Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Wintersemester 2014/2015

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Inhalt der Vorlesung

1. Gleichungen und Summen
2. Grundlagen der Funktionslehre
3. Rechnen mit Funktionen
4. Optimierung von Funktionen
5. Funktionen mit mehreren Variablen
6. Optimierung unter Nebenbedingungen
7. Matrixalgebra

Gleichungen und Summen

Kapitel 1

1.1

GLEICHUNGEN

(a) $3x + 10 = x + 4$ — Eine Variable x

(b) $\dfrac{z}{z-5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{5-z}$ — Eine Variable z

(c) $Y = C + I$ — Drei Variablen Y, C und I

Lösen einer Gleichung:

Alle Werte der **Variablen** finden, die die **Gleichung erfüllen**.

Gleichungen mit Klammern und Brüchen

Beispiel 1: $$6p - \frac{1}{2}(2p - 3) = 3(1 - p) - \frac{7}{6}(p + 2)$$

Beispiel 2: $$\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{8}{x^2 - 2x} = \frac{2}{x}$$

Lösungstip:

1. **Klammern ausmultiplizieren**
2. **Mit kleinstem gemeinsamen Nenner multiplizieren**

(a) $y = 10x$ (b) $y = 3x + 4$ (c) $y = -\frac{8}{3}x - \frac{7}{2}$

Gemeinsame Struktur:

$$\boxed{y = ax + b \qquad (1)}$$

a, b reelle Zahlen $a = 3$, $b = 4$ in Gleichung (b)

a und b heißen **Parameter**

(1) beschreibt die allgemeine **lineare Gleichung** (Kap. 4.4)

Beispiel 1: Makroökonomisches Modell

$$\begin{aligned} Y &= C + \bar{I} \\ C &= a + bY \end{aligned} \qquad (*)$$

Y Bruttoinlandsprodukt (BIP), C Konsum, $\bar{I}$ Investition

a und b positive Parameter des Modells mit $b < 1$

Spezialfälle des Modells:

(i) $\bar{I} = 100, a = 500, b = 0.8$ (ii) $\bar{I} = 150, a = 600, b = 0.9$

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} Y &= C + 100 \\ C &= 500 + 0.8Y \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} Y &= C + 150 \\ C &= 600 + 0.9Y \end{aligned}$$

Beispiel 1: Aufgabe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{C} + \bar{\boldsymbol{I}} \\ \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{Y} \end{aligned} \qquad (*)$$

Löse (*) nach $\boldsymbol{Y}$ auf in Abhängigkeit von $\bar{\boldsymbol{I}}$ und den Parametern

Lösung:

Setze $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bY}$ in erste Gleichung.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bY} + \bar{\boldsymbol{I}} \\ \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{bY} &= \boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{I}} \\ (\mathbf{1} - \boldsymbol{b})\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{I}} \\ \boldsymbol{Y} &= \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{b}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{I}} \end{aligned}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)}$$

a, b und c Konstante, x Unbekannte

Division durch a ergibt die **äquivalente Gleichung**:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (1)$$

Mit $p = b/a$ und $q = c/a$ ergibt sich

$$\boxed{x^2 + px + q = 0 \qquad (2)}$$

$$\boxed{x^2 + 8x - 9 = 0} \iff x^2 + 8x = 9$$

$$x^2 + 8x = 9 \iff \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} = 9 + 16 = 25$$

16 ist die **quadratische Ergänzung** zu $x^2 + 8x$, denn

$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ ist ein **vollständiges** Quadrat.

$$\underbrace{(x+4)}_{=:\, z}{}^2 = 25 \qquad z^2 = 25 \iff z = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

$x + 4 = 5$ oder $x + 4 = -5$, d.h.

die Lösungen der Gleichung sind $x = 1$ und $x = -9$.

$$\boxed{x^2 + 8x - 9 = 0} \iff (x+4)^2 = 25$$

$$(x+4)^2 = 5^2 \iff (x+4)^2 - 5^2 = 0 \iff$$

Binomische Formel für die Differenz von Quadraten

$$(x+4-5)(x+4+5) = 0 \iff (x-1)(x+9) = 0$$

Faktorenzerlegung: $x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9)$

$(x-1)(x+9) = 0$ genau dann, wenn $x = 1$ oder $x = -9$

Allgemeiner Fall: Die (p, q) - Formel

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (2)$$

Für $p^2/4 - q \geq 0$ gilt:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0 \iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Für $p^2/4 - q < 0$ gibt es **keine reellen Lösungen.**

Der allgemeine Fall: Die (a, b)-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad (1)$$

Für $b^2 - 4ac \geq 0$ und $a \neq 0$ gilt:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Für $b^2 - 4ac < 0$ gibt es **keine reellen Lösungen.**

Die Lösungen heißen auch **Wurzeln** der quadratischen Gleichung.

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Lösungen von

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 3x - 4y &= -7 \end{aligned} \qquad (*)$$

Zwei Gleichungen und **zwei Unbekannte** x und y

Gesucht sind die **Werte** von x und y, die **beide Gleichungen** erfüllen.

1.) Lösen Sie **eine Gleichung nach einer Variablen** auf.

2.) **Setzen** Sie das Ergebnis in die **andere Gleichung ein**.

1.) Gleichung 1 nach y auflösen:

$$2x + 3y = 18 \Rightarrow 3y = 18 - 2x \Rightarrow y = 6 - \frac{2}{3}x$$

2.) Einsetzen in Gleichung 2: $3x - 4(6 - \frac{2}{3}x) = -7 \iff$

$$3x - 24 + \frac{8}{3}x = -7 \iff 9x - 72 + 8x = -21 \iff$$

$$17x = 51 \iff x = 3$$

$$y = 6 - \frac{2}{3}x \text{ und } x = 3 \Rightarrow y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 6 - 2 = 4$$

Methode 2: Eliminationsmethode

Eine der beiden Variablen wird eliminiert, indem ein geeignetes Vielfaches der einen Gleichung zur anderen Gleichung addiert oder subtrahiert wird.

$$\begin{array}{rcrl} 2x + 3y & = & 18 & \quad | \cdot 4 \\ 3x - 4y & = & -7 & \quad | \cdot 3 \\ 8x + 12y & = & 72 & \\ 9x - 12y & = & -21 & \quad + \\ \hline 17x & = & 51 & \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3 \end{array}$$

Setze $x = 3$ z.B. in Gleichung 1 ein und löse nach y.

$$2 \cdot 3 + 3y = 18 \Rightarrow 3y = 18 - 6 = 12 \Rightarrow y = 4$$

Allgemeine Lösung: Zwei Gleichungen, zwei Unbekannte

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Lösungen:

$$\boxed{x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad y = \frac{af - cd}{ae - bd}}$$

Voraussetzung:

$$ae - bd \neq 0$$

Kapitel 1.2

SUMMEN

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

Σ Sigma Summationssymbol

i Summationsindex

1 und 6 Summationsgrenzen

Summe von $i = 1$ bis $i = 6$ über N_i

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_n = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

p, q ganze Zahlen mit $q \geq p$

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q$$

Beispiel 1:

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{k=3}^{6} (5k - 3) =$$

$$(5 \cdot 3 - 3) + (5 \cdot 4 - 3) + (5 \cdot 5 - 3) + (5 \cdot 6 - 3) = 78$$

Rechenregeln für Summen

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$ **Additivität**

$$\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$ **Homogenität** , d.h.

konstante Faktoren können vor die Summe gezogen werden

$\sum_{i=1}^{n} c = nc$, d.h. **Summe über eine Konstante =**

Anzahl der Summanden mal **Konstante**

Nützliche Formeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Summe der Zahlen von 1 bis n

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Summe der Kubikzahlen

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \ldots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

Binomialkoeffizienten $\binom{m}{k}$

$$m = 1, 2 \ldots \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Binomialkoeffizienten

$$m = 1, 2. \ldots \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!} \qquad \binom{m}{0} = 1$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \qquad 0! = 1 \qquad (k \text{ Fakultät})$$

$$\binom{m}{1} = m \qquad \binom{m}{m} = 1 \qquad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

$$\text{z.B. } \binom{18}{16} = \binom{18}{2}$$

Grundlagen der Funktionslehre

Kapitel 2

Kapitel 2

1. Lineare Funktion
2. Allgemeine quadratische Funktion
3. Kubische Funktion und Polynome
4. Potenz- und Exponenzialfunktion
5. Logarithmus
6. Verschiebung von Funktionsgraphen

Eine **Funktion** einer reellen Variablen x mit **Definitionsbereich** (domain) D ist eine Vorschrift, **die jeder Zahl** $x \in D$ **eindeutig eine reelle Zahl zuordnet.**

Die **Menge der Werte** $f(x)$, die man erhält, wenn x den **Definitionsbereich** D durchläuft, nennt man den **Wertebereich**.

Bezeichnung der **Funktion** durch Buchstaben: f, g, F oder Φ.

Wenn f eine Funktion ist, dann ist $f(x)$ der **Wert**, den f der Zahl x zuordnet, auch der **Funktionswert** von f an der Stelle x.

$f(x)$: Gelesen **f von x** oder **f x**

- f Symbol für die **Funktion**
- $f(x)$ Wert der Funktion f an der Stelle x

$$y = f(x)$$

- x **unabhängige** Variable oder Argument (**exogene** Variable)
- y **abhängige** Variable (**endogene** Variable)
- **Definitionsbereich** der Funktion f ist die Menge der **möglichen Werte der unabhängigen Variablen**.
- **Wertebereich** der Funktion f ist die Menge der **möglichen Werte der abhängigen Variablen**.

Gesamtkosten für Herstellung von x Einheiten eines Gutes:

$$C(x) = 100x\sqrt{x} + 500$$

Kosten für **16** Einheiten:

$$C(16) = 100 \cdot 16\sqrt{16} + 500 = 100 \cdot 16 \cdot 4 + 500 = 6\,900$$

Kosten für a Einheiten: $\quad C(a) = 100 \cdot a\sqrt{a} + 500$

Kosten für **eine weitere Einheit**: $\quad C(a+1) - C(a) =$

$$100 \cdot (a+1)\sqrt{a+1} + 500 - 100 \cdot a\sqrt{a} - 500 =$$

$$100\left[(a+1)\sqrt{a+1} - a\sqrt{a}\right]$$

Wertebereich (range) einer Funktion

Sei $\boldsymbol{f}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\boldsymbol{D}$. Die Menge aller Werte $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, die diese Funktion annimmt, heißt der **WERTEBEREICH** von $\boldsymbol{f}$.

Häufige Notation: Definitionsbereich: $\boldsymbol{D_f}$ Wertebereich: $\boldsymbol{R_f}$

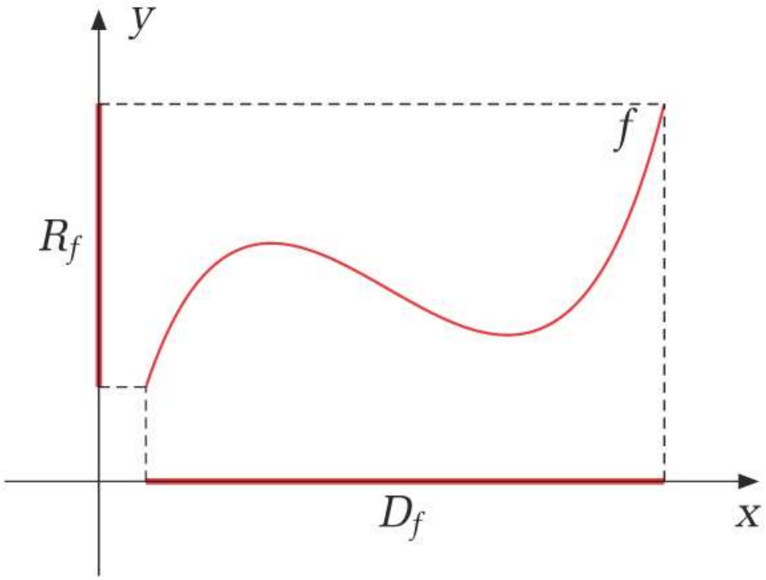


Abbildung 3: Definitionsbereich und Wertebereich von $\boldsymbol{f}$

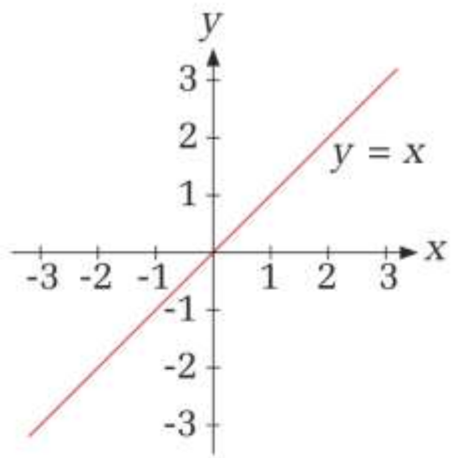
Eine Funktion f heißt **MONOTON WACHSEND**, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$.

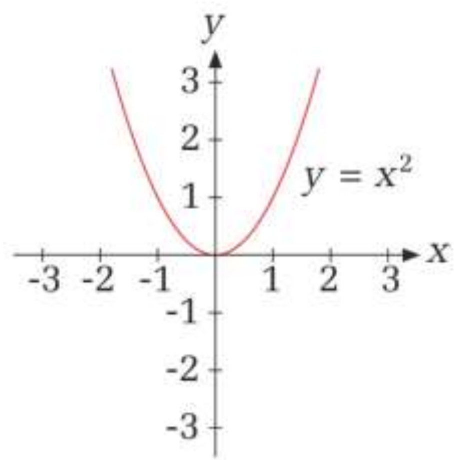
Eine Funktion f heißt **STRENG MONOTON WACHSEND**, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$.

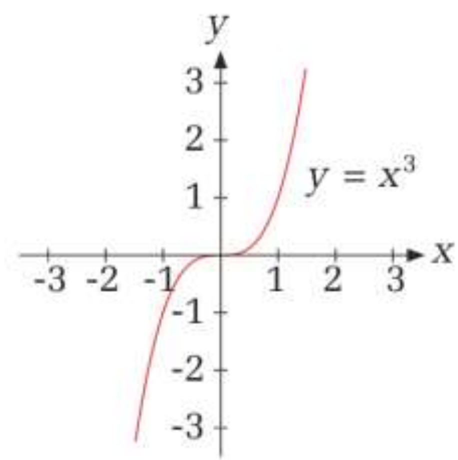
Die Begriffe **MONOTON FALLEND** und **STRENG MONOTON FALLEND** werden entsprechend definiert.

