6 Die Bedeutung der Ableitung

Wir wollen in diesem Kapitel diskutieren, inwieweit man aus der Kenntnis der Ableitung Rückschlüsse über die Funktion f ziehen kann.

Zunächst beschäftigen wir uns mit Extremwerten.

Definition Es sei f eine Funktion und A eine Menge von Zahlen, die im Definitionsbereich von f enthalten ist.

Ein Punkt $x \in A$ heißt eine *Maximumstelle* von f auf A gdw.

$$f(y) \leq f(x) \text{ für alle } y \in A.$$

Die Zahl $f(x)$ wird dann ein *Maximum* von f auf A genannt. Man sagt auch, *f nimmt auf A sein Maximum in x an.*

Ein Punkt $x \in A$ heißt eine *Minimumstelle* von f auf A gdw.

$$f(x) \leq f(y) \text{ für alle } y \in A.$$

Die Zahl $f(x)$ wird dann ein *Minimum* von f auf A genannt. Man sagt auch, *f nimmt auf A sein Minimum in x an.*

Definition Es sei f eine Funktion und A eine Menge von Zahlen, die im Definitionsbereich von f enthalten ist. Ein Punkt $x \in A$ heißt eine *lokale Maximumstelle* (*Minimumstelle*) für f auf A gdw. es ein $\delta > 0$ gibt, so dass x eine Maximumstelle (Minimumstelle) für f auf

$$A \cap (x - \delta, x + \delta)$$

ist.

Satz 6.1 (Lokales Extremwertkriterium) *Es sei f eine Funktion, die auf (a, b) definiert ist. Hat f in x eine lokale Maximum- oder Minimumstelle und ist f in x differenzierbar, dann ist $f'(x) = 0$.*

Beweis. Wie betrachten den Fall, dass f eine lokale Maximumstelle in x hat. Es sei $\delta > 0$ so gewählt, dass x eine Maximumstelle für f auf $(x - \delta, x + \delta)$ ist.

Dann gilt für alle h mit $|h| < \delta$

$$f(x + h) \leq f(x),$$

also

$$f(x + h) - f(x) \leq 0.$$

Wenn $h > 0$ ist, gilt daher

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0,$$

also

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Andererseits gilt, wenn $h < 0$ ist,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

also

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Nach Voraussetzung ist f in x differenzierbar. Das bedeutet, dass diese beiden Grenzwerte übereinstimmen und gleich der Ableitung $f'(x)$ in x sein müssen. Es folgt, dass

$$f'(x) \leq 0 \text{ und } f'(x) \geq 0,$$

also $f'(x) = 0$.

Der Beweis für eine lokale Minimumstelle geht analog oder kann auf den anderen Fall zurückgeführt werden (wie?). □

Satz 6.1 liefert ein notwendiges Kriterium für eine lokale Extremstelle: $f'(x) = 0$.

Definition Ein *kritischer Punkt* einer differenzierbaren Funktion f ist eine Zahl x, so dass

$$f'(x) = 0.$$

Der Funktionswert $f(x)$ an einem kritischen Punkt x heißt ein *kritischer* oder *stationärer Wert* von f.

Bei der Extremwertbestimmung geht man also wie folgt vor. Es sei f eine Funktion, die auf $[a,b]$ definiert und auf (a,b) differenzierbar ist. Um die Maxima und Minima von f zu finden, müssen zwei Arten von Punkten betrachtet werden:

(1) die kritischen Punkte von f auf (a,b),

(2) die Randpunkte a und b des Intervalls.

Beispiel 6.1 Wir betrachten die Aufgabe, die Extremwerte der Funktion

$$f(x) = x^3 - x \text{ auf dem Intervall } [-1,2]$$

zu bestimmen. Es gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

die kritischen Punkte sind also $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Beide Punkte liegen in $(-1,2)$, also haben wir als Kandidaten für mögliche Extremstellen

(1) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$,

(2) -1, 2.

Es gilt

$$f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},\ f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},\ f(-1) = 0,\ f(2) = 6.$$

Also nimmt f das Minimum $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ in $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und das Maximum 6 in 2 an.

Wir behandeln nun grundlegende Sätze über differenzierbare Funktionen.

Satz 6.2 (Satz von Rolle) *Es sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Gilt $f(a) = f(b)$, dann gibt es eine Zahl $x \in (a, b)$, so dass $f'(x) = 0$.*

Beweis. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, nimmt f nach dem Maximum-Minimum-Satz auf $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum an.

Wird das Maximum in einem Punkt $x \in (a, b)$ angenommen, so gilt nach Satz 6.1 $f'(x) = 0$ und wir sind fertig.

Wird das Minimum in einem Punkt $x \in (a, b)$ angenommen, so gilt wieder nach Satz 6.1 $f'(x) = 0$.

