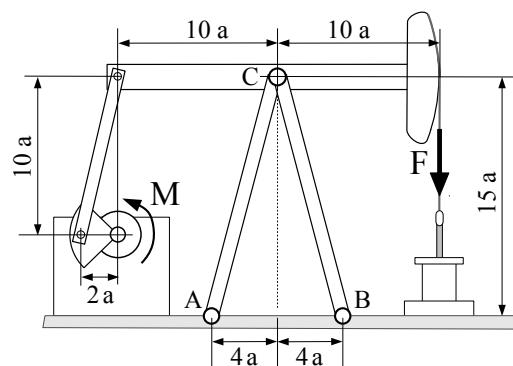
Ermitteln Sie:

- die Kraft im unteren Querlenker (Lenker A-B),
- die Belastungen in den Gelenken C und D sowie die Kraft in der Tragfeder E-F.

Lösung:

### 5.5.3 Ölpumpe

Eine Ölförderpumpe wird in der skizzierten Stellung durch die Kraft  $F$  belastet.



- Welches Antriebsmoment  $M$  ist dazu erforderlich?
- Ermitteln Sie die Lagerreaktionen in A und B.

Lösung:



# 6 Schnittreaktionen

## 6.1 Definition

### 6.1.1 Allgemein

Für Festigkeitsberechnungen werden die Belastungen im Inneren eines Bauteils benötigt.

Zerlegt man einen Körper durch einen Schnitt in zwei Teilsysteme, dann muss die Wirkung der festen Verbindung durch Schnittreaktionen, die Schnittkraft  $\vec{F}_S$  und das Schnittmoment  $\vec{M}_S$ , zum Ausdruck gebracht werden, Bild 6.1. Die Schnittkraft  $\vec{F}_S$  wird dabei zweckmäßig

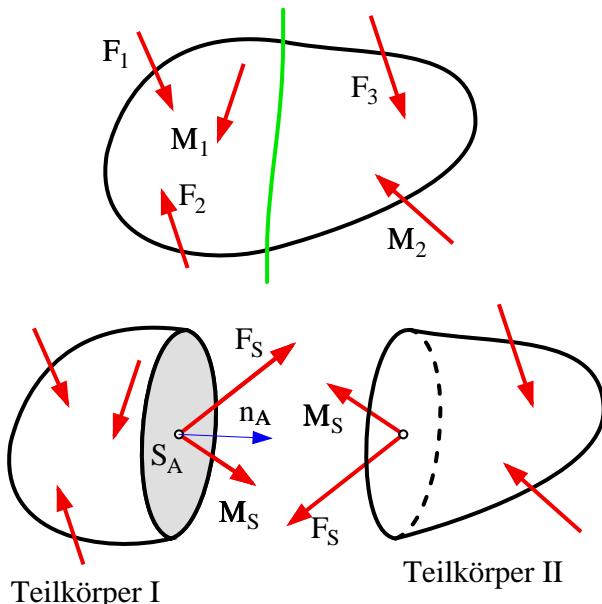


Bild 6.1: Schnittreaktionen

ßiger Weise auf den Schwerpunkt der Schnittfläche  $S_A$  bezogen.

Wenn das Gesamtsystem im Gleichgewicht ist, dann müssen auch die Teilsysteme, einschließlich der Schnittreaktionen, im Gleichgewicht sein. Damit können bei bekannter Belastung die Schnittreaktionen ermittelt werden.

### 6.1.2 Vorzeichen

Schnitte werden senkrecht zur  $x$ -Achse ausgeführt. Die Schnittfläche, bei der die  $x$ -Achse in Richtung der nach aussen zeigenden Flächennormalen zeigt, wird als positives Schnittufer bezeichnet.

Dort werden die Schnittreaktionen positiv definiert, Bild 6.2.

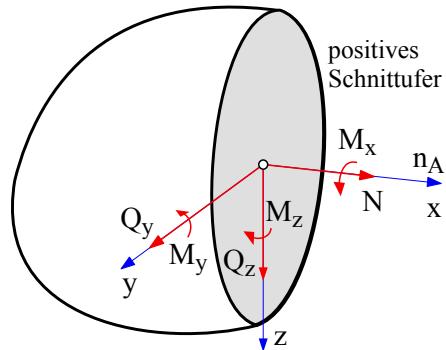


Bild 6.2: Vorzeichendefinition

Die Normalkraft  $N$  und die Querkräfte  $Q_y, Q_z$  bilden die Komponenten der Schnittkraft

$$\vec{F}_S = [N, Q_y, Q_z]^T. \quad (6.1)$$

Das Schnittmoment setzt sich aus dem Torsionsmoment  $M_x$  und den Biegemomenten  $M_y, M_z$  zusammen,

$$\vec{M}_S = [M_x, M_y, M_z]^T. \quad (6.2)$$

Am positiven Schnittufer zeigen die Komponenten der Schnittkraft in die positiven Achsrichtungen und die Komponenten des Schnittmoments versuchen, den Teilkörper um die entsprechenden Achsen zu drehen.<sup>1</sup>

## 6.2 Beispiel

Die unter dem Winkel  $\varphi$  geneigte Fahrrad-Tretkurbel wird durch die vertikale Kraft  $F$  belastet, Bild 6.3. Zur Berechnung der Schnittreaktionen wird die Tretkurbel an der Stelle  $x$  geschnitten, Bild 6.4. Das Kräfte- und Momentengleichgewicht liefert bezüglich dem Schnittflächenschwerpunkt  $S$

$$\begin{bmatrix} -F \sin \varphi \\ 0 \\ F \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = 0 \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>Dreht man die  $x$ -Achse in Richtung der  $y$ -Achse, dann wird dadurch eine positive Drehung um die  $z$ -Achse definiert. Im Sinne einer zyklischen Vertauschung definieren dann  $y$  nach  $z$  und  $z$  nach  $x$  positive Drehungen um die  $x$ - und  $y$ -Achse.

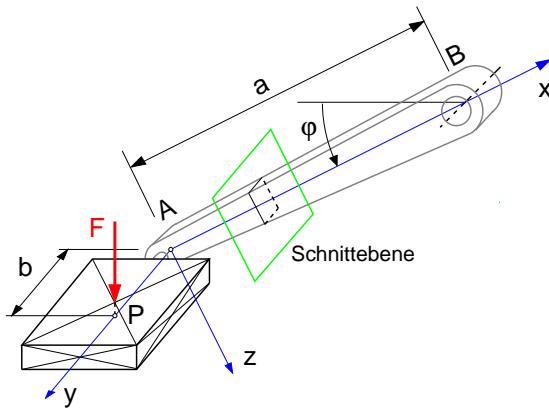


Bild 6.3: Fahrrad-Tretkurbel

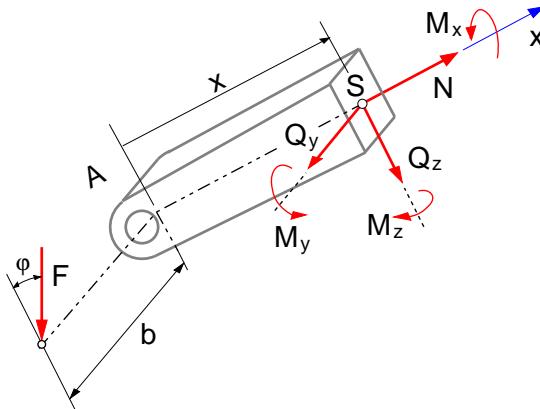


Bild 6.4: Teilsystem der Tretkurbel

und

$$\begin{bmatrix} -x \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F \sin \varphi \\ 0 \\ F \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

Die Gleichungen können sofort nach den unbekannten Schnittreaktionen aufgelöst werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} N &= F \sin \varphi, & M_x &= -b F \cos \varphi, \\ Q_y &= 0, & M_y &= -x F \cos \varphi, \\ Q_z &= -F \cos \varphi, & M_z &= -b F \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Bis auf das Biegemoment um die  $y$ -Achse sind alle Schnittreaktionen konstant, d.h. unabhängig von der Lage des Schnittes.

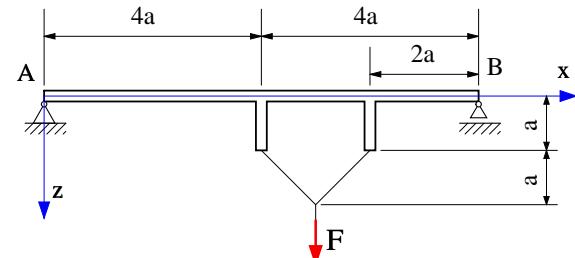


Bild 6.5: Einteiliges Tragwerk

Die Lagerreaktionen in A und B können aus dem Gleichgewicht am Gesamtsystem berechnet werden, Bild 6.6.

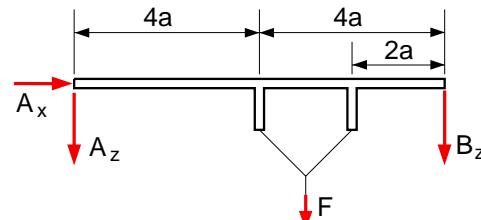


Bild 6.6: Tragwerk freigeschnitten

Man erhält

$$A_x = 0, \quad A_z = -\frac{3}{8} F, \quad B_z = -\frac{5}{8} F. \quad (6.6)$$

Mit Schnitten in den Abschnitten I, II und III, die durch die Intervalle  $0 \leq x \leq 4a$ ,  $4a \leq x \leq 6a$  und  $6a \leq x \leq 8a$  definiert sind, kann der Verlauf der Schnittreaktionen im Träger ermittelt werden, Bild 6.7. Ein Schnitt im

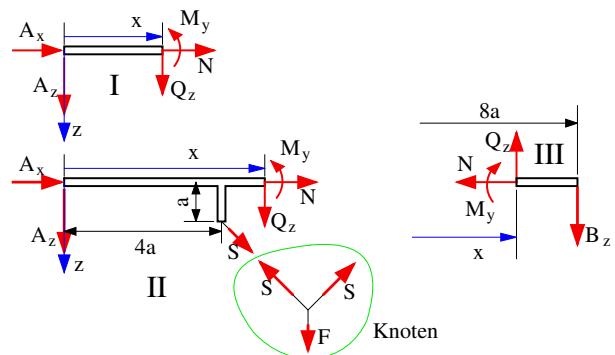


Bild 6.7: Teilsysteme

Abschnitt II durchtrennt auch das Seil. Die Seilkraft folgt aber mit

$$S = \frac{F}{2 \cos 45^\circ} = \frac{F}{\sqrt{2}} \quad (6.7)$$

Der skizzierte Träger wird über zwei gleich lange Seile durch die Kraft  $F$  belastet, Bild 6.5.

sofort aus dem Gleichgewicht am Knoten. Im Abschnitt III werden die Schnittreaktionen zweckmäßigerweise am negativen Schnittufer ermittelt.

Die Gleichgewichtsbeziehungen in den einzelnen Abschnitten liefern:

$$\begin{aligned} A_x + N &= 0, \\ A_z + Q_z &= 0, \\ M_y + x A_z &= 0; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} A_x + S_x + N &= 0, \\ A_z + S_z + Q_z &= 0, \\ M_y + x A_z + a S_x + (x - 4a) S_z &= 0; \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} -N &= 0, \\ -Q_z + B_z &= 0, \\ M_y + (8a - x) B_z &= 0; \end{aligned} \quad (6.10)$$

wobei die Komponenten der Seilkraft durch

$$S_x = S \cos 45^\circ = \frac{F}{2}, \quad S_z = S \sin 45^\circ = \frac{F}{2} \quad (6.11)$$

gegeben sind. Die Gleichungen (6.8), (6.9) und (6.10) können direkt nach den Schnittgrößen aufgelöst werden.

Für die Abschnitte I, II und III erhält man dann

$$\begin{aligned} \text{I: } N &= 0, \quad Q_z = +\frac{3}{8} F, \quad M_y = +\frac{3}{8} x F \\ \text{II: } N &= -\frac{1}{2} F, \quad Q_z = -\frac{1}{8} F, \quad M_y = -\frac{1}{8} x F + \frac{3}{2} a F \\ \text{III: } N &= 0, \quad Q_z = -\frac{5}{8} F, \quad M_y = +\frac{5}{8} (8a - x) F \end{aligned} \quad (6.12)$$

Im Bild 6.8 ist der Verlauf der Schnittgrößen  $N = N(x)$ ,  $Q_z = Q_z(x)$  und  $M_y = M_y(x)$  dargestellt.

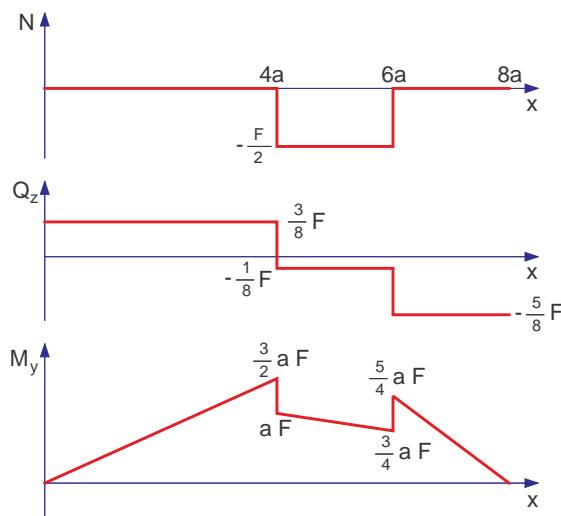


Bild 6.8: Verlauf der Schnittgrößen

Da die senkrechten Teile fest mit dem waagrechten Träger teil verbunden sind, werden an diesen Stellen Kräfte und Momente übertragen. Dies führt zu Sprüngen im Schnittgrößenverlauf.

### 6.3.2 Streckenlasten

Ein an beiden Enden gelenkig gelagerter Träger wird mit einer dreiecksförmigen Streckenlast beaufschlagt, Bild 6.9.

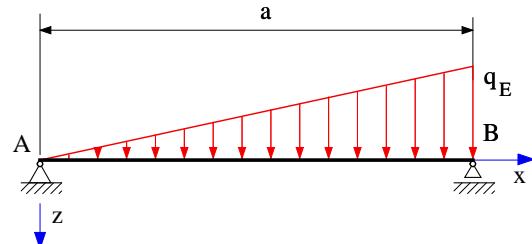


Bild 6.9: Träger mit Streckenlast

Zur Berechnung der Lagerreaktionen kann die Streckenlast durch eine äquivalente Einzelkraft ersetzt werden, Bild 6.10.