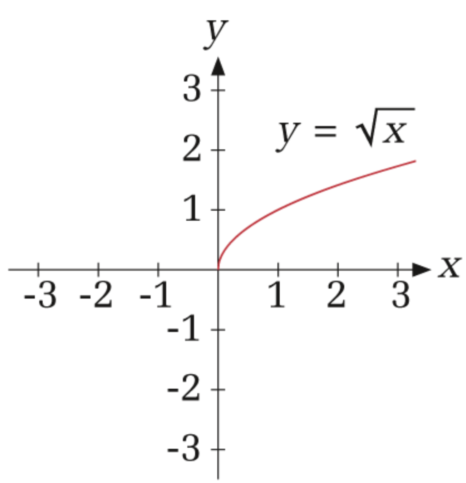
Die Funktion $g(x) = \sqrt{2x+4}$ aus Beispiel 5 ist streng monoton wachsend in $[-2, \infty)$.

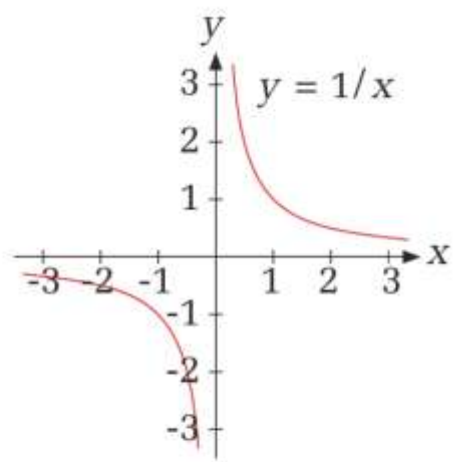
Einige wichtige Graphen

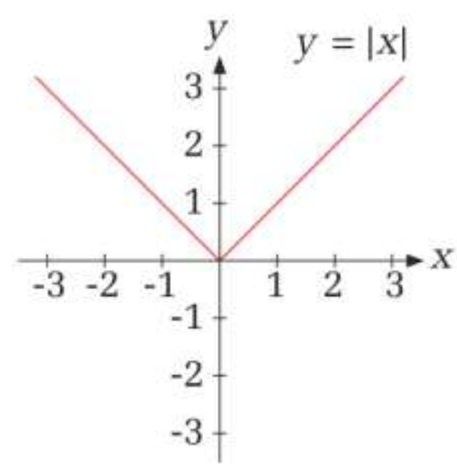












Kapitel 2.1

LINEARE FUNKTION

Definition

$$y = ax + b \qquad (a \text{ und } b \text{ Konstante})$$

Der **Graph** dieser Gleichung ist eine **Gerade**.

Sei f die Funktion, die x den Funktionswert y zuordnet:

$$f: \quad x \longmapsto y$$

$$f(x) = ax + b$$

f heißt eine **LINEARE Funktion.**

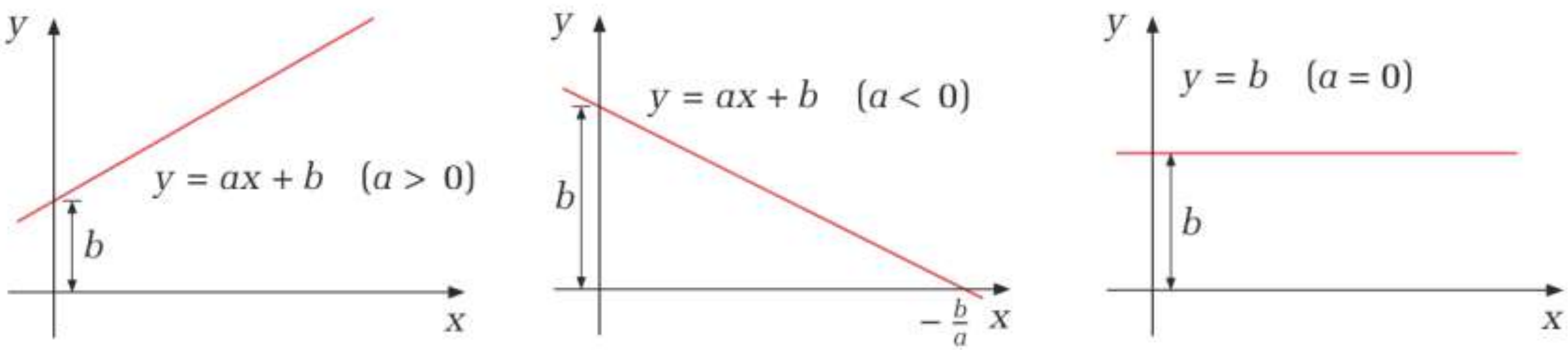
$$f(x+1) - f(x) = a(x+1) + b - ax - b = a$$

Die Konstante a misst die **Änderung des Funktionswertes, wenn x um eine Einheit zunimmt**.

Daher heißt a die **STEIGUNG** der Geraden und Steigung der Funktion.

- Wenn die Steigung a positiv ist, steigt die Gerade mit wachsendem x.
- Je größer der Wert von a, desto steiler ist die Gerade.
- Wenn die Steigung a negativ ist, fällt die Gerade mit wachsendem x.
- Der Absolutbetrag von a misst die Steilheit der Geraden.
- Wenn $a = 0$, so ist die Gerade parallel zur x-Achse.

y-Achsenabschnitt



Abbildungen 1 - 3

Wenn $x = 0$ ist, so ist $y = ax + b = b$.

Daher heißt b der **y-ACHSENABSCHNITT** oder Achsenabschnitt.

System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten (Kap. 2.4)

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Gleichungen sind linear, daher sind die Graphen Geraden.

Die Koordinaten der Punkte auf einer Geraden erfüllen die Geradengleichung.

Die **Koordinaten eines Schnittpunktes** zweier Geraden erfüllen **beide Geradengleichungen**, d.h. sind **Lösungen** des Gleichungssystems.

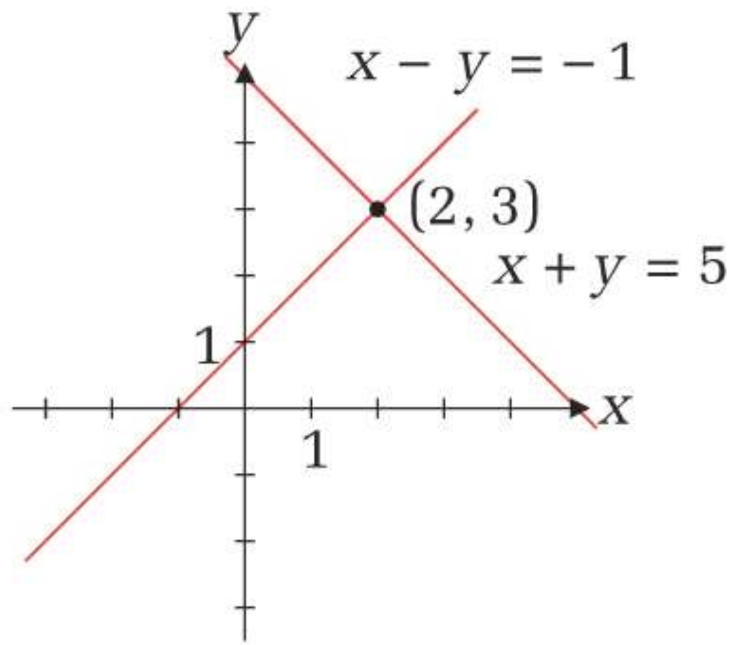
Beispiel

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem auf graphische Weise:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x + y} &= \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{x - y} &= \boldsymbol{-1} \end{aligned}$$

Lösung

Abbildung: Schnittpunkt: $\mathbf{(2,3)} \Rightarrow$ Lösung ist: $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ und $\boldsymbol{y} = \mathbf{3}$



Kapitel 2.2

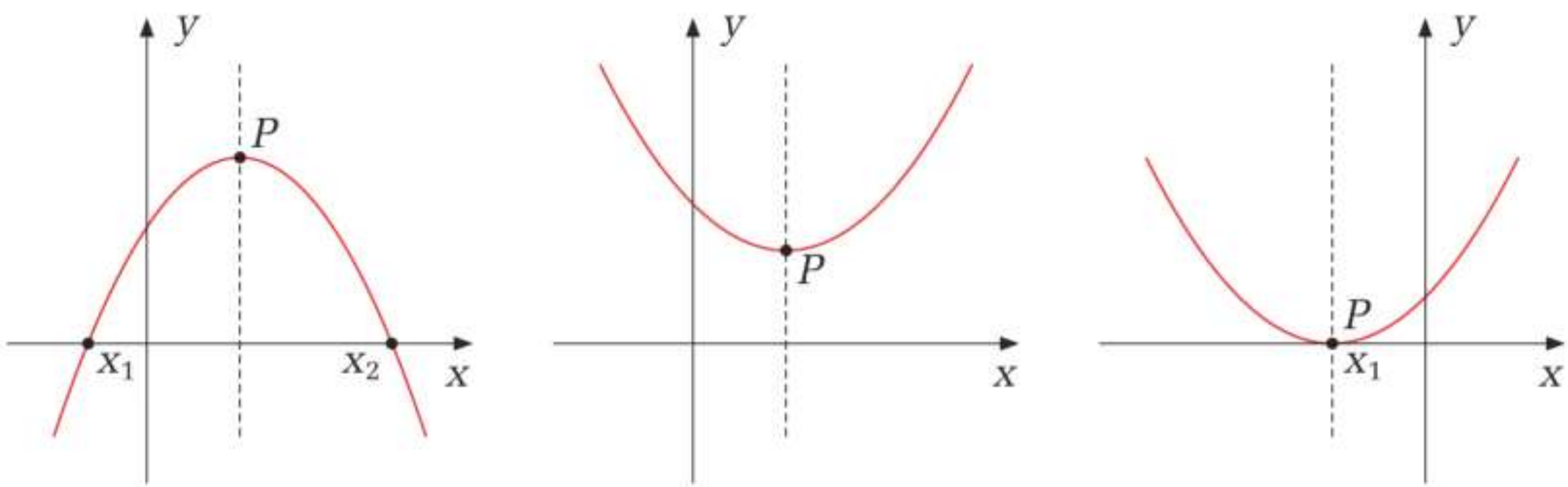
ALLGEMEINE QUADRATISCHE FUNKTION

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b \text{ und } c \text{ Konstante, } a \neq 0)$$

f ist die **allgemeine quadratische Funktion.**

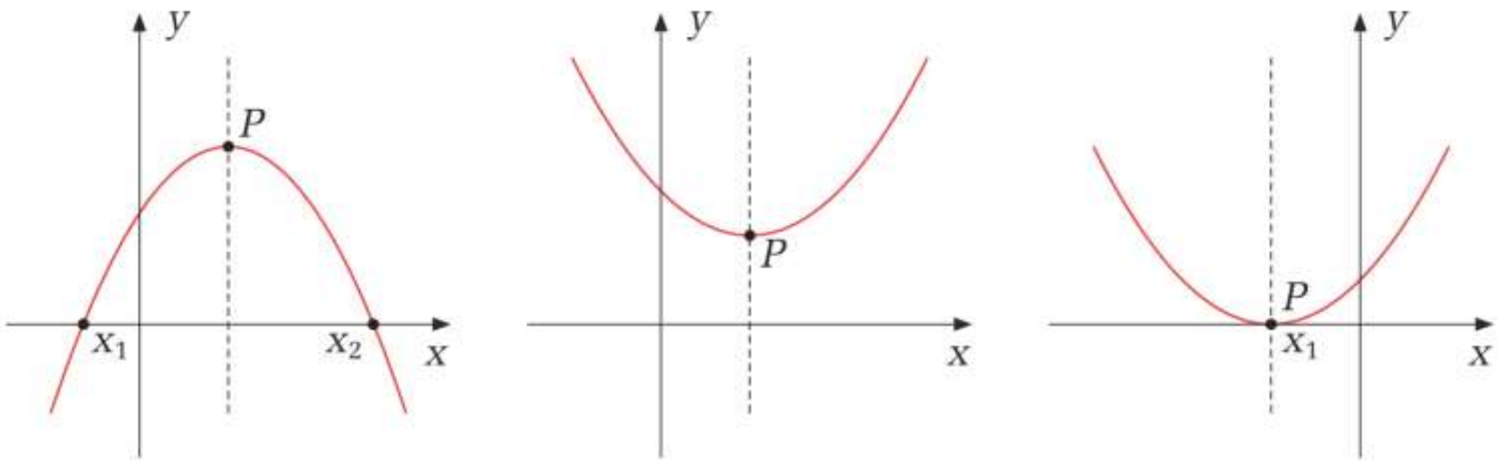
Der **Graph** von f heißt **Parabel** und ist **symmetrisch**.

Gestalt: $\bigcap$ wenn $a < 0$ und $\bigcup$ wenn $a > 0$



(a): $a < 0,\ b^2 > 4ac$ (b): $a > 0,\ b^2 < 4ac$ (c): $a > 0,\ b^2 = 4ac$

Eigenschaften



(a): $a < 0,\ b^2 > 4ac$ (b): $a > 0,\ b^2 < 4ac$ (c): $a > 0,\ b^2 = 4ac$

Wichtige Fragen zur Untersuchung quadratischer Funktionen:

A. Für welche Werte von $\boldsymbol{x}$ (falls es welche gibt) ist $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$? **Nullstellen**

B. Welches sind die Koordinaten des **Maximum-** oder **Minimumpunktes** $\boldsymbol{P}$?
Dieser Punkt heißt **SCHEITELPUNKT**.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b \text{ und } c \text{ Konstante, } a \neq 0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Wenn } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ und } a \neq 0 \text{ gilt:} \\[1em] ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}}$$

x_1 und x_2 sind die **Lösungen** der quadratischen Gleichung und die **Nullstellen** der quadratischen Funktion. Es gilt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Frage B: Bestimmung des Scheitelpunktes für a > 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}_{\text{Konstant}}$$

- Nur $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ hängt von x ab
- $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ nur für $x = -b/2a$
- $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ wenn $a > 0$

Daher hat $f(x)$ für $a > 0$ ein **Minimum**, wenn $x = -b/2a$

$$f(-b/2a) = -(b^2 - 4ac)/4a = c - b^2/4a$$

Frage B: Bestimmung des Scheitelpunktes für a < 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}_{\textbf{Konstant}}$$

- Nur $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ hängt von x ab
- $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ nur für $x = -b/2a$
- $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ wenn $a < 0$

Daher hat $f(x)$ für $a < 0$ ein **Maximum**, wenn $x = -b/2a$

$$f(-b/2a) = -(b^2 - 4ac)/4a = c - b^2/4a$$

Wenn $\boldsymbol{a > 0}$, hat $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ den **minimalen Wert**

$$\boldsymbol{c - \frac{b^2}{4a}} \text{ an der Stelle } \boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}} \tag{3}$$

Wenn $\boldsymbol{a < 0}$, hat $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ den **maximalen Wert**

$$\boldsymbol{c - \frac{b^2}{4a}} \text{ an der Stelle } \boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}} \tag{4}$$

Beispiel 1: Maximierung einer quadratischen Gewinnfunktion

Kosten für Herstellung und Verkauf von Q Einheiten: $C = 2Q + \frac{1}{2}Q^2$

Erzielter **Preis** pro Einheit: $P = 102 - 2Q$

Dann ist der **Gewinn**:

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= PQ - C = (102 - 2Q)Q - \left(2Q + \frac{1}{2}Q^2\right) \\ &= 100Q - \frac{5}{2}Q^2 = \underbrace{-\frac{5}{2}}_{a}Q^2 + \underbrace{100}_{b}Q\end{aligned}$$

Welcher Wert Q^* von Q **maximiert den Gewinn** und wie hoch ist der **maximale Gewinn**?

