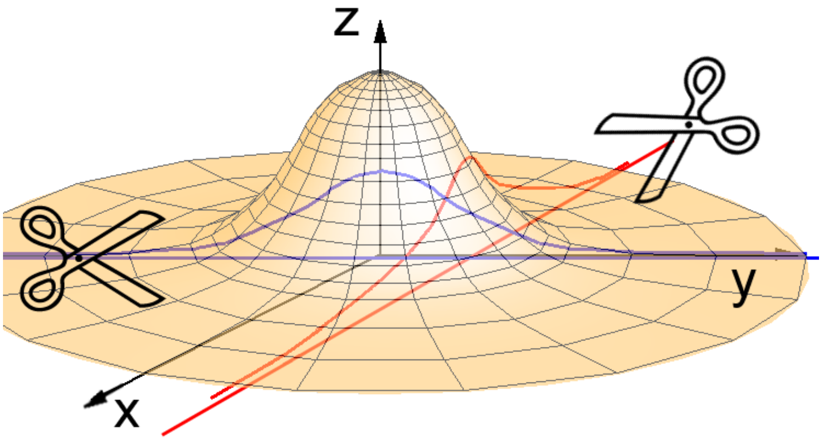
Partielle Ableitung



Beispiel:

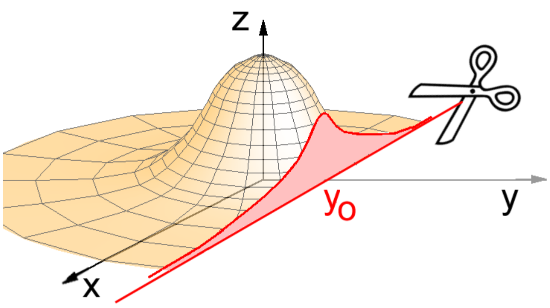
Funktion zweier Variabler ist eine zweidimensionale Fläche im Raum

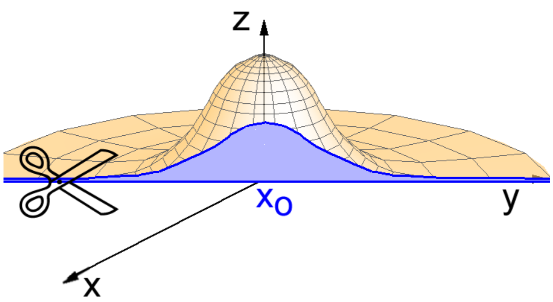
Setzen wir eine Variable konstant
⇨ **Schnittkurven** der Funktion

$$z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

Schnittkurve parallel zur x-z-Ebene:
- Abstand zur Ebene: y_0
- Schnittkurve ist Funktion nur von x !

Schnittkurve parallel zur y-z-Ebene:
- Abstand zur Ebene: x_0
- Schnittkurve ist Funktion nur von y !

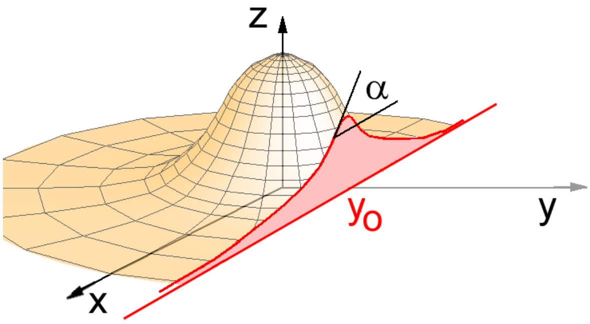




$$z(x) = \frac{1}{1+x^2+y_0^2}$$

$$z(y) = \frac{1}{1+x_0^2+y^2}$$

Steigung der Schnittkurven (geometrischer Sinn der Ableitung):



Die Steigung der Schnittkurven lässt sich leicht ermitteln.

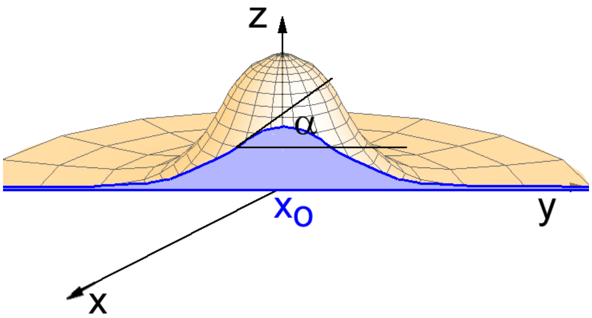
Mit konstantem y ist die Schnittkurve eine Funktion von x: $z = z(x)$

Den Anstieg erhält man aus der Ableitung.
Um anzudeuten, dass die ursprüngliche Funktion auch von y abhing, hier aber nur der Anstieg bezüglich $z(x)$ berechnet wird, steht statt des Zeichens d das Zeichen ∂

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{1+x^2+y^2}\right]$$

mit einem konstanten y (z.B. $y = y_0$) erhalten wir die partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$



Mit konstantem x ist die Schnittkurve eine Funktion von y: $z = z(y)$

Den Anstieg erhält man wiederum aus der Ableitung.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{1+x^2+y^2}\right]$$

mit einem konstanten y (z.B. $x = x_0$) erhalten wir die partielle Ableitung nach y:

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}}$$

- **Möglich:**
  Was eben an einer Funktion mit 2 Variablen (x, y) gezeigt wurde, ist auch an einer Funktion mit 3 Variablen $(x, y, z(\ )$ möglich.
  Formal sollte es keine Probleme bereiten den Formalismus zu übertragen, allein die Anschaulichkeit leidet !

- **Bezeichnung:**
  Häufig anzutreffen ist eine vereinfachte Bezeichnungsweise für die partiellen Ableitungen nach x, y bzw. z:

$$\frac{\partial}{\partial x} = f_x; \quad \frac{\partial}{\partial y} = f_{y;} \quad \frac{\partial}{\partial z} = f_z$$

Mehrfache partielle Ableitungen:

- da die partiellen Ableitungen selbst Funktionen sind, ist eine erneute Ableitung dieser Ableitungen problemlos möglich.
  Dabei kann mehrfach nach der gleichen Variablen abgeleitet werden, es können aber auch „gemischte" Ableitungen auftreten:

Beispiel: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)\right)$ **oder** $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{xy}$

Dabei ist beim „Ausrechnen" der Ableitung die Reihenfolge der Abarbeitungsschritte zu beachten!
Im angeführten Beispiel wird zuerst nach y differenziert, dann nach x.

Die Indexkette wird von rechts nach links abgearbeitet!