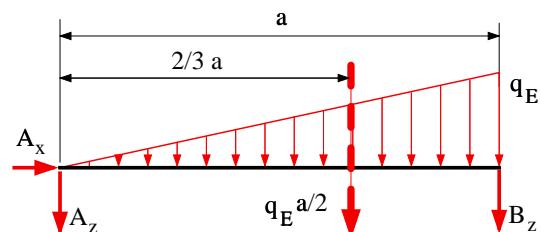


Bild 6.10: Träger freigeschnitten

Aus dem Gleichgewicht am Gesamtsystem folgt

$$A_x = 0, \quad A_z = -\frac{1}{6} q_E a, \quad B_z = -\frac{2}{6} q_E a. \quad (6.13)$$

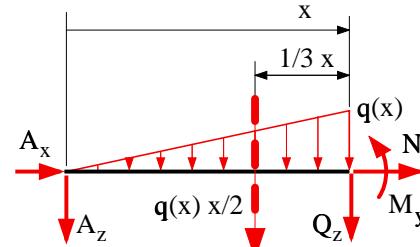


Bild 6.11: Schnitt an der Stelle x

Die Gleichgewichtsbeziehungen an einem Schnitt an der Stelle  $x$ , Bild 6.11, liefern

$$\begin{aligned} A_x + N &= 0, \\ A_z + \frac{1}{2} q(x) x + Q_z &= 0, \\ M_y + \frac{1}{2} q(x) x \frac{1}{3} x + x A_z &= 0, \end{aligned} \quad (6.14)$$

wobei die Streckenlast an der Stelle  $x$  durch die Gleichung

$$q(x) = q_E \frac{x}{a} \quad (6.15)$$

beschrieben wird. Mit (6.13) und (6.15) folgt aus (6.14)

$$\begin{aligned} N(x) &= 0, \\ Q_z(x) &= \frac{1}{6} q_E a - \frac{1}{2} q_E \frac{x^2}{a}, \\ M_y(x) &= \frac{1}{6} q_E a x - \frac{1}{6} q_E \frac{x^3}{a}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Querkraft verläuft quadratisch und das Moment wird durch ein kubisches Polynom beschrieben. Bild 6.12 zeigt die Verläufe der Schnittgrößen für die Zahlenwerte  $a = 1 \text{ m}$  und  $q_E = 1 \text{ N/m}$ .

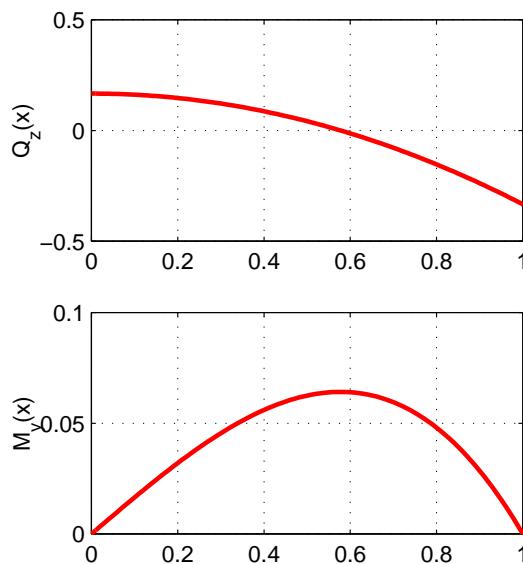


Bild 6.12: Verlauf der Schnittgrößen

Der Nullpunkt der Querkraft  $Q_z(x^*) = 0$  liegt bei  $x^* = \frac{\sqrt{3}}{3} a \approx 0.5774 a$ .

Das Maximum des Biegemomentes folgt aus der notwendigen Bedingung

$$\frac{d M_y(x)}{dx} = \frac{1}{6} q_E a - \frac{1}{2} q_E \frac{x^2}{a}. \quad (6.17)$$

Man erkennt, dass die Ableitung des Biegemomentes  $M_y$  nach der Koordinate  $x$  die Querkraft  $Q_z$  liefert. Dieser Zusammenhang gilt allgemein.

Extrema im Biegemomentenverlauf fallen also mit den Nullpunkten der Querkraft zusammen.

Das maximale Biegemoment tritt also bei  $x = x^*$  auf. Man erhält

$$M_y^{max} = M_y(x^*) = \frac{\sqrt{3}}{27} q_E a^2 \approx 0.0642 q_E a^2. \quad (6.18)$$

## 6.4 Differentielle Betrachtung

### 6.4.1 Allgemeine Betrachtung

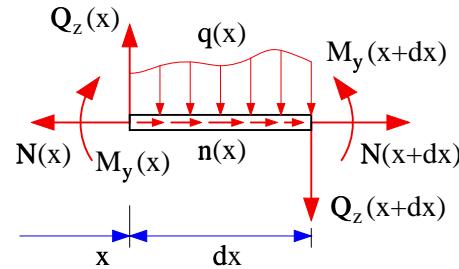


Bild 6.13: Allgemeine Zusammenhänge

Schneidet man aus einem Bauteil, das in  $x$ - und  $z$ -Richtung durch die Streckenlasten  $n(x)$  und  $q(x)$  belastet wird, an einer beliebigen Stelle  $x$  ein infinitesimal kleines Teilstück heraus, Bild 6.13, dann liefern die Gleichgewichtsbeziehungen

$$\begin{aligned} -N(x) + n(x) dx + N(x+dx) &= 0, \\ -Q_z(x) + q(x) dx + Q_z(x+dx) &= 0, \\ -M_y(x) - Q_z(x) \frac{dx}{2} \\ + M_y(x+dx) - Q_z(x+dx) \frac{dx}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (6.19)$$

wobei das Momentengleichgewicht um die Mitte des Teilstückes angesetzt wurde.

Die Schnittreaktionen  $N(x+dx)$ ,  $Q_z(x+dx)$  und  $M_y(x+dx)$  werden nun in eine Taylor-Reihe entwickelt, wobei Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned} N(x+dx) &\approx N(x) + \frac{d N(x)}{dx} dx, \\ Q_z(x+dx) &\approx Q_z(x) + \frac{d Q_z(x)}{dx} dx, \\ M_y(x+dx) &\approx M_y(x) + \frac{d M_y(x)}{dx} dx. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Eingesetzt in (6.19) bleibt

$$\begin{aligned} \frac{d N(x)}{dx} &= -n(x), \\ \frac{d Q_z(x)}{dx} &= -q(x), \\ \frac{d M_y(x)}{dx} &= Q_z(x), \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei in der Momentensumme die quadratischen Terme mit  $dx^2$  gegenüber den linearen Termen mit  $dx$  vernachlässigt wurden.

## 6.4.2 Beispiel

Mit den Beziehungen (6.21) kann das Beispiel in Abschnitt 6.3.2 auf analytischem Wege gelöst werden. Wegen  $n(x) = 0$  erhält man zunächst

$$\frac{d N(x)}{dx} = 0, \quad \text{bzw.} \quad N(x) = N_0 = \text{const.} \quad (6.22)$$

Mit  $q(x)$  gemäß (6.15) liefert die zweite Gleichung in (6.21)

$$\frac{d Q_z(x)}{dx} = -q_E \frac{x}{a}. \quad (6.23)$$

Nach einer unbestimmten Integration bleibt

$$Q_z(x) = -q_E \frac{x^2}{2a} + Q_0, \quad (6.24)$$

wobei mit  $Q_0$  die Integrationskonstante bezeichnet wurde. Mit (6.24) erhält man aus der dritten Gleichung in (6.21)

$$\frac{d M_y(x)}{dx} = -q_E \frac{x^2}{2a} + Q_0. \quad (6.25)$$

Eine weitere unbestimmte Integration liefert den Momentenverlauf

$$M_y(x) = -q_E \frac{x^3}{6a} + Q_0 x + M_0, \quad (6.26)$$

wobei  $M_0$  wieder die Integrationskonstante bezeichnet.

Die unbestimmten Verläufe müssen nun an die problemspezifischen Randbedingungen angepaßt werden.

Das verschiebbliche Lager in B kann keine horizontalen Kräfte aufnehmen. An der Stelle  $x=a$  muss folglich die Normalkraft verschwinden,  $N(x=a)=0$ . Damit kann die Integrationskonstante in (6.22) berechnet werden. Im vorliegenden Fall erhält man  $N_0=0$ .

Der Träger ist an beiden Seiten gelenkig gelagert. Dort können keine Momente übertragen werden. An den Stellen  $x=0$  und  $x=a$  muss deshalb das Moment verschwinden. Aus  $M_y(x=0)=0$  folgt sofort  $M_0=0$  und die Forderung  $M_y(x=a)=0$

$$0 = -q_E \frac{a^3}{6a} + Q_0 a + M_0 \quad (6.27)$$

liefert mit  $M_0=0$  Integrationskonstante

$$Q_0 = \frac{1}{6} q_E a. \quad (6.28)$$

Damit ist neben dem Momentenverlauf  $M_y(x)$  auch der Querkraftverlauf  $Q_z(x)$  festgelegt.

## 6.4.3 Randbedingungen

Mit Randbedingungen werden die allgemeinen Verläufe der Schnittreaktionen an die jeweilige Problemstellung angepasst.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $N_0$  genügt es, die Normalkraft an einer Stelle zu kennen. Die Konstanten  $Q_0$  und  $M_0$  können entweder aus zwei Momentenbedingungen oder aus einer Querkraft- und einer Momentenbedingung ermittelt werden.

Abhängig von der Lagerung eines Bauteils können an den Enden meist einfache Randbedingungen formuliert werden, Tabelle 6.1.

Stelle $x=x_R$	$N(x_R)$	$Q_z(x_R)$	$M_y(x_R)$
freies Ende	0	0	0
versch. Gelenk	0	?	0
festes Gelenk	?	?	0
feste Einspannung	?	?	?

Tabelle 6.1: Randbedingungen

## 6.4.4 Unstetigkeiten

Voraussetzung für die Lösung der Integrale

$$N(x) = - \int n(x) dx + N_0, \quad (6.29)$$

$$Q_z = - \int q(x) dx + Q_0, \quad (6.30)$$

und

$$\begin{aligned} M_y &= + \int Q_z(x) dx + M_0 \\ &= - \int \int q(x) dx dx + Q_0 x + M_0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

ist, dass die Streckenlasten  $n(x)$  und  $q(x)$  zumindest abschnittsweise stetig sind.

Bei sprunghaften Änderungen der Streckenlasten oder an Stellen wo Kräfte und Momente eingeleitet werden, muss neu aufgesetzt werden.

Die Auswirkungen von sprunghaften Belastungsänderungen auf den Verlauf der Schnittgrößen  $Q_z$  und  $M_y$  sind in der Tabelle 6.2 zusammengestellt.

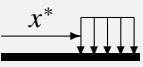
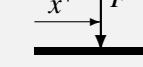
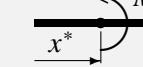
Belastung	$Q_z(x^*)$	$M_y(x^*)$
	Knick einmal differenzierbar	
	Sprung Knick	
	—	Sprung

Tabelle 6.2: Belastungssprünge

Belastungsänderungen in Querrichtung ( $z$ -Achse) und ihre Konsequenzen auf die Querkraft  $Q_z(x)$  gelten in analoger Weise auch für Belastungsänderungen in Längsrichtung ( $x$ -Achse) und ihre Konsequenzen auf die Normalkraft  $N(x)$ .

## 6.5 Mehrteilige Tragwerke

### 6.5.1 Rahmentragwerk

Das im Bild 6.14 skizzierte Rahmentragwerk wird durch die konstante Streckenlast  $q_0$  und die Einzelkraft  $F$  belastet. Zur Berechnung der Lagerreaktionen wird das

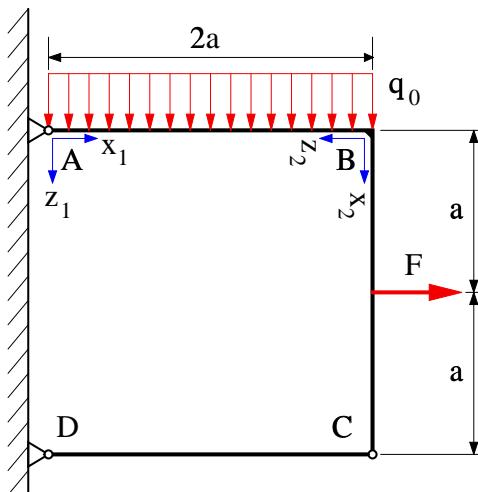


Bild 6.14: Rahmentragwerk

Tragwerk an den Lagern in A und D sowie im Gelenk C freigeschnitten, Bild 6.15. In einem globalen Koordinatensystem mit Achsen in horizontaler und vertikaler

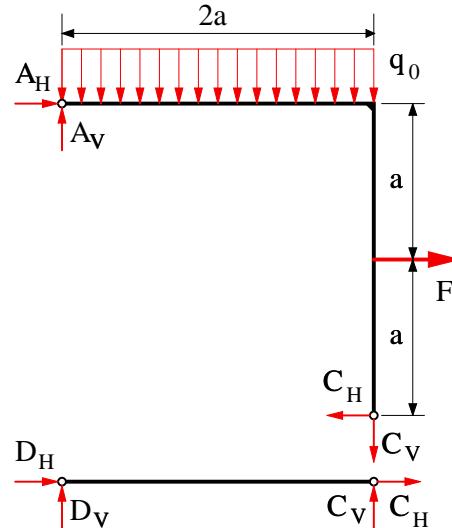


Bild 6.15: Rahmen freigeschnitten

Richtung lauten die Gleichgewichtsbeziehungen für die zwei Teilsysteme

$$\begin{aligned} A_H + F - C_H &= 0, \\ A_V - q_0 \cdot 2a - C_V &= 0, \\ a q_0 \cdot 2a - a F + 2a C_H + 2a C_V &= 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

und

$$\begin{aligned} D_H + C_H &= 0, \\ D_V + C_V &= 0, \\ 2a C_V &= 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt sofort

$$C_V = 0 \quad \text{und} \quad D_V = 0. \quad (6.34)$$

Das Teilstück CD stellt also eine Pendelstütze dar, die nur Kräfte in horizontaler Richtung überträgt. Mit (6.34) erhält man aus (6.32)

$$\begin{aligned} C_H &= \frac{F}{2} - q_0 a, \\ A_H &= -\frac{F}{2} - q_0 a, \\ A_V &= q_0 \cdot 2a \end{aligned} \quad (6.35)$$

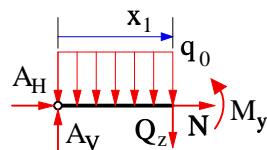
und aus der ersten Gleichung in (6.33) folgt noch

$$D_H = -C_H = -\frac{F}{2} + q_0 a. \quad (6.36)$$

Ein Schnitt im oberen Teil des Rahmens, Das Bild 6.16, liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_H + N &= 0, \\ -A_V + q_0 x_1 + Q_z &= 0, \\ M_y + \frac{x_1}{2} q_0 x_1 - x_1 A_V &= 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Bei Schnitten im vertikalen Teil, die oberhalb und unterhalb der Kraft  $F$  geführt werden, Bild 6.17, ist es



Die Pendelstütze, der untere Teil des Rahmens, ist querkraft- und momentenfrei.

Bild 6.16: Schnitt im oberen Teil

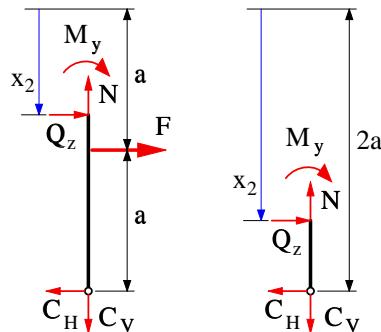


Bild 6.17: Schnitte im vertikalen Teil

vorteilhaft das Gleichgewicht für das negative Schnittufer anzusetzen. Man erhält

$$\begin{aligned} -N + C_V &= 0 \\ -Q_z - F + C_H &= 0 \\ -M_y + (a-x_2)F - (2a-x_2)C_H &= 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} -N + C_V &= 0 \\ -Q_z + C_H &= 0 \\ -M_y - (2a-x_2)C_H &= 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Das untere Rahmenteil wird wegen  $C_V = D_V = 0$  nur durch die Normalkraft  $N = C_H = \frac{F}{2} - q_0 a$  belastet.