Lösung:

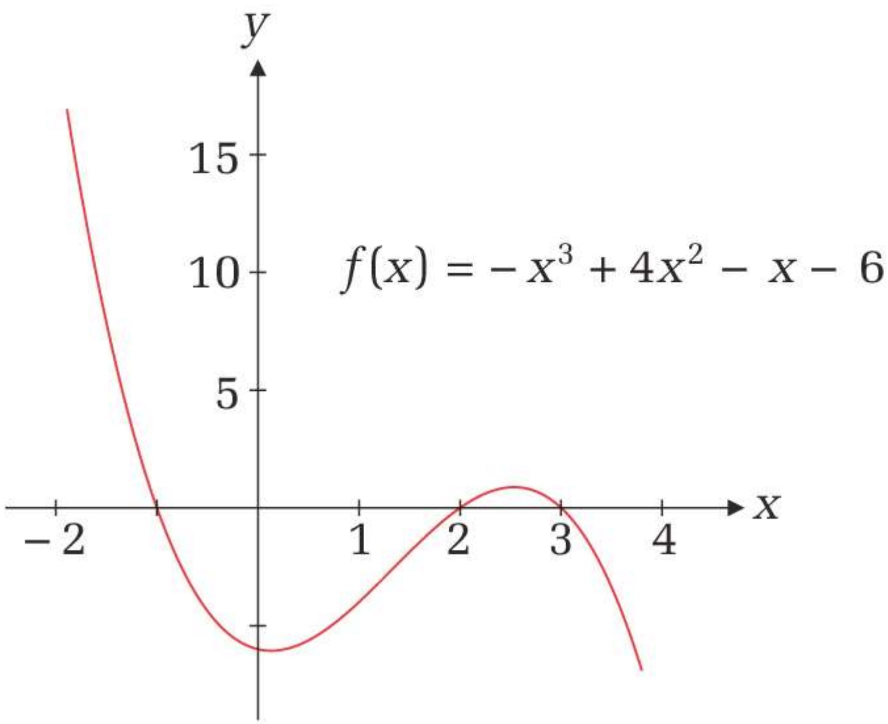
$$\boldsymbol{Q^* = -\underbrace{\frac{100}{2\left(-\frac{5}{2}\right)}}_{-b/2a} = 20 \quad \text{und} \quad \pi^* = \pi(Q^*) = -\underbrace{\frac{100^2}{4\left(-\frac{5}{2}\right)}}_{-b^2/4a} = 1\,000}$$

Kapitel 2.3

KUBISCHE FUNKTION UND POLYNOME

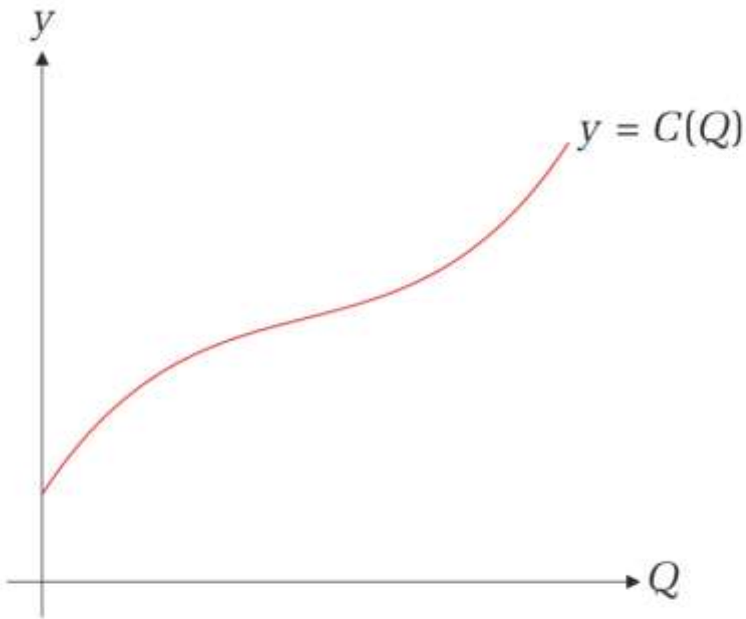
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a, b, c, d Konstante; $a \neq 0$



Die Gestalt des Graphen kann sich drastisch ändern, wenn die Konstanten variieren!

Beispiel 1: Kubische Kostenfunktion



$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$$

- $C(0)$ positiv, fixe Anfangskosten
- Steigende Kosten mit steigender Produktion
- Zu Beginn schnelle Steigung
- Steigung verlangsamt sich bei guter Auslastung
- Steigung verstärkt sich wieder bei Erreichen der Kapazitätsgrenze

Allgemeines Polynom vom **Grad** n:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ (konstante) Koeffizienten

a_n führender Koeffizient

<u>Beispiel:</u> Allgemeines Polynom vom **Grad 4**:

$$P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Führender Koeffizient a_4

Gesucht sind die Werte x, für die $P(x) = 0$.

Allgemeine Gleichung n-ter Ordnung:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

- Ein Polynom n-ten Grades hat **höchstens** n reelle Nullstellen.
- Es muss keine Nullstellen geben, z.B. $x^{100} + 1 \geq 1$
- **Fundamentalsatz der Algebra:**
  Jedes Polynom kann als **Produkt von Polynomen erster und zweiter Ordnung** (d.h. als Produkt von linearen und quadratischen Funktionen) geschrieben werden.

Kapitel 2.4

POTENZ- UND EXPONENZIALFUNKTION

$$f(x) = Ax^r \qquad (x \geq 0, r \text{ und } A \text{ Konstante})$$

Beispiele für ihre Notwendigkeit:

A. $S \approx 4.84V^{2/3}$, wobei $S = 4\pi r^2$ die Oberfläche, $V = (4/3)\pi r^3$ das Volumen und r der Radius eines Balles ist

B. Blutstrom (in Litern pro Sekunde) durch das Herz eines Menschen ist annähernd proportional zu $x^{0.7}$, wenn x das Körpergewicht ist

C. $Y = 2.262K^{0.203}L^{0.763}(1.02)^t$, wobei Y das Nettosozialprodukt, K Kapital, L Arbeit und t die Zeit

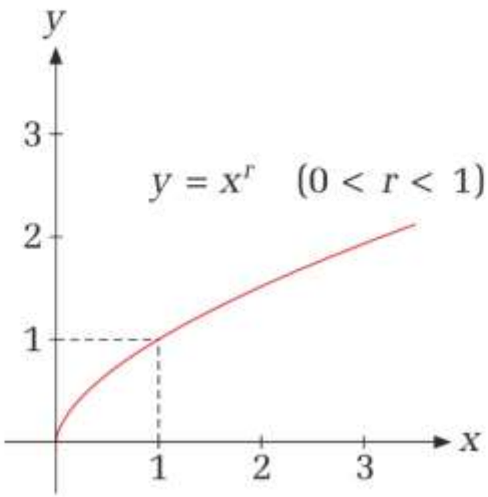


Abbildung 1

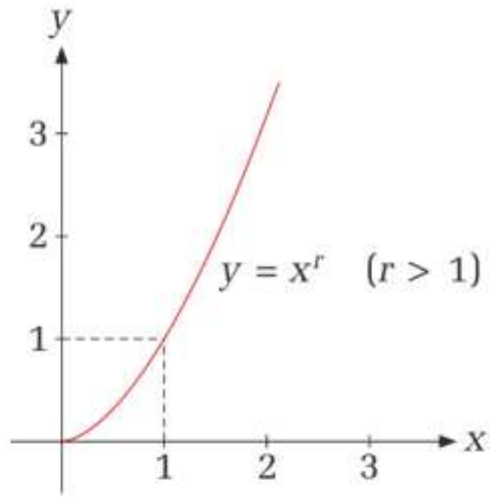


Abbildung 2

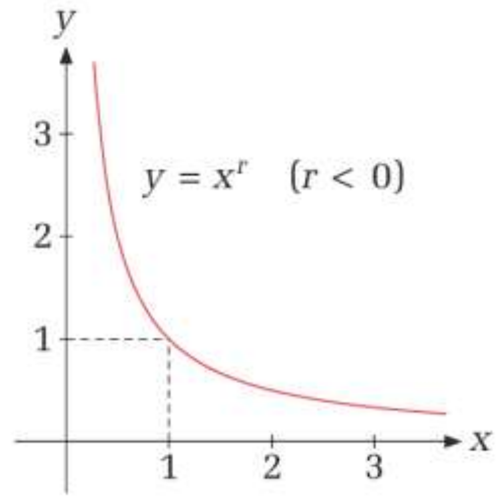


Abbildung 3

Die Gestalt des Graphen hängt entscheidend von $\boldsymbol{r}$ ab.

- $\boldsymbol{0 < r < 1}$: Ähnlich dem Graphen von $\boldsymbol{f(x) = x^{0.5}}$. Abb. 1
- $\boldsymbol{r > 1}$: Ähnlich $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ (Hälfte einer Parabel). Abb. 2
- $\boldsymbol{r < 0}$: Ähnlich $\boldsymbol{f(x) = x^{-1} = 1/x}$ (Hälfte einer Hyperbel). Abb. 3

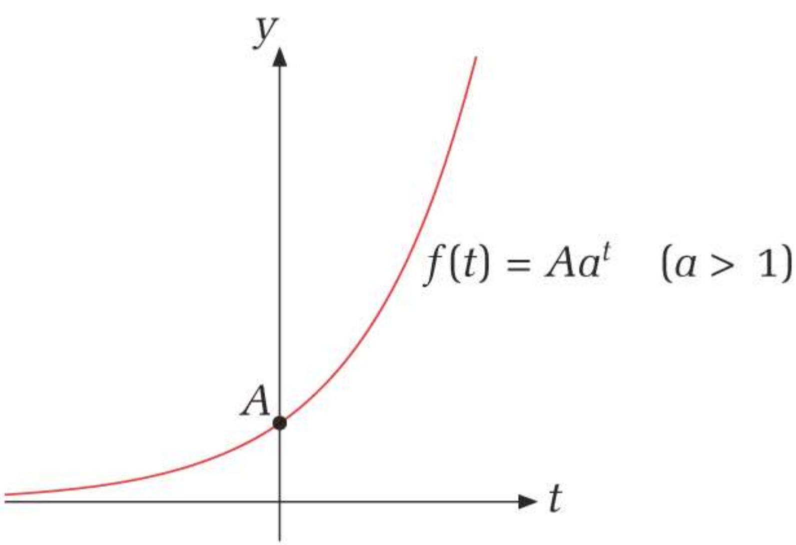
Eine Größe, die pro Zeiteinheit, um einen festen Faktor $\boldsymbol{a}$ wächst (fällt), wird **EXPONENTIELL WACHSEND** oder **FALLEND** genannt.

$$\boxed{f(t) = Aa^t \qquad (a \text{ und } A \text{ positive Konstanten})}$$

$$f(t+1) = Aa^{t+1} = Aa^t a^1 = a f(t)$$

- Falls $a > 1$, ist f **wachsend** (Abbildung 1)
- Falls $0 < a < 1$, ist f **fallend** (Abbildung 2)

$$f(0) = Aa^0 = A\,, \text{ d.h. } \quad f(t) = f(0)a^t$$



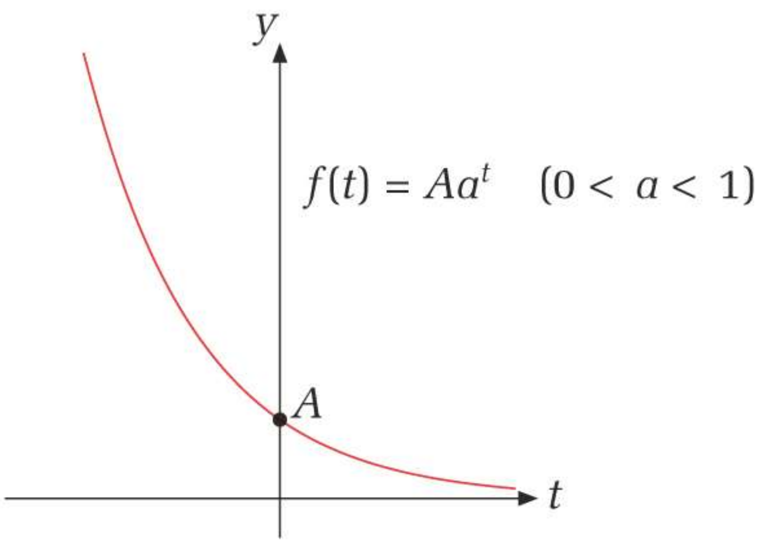


Abbildung 1 ($\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$) Abbildung 2 ($\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$)

- Falls $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$, ist f **wachsend** (Abbildung 1)
- Falls $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$, ist f **fallend** (Abbildung 2)

Anmerkung 1: Unterschied zwischen Potenz- und Exponentialfunktion

1. $f(x) = a^x$ Exponentialfunktion

   - Exponent variiert
   - Basis konstant

2. $g(x) = x^a$ Potenzfunktion

   - Exponent konstant
   - Basis variiert

Verdopplungszeit

Falls $a > 1$ (und $A > 0$), ist die Exponentialfunktion $f(t) = Aa^t$ monoton wachsend.

Die **Verdopplungszeit t^*** ist die Zeit bis zur **Verdopplung des Funktionswertes**:

$$f(0) = A \qquad f(t^*) = Aa^{t^*} = 2A \quad \Longleftrightarrow \quad a^{t^*} = 2$$

Die Verdopplungszeit t^* ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um $\mathbf{2}$ zu erhalten (d.h. der Logarithmus von $\mathbf{2}$ zur Basis a) oder (siehe Kap. 4.10):

$$\boxed{t^* = \ln 2 / \ln a}$$

Beispiel 3: Zinseszinsen

Ein Sparkonto mit $\boldsymbol{K}$ Euro wächst bei $\boldsymbol{p}\%$ Zinsen jährlich in $\boldsymbol{t}$ Jahren auf:

$$\boxed{\boldsymbol{K(1+p/100)^t}}$$

Nach dieser Formel wächst $\mathbf{1}$ Euro in $\boldsymbol{t}$ Jahren bei $\mathbf{8\%}$ Zinsen auf $\mathbf{(1+8/100)^{\boldsymbol{t}}=1.08^{\boldsymbol{t}}}$ Euro an.