Ansonsten werden sowohl Maximum als auch Minimum an den Randpunkten des Intervalls $[a, b]$ angenommen. Da aber nach Voraussetzung $f(a) = f(b)$ ist, sind Maximum und Minimum von f gleich und f ist eine konstante Funktion. Für eine konstante Funktion f gilt aber $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. □

Satz 6.3 (Mittelwertsatz) *Wenn f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) ist, dann gibt es eine Zahl $x \in (a, b)$, so dass*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Es sei

$$h(x) := f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a).$$

Die Funktion h ist stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a), \\ h(b) &= f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(b - a) \; = \; f(a). \end{aligned}$$

Wir können daher den Satz von Rolle auf h anwenden. Aus diesem Satz folgt, dass es ein $x \in (a, b)$ gibt, so dass

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

also

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Korollar 6.1 *Ist f auf einem Intervall definiert und differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle x in dem Intervall, so ist f auf dem Intervall konstant.*

Beweis. Es seien a und b zwei beliebige Punkte des Intervalls mit $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nach Voraussetzung gilt aber $f'(x) = 0$ für alle x in dem Intervall, also

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Daraus folgt aber $f(a) = f(b)$. Da a und b beliebige Punkte des Intervalls mit $a < b$ waren, muß der Wert von f auf je zwei Punkten des Intervalls der gleiche sein, f muß also auf dem Intervall konstant sein. □

Korollar 6.2 *Es seien f und g differenzierbare Funktionen, die auf dem gleichen Intervall definiert sind. Gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle x aus dem Intervall, dann gibt es eine Zahl c, so dass $f = g + c$ gilt.*

Beweis. Man wende Korollar 6.1 auf die Funktion $h := f - g$ an. □

Definition Eine Funktion f wird

(a) auf dem Intervall I als *streng monoton wachsend* bezeichnet gdw. für zwei beliebige Zahlen a, b aus I

$$f(a) < f(b) \quad \text{für } a < b \text{ ist.}$$

(b) auf dem Intervall I als *streng monoton fallend* bezeichnet gdw. für zwei beliebige Zahlen a, b aus I

$$f(a) > f(b) \quad \text{für } a < b \text{ ist.}$$

Korollar 6.3 *Es sei f auf einem Intervall I definiert und differenzierbar.*

(a) *Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton wachsend.*

(b) *Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton fallend.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $f'(x) > 0$. Es seien a und b zwei beliebige Punkte aus I mit $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Da $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Wegen $b - a > 0$ folgt aber $f(b) > f(a)$.

Der Beweis für $f'(x) < 0$ geht analog. □

Satz 6.4 *Es sei f auf einem Intervall I definiert und differenzierbar. Für einen Punkt $a \in I$ gelte $f'(a) = 0$.*

(a) *Ist $f''(a) > 0$, so hat f in a ein lokales Minimum.*

(b) *Ist $f''(a) < 0$, so hat f in a ein lokales Maximum.*

Beweis. Nach Definition gilt

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Da $f'(a) = 0$ gilt, folgt

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Wir nehmen nun an, dass $f''(a) > 0$. Dann muß der Quotient

$$\frac{f'(a+h)}{h}$$

für hinreichend kleines h positiv sein, d.h.

$f'(a+h)$ muß für hinreichend kleines $h > 0$ positiv sein
und $f'(a+h)$ muß für hinreichend kleines $h < 0$ negativ sein.

Nach Korollar 6.3 folgt daraus, dass f auf einem Intervall rechts von a streng monoton wachsend und auf einem Intervall links von a streng monoton fallend sein muß. Also hat f in a ein lokales Minimum.

Der Beweis für den Fall $f''(a) < 0$ verläuft analog. □

Zum Abschluß dieses Abschnittes betrachten wir noch eine Anwendung auf die Grenzwertberechnung. Bei der Bestimmung von Grenzwerten stößt man oft auf Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Solche Grenzwerte nennt man Grenzwerte vom Typ „$\frac{0}{0}$". Eine wichtige Methode zur Behandlung solcher Grenzwerte gibt der folgende Satz an.

Satz 6.5 (L'Hôpitalsche Regel) *Angenommen*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \textit{ und } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

und $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert. Dann existiert auch* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel 6.2 Nach der Regel von L'Hôpital gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

Satz 6.6 (Cauchyscher Mittelwertsatz) *Die Funktionen f und g seien auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Ist g' nirgendwo 0 in (a, b), so gibt es ein $x \in (a, b)$, so dass*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

gilt.

Beweis. Da g' in (a, b) keine Nullstelle besitzt, folgt nach dem Satz von Rolle, dass $g(a) \neq g(b)$ ist, d.h. der Nenner in der Behauptung wird nicht Null. Man wende dann den Satz von Rolle auf die Funktion

$$h(x) := f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

an. □

Beweis von Satz 6.5.. Die Behauptung ergibt sich wie folgt:

$$\lim_{b \to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{b \to a^+} \frac{f(b) - 0}{g(b) - 0} \stackrel{[\text{CMWS}]}{=} \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□