Im Bild 6.18 sind für die Zahlenwerte  $q_0 = 10 \text{ kN/m}$ ,  $F = 24 \text{ kN}$  und  $a = 2 \text{ m}$  die Schnittgrößen über dem Rahmen aufgetragen.

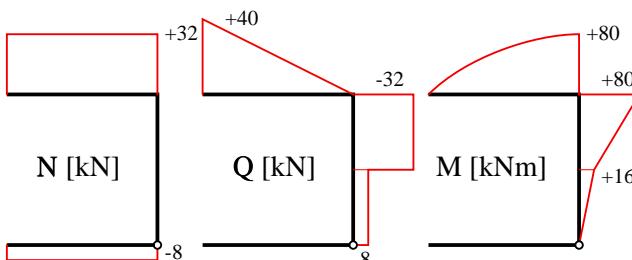


Bild 6.18: Verlauf der Schnittgrößen

Die konstante Streckenlast  $q_0$  führt im oberen Teil zu einem linearen Verlauf der Querkraft und damit zu einem quadratischen Verlauf des Biegemoments. An der Stelle, wo die Kraft  $F$  eingeleitet wird, tritt im Querkraftverlauf ein Sprung und im Momentenverlauf ein Knick auf.

## 6.5.2 Gekrümmte Abschnitte

Eine Bogenlampe besteht aus einem geraden und einem kreisförmig gebogenem Abschnitt, Bild 6.19.

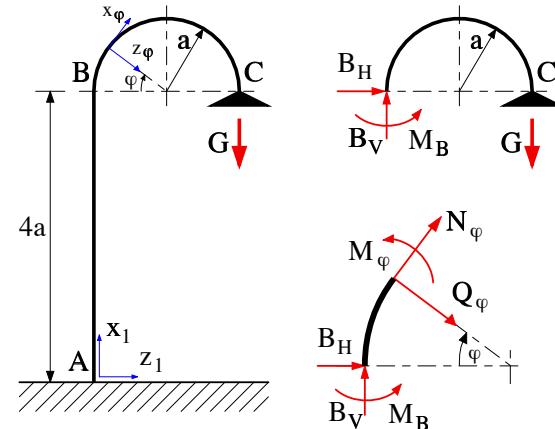


Bild 6.19: Bogenlampe

### Das Kräftegleichgewicht am Bogen

$$\begin{aligned} B_H &= 0, \\ B_V - G &= 0, \\ M_B - 2aG &= 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

liefert die Schnittreaktionen an der Übergangsstelle zwischen dem geraden und dem gebogenen Teilstück. Ein Schnitt senkrecht zum Bogen unter dem Winkel  $\varphi$  legt die Schnittreaktionen  $N_\varphi$ ,  $Q_\varphi$  und  $M_\varphi$  frei. Die Gleichgewichtsbeziehungen am Bogenstück lauten

$$\begin{aligned} B_H + Q_\varphi \cos \varphi + N_\varphi \sin \varphi &= 0, \\ B_V - Q_\varphi \sin \varphi + N_\varphi \cos \varphi &= 0, \\ M_\varphi + M_B - a B_V - a N_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

wobei das Momentengleichgewicht um die Bogenmitte angesetzt wurde. Die beiden ersten Gleichungen in (6.41) können nach  $N_\varphi$  und  $Q_\varphi$  aufgelöst werden. Dazu wird zunächst die erste Gleichung mit dem Faktor  $\sin \varphi$  und die zweite mit dem Faktor  $\cos \varphi$  multipliziert. Bei der anschließenden Addition heben sich die Anteile mit  $Q_\varphi$  heraus. Mit den Ergebnissen aus (6.40) bleibt

$$N_\varphi = -G \cos \varphi. \quad (6.42)$$

In analoger Weise kann auch  $N_\varphi$  eliminiert werden und man erhält

$$Q_\varphi = G \sin \varphi. \quad (6.43)$$

Aus der dritten Gleichung folgt schließlich das Moment

$$M_\varphi = -aG(1 + \cos\varphi). \quad (6.44)$$

Die Ergebnisse sind im Bild 6.20 aufgetragen.

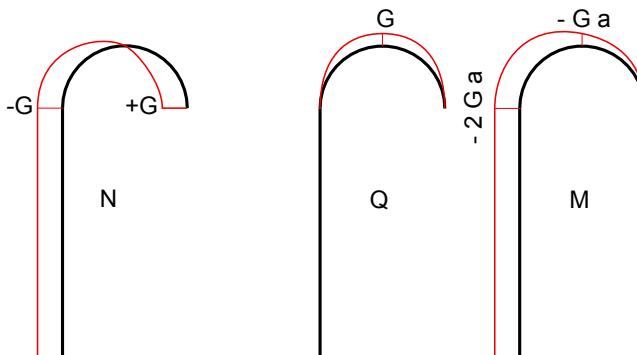


Bild 6.20: Verlauf der Schnittgrößen

Auf Grund der rein vertikalen Belastung ist hier das gerade Teilstück querkraftfrei.

## 6.6 Übungen

### 6.6.1 Absperrhahn

Der verklemmte Absperrhahn an einem Rohr der Länge  $5a$  soll wie skizziert durch einen zweiarmigen Schlüssel, der an den Enden durch entgegengesetzte gerichtete Kräfte der Größe  $F$  belastet wird, gelöst werden. Die Befestigung in  $A$  und  $B$  kann dabei in erster Näherung durch ideale Gelenke angenähert werden.

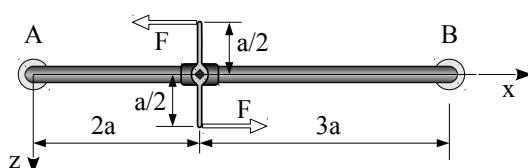


Bild 6.21: Rohrleitung

Skizzieren Sie im Rohrabschnitt  $0 \leq x \leq 5a$  den Verlauf der Querkraft  $Q_z$  und des Biegemomentes  $M_y$  und geben Sie deren Extremwerte an.

### 6.6.2 Sprungbrett

Ein Sprungbrett der Länge  $7a$  ist in  $A$  und  $B$  gelenkig gelagert und wird am Ende durch die Gewichtskraft  $G$  belastet.

Skizzieren Sie für den Bereich  $0 \leq x \leq 7a$  den Verlauf der Querkraft  $Q_z = Q_z(x)$  und des Biegemomentes

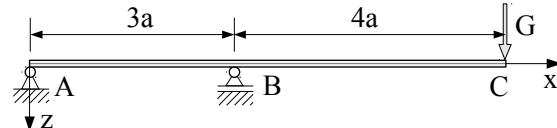


Bild 6.22: Sprungbrett

$M_y = M_y(x)$  und geben Sie deren Extremwerte an.

Lösung:

### 6.6.3 Tragwerk

Das skizzierte Tragwerk wird durch die Gewichte  $P$  und  $Q$  belastet. Die Umlenknscheiben in  $B$  und  $C$  sind reibungsfrei drehbar.

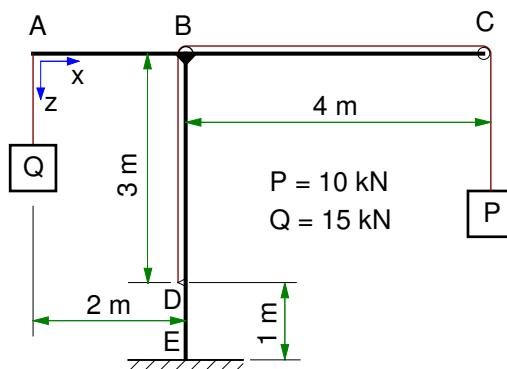


Bild 6.23: Tragwerk

Berechnen Sie die Lagerreaktionen in  $E$ . Skizzieren Sie den Verlauf der Schnittreaktionen im waagrechten Teil  $A-C$  und geben Sie die Extremwerte an.

Lösung:

### 6.6.4 Streckenlast

Eine abgesetzte Welle mit kreisförmigem Querschnitt ist wie skizziert gelagert. Das Eigengewicht der Welle ist als Streckenlast zu betrachten.

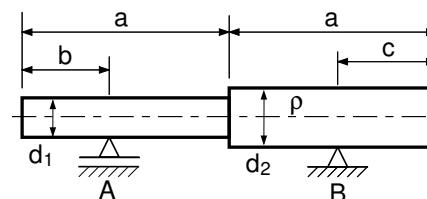


Bild 6.24: Tragwerk

Zahlenwerte:  $a = 2\text{ m}$ ,  $b = 0.8\text{ m}$ ,  $c = 0.6\text{ m}$ ;  $d_1 = 0.2\text{ m}$ ,  $d_2 = 0.3\text{ m}$ ;  $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Berechnen Sie die Lagerreaktionen in  $A$  und  $B$ . Skizzieren Sie den Verlauf der Schnittgrößen und geben Sie deren Extremwerte an.

Lösung:

# 7 Reibung

## 7.1 Allgemeines

### 7.1.1 Kontaktkraft

Der Kontakt zweier starrer Körper erfolgt in der Regel in einem Punkt, Bild 7.1. Im Berührpunkt  $P$  stimmen die Tangentialebenen an die äußere Kontur der Körper überein. Der Normalenvektor  $n$  beschreibt die räumliche Lage der Berührebene. An der Kontaktstelle können die

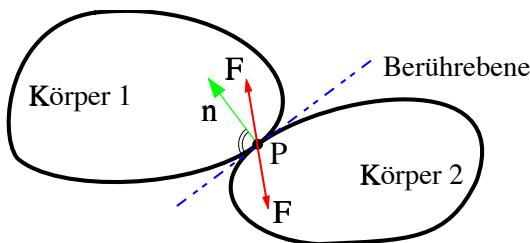


Bild 7.1: Kontaktkraft

beiden Körper die Kontaktkraft  $F$  übertragen. Mit dem Normalenvektor  $n$  kann die Kontaktkraft  $F$  in Komponenten zerlegt werden, Bild 7.2

$$\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_R . \quad (7.1)$$

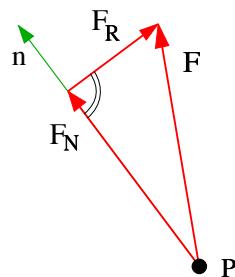


Bild 7.2: Normalkraft und Reibkraft

Die Normalkraft  $F_N$  ist eine Reaktionskraft, da die starren Körper an der Berührstelle Bewegungen in Richtung von  $n$  verhindern, die zu Deformationen der Körper ( $F_N \geq 0$ !) führen würden.

In der Regel lassen sich die beiden Körper nicht ohne Widerstand senkrecht zu  $n$  bewegen. Dieser Widerstand wird durch die Reibkraft  $F_R \neq 0$  beschrieben.

### 7.1.2 Reibungsgesetze

Die Reibkraft hängt von einer Vielzahl physikalischer Eigenschaften ab. Die wichtigsten Parameter sind die Normalkraft, die Rauigkeit der Oberflächen, die Gleitgeschwindigkeit und die Temperatur.

Der qualitative Verlauf der Reibkraft  $F_R$  als Funktion der Gleitgeschwindigkeit  $v_G$  für die Paarung Gummi/Asphalt ist im Bild 7.3 aufgetragen. Die Funktion

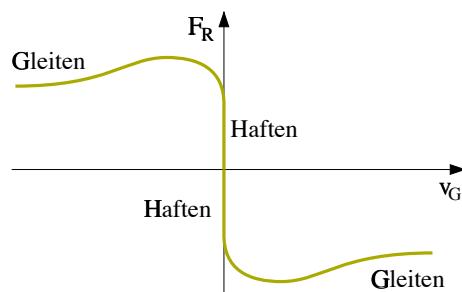


Bild 7.3: Reibkraft

$F_R = F_R(v_G)$  ist im Haftbereich ( $v_G = 0$ ) mehrdeutig. Die maximale Reibkraft ist in der Regel größer als die Gleitkraft.

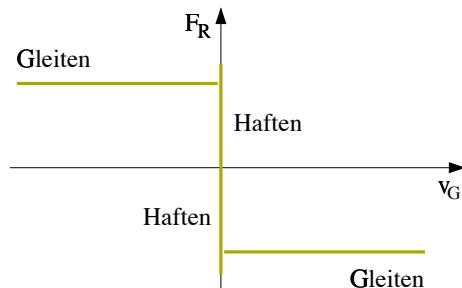


Bild 7.4: Coulombsche Reibung

Bei vielen Materialpaarungen kann das Reibungsgesetz durch die Coulombsche Reibung<sup>1</sup> approximiert werden, Bild 7.4.

Man unterscheidet hier zwei Bereiche. Im Haftbereich ( $v_G = 0$ ) verhindert die Reibkraft Relativbewegungen der Körper in der Berührebene. Hier ist die Reibkraft eine Reaktionskraft, die durch die Ungleichung

$$|F_R^H| \leq \mu_H F_N \quad (7.2)$$

<sup>1</sup> Charles Augustin Coulomb, französischer Physiker und Ingenieuroffizier, 14.06.1736 – 23.08.1806

eingeschränkt wird. Im Gleitbereich ( $v_G \neq 0$ ) wird die Reibkraft durch die Funktion

$$F_R^G = -\mu_G F_N \frac{v_G}{|v_G|} \quad (7.3)$$

beschrieben. Die Gleitkraft  $F_R^G$  ist der Gleitgeschwindigkeit  $v_G$  entgegengerichtet.

Die Reibungsbeiwerte  $\mu_H$  für Haften und  $\mu_G$  für Gleiten beschreiben die Rauigkeit der Oberflächen. In der Regel gilt  $\mu_H > \mu_G$ .