1 Euro wächst in $\boldsymbol{t}$ Jahren auf:

t	1	2	5	10	20	30	50	100	200
$\mathbf{1.08^{\boldsymbol{t}}}$	1.08	1.17	1.47	2.16	4.66	10.06	46.90	**2 199.76**	**4 838 949.60**

Die allgemeine Exponentialfunktion mit Basis $a > 0$ ist

$$f(x) = Aa^x$$

Dabei ist $f(0) = A$ und a ist der Faktor, um den sich $f(x)$ ändert, wenn x um 1 steigt.

Wenn $a = 1 + p/100$ mit $p > 0$ und $A > 0$, dann **steigt** $f(x)$ um $p\%$, wenn x um eine Einheit wächst.

Wenn $a = 1 - p/100$ mit $p > 0$ und $A > 0$, dann **fällt** $f(x)$ um $p\%$, wenn x um eine Einheit wächst.

$$f(x) = Aa^x$$

Jede Basis a ergibt eine andere Exponentialfunktion.

Welche Werte von a sind wichtig? $a = 2$ oder $a = 10$?

Wichtigste Basis ist:

$$e = 2.718281828459045\ldots$$

Die Exponentialfunktion zur Basis e heißt die **natürliche Exponentialfunktion**.

$$f(x) = e^x$$

Alle Regeln für Potenzen gelten auch für die natürliche Exponentialfunktion.

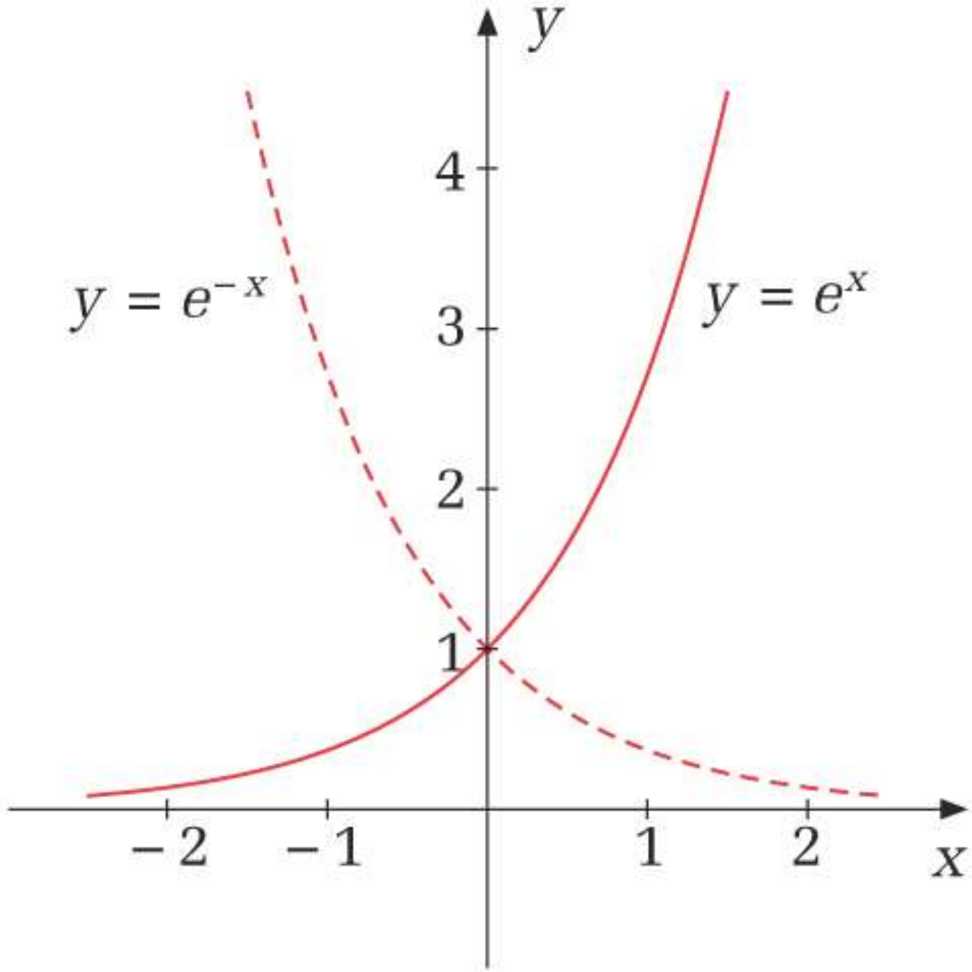
$$e^s \cdot e^t = e^{s+t}$$ Exponenten addieren

$$\frac{e^s}{e^t} = e^{s-t}$$ Exponenten subtrahieren

$$(e^s)^t = e^{st}$$ Exponenten multiplizieren

Man schreibt auch $\exp(u)$ statt e^u.

Abb. 3: Graphen der Exponentialfunktionen exp(x) und exp(-x)



Kapitel 2.5

LOGARITHMUS

Bei allen Fragen sind Gleichungen der folgenden Art für x zu lösen:

$$\boxed{a^x = b}$$

z.B. für Frage C: $1\,000 \cdot (1.08)^x = 10\,000 \iff (1.08)^x = 10$

Einige Beispiele zur Basis $e = 2.718\ldots$:

(i) $e^x = 4$ (ii) $5e^{-3x} = 16$ (iii) $A\alpha e^{-\alpha x} = k$

In allen Beispielen ist die **Unbekannte x im Exponenten.**

Falls

$$e^u = b$$

heißt u der **NATÜRLICHE LOGARITHMUS** von b.

Falls

$$e^{u} = b$$

heißt u der **NATÜRLICHE LOGARITHMUS** von b.

Wir schreiben $u = \ln b$, d.h. $\ln b$ ist definiert durch:

$$e^{\ln b} = b \qquad (b \text{ ist eine beliebige positive Zahl})$$

$\ln b$ ist der **Exponent**, mit dem man e **potenzieren** muss, um b zu **erhalten**.

Da e^u streng monoton steigend ist, ist $\ln b$ eindeutig bestimmt.

Beispiel 1: Logarithmen bestimmen

(a) $\ln 1 = 0$, da $e^0 = 1$

(b) $\ln e = 1$, da $e^1 = e$

(c) $\ln(1/e) = \ln e^{-1} = -1$, da $e^{-1} = 1/e^1 = 1/e$

(d) $\ln 4 \approx 1.386$, da $e^{1.386} \approx 4$

(e) $\ln(-6)$ ist nicht definiert.

Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus

(a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **Logarithmen addieren**

(b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ **Logarithmen subtrahieren**

(c) $\ln x^p = p \ln x$

(d) $\ln 1 = 0$ **Logarithmus von Eins ist Null**

$\ln e = 1$ **Logarithmus von e ist Eins**

$x = e^{\ln x} \qquad x > 0$

$\ln e^x = x$

$$\ln(x + y) \overset{!!!}{\neq} \ln x + \ln y$$

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)$$

Es gibt **keine einfachen Formeln** für

$$\ln(x + y) \text{ und } \ln(x - y)$$

Beispiel 2: Verdopplungszeit einer Exponentialfunktion

Verdopplungszeit ist die Zeit t^*, bis $f(t) = Aa^t$ sich verdoppelt

t^* erfüllt die Gleichung: $a^{t^*} = 2$

Lösen Sie diese Gleichung nach t^* auf.

Lösung:

$$\ln(a^{t^*}) = \ln 2 \;\Leftrightarrow\; t^* \ln a = \ln 2 \;\Leftrightarrow\; t^* = \ln 2 / \ln a$$

d.h.

$$\boxed{a^{t^*} = 2 \quad\Longleftrightarrow\quad t^* = \ln 2 / \ln a}$$

Die Funktion

$$g(x) = \ln(x) \quad (x > 0)$$

heißt die **natürliche Logarithmusfunktion**.

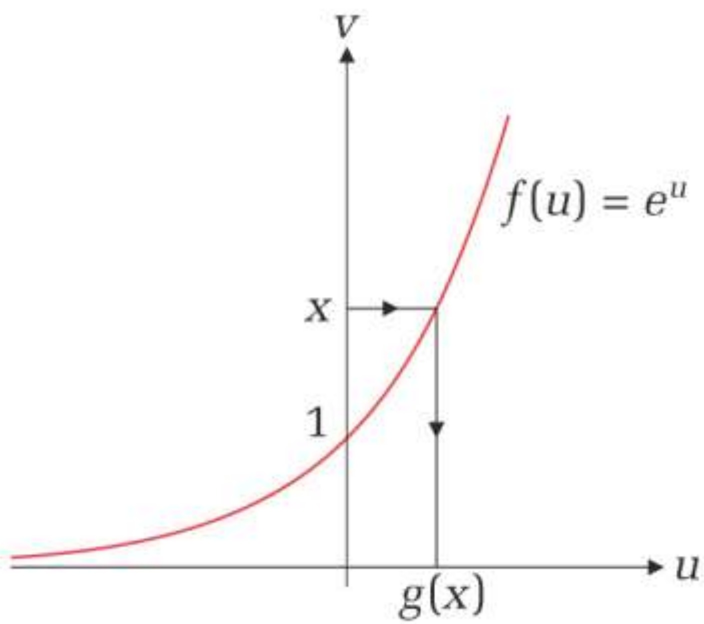


Abbildung 1: Illustration der Definition von $g(x) = \ln x$

Beachten Sie:

$$\text{(i)} \quad \ln e^{x} = x \qquad \text{für alle } x$$

$$\text{(ii)} \quad e^{\ln y} = y \qquad \text{für } y > 0$$

D.h.

(i) wendet man auf x die e-Funktion und anschließend die ln-Funktion an, so ergibt sich x.

(ii) wendet man auf y die ln-Funktion und anschließend die e-Funktion an, so ergibt sich y.

Sei a eine feste positive Zahl (meistens > 1).

Wenn

$$a^u = x$$

dann heißt u der **LOGARITHMUS** von x zur **BASIS** a.

Wir schreiben:

$$u = \log_a x$$

Das Symbol $\log_a x$ ist dann für alle positiven Zahlen x definiert durch:

$$a^{\log_a x} = x$$

Logarithmen mit anderen Basen als e, einige Beispiele

$$\log_2 32 = 5, \quad \text{da } 2^5 = 32$$

$$\log_{10}(1/100) = -2, \quad \text{da } 10^{-2} = 1/100$$

Beachten Sie:

$$\boxed{\ln x = \log_e x}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Auf beiden Seiten **ln** bilden:

$$\ln(a^{\log_a x}) = \ln x$$

Links Rechenregel für Logarithmus einer Potenz anwenden:

$$\log_a x \cdot \ln a = \ln x$$

$$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x}$$

Rechenregeln für Logarithmen zur Basis a

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ **Logarithmen addieren**

(b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ **Logarithmen subtrahieren**

(c) $\log_a x^p = p \log_a x,$

(d) $\log_a 1 = 0$ **Logarithmus von Eins ist Null**

$\log_a a = 1$ **Logarithmus von a zur Basis a ist Eins**

Kapitel 2.6

VERSCHIEBUNG VON FUNKTIONSGRAPHEN

Beispiel

- Die Aufnahme der Produktion eines **neuen** großen Ölfeldes **wirkt sich auf die Angebotskurve** für Öl und somit **auf das Preisgleichgewicht aus**.

- Eine **neue Technologie** in der Produktion eines Gutes bewirkt eine **Veränderung der Produktionsfunktion**.

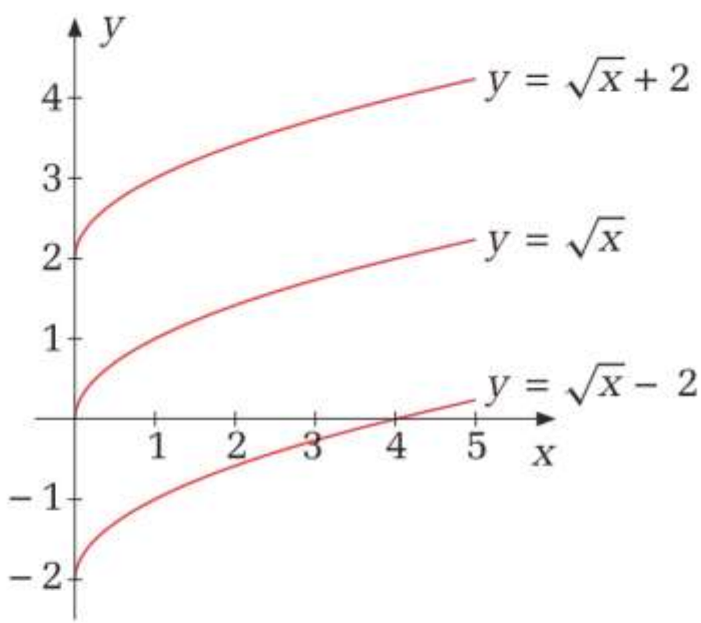
Wie steht der Graph der Funktion $f(x)$ in Beziehung zu den Graphen der Funktionen

$$f(x)+c, \quad f(x+c), \quad cf(x) \quad \textbf{und} \quad f(-x)\ ?$$

Dabei c ist eine positive oder negative Konstante.

Beispiel 1:

Abbildung 1 zeigt in der Mitte den Graphen von:



$$y = \sqrt{x}$$

Skizzieren Sie die Graphen von $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x} - 2$,

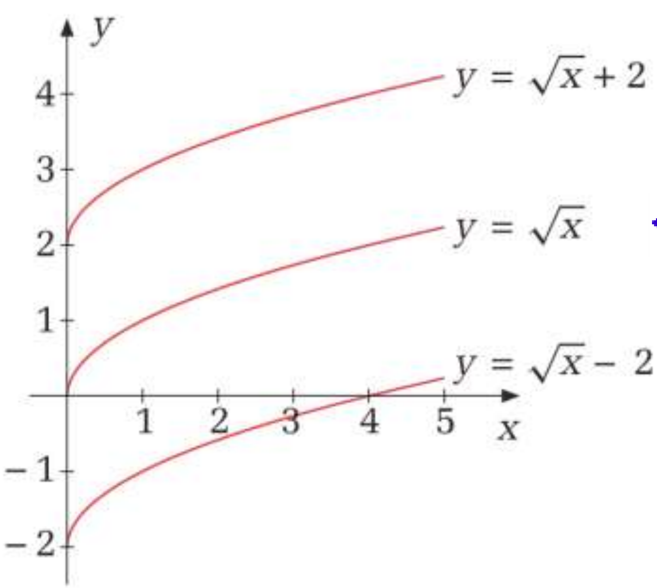
$y = \sqrt{x + 2}$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = 2\sqrt{x}$

$y = -\sqrt{x}$ und $y = \sqrt{-x}$

Beispiel 1:

- Den Graphen von $y = \sqrt{x} + 2$ erhält man, indem man den Graphen von $y = \sqrt{x}$ **um 2 Einheiten nach oben verschiebt.**

- Den Graphen von $y = \sqrt{x} - 2$ erhält man, indem man den Graphen von $y = \sqrt{x}$ **um 2 Einheiten nach unten verschiebt.**



$$+2 \uparrow$$

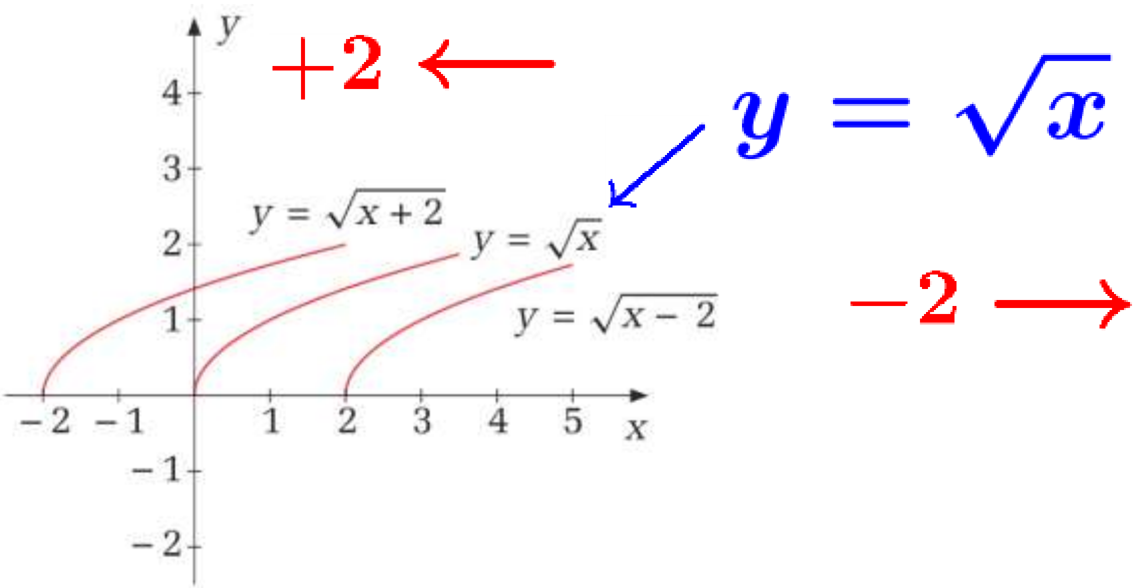
$$y = \sqrt{x}$$

$$-2 \downarrow$$

Beispiel 1:

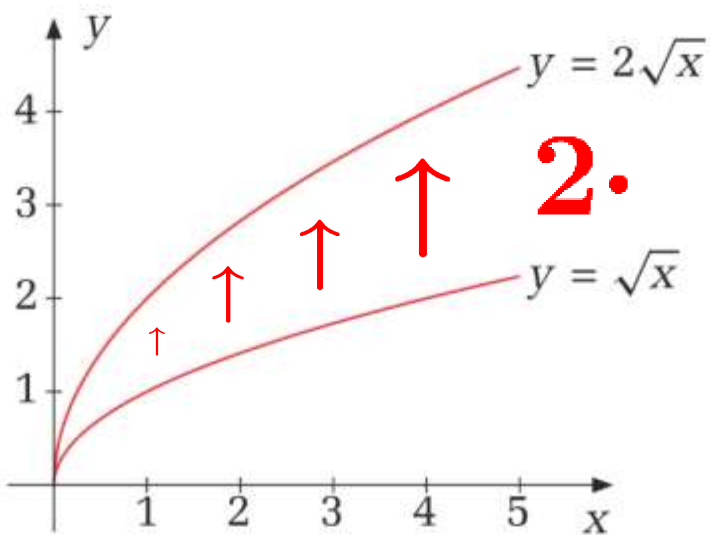
- Den Graphen von $y = \sqrt{x+2}$ erhält man, indem man den Graphen von $y = \sqrt{x}$ **um 2 Einheiten nach links verschiebt.**

- Den Graphen von $y = \sqrt{x-2}$ erhält man, indem man den Graphen von $y = \sqrt{x}$ **um 2 Einheiten nach rechts verschiebt.**



Beispiel 1:

- Den Graphen von $y = 2\sqrt{x}$ erhält man, indem man den Graphen von $y = \sqrt{x}$ **mit einem Faktor 2 streckt**.



$\leftarrow \quad y = \sqrt{x}$

(i) Wenn $y = f(x)$ ersetzt wird durch $y = f(x) + c$, wird der Graph **um c Einheiten nach oben verschoben, wenn $c > 0$ (nach unten, wenn c negativ ist).**

(ii) Wenn $y = f(x)$ ersetzt wird durch $y = f(x + c)$, wird der Graph **um c Einheiten nach links verschoben, wenn $c > 0$ (nach rechts, wenn c negativ ist).**

(iii) Wenn $y = f(x)$ ersetzt wird durch $y = cf(x)$, wird der Graph **vertikal gestreckt, wenn $c > 0$ (vertikal gestreckt und an der x-Achse gespiegelt, wenn c negativ ist).**

(iv) Wenn $y = f(x)$ ersetzt wird durch $y = f(-x)$, wird der Graph **an der y-Achse gespiegelt.**

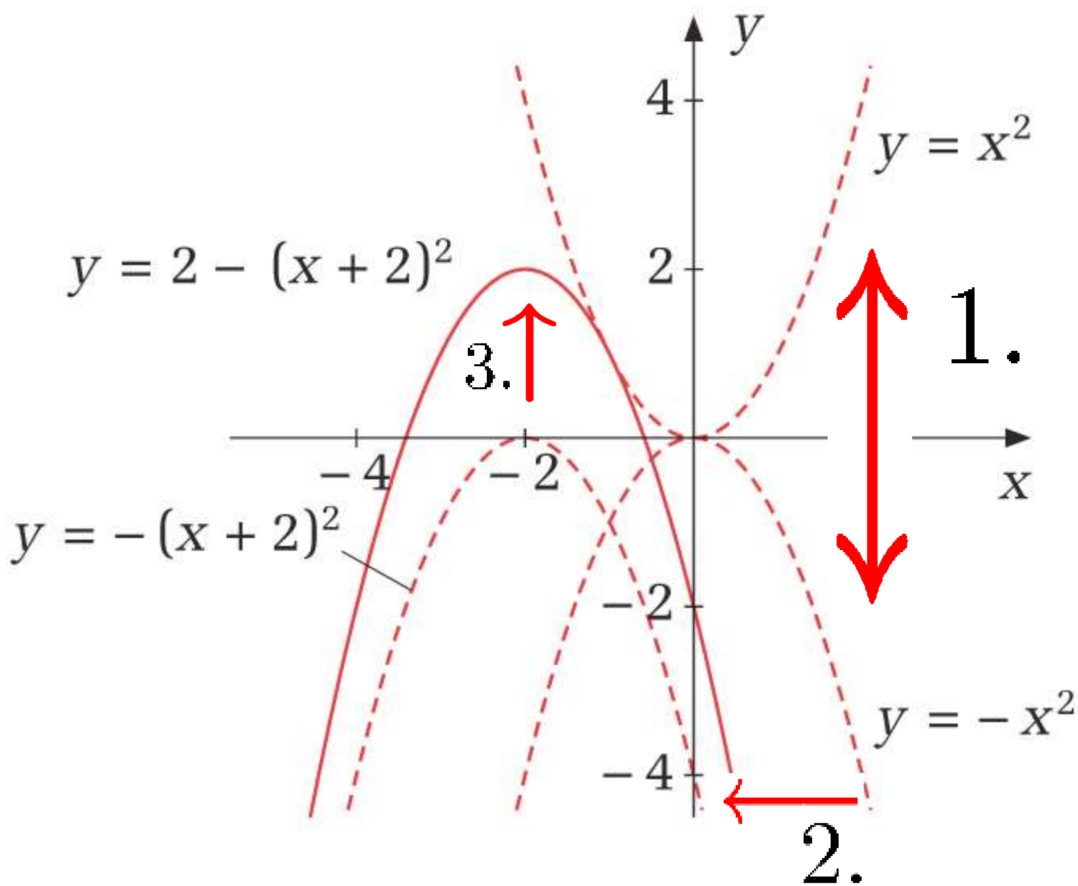
Beispiel 2 (i):

Beschreiben Sie den Graphen von

$$y = 2 - (x+2)^2$$

Beispiel 2(i): Skizzieren Sie den Graphen

$$y = 2 - (x + 2)^2$$



Rechnen mit Funktionen

Kapitel 3

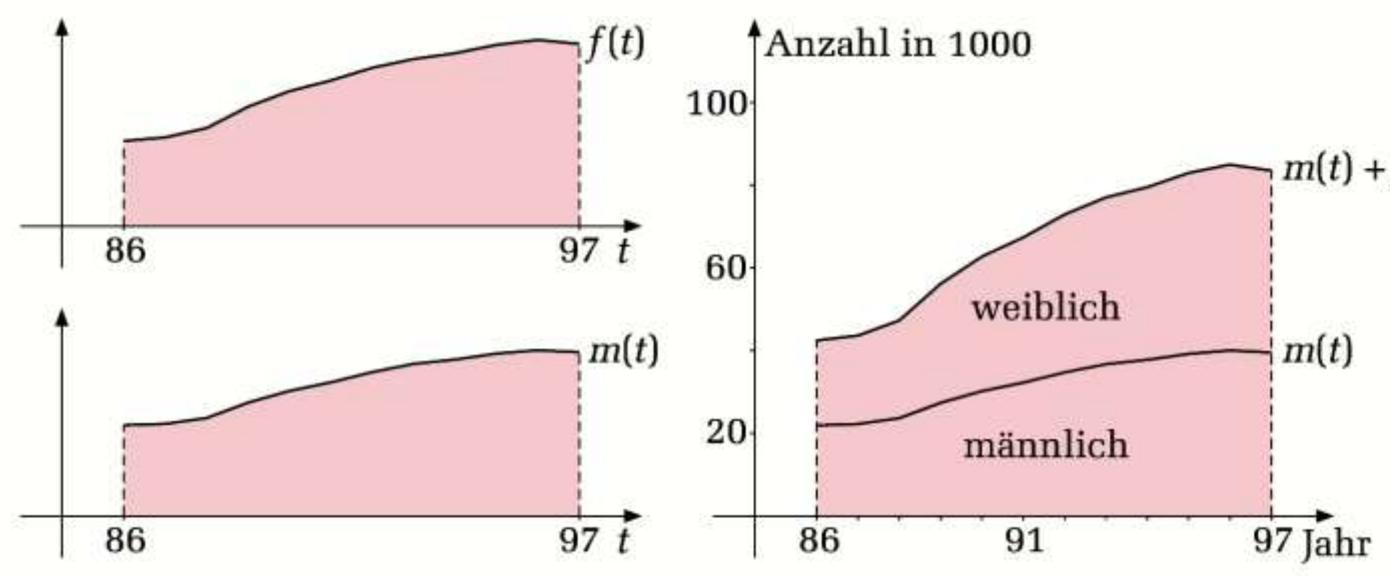
Kapitel 3

1. Rechenoperationen und Verkettung
2. Inverse Funktionen
3. Ableitung einer Funktion
4. Höhere Ableitungen
5. Ableitung spezieller Funktionen

Kapitel 3.1

RECHENOPERATIONEN UND VERKETTUNG

Abbildung 1: Summe



Darstellung der männlichen und weiblichen Studierenden an einer Universität in den Jahren 1986 - 1997

Sei $\boldsymbol{f(t)}$ bzw. $\boldsymbol{m(t)}$ die Anzahl der weiblichen bzw. männlichen Studierenden im Jahr $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{n(t)}$ die **Gesamtanzahl** der Studierenden

$$\boldsymbol{n(t) = f(t) + m(t)}$$

Die Graphen werden „übereinander gestapelt”.

Seien f und g Funktionen definiert in einer Menge A von reellen Zahlen

$$\boxed{h(x) = f(x) + g(x)}$$

SUMME von f und g: $h = f + g$

$$\boxed{k(x) = f(x) - g(x)}$$

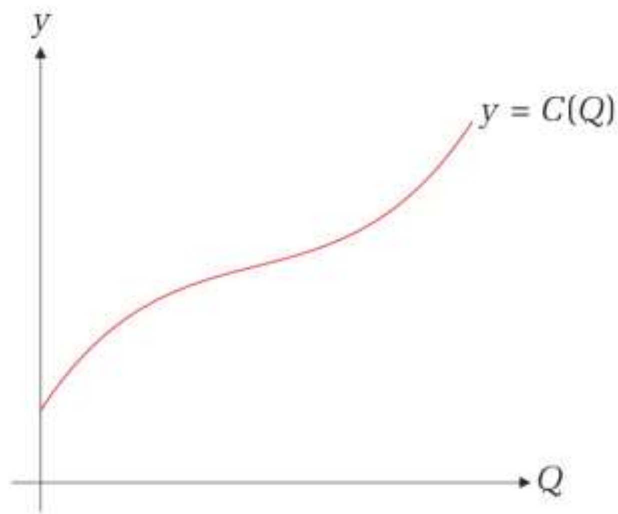
DIFFERENZ von f und g: $k = f - g$

Beispiel 1: Durchschnittskosten

Kosten zur Produktion von $\boldsymbol{Q}$ Einheiten eines Gutes seien $\boldsymbol{C(Q)}$

Kosten pro Einheit: $\boldsymbol{A(Q) = \dfrac{C(Q)}{Q}}$ Durchschnittskosten

z.B. kubische Kostenfunktion: $\boldsymbol{C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d}$