## 7.2 Statisch bestimmte Systeme

### 7.2.1 Einsetzende Bewegung

Ein kegelförmiger Behälter mit der Höhe  $h$  und dem Gewicht  $G$  steht auf einer horizontalen Ebene. Die Grundfläche des Kegels hat den Radius  $r$  und der Reibwert zwischen dem Behälter und der Unterlage ist mit  $\mu$  gegeben. Der Behälter wird mit der Kraft  $F$  belastet, die unter dem Winkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen geneigt ist, Bild 7.5a. Solange der Behälter weder rutscht noch

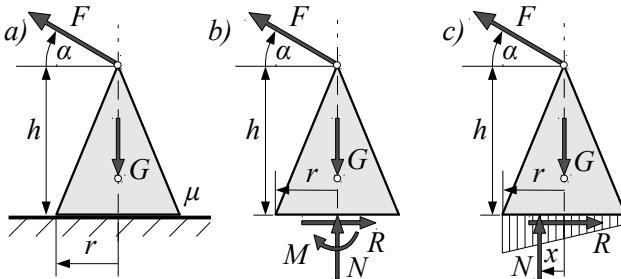


Bild 7.5: Körper auf auf horizontaler Ebene:

- a) Ersatzmodell,
- b) konventionelles und
- c) problemangepassten Freikörperbild

kippt, muss der Kontakt zwischen dem Behälter und der Unterlage als feste Einspannung betrachtet werden, Bild 7.5b. Das Einspannmoment kann in seiner Wirkung durch eine exzentrisch angreifende Normalkraft ersetzt werden

$$M \equiv N x, \quad (7.4)$$

wobei  $N$  als Resultierende einer über die Aufstandsfläche ungleichmäßig verteilten Druckbelastung aufgefasst wird und  $x$  die Lage der Wirkungslinie von  $N$  angibt, Bild 7.5c. Die Gleichgewichtsbeziehungen

$$\begin{aligned} R - F \cos \alpha &= 0, \\ N - G + F \sin \alpha &= 0, \\ x N - h F \cos \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

können sofort nach  $R$ ,  $N$  und  $x$  aufgelöst werden

$$\begin{aligned} R &= F \cos \alpha, \\ N &= G - F \sin \alpha, \\ x &= \frac{h F \cos \alpha}{G - F \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Da der Behälter mit der Unterlage nicht verklebt ist, kann die Normalkraft per Definition nur positive Werte annehmen

$$N \geq 0 \quad (7.7)$$

und als Resultierende der Druckbelastung nur innerhalb der Aufstandsfläche angreifen

$$-r \leq x \leq r. \quad (7.8)$$

Schließlich muss noch die Reibungsgleichung

$$|R| \leq \mu N \quad (7.9)$$

beachtet werden. Der Behälter bleibt folglich nur dann in Ruhe, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{kein Abheben: } F &\leq \frac{G}{\sin \alpha} \\ \text{kein Rutschen: } F &\leq \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \\ \text{kein Kippen: } F &\leq \frac{r G}{h \cos \alpha + r \sin \alpha} \end{aligned} \quad (7.10)$$

erfüllt sind, wobei  $F \geq 0$  und  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  vorausgesetzt wurde. Im Augenblick, da der Behälter nach links kippt, greift die Normalkraft an der linken Behälterkante an. Die Momentenbilanz um diesen Drehpunkt liefert mit

$$\underbrace{h F \cos \alpha + r F \sin \alpha}_{\sum \text{kippende Momente}} = \underbrace{r G}_{\sum \text{rückstellende Momente}} \quad (7.11)$$

die Kippbedingung auf einen direkten und allgemein anwendbaren Weg.

### 7.2.2 Erforderliche Reibwerte

Eine Platte mit dem Gewicht  $G_1$  stützt sich, wie skizziert, auf einem Stab mit dem Gewicht  $G_2$  ab, Bild 7.6. Beim Freischneiden werden die Kontaktkräfte in  $A$ ,  $B$  und  $C$  in Komponenten normal zur Berührungsfläche  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $N_C$  und in Berührungsfläche  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  zerlegt, Bild 7.7. Die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Körper liefern

$$\begin{aligned} R_A + R_C \cos \alpha - N_C \sin \alpha &= 0, \\ N_A - G_1 + N_C \cos \alpha + R_C \sin \alpha &= 0, \\ -G_1 s_1 \cos \alpha + N_C a &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

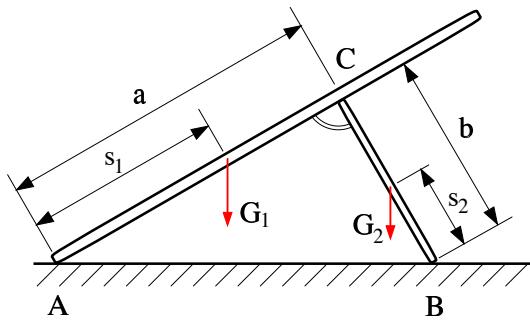


Bild 7.6: Abgestützte Platte

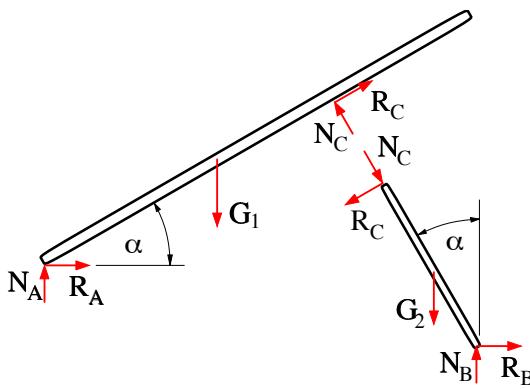


Bild 7.7: Platte und Stab freigeschnitten

und

$$\begin{aligned} R_B - R_C \cos \alpha + N_C \sin \alpha &= 0, \\ N_B - G_2 - N_C \cos \alpha - R_C \sin \alpha &= 0, \quad (7.13) \\ G_2 s_2 \sin \alpha + R_C b &= 0, \end{aligned}$$

wobei der Winkel  $\alpha$  durch

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad (7.14)$$

bestimmt ist. Aus den Momentenbeziehungen erhält man sofort

$$\begin{aligned} N_C &= G_1 \cos \alpha \frac{s_1}{a}, \\ R_C &= -G_2 \sin \alpha \frac{s_2}{b}, \quad (7.15) \end{aligned}$$

Über die Reibungsgleichung (7.2) kann nun der erforderliche Reibwert im Berührpunkt C ermittelt werden. Aus

$$|R_C| \leq \mu_C N_C \quad (7.16)$$

folgt mit (7.15) und unter Verwendung von (7.14)

$$\mu_C \geq \frac{G_2}{G_1} \frac{s_2}{s_1}. \quad (7.17)$$

Mit  $N_C$  und  $R_C$  können die beiden ersten Gleichungen in (7.12) und (7.13) nach  $R_A$  und  $N_A$  bzw. nach  $R_B$  und  $N_B$  aufgelöst werden. Damit können dann auch für die Berührpunkte A und B die erforderlichen Reibwerte ermittelt werden.

### 7.2.3 Gleichgewichtsbereiche

Die Last  $Q$  und das Gewicht  $G$  sind durch ein Seil verbunden, Bild 7.8. Die Umlenk scheibe ist reibungsfrei

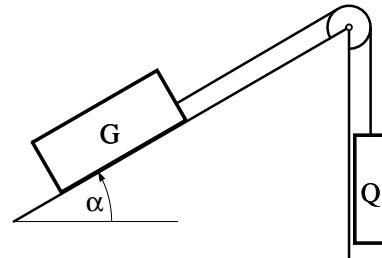


Bild 7.8: Gewicht auf schiefer Ebene

drehbar. Die Reibung zwischen Gewicht und schiefer Ebene wird durch den Haftbeiwert  $\mu_0$  beschrieben.

Die wesentlichen Gleichgewichtsbeziehungen für die beiden Teilkörper Gewicht und Last lauten, Bild 7.9

$$\begin{aligned} -Q + S &= 0, \\ N - G \cos \alpha &= 0, \\ R + S - G \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

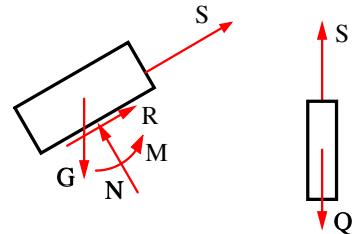


Bild 7.9: Last und Gewicht freigeschnitten

Schließt man ein Kippen des Gewichtes  $G$  aus, dann wird die Momentensumme, mit der das Reaktionsmoment  $M$  bestimmt werden kann, gar nicht benötigt. Im sinnvollen Winkelbereich  $0 < \alpha < 90^\circ$  ist die Normalkraft stets positiv,  $N > 0$ . Die Reibungsgleichung lautet

$$\underbrace{|G \sin \alpha - Q|}_{R} \leq \mu_0 \underbrace{G \cos \alpha}_{N}. \quad (7.19)$$

Die Betragsungleichung (7.19) muss bereichsweise gelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \frac{Q}{G} &\leq \mu_0 \cos \alpha \quad \text{für } \sin \alpha - \frac{Q}{G} \geq 0, \\ -(\sin \alpha - \frac{Q}{G}) &\leq \mu_0 \cos \alpha \quad \text{für } \sin \alpha - \frac{Q}{G} < 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

wobei die Gleichungen mit  $G$  durchdividiert wurden.

Die Ungleichungen in (7.20) können zu einer Bereichsungleichung zusammengefasst werden

$$\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha \leq \frac{Q}{G} \leq \sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha . \quad (7.21)$$

Das System ist im Gleichgewicht, wenn die Reibungsungleichung (7.19) erfüllt ist. Dies ist der Fall, wenn  $Q/G$  in dem durch (7.21) festgelegten Bereich liegt. Dieser Sachverhalt kann auch grafisch veranschaulicht werden. Dazu wird die Ungleichung (7.21) etwas umgeformt. Nach der Subtraktion des Terms  $\sin \alpha$  und der Multiplikation mit  $G$  erhält man

$$-\mu_0 G \cos \alpha \leq Q - G \sin \alpha \leq +\mu_0 G \cos \alpha , \quad (7.22)$$

wobei die Ausdrücke  $G \sin \alpha$  den Hangabtrieb  $H$  und  $G \cos \alpha$  die Normalkraft  $N$  angeben. Ersetzt man den Reibwert  $\mu_0$  mit

$$\tan \rho_0 = \mu_0 \quad (7.23)$$

durch den Reigungswinkel  $\rho_0$ , dann kann die Reibkraft  $R = \pm \mu_0 G \cos \alpha = \pm G \cos \alpha \tan \rho_0$  und damit auch der gesamte Gleichgewichtsbereich grafisch dargestellt werden, Bild 7.10.

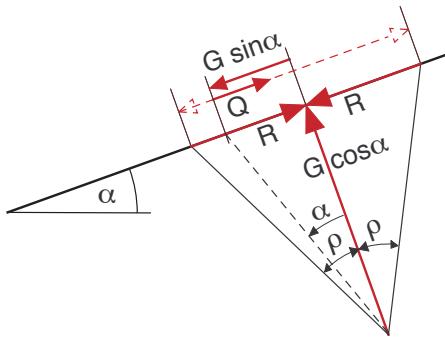


Bild 7.10: Reigungswinkel

## 7.2.4 Selbsthemmung

Im Bild 7.11 ist eine einfache Backenbremse dargestellt. Der in  $A$  drehbar gelagerte Hebel wird am Ende mit der Kraft  $F$  belastet und presst die Bremsbacke auf die Trommel. Die dadurch entstehende Reibungskraft hält die Last  $Q$  im Gleichgewicht. Für eine erste Abschätzung wird angenommen, dass die über den Bremsklotz verteilten Kontaktkräfte in der resultierenden Normalkraft  $N$  und der resultierenden Reibkraft  $R$  zusammengefasst werden können. Die Gleichgewichtsbeziehungen für die beiden Teilsysteme liefern dann

$$\begin{aligned} B_H + R &= 0, \\ B_V - Q - N &= 0, \\ rQ - rR &= 0, \end{aligned} \quad (7.24)$$

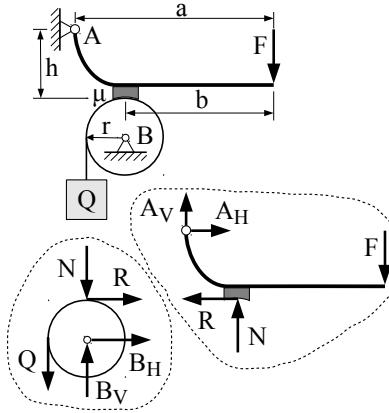


Bild 7.11: Backenbremse mit Freikörperbild

$$\begin{aligned} A_H - R &= 0, \\ N + A_V - F &= 0, \\ aF + hR - (a - b)N &= 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Da die Summe der Momente auf die Lager in  $A$  und  $B$  bezogen wurde, können  $R$  und  $N$  unabhängig von den Lagerreaktionen  $A_H$ ,  $A_V$ ,  $B_H$  und  $B_V$  ermittelt werden. Der dritten Gleichung in (7.24) entnimmt man sofort

$$R = Q . \quad (7.26)$$

Die dritte Gleichung in (7.25) kann nach der Normalkraft aufgelöst werden und liefert mit (7.26) das Ergebnis

$$N = \frac{aF + hR}{a - b} = \frac{a}{a - b}F + \frac{h}{a - b}Q . \quad (7.27)$$

Die Überprüfung der Reibungsungleichung  $|R| \leq \mu N$  führt auf

$$Q \leq \mu \left( \frac{a}{a - b}F + \frac{h}{a - b}Q \right) \quad (7.28)$$

oder

$$(a - b - \mu h)Q \leq \mu a F , \quad (7.29)$$

wobei  $a - b > 0$  vorausgesetzt wurde.

Für  $a - b \geq \mu h$  erhält man als Gleichgewichtsbedingung

$$Q \leq \frac{\mu a}{a - b - \mu h} F . \quad (7.30)$$

Dies bedeutet aber, dass schwere Lasten bei

$$Q > \frac{\mu a}{a - b - \mu h} F \quad (7.31)$$

nicht mehr gehalten werden können.

Genügen die geometrischen Abmessungen und der Reibwert der Bedingung  $a - b - \mu h < 0$ , dann liefert (7.29) das Ergebnis

$$Q \geq \frac{\mu a}{a - b - \mu h} F \quad \text{oder} \quad Q \geq -\frac{\mu a}{\mu h - (a - b)} F . \quad (7.32)$$

Selbst bei verschwindend kleiner Kraft  $F \rightarrow 0$  herrscht jetzt Gleichgewicht für beliebig große Lasten  $Q \geq 0$ . Dieser Effekt wird als Selbsthemmung bezeichnet und vielfach technisch genutzt. Elastische Bauteilverformungen und die Belastung der Lager beschränken in der Praxis die Wirkung der Selbsthemmung.

### 7.2.5 Fazit

Bei statisch bestimmten Systemen können (und sollten deshalb auch) die Reibungskräfte nach Betrag und Richtung aus den Gleichgewichtsbeziehungen berechnet werden. Aus der Reibungsungleichung folgt dann der erforderliche Reibwert. Bei gegebenem Reibwert kann auch die Sicherheit gegen Durchrutschen bestimmt werden. In den Kontaktstellen müssen die Normalkräfte als positive Druckkräfte senkrecht zur Berührfläche angetragen werden. Die Reibkräfte liegen in der Berührfläche; sie werden wie Lagerreaktionen behandelt.

Auf keinen Fall sollten bei statisch bestimmten Systemen die Reibkräfte durch ihre Grenzwerte  $R_{max} = \mu N$  ersetzt werden!

## 7.3 Statisch überbestimmtes System

### 7.3.1 Aufgabenstellung

Eine unter dem Winkel  $\alpha$  geneigte Leiter der Länge  $L$  wird an der Stelle  $x$  durch die Kraft  $G$  belastet, Bild 7.12. Die Reibwerte zwischen Leiter und Boden sowie Leiter

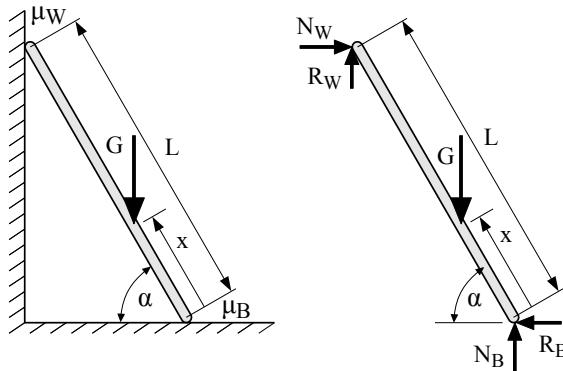


Bild 7.12: Leiter an rauer Wand und rauem Boden mit Freikörperbild

und Wand werden mit  $\mu_B$  und  $\mu_W$  bezeichnet. Unter welcher Voraussetzung bleibt die Leiter im Gleichgewicht, wenn die Person bis nach oben ( $x=L$ ) steigt?