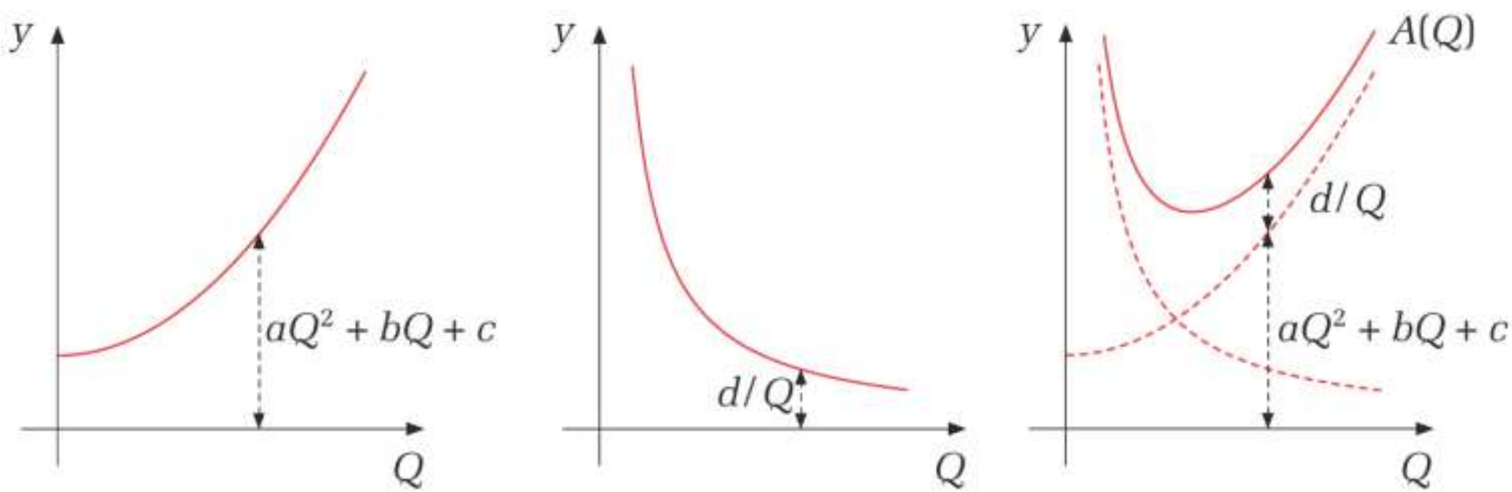


$$\boldsymbol{A(Q) = aQ^2 + bQ + c + \frac{d}{Q}, \qquad Q > 0}$$

Beispiel 1: Durchschnittskosten

$$A(Q) = \underbrace{aQ^2 + bQ + c}_{\text{quadratische Funktion}} + \underbrace{\frac{d}{Q}}_{\text{Hyperbel}}, \qquad Q > 0$$

Summe einer **quadratischen Funktion** $y = aQ^2 + bQ + c$ und einer **Hyperbel** $y = \frac{d}{Q}$

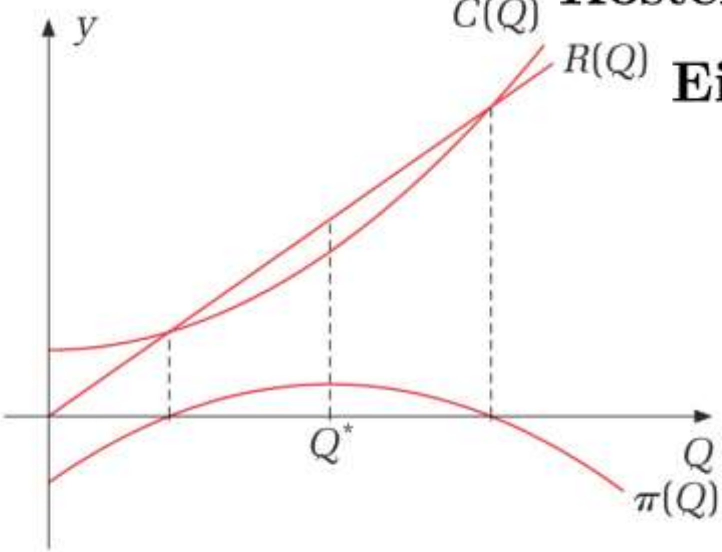


Graph: Hyperbel wird über Parabel gestapelt.

$\boldsymbol{R(Q)}$ Einnahmen aus Produktion und Verkauf von $\boldsymbol{Q}$ Einheiten eines Produkts

Gewinnfunktion:

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$$



Hier: fester Preis pro Einheit; Graph von $\boldsymbol{R(Q)}$ ist eine Gerade durch den Ursprung

Der Graph von $\boldsymbol{-C(Q)}$ muss zu $\boldsymbol{R(Q)}$ addiert werden.

Maximaler Gewinn in $\boldsymbol{Q^*}$.

f und g definiert in A

$$\boxed{h(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

Produkt von f und g $\qquad h = f \cdot g$

$$\boxed{k(x) = f(x)/g(x) \qquad (g(x) \neq 0)}$$

Quotient von f und g $\qquad k = f/g$

Nachfrage nach einem Gut ist Funktion x des **Preises** p.

$$x = x(p)$$

Der **Preis** hänge von der **Zeit** t ab, d.h. p ist eine Funktion von t.

$$p = p(t)$$

Dann ist auch x eine Funktion der **Zeit** t.

$$\boxed{x = x(p) = x(p(t))}$$

Wenn y eine Funktion von u und u eine Funktion von x, dann ist auch y eine Funktion von x.

Dann ist y eine **verkettete Funktion**.

$$y = f(u) \qquad u = g(x)$$

$$\boxed{y = f(u) = f(g(x))}$$

Die Funktionen f **(äußere)** und g **(innere)** werden hintereinander geschaltet, **erst** g, **dann** f.

Verkettung von Funktionen: Notation

$$\boxed{f \circ g}$$

Gelesen: „f von g" „f nach g"

Bezeichnung: **Komposition, Verkettung**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ACHTUNG: $f \circ g$ und $g \circ f$ sind gewöhnlich ganz verschiedene Funktionen.

Beispiel: $g(x) = 2 - x^2 \qquad f(u) = u^3$

$$(f \circ g)(x) = (2 - x^2)^3 \qquad (g \circ f)(x) = 2 - (x^3)^2 = 2 - x^6$$

Beispiel 3: Schreiben Sie als Verkettung von Funktionen

(a) $\boldsymbol{y = (x^3 + x^2)^{50}}$

Wie würden Sie die Werte dieser Funktion berechnen?

1.) Für gegebenes $\boldsymbol{x}$ berechnen Sie zunächst $\boldsymbol{x^3 + x^2}$, d.h. die innere Funktion ist:

$$\boldsymbol{g(x) = x^3 + x^2}$$

2.) Dann bilden Sie die fünfzigste Potenz des Ergebnisses, d.h. die äußere Funktion ist:

$$\boldsymbol{f(u) = u^{50}}$$

Dann ist:

$$\boxed{\boldsymbol{f(g(x)) = f(x^3 + x^2) = (x^3 + x^2)^{50}}}$$

Beispiel 3: Schreiben Sie als Verkettung von Funktionen

b) $y = e^{-(x-\mu)^2}$ μ ist eine Konstante

Lösung:

Innere Funktion: $g(x) = -(x-\mu)^2$

Äußere Funktion: $f(u) = e^u$

$$\boxed{f(g(x)) = f(-(x-\mu)^2) = e^{-(x-\mu)^2}}$$

Taucht in der Dichtefunktion der Normalverteilung auf!

Kapitel 3.2

INVERSE FUNKTIONEN

- Die beiden Funktionen

$$f(P) = 30P^{-1/3} \quad \text{und} \quad g(D) = 27\,000D^{-3}$$

sind **INVERSE** von einander.

- f ist die **Inverse** von g und g ist die **Inverse** von f.

- Die beiden Funktionen f und g enthalten genau die gleichen Informationen, z.B. die Aussage, dass die Nachfrage **10** ist beim Preis **27** kann mit f oder g ausgedrückt werden:

$$f(27) = 10 \qquad \text{oder} \qquad g(10) = 27$$

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich $D_f = A$.

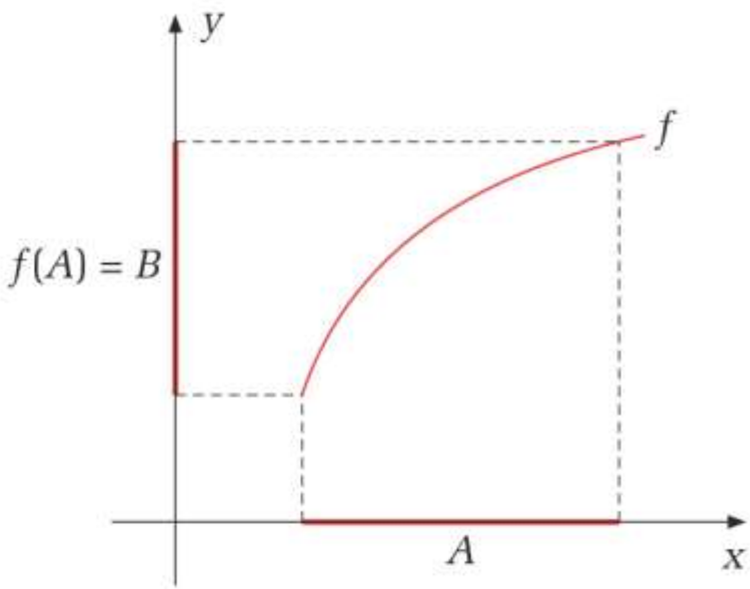
Der Wertebereich von f ist dann $B = R_f = \{f(x) : x \in A\} = f(A)$

Die Funktion f ist **EINS zu Eins** oder **UMKEHRBAR EINDEUTIG** in A, wenn f **niemals denselben Wert hat** für **zwei verschiedene Punkte in** A.

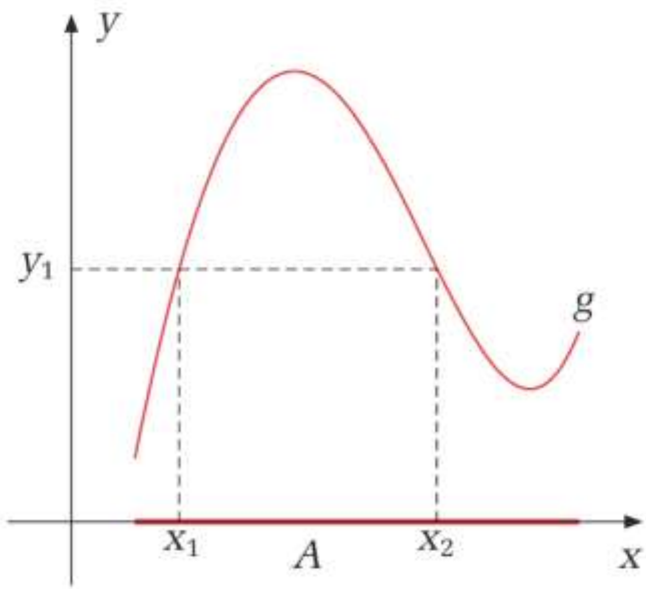
Äquivalente Aussagen:

- **Für jedes** $y \in B$ gibt es **genau ein** $x \in A$, so dass $y = f(x)$ gilt.
- f ist eine umkehrbar eindeutige Funktion in A, wenn aus $x_1 \neq x_2$ immer folgt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Wenn eine Funktion in ganz A **streng monoton steigend** oder **streng monoton fallend** ist, so ist sie **umkehrbar eindeutig**.



Umkehrbar eindeutig



Nicht umkehrbar eindeutig

Sei f eine Funktion mit **Definitionsbereich** A und **Wertebereich** B. Die Funktion f hat genau dann eine **inverse Funktion** g mit **Definitionsbereich** B und **Wertebereich** A, wenn f **umkehrbar eindeutig ist**.

Die Funktion g ist durch die folgende Regel definiert:

Für jedes $y \in B$ ist $g(y)$ diejenige Zahl x in A, für die

$$f(x) = y$$

$$\boxed{g(y) = x \iff y = f(x) \qquad (x \in A,\ y \in B)}$$

Folgerung: Verkettung inverser Funktionen

$$\boxed{g(f(x)) = x \quad x \in A \qquad \text{und} \qquad f(g(y)) = y \quad y \in B}$$

In Worten:

g macht rückgängig, was f mit x gemacht hat.

Beachten Sie:

- Wenn g die Inverse zu f ist, so ist auch f die Inverse zu g.
- Zwei Funktionen sind also immer gegenseitig invers.

Die Inverse zu f wird häufig mit f^{-1} statt g bezeichnet.

Dies darf nicht mit dem Kehrwert einer Zahl verwechselt werden!

Wenn a eine Zahl ist, so ist $a^{-1} = 1/a$

Jedoch $f^{-1}(x)$ **bedeutet nicht** $1/f(x) = (f(x))^{-1}$, z.B.

Die Funktionen

$$y = 1/(x^2 + 2x + 3) \quad \text{und} \quad y = x^2 + 2x + 3$$

sind nicht invers zueinander, sondern reziprok (Kehrwert).

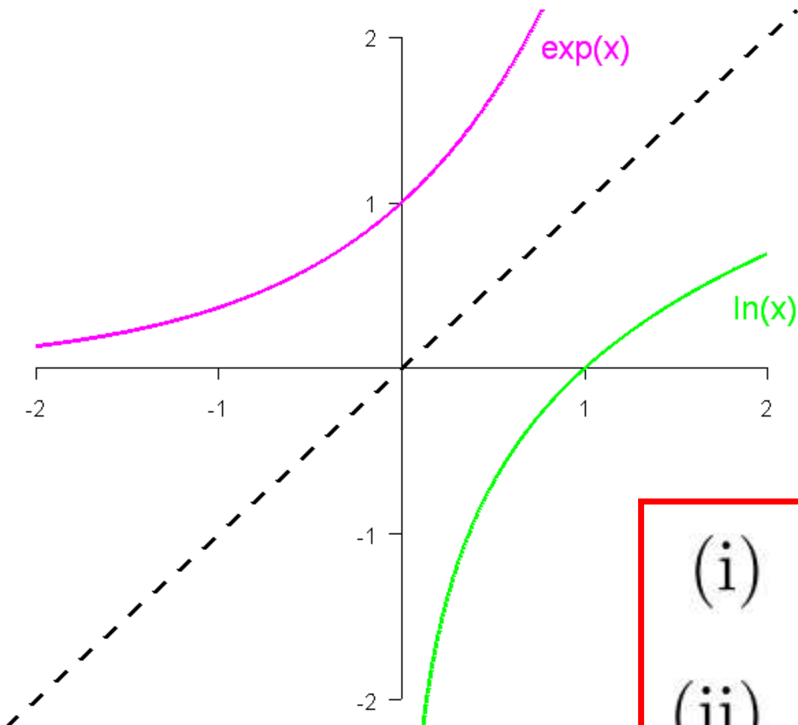
Die Funktionen f und g seien zueinander invers.

(a, b) liegt auf dem Graphen von f bedeutet: $b = f(a)$
Dies impliziert, dass $g(b) = a$ ist, so dass (b, a) auf dem Graphen von g liegt. **Die Punkte (a, b) und (b, a) liegen symmetrisch zur Geraden $y = x$.**

Wenn zwei Funktionen f und g zueinander **invers** sind, dann sind die **Graphen von** $y = f(x)$ **und** $y = g(x)$ **symmetrisch zur Geraden** $y = x$.

Die Einheiten auf beiden Achsen müssen dieselben sein.

Die Umkehrfunktion der **natürlichen Exponentialfunktion** $y = e^x$ ist die **natürliche Logarithmusfunktion** $x = \ln y$.



(i)	$\ln e^x = x$		für alle x
(ii)	$e^{\ln x} = x$		für $x > 0$

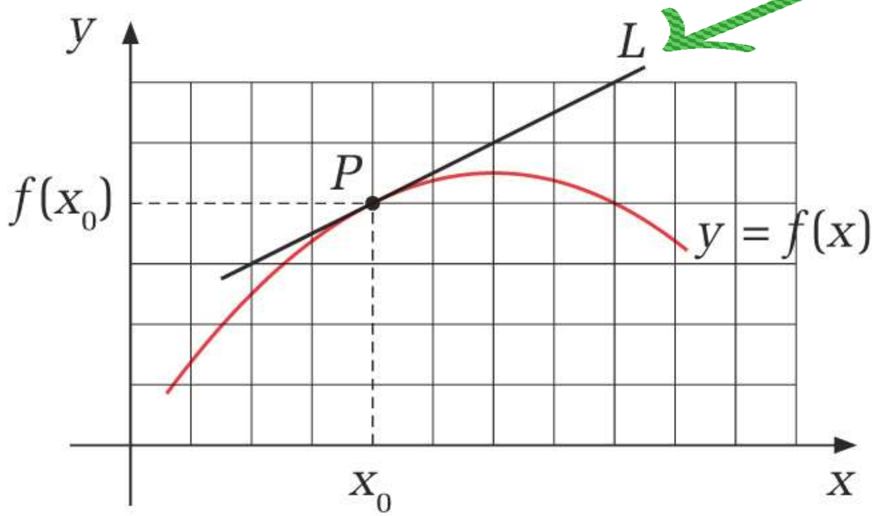
Kapitel 3.3

ABLEITUNG EINER FUNKTION

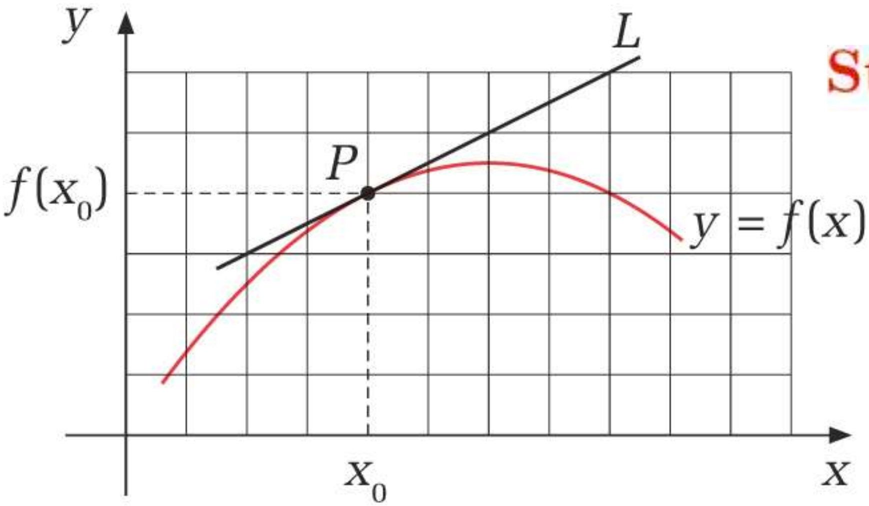
Steigung = Steigung der Tangente

Was ist die **Steigung des Graphen** einer beliebigen Funktion?

Tangente in $\boldsymbol{P}$



Die **Steigung** (Steilheit) der Kurve in einem bestimmten Punkt $\boldsymbol{P}$ wird durch die **Steigung** der **Tangente** in $\boldsymbol{P}$ definiert.



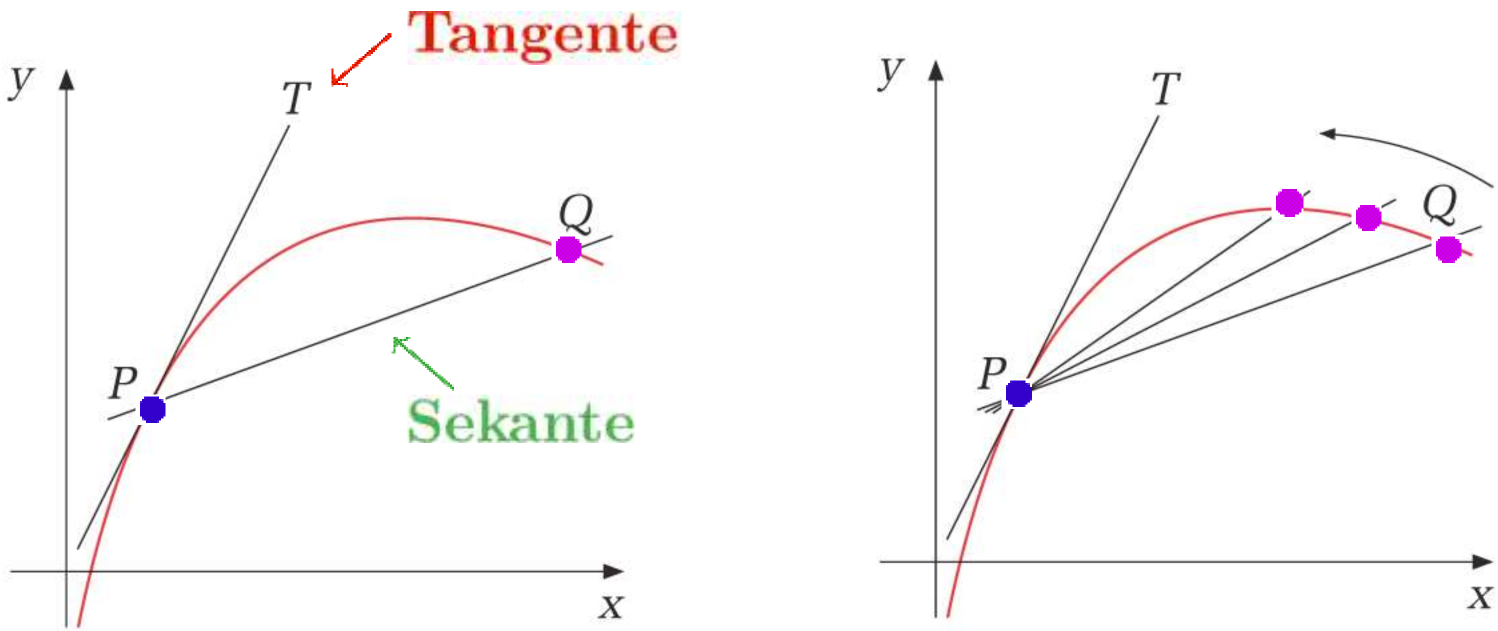
Steigung der Tangente in $\boldsymbol{P}$ ist **1/2**.

Der Punkt $\boldsymbol{P}$ hat die Koordinaten $\boldsymbol{P = (x_0, f(x_0))}$.

Die **Steigung der Tangente** im Punkt $\boldsymbol{P}$ heißt die **ABLEITUNG** von $\boldsymbol{f}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$ und wird mit $\boldsymbol{f'(x_0)}$ bezeichnet.

$\boldsymbol{f'(x_0)}$ ist die **Steigung der Tangente** an die Kurve $\boldsymbol{y = f(x)}$ im Punkt $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$.

Tangente und Sekante



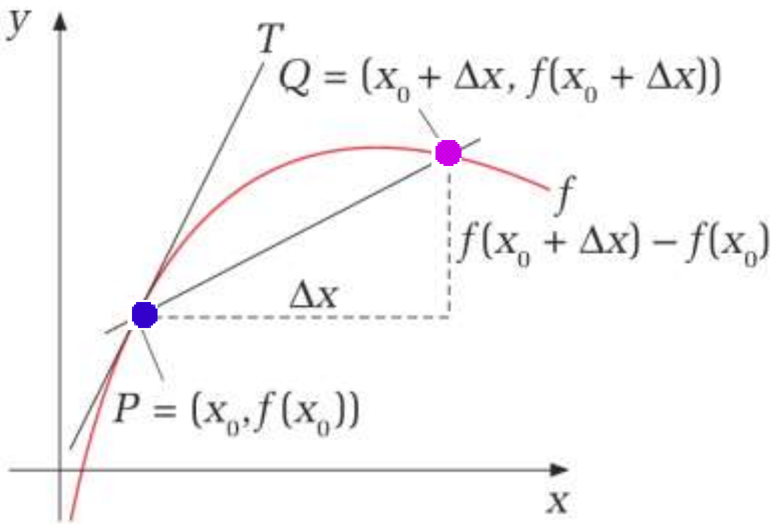
Sei P Punkt auf der Kurve und Q weiterer Punkt auf der Kurve.

Die Gerade durch P und Q heißt SEKANTE.

Halten Sie P fest und bewegen Sie Q auf P zu.

Dann dreht sich die Sekante um P und geht im **Grenzfall in die TANGENTE** über.

Steigung der Sekante



P und Q Punkte auf dem Graphen von f, nahe bei einander

$$P = (x_0, f(x_0)) \qquad Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$

Steigung der Sekante (Differenzen- oder Newton-Quotient):

$$\boxed{m_{PQ} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Steigung der Sekante: $m_{PQ} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$\Delta x = \mathbf{0}$ nicht erlaubt, da sonst: $\mathbf{0/0}$

Für Q gegen P geht Δx gegen $\mathbf{0}$ und die **Sekante** gegen die **Tangente** in P, deshalb folgende Definition:

Die **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 ist gegeben durch:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Die **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 ist:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Mit der Punkt-Steigungsformel einer Geraden folgt:

Die **Gleichung der Tangente** an den Graphen $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist gegeben durch

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Differentialnotation (Leibniz):

Statt $f'(x)$ auch:

$$\frac{dy}{dx} = dy/dx \quad \text{oder} \quad \frac{df(x)}{dx} = df(x)/dx \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

z.B. $y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{oder} \qquad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Andere Symbole statt f, x und y:

$$P(t) = t^2 \;\Rightarrow\; P'(t) = 2t; \qquad A = r^2 \;\Rightarrow\; dA/dr = 2r$$

Beispiel 1: Grenzkosten, Grenzertrag, Grenzgewinn

$C(x)$ = **Kosten** für die Herstellung von x Einheiten

$R(x)$ = **Ertrag** (Einnahmen) aus dem Verkauf von x Einheiten

$\pi(x) = R(x) - C(x)$ **Gewinn**

$C'(x)$ = **Grenzkosten** bei x (marginal cost)

$R'(x)$ =**Grenzertrag** (marginal revenue)

$\pi'(x)$ = **Grenzgewinn** (marginal profit)

Ökonomen benutzen das Wort **GRENZ**, um **Ableitung** kenntlich zu machen:

Grenzneigung zum Konsum (Ableitung: Konsumfunktion nach Einkommen)

Grenzprodukt der Arbeit (Ableitung: Produktionsfunktion nach Arbeitsinput)

Definition der Ableitung:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (*)$$

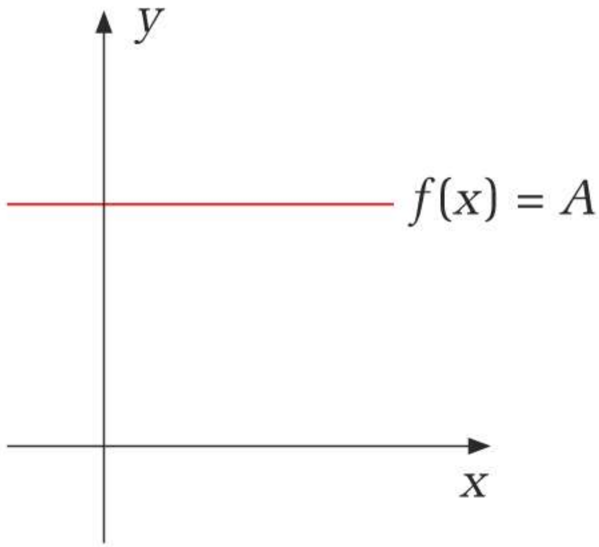
Die Funktion f ist **DIFFENZIERBAR** in x, wenn **dieser Grenzwert existiert**.

- Das **Bilden der Ableitung** heißt **DIFFERENZIEREN**.
- Die **Funktion** f wird in eine **neue Funktion** f' transfomiert.
- Die Funktion f' ist definiert für alle x, für die der **Grenzwert in (*) existiert**.

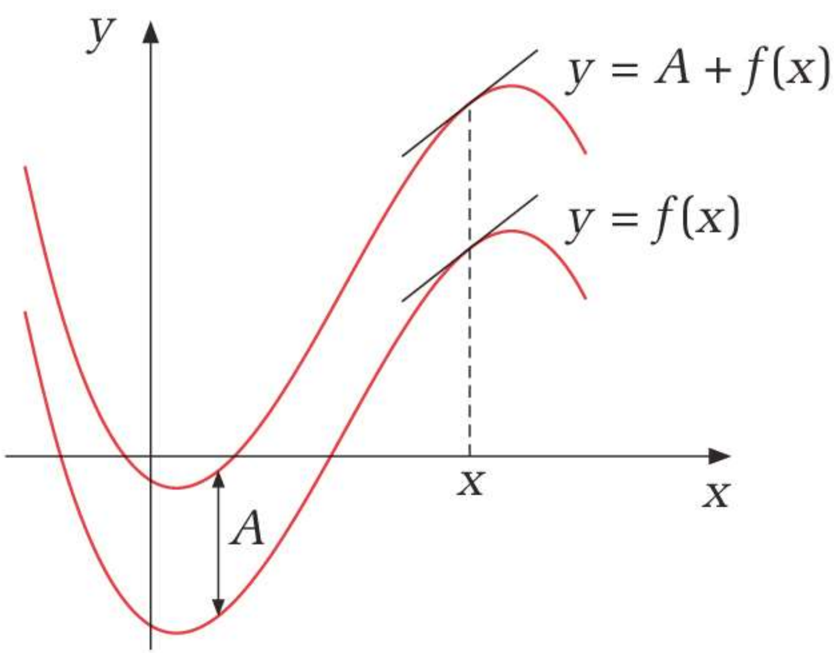
Notation: $y = f(x)$ Ableitung: $y' = dy/dx = f'$

Ableitungen mit Konstanten

1. $f(x) = A \Rightarrow f'(x) = 0$ **Ableitung einer Konstanten ist Null**
2. $y = A + f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$ **additive Konstanten verschwinden**
3. $y = Af(x) \Rightarrow y' = Af'(x)$ **multiplikative Konstanten bleiben**



Zu 1: Eine Konstante steigt nicht!