### 7.3.2 Gleichgewichtsbeziehungen

Für die vier Unbekannten  $N_B$ ,  $R_B$ ,  $N_W$  und  $R_W$  stehen mit

$$N_W - R_B = 0, \quad (7.33)$$

$$N_B - G + R_W = 0, \quad (7.34)$$

$$x \cos \alpha G - L \cos \alpha R_W - L \sin \alpha N_W = 0, \quad (7.35)$$

zunächst nur drei Gleichungen zur Verfügung.

### 7.3.3 Sonderfälle

Bei einer glatten Wand ( $\mu_W = 0$ ) erhält man mit

$$R_W = 0 \quad (7.36)$$

eine weitere Gleichung. Unter Berücksichtigung von (7.36) folgen dann aus (7.33) bis (7.35) die Ergebnisse

$$N_B = G \quad \text{und} \quad N_W = R_B = \frac{x}{L} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} G. \quad (7.37)$$

Das Überprüfen der Reibungsungleichung am Boden liefert

$$|R_B| \leq N_B \quad \text{oder} \quad \left| \frac{x}{L} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} G \right| \leq \mu_B G. \quad (7.38)$$

Für  $0 \leq x \leq L$  und  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  ist  $R_B \geq 0$  und es bleibt als Bedingung für Gleichgewicht

$$\frac{x}{L} \leq \mu_B \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{L} \leq \mu_B \tan \alpha. \quad (7.39)$$

Damit die Leiter auch bei  $x = L$  noch im Gleichgewicht ist, muss

$$\mu_B \tan \alpha \geq 1 \quad (7.40)$$

gelten. Bei einem Reibwert von  $\mu_B = 0.5$  würde dies mit  $\tan \alpha \geq 2$  oder  $\alpha \geq 63.4^\circ$  erfüllt werden.

Bei glattem Boden ( $\mu_B = 0$ ) vervollständigt

$$R_B = 0 \quad (7.41)$$

das Gleichungssystem. Gemäß (7.33) hat das aber wegen

$$N_W = R_B \quad (7.42)$$

eine verschwindende Normalkraft zwischen Leiter und Wand zur Folge. Wegen

$$N_W = 0 \quad \text{und} \quad |R_W| \leq \mu_W N_W \quad (7.43)$$

kann dann dort auch keine Reibkraft auftreten

$$R_W = 0. \quad (7.44)$$

Mit  $N_W = 0$  und  $R_W = 0$  ist das Momentengleichgewicht (7.35) nur für  $x = 0$  erfüllt. Bei glattem Boden kann also die Leiter gar nicht erst betreten werden.

### 7.3.4 Grenzbetrachtung

Nimmt man an, dass im Grenzfall alle Reibkräfte mit

$$\begin{aligned} |R_W| &= |R_W^{\max}| = \pm \mu_w N_w \quad \text{und} \\ |R_B| &= |R_B^{\max}| = \pm \mu_B N_B \end{aligned} \quad (7.45)$$

ihre maximalen Werte erreichen, dann kann das Problem gelöst werden, wenn die Richtung und damit das Vorzeichen der Reibkräfte entgegen der im Versagensfall auftretenden Gleitbewegung in den entsprechenden Kontaktstellen angesetzt wird. Beim Abrutschen der Leiter bewegen sich die Kontaktstellen zwischen Leiter und Wand bzw. Leiter und Boden nach unten bzw. nach rechts. Die entsprechenden Reibkräfte  $R_W$  und  $R_B$  wurden im Freikörperbild schon entgegengesetzt eingezeichnet. Unmittelbar vor dem Abrutschen gilt dann

$$\begin{aligned} R_W &= +R_W^{\max} = +\mu_w N_w \quad \text{und} \\ R_B &= +R_B^{\max} = +\mu_B N_B. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Damit stehen dann neben den drei Gleichgewichtsbeziehungen (7.33), (7.34) und (7.35) noch zwei weitere Gleichungen zur Verfügung. Setzt man die Grenzwerte (7.46) in die Gleichgewichtsbeziehungen (7.33), (7.34) und (7.35) ein, dann erhält man

$$N_W - \mu_B N_B = 0, \quad (7.47)$$

$$N_B - G + \mu_w N_W = 0, \quad (7.48)$$

$$x G - L \mu_w N_W - L \tan \alpha N_W = 0, \quad (7.49)$$

wobei die Momentengleichung zur Vereinfachung durch  $\cos \alpha$  dividiert wurde. Die ersten zwei Gleichungen liefern die Normalkräfte zu

$$N_W = \frac{\mu_B}{1 + \mu_w \mu_B} G \quad \text{und} \quad N_B = \frac{1}{1 + \mu_w \mu_B} G. \quad (7.50)$$

In die Momentengleichung (7.49) eingesetzt, ergibt sich

$$x G - L \mu_w \frac{\mu_B}{1 + \mu_w \mu_B} G - L \tan \alpha \frac{\mu_B}{1 + \mu_w \mu_B} G = 0. \quad (7.51)$$

Nach geeigneter Umformung bleibt schließlich

$$\frac{x}{L} = \mu_B \frac{\mu_w + \tan \alpha}{1 + \mu_w \mu_B}. \quad (7.52)$$

Das Ergebnis schließt die Sonderfälle  $\mu_w = 0$  und  $\mu_B = 0$  ein. Damit die Leiter auch bei  $x = L$  noch im Gleichgewicht ist, muss

$$\mu_B (\mu_w + \tan \alpha) = 1 + \mu_w \mu_B \quad \text{oder} \quad \mu_B \tan \alpha = 1 \quad (7.53)$$

gelten. Der Vergleich mit (7.40) zeigt, dass die zusätzliche Reibung an der Wand bei  $x = L$  ihren Einfluss verloren.

### 7.4 Seilreibung

#### 7.4.1 Grundgleichung

Ein Seil ist um eine fest eingespannte Trommel geschlungen und wird an den Enden durch die Kräfte  $S_A$  und  $S_B$  belastet, Bild 7.13. Der Beiwert  $\mu$  beschreibt die

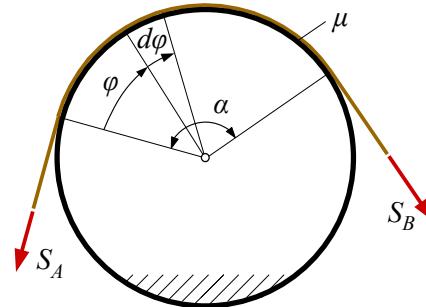


Bild 7.13: Seilreibung

Reibung zwischen Seil und Trommel. Der Umschlungswinkel  $\alpha$  kennzeichnet den Bereich, wo das Seil auf der Trommel aufliegt. Unter einer beliebigen Winkellage  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  wird nun ein Seilelement herausgeschnitten, Bild 7.14. Das Kräftegleichgewicht in radialer

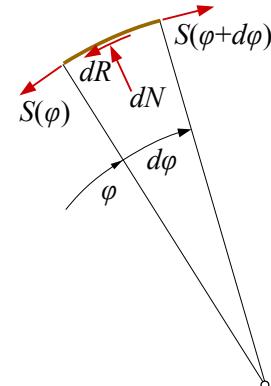


Bild 7.14: Seilausschnitt

und tangentiale Richtung liefert

$$dN - S(\varphi) \sin \frac{d\varphi}{2} - S(\varphi + d\varphi) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (7.54)$$

$$-S(\varphi) \cos \frac{d\varphi}{2} - dR + S(\varphi + d\varphi) \cos \frac{d\varphi}{2} = 0. \quad (7.55)$$

Die Seilkraft an der Stelle  $\varphi + d\varphi$  kann durch die ersten beiden Glieder einer Taylor-Reihe

$$S(\varphi + d\varphi) \approx S(\varphi) + \frac{dS}{d\varphi} d\varphi \quad (7.56)$$

angenähert werden. Mit  $d\varphi \ll 1$  und unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung bleibt dann

$$dN - S(\varphi) d\varphi = 0 \quad (7.57)$$

und

$$-dR + dS = 0. \quad (7.58)$$

Die Reibungsungleichung gilt auch für den Seilabschnitt. Aus

$$|dR| \leq \mu dN \quad (7.59)$$

folgt mit (7.57) und (7.58)

$$|dS| \leq \mu S d\varphi, \quad (7.60)$$

wobei  $S \geq 0$  vorausgesetzt wurde. Bei

$$dS \geq 0 \quad (7.61)$$

können die Betragsstriche in (7.60) weggelassen werden. Die Ungleichung (7.60) kann dann in der Form

$$\int_{S=S_A}^{S=S_B} \frac{dS}{S} \leq \mu \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} d\varphi \quad (7.62)$$

angeschrieben werden. Man erhält

$$\ln \frac{S_B}{S_A} \leq \mu \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{S_B}{S_A} \leq e^{\mu \alpha}. \quad (7.63)$$

Infolge (7.61) muss  $S_B \geq S_A$  sein. Damit kann (7.63) auch in Form einer Bereichsungleichung

$$S_A \leq S_B \leq S_A e^{\mu \alpha} \quad (7.64)$$

angeschrieben werden.

#### 7.4.2 Riemenantrieb

Bei dem im Bild 7.15 dargestellten Riemenantrieb umschlingt der Riemen die Antriebsscheibe in dem Winkelbereich  $\alpha = \pi$ .

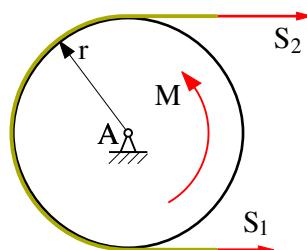


Bild 7.15: Riemenantrieb

Aus der Momentenbilanz folgt

$$S_2 = S_1 + \frac{M}{r}. \quad (7.65)$$

Damit lautet die Reibungsungleichung (7.64)

$$S_1 + \frac{M}{r} \leq S_1 e^{\mu \alpha}. \quad (7.66)$$

Daraus folgt das maximal übertragbare Moment

$$M \leq M_{max} = S_1 r (e^{\mu \alpha} - 1). \quad (7.67)$$

Um Momente übertragen zu können muss der Riemen vorgespannt werden,  $S_1 > 0$ .

Bei großen Winkelgeschwindigkeiten sind gegebenenfalls auch noch die Zentrieffugalkräfte der Riementeilchen zu berücksichtigen.

#### 7.4.3 Bandbremse

Bei einer Bandbremse, Bild 7.16, ist ein raues Band um eine Trommel geschlungen. Das Band ist an beiden Enden an einem Hebel der Länge  $a$  befestigt, der am Ende durch die Kraft  $F$  belastet wird. Der Reibwert zwischen Band und Trommel ist mit  $\mu$  gegeben. Die Trommel

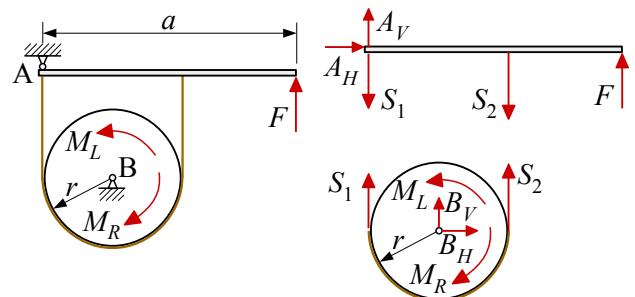


Bild 7.16: Bandbremse

wird je nach Anwendungsfall durch das Bremsmoment  $M_L$  oder  $M_R$  belastet.

Das System wird zunächst freigeschnitten. Die Gleichgewichtsbeziehungen für die Teilsysteme Hebel und Trommel liefern dann

$$\begin{aligned} A_H &= 0 \\ A_V - S_1 - S_2 + F &= 0 \\ 2r S_2 - a F &= 0 \end{aligned} \quad (7.68)$$

und

$$\begin{aligned} B_H &= 0 \\ S_1 + B_V + S_2 &= 0 \\ M_L - M_R - S_1 r + S_2 r &= 0 \end{aligned} \quad (7.69)$$

wobei beide Bremsmomente gleichzeitig berücksichtigt wurden. Die Momentengleichgewichte am Hebel und an der Trommel, jeweils die dritte Gleichung in (7.68) und (7.69), liefern die Kräfte in den Bandabschnitten zu

$$S_2 = \frac{a}{2r} F \quad \text{und} \quad S_1 = S_2 + \frac{M_L}{r} - \frac{M_R}{r} \quad (7.70)$$

Für den Lastfall  $M_L > 0$  mit  $M_R = 0$  ist  $S_1 > S_2$  und der rechte Teil der Reibungsungleichung (7.64) lautet dann

$$S_1 \leq S_2 e^{\mu \alpha} \quad (7.71)$$

Mit (7.70) ergibt sich man daraus die Beziehung

$$\frac{a}{2r} F + \frac{M_L}{r} \leq \frac{a}{2r} F e^{\mu \alpha} \quad (7.72)$$

Umgestellt erhält man

$$\frac{M_L}{r} \leq \frac{a}{2r} F (e^{\mu \alpha} - 1) \quad (7.73)$$

Wegen  $e^{\mu \alpha} - 1 > 0$  bleibt als Bedingung für ein Gleichgewicht

$$F = F_L \geq \frac{2r}{a} \frac{M_L}{r} \frac{1}{e^{\mu \alpha} - 1} \quad (7.74)$$

Der Lastfall  $M_R > 0$  mit  $M_L = 0$  hat  $S_1 < S_2$  zur Folge. Damit ist der rechte Teil der Reibungsungleichung (7.64) nun in der Form

$$S_2 \leq S_1 e^{\mu \alpha} \quad (7.75)$$

anzuschreiben. Mit (7.70) erhält man

$$\frac{a}{2r} F \leq \left( \frac{a}{2r} F - \frac{M_R}{r} \right) e^{\mu \alpha} \quad (7.76)$$

oder

$$\frac{M_R}{r} e^{\mu \alpha} \leq \frac{a}{2r} F (e^{\mu \alpha} - 1) \quad (7.77)$$

Wegen  $e^{\mu \alpha} - 1 > 0$  bleibt nun als Bedingung für ein Gleichgewicht

$$F = F_R \geq \frac{2r}{a} \frac{M_R}{r} \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1} \quad (7.78)$$

Je nach Belastungsfall werden also unterschiedliche Bremskräfte benötigt. Das Verhältnis

$$\frac{F_R}{F_L} = \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1} \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{1} = e^{\mu \alpha} \quad (7.79)$$

wächst exponentiell mit dem Reibwert  $\mu$  und dem Umschlingungswinkel  $\alpha$  an.

Die einfache Bandbremse ist somit nur für einseitige Belastungen, hier für den Belastungsfall  $M_L > 0$  mit  $M_R = 0$ , brauchbar.

Bei gegebener Betätigkraft  $F \geq F_L$  oder  $F \geq F_R$  können über (7.70) die Bandkräfte angegeben werden. Dann liefert das Kräftegleichgewicht am Hebel und an der Trommel, jeweils die beiden ersten Gleichungen in (7.68) und (7.69) die Lagerreaktionen in A und B.

## 7.5 Übungen

### 7.5.1 Kabeltrommel

Eine Kabeltrommel ist wie skizziert an einer senkrechten Wand gelagert. Der Reibwert zwischen Wand und Trommel ist  $\mu_0$ . Die Gelenke in A und B sind reibungsfrei. Das Gewicht der Strebe A-B kann gegenüber dem Gewicht  $G$  der Trommel vernachlässigt werden.

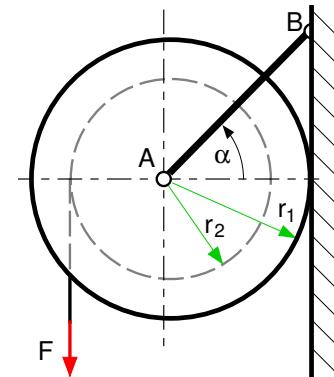


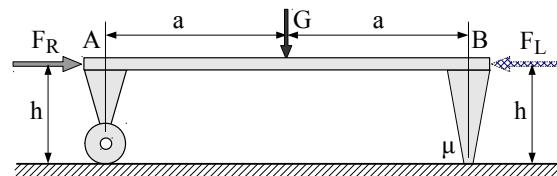
Bild 7.17: Kabeltrommel

Bei welcher Kraft  $F$  beginnt sich die Trommel zu drehen?

Lösung:

### 7.5.2 Sonnenliege

Eine Sonnenliege mit dem Gewicht  $G$  steht auf einer horizontalen Ebene. Bei A sind die Beine mit reibungsfrei drehbaren Rollen ausgestattet. Bei B ist der Reibwert zwischen den Beinen und dem Boden mit  $\mu$  gegeben. Die Liege soll nun durch eine horizontale Kraft  $F$ , die im Abstand  $h$  vom Boden angreift, verschoben werden, wobei selbstverständlich  $\mu h < 2a$  vorausgesetzt werden kann.



Welche Kraft ist mindestens erforderlich um die Liege nach rechts ( $F = F_R$ ) oder nach links ( $F = F_L$ ) zu verschieben? Was passiert bei  $\mu h = 2a$ ?

Lösung:

### 7.5.3 Bandbremse

Welche Kraft  $F_1$  bzw.  $F_2$  ist erforderlich, um mit der skizzierten Bandbremse das Drehmoment  $M_1$  bzw.  $M_2$  abzubremsen?

Der Reibwert zwischen der Bremstrommel und dem Band beträgt  $\mu$ .

Zahlenwerte:  $|M_1| = |M_2| = 2 \text{ kNm}$ ,  $\mu = 0.4$ ,  
 $a = 0.05 \text{ m}$ ,  $b = 0.04 \text{ m}$ ,  $c = 0.75 \text{ m}$ ;  $r = 0.20 \text{ m}$ ,

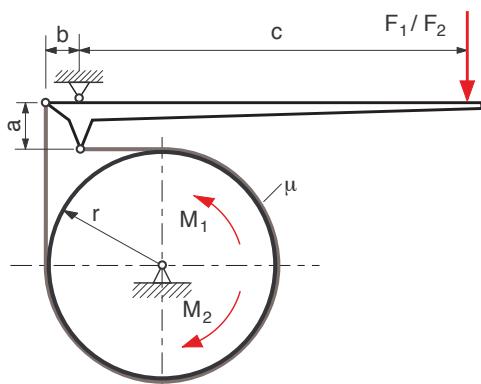


Bild 7.18: Bandbremse

Lösung: \_\_\_\_\_

# 8 Prinzip der Statik

## 8.1 Minimale Energie

Hamilton<sup>1</sup> hat ein Prinzip formuliert, nachdem alle Vorgänge in der Natur mit minimalem Aufwand ablaufen. Daraus kann das Prinzip der minimalen Energie abgeleitet werden. Danach nimmt ein System in einer stabilen Gleichgewichtslage einen Zustand ein, der durch ein Minimum der potentiellen Energie

$$E_{pot} \rightarrow \text{Min} \quad (8.1)$$

gekennzeichnet ist.

Das Vorgehen soll an einem Beispiel erläutert werden. Die Abbildung 8.1 zeigt einen Stab mit dem Gewicht  $G$  der am Ende gelenkig gelagert und fest mit einer Trommel mit dem Radius  $r$  verbunden ist. Um die Rolle ist ein Seil gewickelt, das am Ende das Gewicht  $Q$  trägt. Der Schwerpunkt des Stabes hat vom Drehpunkt den Abstand  $s$ .

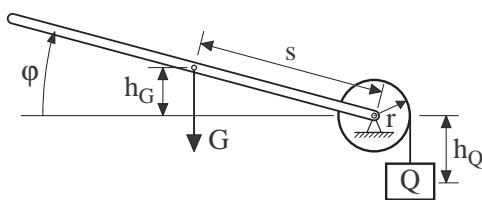


Bild 8.1: Gleichgewichtslage

Bei einer Drehung um den Winkel  $\varphi$  wird der Stabschwerpunkt auf die Höhe  $h_G = s \sin \varphi$  angehoben. Gleichzeitig senkt sich das Gewicht  $Q$  um die von der Trommel abgewickelte Seillänge  $h_Q = -r \varphi$  ab. Wirkt die Schwerkraft (Erdbeschleunigung  $g$ ) nach unten und zählt man die Schwerpunktshöhe  $h$  positiv nach oben, dann ist die potentielle Energie einer Masse  $m$  im homogenen Schwerefeld durch

$$E_{pot} = m g h \quad (8.2)$$

gegeben. Auf den Stab und das Gewicht übertragen bedeutet dies

$$E_{pot}^G = G s \sin \varphi \quad \text{und} \quad E_{pot}^Q = -Q r \varphi. \quad (8.3)$$

In der Gleichgewichtslage nimmt gemäß (8.1) die potentielle Energie des Gesamtsystems eine Minimum an

$$\underbrace{E_{pot}}_{\substack{G s \sin \varphi \\ E_{pot}^G}} = \underbrace{E_{pot}(\varphi)}_{\substack{-Q r \varphi \\ E_{pot}^Q}} \longrightarrow \text{Min}. \quad (8.4)$$

Die Funktion  $E_{pot} = E_{pot}(\varphi)$  hat einen Extremwert, wenn an einer Stelle  $\varphi = \varphi_0$  die erste Ableitung verschwindet. Ist die zweite Ableitung positiv, handelt es sich um ein Minimum; ist sie negativ, tritt an der Stelle  $\varphi_0$  ein Maximum auf. Die Ableitungen von (8.4) liefern

$$\frac{d E_{pot}}{d \varphi} = G s \cos \varphi - Q r \quad (8.5)$$

und

$$\frac{d^2 E_{pot}}{d \varphi^2} = -G s \sin \varphi. \quad (8.6)$$

Die erste Ableitung verschwindet für

$$G s \cos \varphi_0 = Q r \quad \text{oder} \quad \cos \varphi_0 = \frac{Q r}{G s}. \quad (8.7)$$

Dies entspricht dem Momentengleichgewicht um den Drehpunkt. Da die Kosinus-Funktion nicht größer als Eins werden kann, existieren Lösungen nur wenn  $\frac{Q r}{G s} \leq 1$  erfüllt ist. Der Grenzfall  $Q r = G s$  beschreibt die durch  $\varphi_0 = 0$  gekennzeichnete horizontale Lage. Für den Fall  $\frac{Q r}{G s} = \frac{4}{5}$  liefert die Arkus-Kosinus-Funktion im Intervall von  $-90^\circ$  bis  $+90^\circ$  mit

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = \pm 36.87^\circ \quad (8.8)$$

zwei Lösungen.

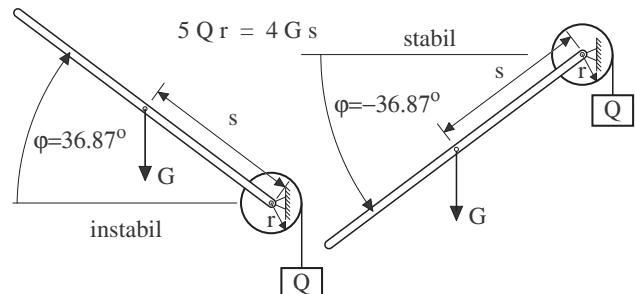


Bild 8.2: Gleichgewichtslagen

Das Einsetzen in die 2. Ableitung (8.6) zeigt, dass die zweite Ableitung bei  $\varphi_0 = +36.87^\circ$  negativ und bei

<sup>1</sup> Sir William Rowan Hamilton, irisch-englischer Mathematiker und Physiker (04.08.1805-02.09.1865)

$\varphi_0 = -36.87^\circ$  positiv ist. Die Lösungen  $\varphi_0 = -36.87^\circ$  und  $\varphi_0 = +36.87^\circ$  beschreiben somit für  $\frac{Qr}{Gs} = \frac{4}{5}$  oder  $5Qr = 4Gs$  Zustände, die durch minimale und maximale potentielle Energie gekennzeichnet sind und kennzeichnen dabei eine stabile und eine instabile Gleichgewichtslage, Bild 8.2.

Das Prinzip der minimalen Energie kann allerdings nur bei Systemen angewendet werden, die über freie Bewegungsmöglichkeiten verfügen. Die Statik befasst sich jedoch in der Regel mit Systemen, die kinematisch und statisch bestimmt gelagert sind und deshalb keine Bewegungsmöglichkeit mehr haben.

## 8.2 Virtuelle Arbeit

### 8.2.1 Vorbemerkung

Das Prinzip der minimalen potentiellen Energie hat als notwendige Bedingung das Verschwinden der 1. Ableitung der potentielle Energie zur Folge

$$\frac{d}{dx} E_{pot}(x) = 0, \quad (8.9)$$

wobei die Berechnung nur möglich ist, wenn das System mit der Variablen  $x$  mindestens eine Bewegungsmöglichkeit hat. Bei kinematisch und statisch bestimmt gelagerten Systemen können nun durch ein gedachtes Entfernen von Lagernwertigkeiten virtuelle Verschiebungen eingeführt werden. Ersetzt man dann in (8.9) die Differentiation  $d/dx$  durch das virtuelle Ableitungssymbol  $\delta$  und kennzeichnet den durch Hamilton beschriebenen Aufwand nicht durch die potentielle Energie  $E_{pot}$  sondern allgemeiner durch die Arbeit  $W$ , dann erhält man mit

$$\delta W = 0 \quad (8.10)$$

das Prinzip der virtuellen Arbeit. Erfährt die Kraft  $F$  die virtuelle Verschiebung  $\delta u$  und das Moment  $M$  die virtuelle Verdrehung  $\delta\varphi$  dann ist die virtuelle Arbeit durch

$$\delta W = F \delta u + M \delta\varphi \quad (8.11)$$

gegeben. Sind, wie bei elastischen Systemen, reale Verschiebungen und Verdrehungen vorhanden, dann kann das Prinzip der virtuellen Arbeit auch mit virtuellen Kräften und virtuellen Momenten verwendet werden.

### 8.2.2 Beispiel: Türschließer

Zum automatischen Schließen einer Tür wird der skizzierte Seilzug verwendet. Das im Punkt A an der Tür befestigte Seil läuft über die Umlenkscheiben B, C und trägt am Ende das Gewicht  $Q$ . Die Punkte A und B liegen auf gleicher Höhe. Mit der Kraft  $F$ , die am Rand der Tür senkrecht zur Türebene wirkt, wird die Tür in der Winkelstellung  $\varphi$  offen gehalten, Bild 8.3.

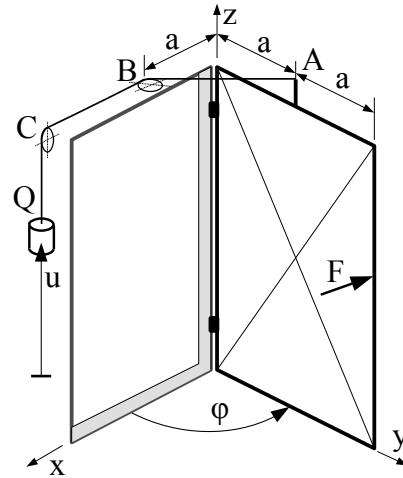


Bild 8.3: Türschließer

Bei einer gedachten, also virtuellen Störung, des Gleichgewichts führt die Tür die virtuelle Drehung  $\delta\varphi$  und das Gegengewicht die virtuelle Verschiebung  $\delta u$  durch. Die virtuelle Arbeit, die das Gewicht  $Q$  und die Kraft  $F$  leisten, ist durch

$$\delta W = \delta W_Q + \delta W_F = -Q \delta u + F 2a \delta\varphi \quad (8.12)$$

gegeben. Der Anteil der Gewichtskraft  $Q$  ist negativ, da  $Q$  nach unten wirkt, die Verschiebung  $u$  und damit auch die virtuelle Verschiebung  $\delta u$  aber nach oben positiv angesetzt wurden. Die virtuelle Verschiebung der Kraft  $F$  ist durch die Bogenlänge  $2a \delta\varphi$  bestimmt.

Die Punkte A und B bilden die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Öffnungswinkel  $\varphi$  und der Schenkellänge  $a$ . Die Länge der Grundlinie entspricht der Verschiebung des Gegengewichtes und ist mit

$$u = \overline{AB} = 2a \sin(\varphi/2) \quad (8.13)$$

bestimmt. Damit sind die virtuellen Verschiebungen über

$$\delta u = 2a \cos(\varphi/2) \delta\varphi/2 = a \cos(\varphi/2) \delta\varphi \quad (8.14)$$

verknüpft. Damit erhält man für die virtuelle Arbeit

$$\begin{aligned} \delta W &= -Q a \cos(\varphi/2) \delta\varphi + F 2a \delta\varphi \\ &= (2F - Q \cos(\varphi/2)) a \delta\varphi. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Das System ist im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit verschwindet. Die virtuelle Verdrehung  $\delta\varphi$  ist zwar klein, aber nicht zwangsläufig Null. Deshalb kann  $\delta W = 0$  nur mit

$$2F - Q \cos(\varphi/2) \quad \text{oder} \quad F = \frac{1}{2} Q \cos(\varphi/2) \quad (8.16)$$

erfüllt werden. Im Sonderfall  $\varphi = 180^\circ$  wäre das System mit  $F = 0$  allerdings in einer instabilen Gleichgewichtslage.

### 8.2.3 Beispiel: Einzelne Lagerreaktionen

Bei dem Tragwerk aus Abschnitt 5.3 musste das System zur Berechnung der Lagerreaktionen in Teilsysteme zerlegt werden. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit können einzelne Lagerreaktionen am Gesamtsystem ermittelt werden. Ist man zum Beispiel am Einspannmoment im Lager A interessiert, dann wandelt man zunächst die feste Einspannung in ein festes Gelenkklager um, Bild 8.4.

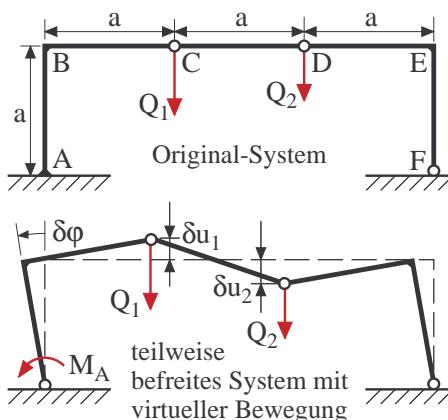


Bild 8.4: Tragwerk Original und teilweise befreit

Das teilweise befreite Tragwerk besitzt nun eine Bewegungsmöglichkeit, die durch den virtuellen Drehwinkel  $\delta\varphi$  erfasst wird. Die Wirkung der festen Einspannung in A wird durch das Moment  $M_A$  berücksichtigt. Die virtuelle Arbeit am teilweise befreiten Tragwerk kann mit

$$\delta W = M_A \delta\varphi + Q_1 \delta u_1 + Q_2 \delta u_2 \quad (8.17)$$

angegeben werden, wobei die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte C und D der Kräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  jeweils nach unten positiv angesetzt wurden. Die virtuelle Drehung um den Punkt A führt auf Grund der Symmetrie mit

$$\delta u_2 = -\delta u_1 \quad (8.18)$$

zu gleichgroßen aber entgegengesetzten virtuellen Verschiebungen der Kraftangriffspunkte. Setzt man wieder

kleine virtuelle Verdrehungen voraus, dann gilt

$$\delta u_1 = -a \delta\varphi \quad (8.19)$$

Setzt man (8.18) und (8.19) in (8.17) ein, dann bleibt

$$\delta W = (M_A - Q_1 a + Q_2 a) \delta\varphi . \quad (8.20)$$

Das System ist im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit verschwindet. Bei  $\delta\varphi \neq 0$  ist das für

$$M_A - Q_1 a + Q_2 a = 0 \quad \text{oder} \quad M_A = Q_1 a - Q_2 a \quad (8.21)$$

der Fall. Das Ergebnis (8.21) stimmt erwartungsgemäß mit der Lösung (5.18) aus den Gleichgewichtsbeziehungen an den Teilsystemen überein.

### 8.2.4 Anmerkung

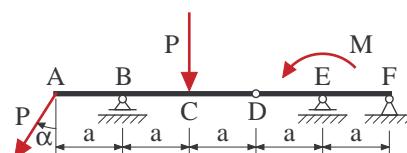
Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist sehr weitreichend. Es lässt sich auch auf die Elasto-Statik übertragen. Bei kleinen Verformungen mit linear elastischem Materialverhalten lassen sich daraus die Sätze von Castigliano<sup>a</sup> und Menabrea<sup>b</sup> ableiten.

<sup>a</sup> Carlo Alberto Castigliano (1847–1884) italienischer Baumeister, Ingenieur und Wissenschaftler

<sup>b</sup> Federico Luigi Conte di Menabrea (1809–1896) italienischer Wissenschaftler, General und Politiker

## 8.3 Übungs-Beispiel

Der skizzierte Gelenkträger mit der Länge  $5a$  ist an einem Ende in F durch ein festes und in B und E durch horizontal verschiebbliche Gelenke statisch bestimmt gelagert. Am anderen Ende in A sowie in C wird das Bauteil durch eine geneigte ( $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ) und eine vertikale Kraft jeweils vom Betrag  $P$  belastet. Im Punkt E wird das Moment  $M = \frac{1}{2}a P$  eingeleitet.



Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit die Lagerreaktion in E.

Lösung:

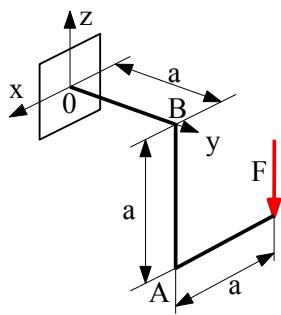


# 9 Zusätzliche Übungsbeispiele

## 9.1 Kraftwirkung

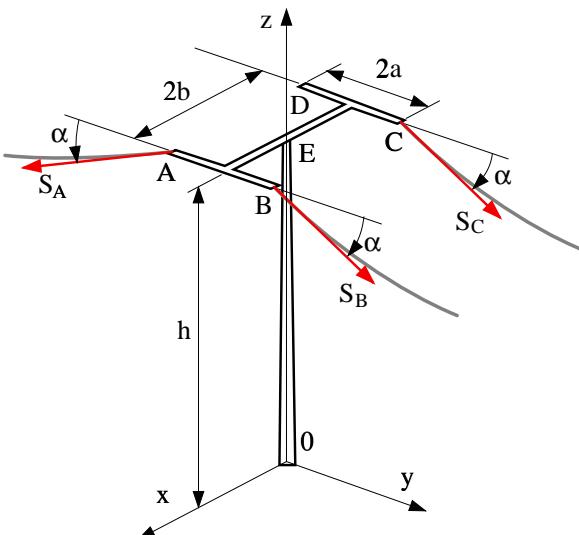
### 9.1.1 Tragwerk

Berechnen Sie für das skizzierte räumliche Tragwerk die Wirkung der Kraft  $F$  bezüglich der Punkte A, B und 0.



### 9.1.2 Strommast

In einem geradlinig verlaufendem Teil einer Oberlandleitung ist eine der Leitungen gerissen.



Für die Beträge der am Mast angreifenden Kräfte gilt:  
 $|\vec{S}_A| = |\vec{S}_B| = |\vec{S}_C| = S$ .

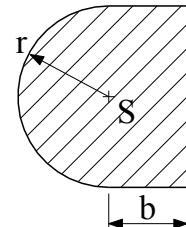
- Wie lauten die Ortsvektoren vom Koordinatenursprung 0 zu den Angriffspunkten A, B und C der Kräfte?
- Geben Sie die Kraftvektoren an.

- Berechnen Sie die Wirkung der Kräfte  $\vec{S}_A$ ,  $\vec{S}_B$  und  $\vec{S}_C$  bezüglich 0.

## 9.2 Schwerpunkte

### 9.2.1 Zusammengesetzter Querschnitt

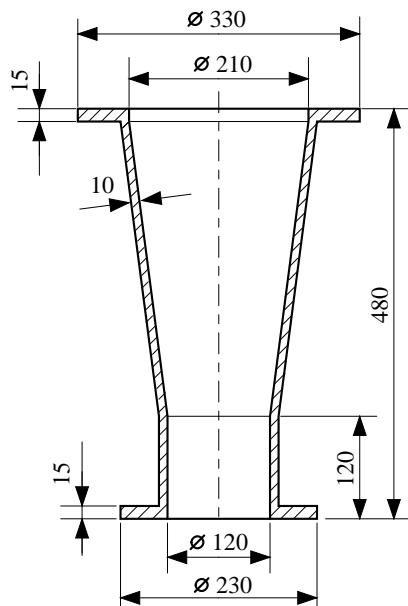
Der skizzierte Querschnitt setzt sich aus einem Halbkreis und einem Rechteck zusammen.



Wie groß muss  $b$  gewählt werden, damit der Flächenmittelpunkt des Querschnitts mit dem Kreismittelpunkt S zusammenfällt?

### 9.2.2 Rohrstutzen

Der skizzierte Rohrstutzen besteht aus Grauguss mit der Dichte  $\rho = 7200 \text{ kg/m}^3$ .



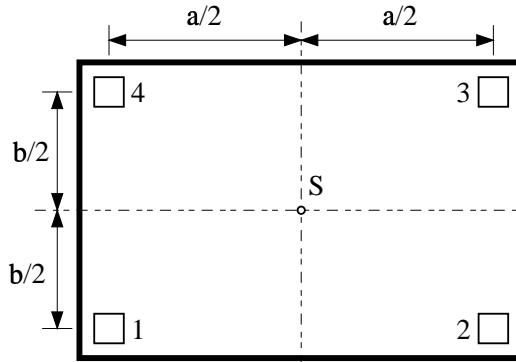
Berechnen Sie:

- a) Volumen und Masse des Rohrstutzens,
- b) das Kernvolumen.

## 9.3 Gleichgewicht

### 9.3.1 Tisch

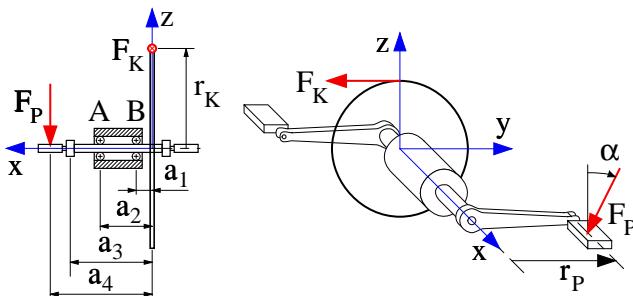
Auf der horizontalen Platte eines Tisches vom Gewicht  $G_T$  mit dem Schwerpunkt  $S$  liegt eine Kugel vom Gewicht  $G_1$ . An den vier Beinen des Tisches werden die vertikalen Kräfte  $F_1 = 60 \text{ N}$ ,  $F_2 = 40 \text{ N}$ ,  $F_3 = 100 \text{ N}$  und  $F_4 = 100 \text{ N}$  gemessen. Jetzt wird eine weitere Kugel vom halben Gewicht der ersten  $G_2 = \frac{1}{2} G_1$  aufgelegt. Danach erhält man die Kräfte  $F_1^* = 70 \text{ N}$ ,  $F_2^* = 60 \text{ N}$ ,  $F_3^* = 110 \text{ N}$  und  $F_4^* = 120 \text{ N}$ . Die Tischbeine haben in Länge und Breite die Abstände  $a = 1.2 \text{ m}$  und  $b = 0.8 \text{ m}$ .



- a) Wie schwer sind die Kugeln und der Tisch?
- b) An welchen Stellen der Tischplatte wurden die Kugeln aufgelegt?

### 9.3.2 Tretlager

Der Kettenantrieb eines Fahrrades wird in der skizzierten Stellung durch die um den Winkel  $\alpha$  nach vorne geneigte Pedalkraft  $F_P$  belastet. Es wird angenommen, dass das zweite Pedal unbelastet ist und der untere Teil der Kette keinen Zug ausübt.



Wie groß sind die horizontal gerichtete Kettenkraft  $F_K$  und die in den Lagern A und B übertragenen Kräfte?

Zahlenwerte:  $F_P = 500 \text{ N}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;

$r_P = 18 \text{ cm}$ ;  $r_K = 9 \text{ cm}$ ;

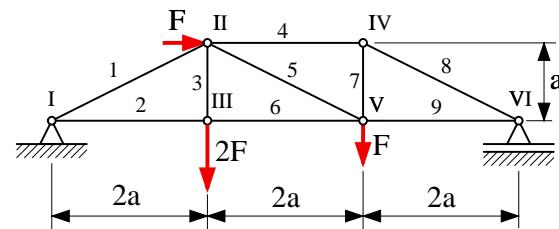
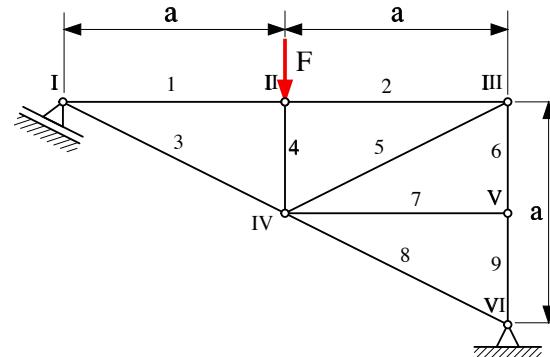
$a_1 = 1 \text{ cm}$ ;  $a_2 = 7 \text{ cm}$ ;

$a_3 = 10 \text{ cm}$ ;  $a_4 = 16 \text{ cm}$ .

## 9.4 Fachwerke

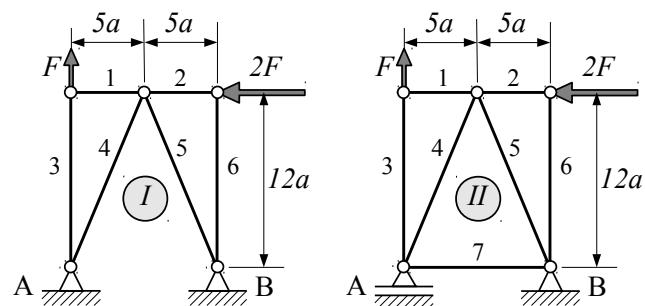
### 9.4.1 Einfache Fachwerke

Bestimmen Sie für die skizzierten Fachwerke die Lagerreaktionen und alle Stabkräfte.



### 9.4.2 Verschiedene Fachwerkvarianten

Um die Kräfte  $F$  und  $2F$  bei A und B in ein Fundament zu leiten, werden zwei Fachwerkvarianten diskutiert.

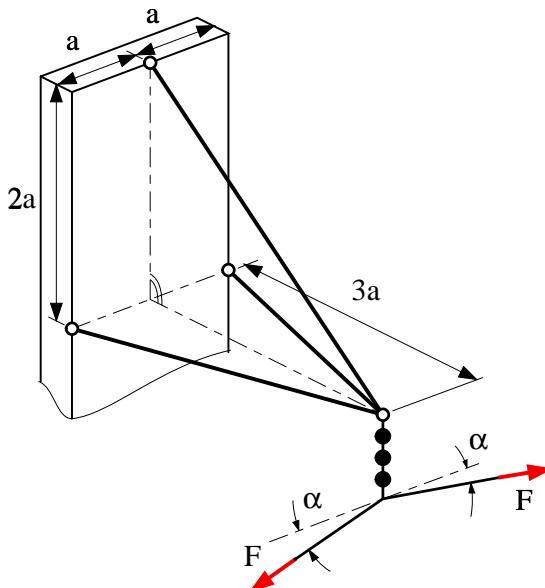


Ermitteln Sie für beide Varianten die Lagerreaktionen in A und B sowie alle Stabkräfte.

### **9.4.3 Räumliches Fachwerk**

Eine Hochspannungsleitung wird über einen Isolator durch 3 Stäbe gehalten.

Die Zugkraft in der Leitung ist mit  $F = 1\text{ kN}$  gegeben.

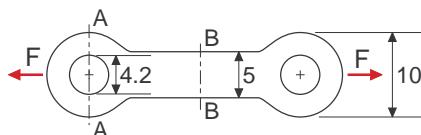


Berechnen Sie mit  $\alpha = 15^\circ$  und  $a = 0.5 \text{ m}$  die Stabkräfte.

## 9.5 Zug- und Druckbelastungen

### 9.5.1 Lasche

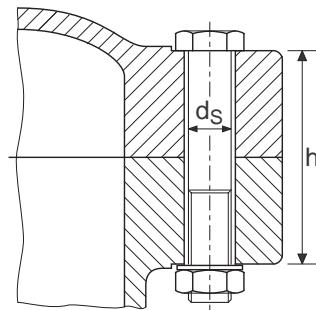
Eine Lasche aus  $0.8\text{ mm}$  dickem Blech wird durch die Kraft  $F = 240\text{ N}$  belastet.



Ermitteln Sie die in den Schnitten A–A und B–B auftretenden Spannungen sowie den Lochleibungsdruck in den Bolzenlagerungen.

## 9.5.2 Dehnschraube

Die beiden Teile eines Gehäuses werden durch sechs Schrauben mit dem Schaftdurchmesser  $d_S$  und dem Elastizitätsmodul  $E_S$  zusammengehalten. Bei der Montage werden die Schrauben soweit angezogen, dass ihre Verlängerung  $\Delta h_S$  beträgt. Der Flansch wird dabei um  $\Delta h_F$  verkürzt.



- a) Wie groß ist die Zugspannung in der Schraube?
  - b) Mit welcher Kraft werden die Gehäuseteile zusammen gepresst?

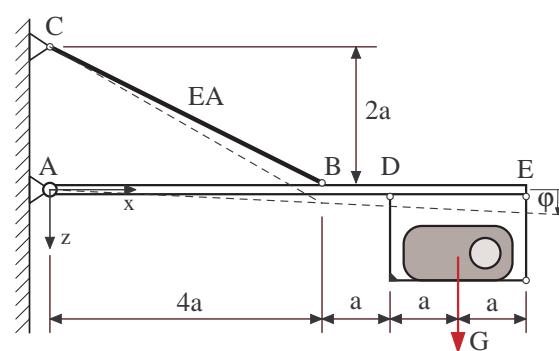
Im Gehäuse herrscht nun ein Überdruck. Dadurch werden die Schrauben zusätzlich durch eine Kraft  $F$  belastet.

- c) Wie groß kann  $F$  höchstens werden, ohne dass ein Spalt zwischen den Gehäuseteilen entsteht?

Zahlenwerte:  $d_S = 12 \text{ mm}$ ,  $E_S = 216 \text{ GPa}$ ,  
 $h = 70 \text{ mm}$ ,  $\Delta h_S = 0.022 \text{ mm}$ ,  $\Delta h_F = 0.012 \text{ mm}$ .

### 9.5.3 Beamerhalterung

Ein Beamer mit dem Gewicht  $G$  ist wie skizziert gelagert.

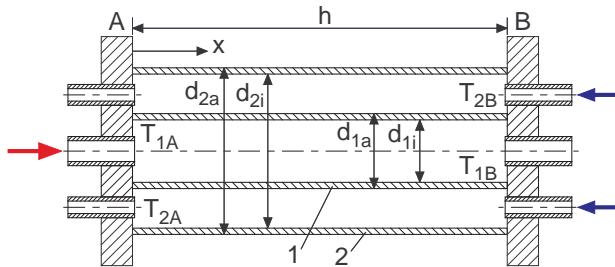


- a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A sowie die Kraft S im Stab B-C.
  - b) Um wieviel Prozent dehnt sich der Stab B-C, wenn er die Dehnsteifigkeit  $EA = 450 \text{ kN}$  besitzt und bei einem großen Beamer mit der Kraft  $S = 1 \text{ kN}$  belastet wird?
  - c) Um welchen Winkel  $\varphi$  neigt sich dann der als starr zu betrachtende Träger A-E?

#### 9.5.4 Wärmetauscher

Ein Wärmetauscher besteht aus zwei konzentrischen Rohren, die bei der Temperatur  $T_0 = 20^\circ$  durch star-

re Flansche spannungsfrei miteinander verbunden wurden. Das Innenrohr ist aus Kupfer und das Außenrohr aus Stahl. Durch den Wärmetauscher werden im Gegenstrom Flüssigkeiten mit unterschiedlichen Temperaturen geleitet. Dadurch erwärmen sich die Rohre. Über die Rohrlänge von A nach B nimmt die Temperatur des Innenrohrs linear von  $T_{1A}$  auf  $T_{1B}$  ab und die Temperatur des Außenrohrs fällt linear von  $T_{2A}$  auf  $T_{2B}$ .



a) Um wie viel ändert sich die Länge des Doppelrohrs im Betrieb gegenüber der Montagelänge  $h$ ?

b) Wie groß sind die Spannungen in den Rohren?

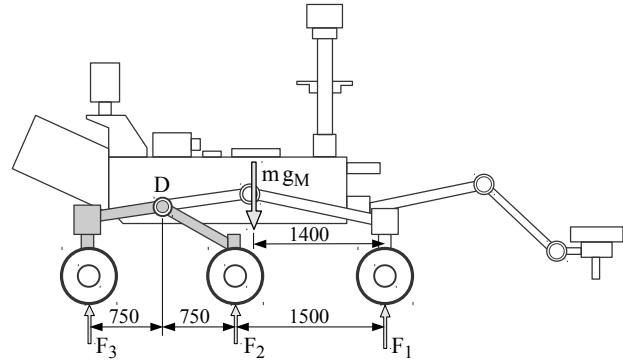
Abmessungen:  $h = 1400 \text{ mm}$ ,

$$\begin{aligned}d_{1i} &= 110 \text{ mm}, d_{1a} = 115 \text{ mm}, \\d_{2i} &= 160 \text{ mm}, d_{2a} = 165 \text{ mm};\end{aligned}$$

Temperaturen:  $T_{1A} = 80^\circ$ ,  $T_{1B} = 26^\circ$ ,

$$T_{2A} = 60^\circ, T_{2B} = 10^\circ.$$

Kennwerte:  $E_1 = 124 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_1 = 16.5 * 10^{-6} \text{ 1/grad}$ ;  
 $E_2 = 216 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_2 = 14.0 * 10^{-6} \text{ 1/grad}$ .

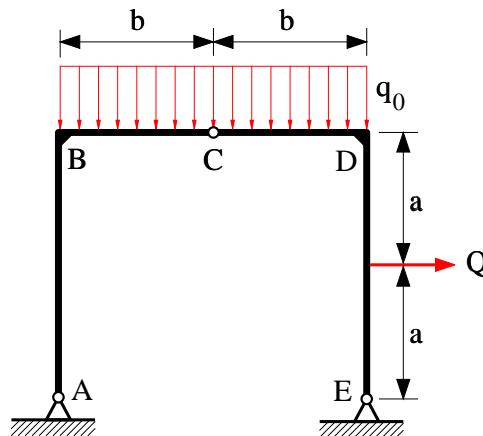


Unter Berücksichtigung, dass die Gravitation auf dem Mars mit  $g_M = 3.73 \text{ m/s}^2$  gegeben ist, sind zu ermitteln:

- die vertikale Gelenkkraft in D,
- die Achslasten  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$ .

## 9.6.2 Rahmentragwerk

Das skizzierte Rahmentragwerk wird durch die Streckenlast  $q_0$  und die Einzelkraft  $Q$  belastet.



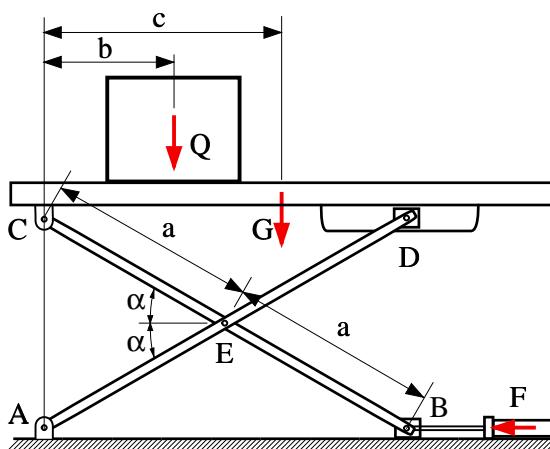
Bestimmen Sie die Lagerreaktionen und die Belastungen im Gelenk.

## 9.6.3 Hebebühne

Eine Hebebühne wird durch einen Scherenmechanismus betätigt. Die Scherenarme von der Länge  $2a$  sind in den Punkten A, C, E gelenkig und in den Punkten B und D in Gleitführungen gelagert.

Die Hebebühne wird durch einen Hydraulikkolben betätigt, der in B die horizontale Kraft  $F$  ausübt.

Die Bühne mit dem Gewicht  $G$  trägt die Last  $Q$ .

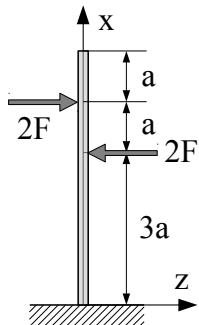


Bei welcher Kraft  $F$  ist das System im Gleichgewicht? Wie groß sind dann die Gelenkkräfte in E und die Lagerreaktionen in den Punkten A, B, C und D?

## 9.7 Schnittgrößen

### 9.7.1 Führungsschiene

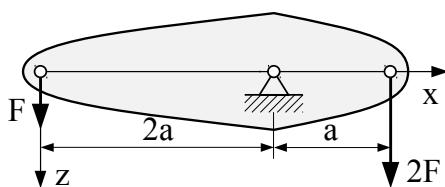
Die Führungsschiene eines Hubtisches wird wie skizziert belastet.



Skizzieren Sie über der Länge der Führungsschiene  $0 \leq x \leq 5a$  den Verlauf der Querkraft  $Q_z = Q_z(x)$  sowie des Biegemomentes  $M_y = M_y(x)$  und geben Sie deren Extremwerte an.

### 9.7.2 Hebel

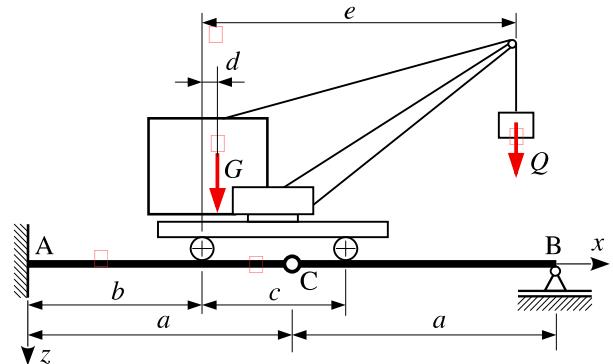
Der skizzierte Hebel, der durch die Kräfte  $F$  und  $2F$  belastet wird, befindet sich im Gleichgewicht.



Skizzieren Sie über der Länge des Hebels  $0 \leq x \leq 3a$  den Verlauf der Querkraft  $Q_z = Q_z(x)$  sowie des Biegemomentes  $M_y = M_y(x)$  und geben Sie deren Extremwerte an.

### 9.7.3 Kranschiene

Ein Kran mit dem Eigengewicht  $G$  wird durch das Gewicht  $Q$  belastet. Die Kranschiene kann durch einen einseitig fest eingespannten Gelenkbalken modelliert werden.



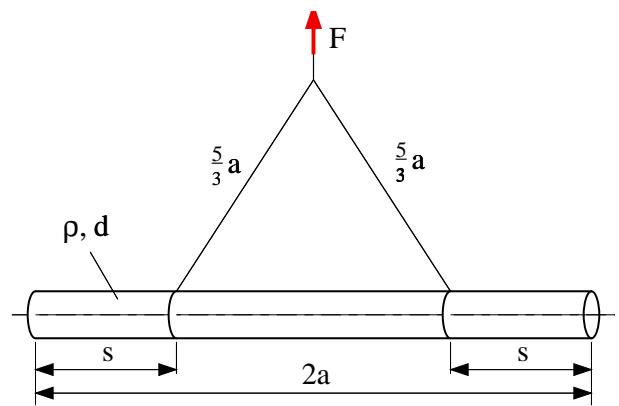
Wie groß sind die Lagerreaktionen in A und B?

Skizzieren Sie für die angegebenen Zahlenwerte den Verlauf der Querkraft  $Q(x)$  und des Biegemomentes  $M(x)$  in der Kranschiene. An welcher Stelle tritt das maximale Moment auf?

Zahlenwerte:  $G = 50 \text{ kN}$ ,  $Q = 10 \text{ kN}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $c = 2 \text{ m}$ ,  $d = 0.5 \text{ m}$ ,  $e = 3 \text{ m}$ .

### 9.7.4 Welle

Eine Welle mit dem Durchmesser  $d$  und der Dichte  $\rho$  hängt wie skizziert an zwei Seilen der Länge  $\frac{5}{3}a$ .



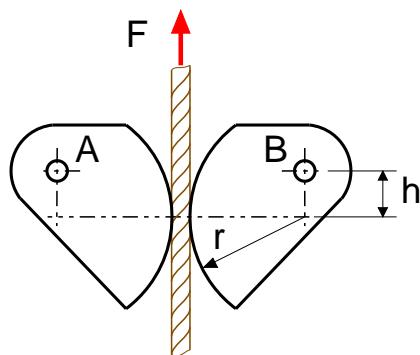
Skizzieren Sie den Verlauf der Normalkraft  $N(x)$ , der Querkraft  $Q(x)$  und des Biegemomentes  $M(x)$ . Wie sehen die Ergebnisse für  $s=0$  und  $s=a$  aus!

Wie groß muss  $s$  gewählt werden, damit die Biegebeanspruchung der Welle minimal wird?

## 9.8 Reibung

### 9.8.1 Seilklemme

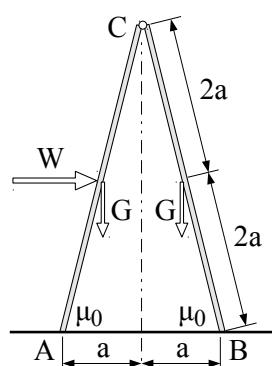
Wie groß ist bei der skizzierten Seilklemme die Belastung der Lagerbolzen in A und B?



Bei welchem Reibwert  $\mu_0$  rutscht das Seil durch?

### 9.8.2 Werbetafel

Eine Werbetafel besteht aus zwei Teilen jeweils vom Gewicht  $G$  und der Länge  $4a$ , die am oberen Ende gelenkig miteinander verbunden sind. Die Werbetafel wird aufgeklappt auf eine horizontale Unterlage mit dem Reibwert  $\mu_0$  gestellt, so dass die unteren Enden den Abstand  $2a$  haben.

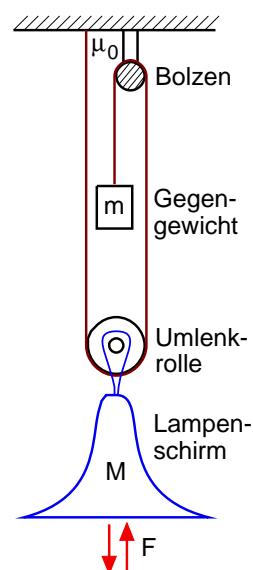


- Ermitteln Sie die Normalkräfte in den Kontaktpunkten A und B, wenn die Werbetafel durch die Windkraft  $W$  belastet wird.
- Bei welcher Windkraft  $W \geq W_{max}$  ist unabhängig vom Reibwert kein Gleichgewicht mehr möglich?
- Welcher Reibwert  $\mu_0$  ist mindestens erforderlich, damit die Werbetafel bei  $W = \frac{1}{2}G$  im Gleichgewicht ist.

### 9.8.3 Lampe

Die Skizze zeigt eine höhenverstellbare Lampe. Der Lampenschirm und die reibungsfrei drehbare Umlenkrolle haben zusammen die Masse  $M$ . Das Gegengewicht hat die Masse  $m$ .

Um Massendifferenzen auszugleichen, läuft das Seil über einen feststehenden Bolzen (Reibwert  $\mu_0$ ).

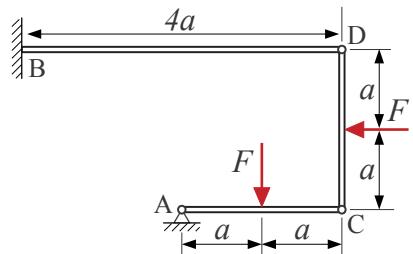


- In welchen Grenzen darf das Massenverhältnis  $m/M$  schwanken, damit die Lampe bei  $F = 0$  im Gleichgewicht ist?
- Welche Kraft  $F$  ist erforderlich, um die Lampe nach unten zu ziehen?
- Welche Kraft  $F$  ist erforderlich, um die Lampe nach oben zu schieben?

## 9.9 Prinzipie

### 9.9.1 Rahmentragwerk

Das skizzierte Rahmentragwerk wird durch zwei Kräfte, jeweils vom Betrag  $F$ , belastet.



Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit die Lagerreaktionen in A sowie das Einspannmoment in B.

Die dazu erforderlichen virtuellen Bewegungen ergeben sich, wenn die Lager in A und B jeweils um die entsprechende Wertigkeit befreit werden.

### 9.9.2 Hebebühne

Bestimmen Sie für die Hebebühne aus Beispiel 9.6.3 die Kraft  $F$ , die erforderlich ist, damit das System, belastet durch  $Q$  und  $G$  in der Winkelstellung  $\alpha$  im Gleichgewicht ist.