Zu 2: Graphen sind parallel!

$$\boxed{f(x) = x^r \;\Rightarrow\; f'(x) = rx^{r-1} \quad (r \text{ eine beliebige Konstante})}$$

Beispiel 2:

a) $y = x^5 \;\Rightarrow\; y' = 5x^4$

b) $y = 3x^8 \;\Rightarrow\; y' = 3 \cdot 8x^7 = 24x^7$

c) $y = \dfrac{x^{100}}{100} = \dfrac{1}{100}x^{100} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{100}100x^{99} = x^{99}$

Summen und Differenzen

Wenn f und g beide in x differenzierbar sind, dann sind die Summe $f+g$ und die Differenz $f-g$ auch differenzierbar in x und es gilt

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \implies h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

In Leibniz's Notation:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

Die Summenregel gilt auch für Summen mit beliebig vielen Summanden, z.B.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)+h(x)) = f'(x)-g'(x)+h'(x)}$$

Produktregel

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \qquad (f \cdot g)(x) = x^3$$

$$f'(x) = 1 \qquad g'(x) = 2x \qquad (f \cdot g)'(x) = 3x^2$$

$$3x^2 = (f \cdot g)'(x) \overset{!}{\neq} f'(x) \cdot g'(x) = 1 \cdot 2x$$

Wenn f und g beide in x differenzierbar sind, so auch $h = f \cdot g$ und es gilt:

$$h'(x) = (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \left[\frac{d}{dx} f(x)\right] \cdot g(x) + f(x) \cdot \left[\frac{d}{dx} g(x)\right]$$

Produktregel, Beispiel:

Bestimmen Sie $h'(x)$, wenn

$$h(x) = (x^3 - x) \cdot (5x^4 + x^2)$$

Lösung:

$$f(x) = x^3 - x \qquad g(x) = 5x^4 + x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \qquad g'(x) = 20x^3 + 2x$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= (3x^2 - 1) \cdot (5x^4 + x^2) + (x^3 - x) \cdot (20x^3 + 2x) \\ &= \ldots \\ &= 35x^6 - 20x^4 - 3x^2 \end{aligned}$$

Produktregel für mehr als zwei Faktoren

$$y = f(x)g(x)h(x)$$

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\boxed{(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'}$$

Wenn f und g in x differenzierbar und $g(x) \neq 0$ ist, dann ist auch $h = f/g$ differenzierbar in x und es gilt:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}}$$

Quotientenregel; Beispiel:

Berechnen Sie $h'(x)$, wenn

$$h(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}$$

Lösung:

$$f(x) = 3x - 5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3$$

$$g(x) = x - 2 \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = 1$$

Für $x \neq 2$ gilt:

$$h'(x) = \frac{3 \cdot (x-2) - (3x-5) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x + 5}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$h'(x) < 0$ für alle $x \neq 2$. Daher gilt:

$h(x)$ ist **streng monoton fallend** für $x < 2$ und für $x > 2$.

Sei y eine Funktion von u und u eine Funktion von x.

Dann ist y eine verkettete Funktion von x.

Wenn x sich ändert, ändert sich u und daher auch y, also eine „**Kettenreaktion**"

du/dx und dy/du seien bekannt.

Wie erhalten wir dann die Änderungsrate dy/dx?

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \textbf{(Kettenregel)}}$$

Wenn y eine **differenzierbare** Funktion von u und u wiederum eine **differenzierbare** Funktion von x ist, dann ist auch y eine **differenzierbare** Funktion von x und es gilt die **Kettenregel**.

Verallgemeinerte Potenzregel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \textbf{(Kettenregel)}$$

Wichtiger Spezialfall: $y = u^r$ und $u = g(x)$

Dann gilt nach der Kettenregel:

$$\boxed{y' = r u^{r-1} u'}$$

Verallgemeinerte Potenzregel; Beispiel:

Bestimmen Sie dy/dx, wenn $y = u^5$ und $u = 1 - x^3$.

Lösung

$$dy/du = 5u^4 \quad \text{und} \quad du/dx = -3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4(-3x^2) = -15x^2u^4 = -15x^2(1-x^3)^4$$

Anmerkung 1: Lösung ohne Zwischenschritte:

$$y = (\underbrace{1 - x^3}_{u})^5 \;\Rightarrow\; y' = \underbrace{5(1-x^3)^4}_{dy/du}\underbrace{(-3x^2)}_{du/dx} = -15x^2(1-x^3)^4$$

Beispiel: Mehrfache Anwendung der Kettenregel

Bestimmen Sie $x'(t)$, wenn $x(t) = 5\left(1 + \sqrt{t^3+1}\right)^{25}$.

<u>Lösung:</u>

$$x(t) = 5u^{25} \quad \text{mit} \quad u = 1 + \sqrt{t^3+1}$$

$$x'(t) = 5 \cdot 25u^{24}\frac{du}{dt} = 125u^{24}\frac{du}{dt}$$

$$u = 1 + \sqrt{v} = 1 + v^{1/2} \quad \text{mit} \quad v = t^3 + 1$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}v^{-1/2} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}v^{-1/2} \cdot 3t^2 = \frac{1}{2}(t^3+1)^{-1/2} \cdot 3t^2$$

$$x'(t) = 125\left(1 + \sqrt{t^3+1}\right)^{24} \cdot \frac{1}{2}(t^3+1)^{-1/2} \cdot 3t^2$$

In Beispiel 4 war x eine Funktion von u, u eine Funktion von v und v eine Funktion von t.

Dann ist x eine verkettete Funktion von t und die Kettenregel kann zweimal angewendet werden:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}}$$

Alternative Formulierung der Kettenregel

$$y = f(u) \quad \text{und} \quad u = g(x) \qquad y = f\,(g(x))$$

y **verkettete Funktion**, g **innere Funktion**, f **äußere Funktion**

Kettenregel:

Wenn g differenzierbar ist in x_0 und f differenzierbar in $u_0 = g(x_0)$, dann ist $h(x) = f\,(g(x))$ differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$\boxed{h'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'\,(g(x_0))g'(x_0)}$$

Äußere Ableitung mal innere Ableitung

Kapitel 3.4

HÖHERE ABLEITUNGEN

Ableitung einer Funktion f heißt auch **ERSTE ABLEITUNG**.

Wenn f' differenzierbar ist, können wir

$$\boxed{(f')' =: f''}$$

bilden, die **ZWEITE ABLEITUNG** von f.

$f''(x)$ ist die **zweite Ableitung** von f, berechnet an der Stelle x.

Beispiel 1:

Bestimmen Sie f' und f'', wenn

$$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x$$

Lösung

$$f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 2$$

$$f''(x) = 40x^3 - 18x$$

Notationen für die zweite Ableitung

$$y = f(x) \qquad y'' = f''(x)$$

Leibniz-Notation: $f'(x) = dy/dx = df(x)/dx$

Operator d/dx bedeutet: **Differenziere** den folgenden Ausdruck nach x.

Zweite Ableitung bedeutet: den **Operator zweimal** anwenden

$$f''(x) = (d/dx)(d/dx)f(x) = (d/dx)^2 f(x)$$

Dafür schreiben wir:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = d^2 f(x)/dx^2 \quad \text{oder} \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = d^2 y/dx^2$$

Zweite Ableitung; Beispiel:

Bestimmen Sie $\boldsymbol{Y''}$, wenn $\boldsymbol{Y = AK^a} \quad (\boldsymbol{K > 0})$.

Lösung

$$Y' = AaK^{a-1}$$

$$Y'' = Aa(a-1)K^{a-2}$$

Das Vorzeichen der **ersten Ableitung** bestimmt, ob eine **Funktion** **wächst** oder **fällt** in einem Intervall $\boldsymbol{I}$.

Wenn $f'(x) \geq \mathbf{0}$, dann **wächst** die Funktion in $\boldsymbol{I}$ und umgekehrt.

Wenn $f'(x) \leq \mathbf{0}$, dann **fällt** die Funktion in $\boldsymbol{I}$ und umgekehrt.

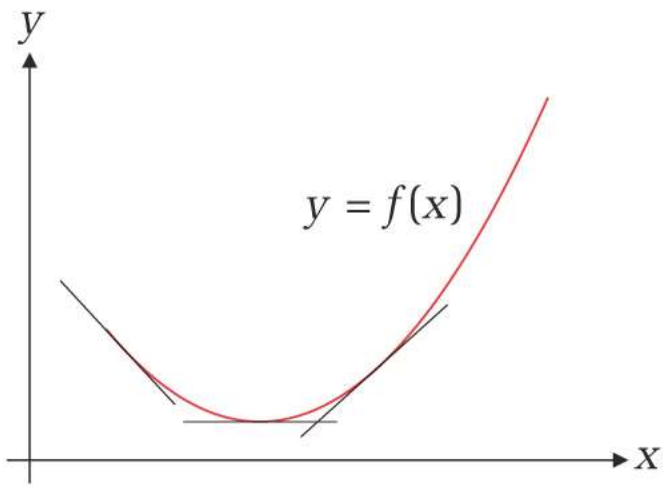
Die **zweite Ableitung** ist die Ableitung der **ersten Ableitung**.

Das Vorzeichen der **zweiten Ableitung** bestimmt, ob die **erste Ableitung** **wächst** oder **fällt**.

Vorzeichen der 2. Ableitung und Steigungsverhalten der 1. Ableitung

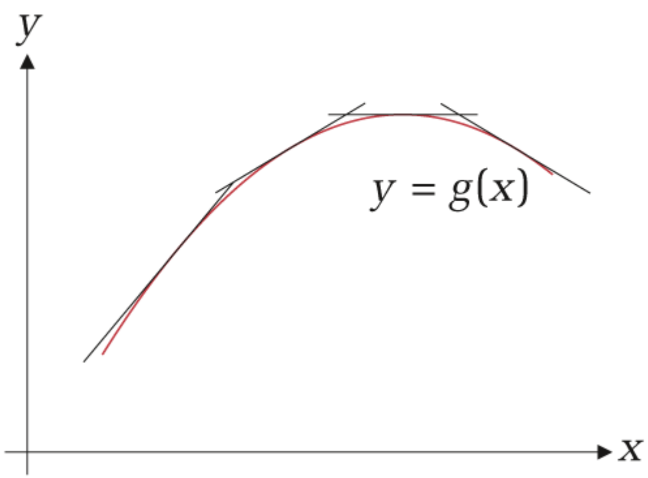
$$f''(x) \geq 0 \text{ auf } I \iff f' \text{ monoton wachsend auf } I$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ auf } I \iff f' \text{ monoton fallend auf } I$$



Steigung der Tangente wächst mit zunehmendem x

f' ist **monoton wachsend**



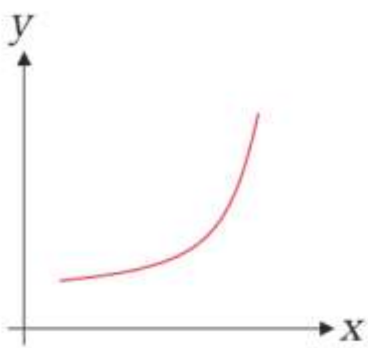
Steigung der Tangente fällt mit zunehmendem x

g' ist **monoton fallend**

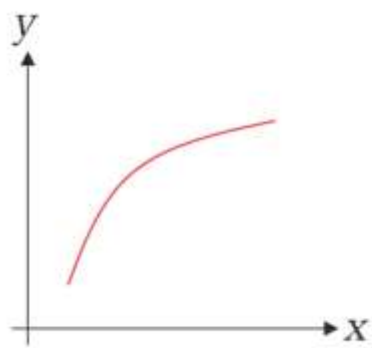
Definition: Konvexe und konkave Funktionen

$$\boldsymbol{f} \text{ ist } \textbf{KONVEX} \text{ auf } \boldsymbol{I} \iff f''(x) \geq \mathbf{0} \text{ für alle } \boldsymbol{x} \text{ in } \boldsymbol{I}$$

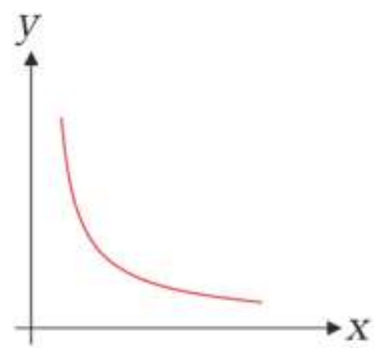
$$\boldsymbol{f} \text{ ist } \textbf{KONKAV} \text{ auf } \boldsymbol{I} \iff f''(x) \leq \mathbf{0} \text{ für alle } \boldsymbol{x} \text{ in } \boldsymbol{I}$$



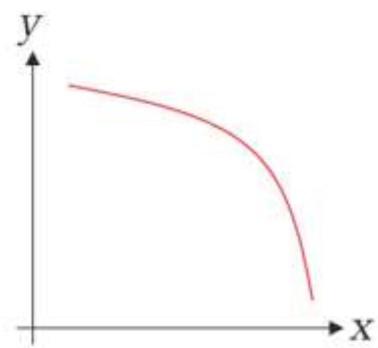
Monoton wachsend, konvex



Monoton wachsend, konkav



Monoton fallend, konvex



Monoton fallend, konkav

Beispiel:

Funktionen U und g seien **monoton wachsend** und **konkav** mit

$$U' \geq 0 \qquad U'' \leq 0 \qquad\qquad g' \geq 0 \qquad g'' \leq 0$$

Zeigen Sie: Die verkettete Funktion $f(x) = g(U(x))$ ist auch **monoton wachsend** und **konkav**.

Lösung: Nach der Kettenregel ist

$$f'(x) = \underbrace{g'(U(x))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{U'(x)}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \text{d.h. } f \text{ ist monoton wachsend.}$$

Eine **monoton wachsende** Transformation einer **monoton wachsenden** Funktion ist **monoton wachsend**.

Beispiel: Fortsetzung

$$f(x) = g(U(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(U(x)) \cdot U'(x)$$

Nach der Kettenregel ist: $(g'(U(x))' = g''(U(x))\, U'(x)$

Nach der Produktregel ist:

$$f''(x) = \underbrace{g''(U(x))}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(U'(x))^2}_{\geq 0} + \underbrace{g'(U(x))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{U''(x)}_{\leq 0} \leq 0$$

Damit ist f **konkav**.

Eine **monoton wachsende** **konkave** Transformation einer **monoton wachsenden** **konkaven** Funktion ist **monoton wachsend** und **konkav**.

Wenn $y = f(x)$, so heißt die **Ableitung** von $y'' = f''(x)$

DRITTE ABLEITUNG: $y''' = f'''(x)$

VIERTE ABLEITUNG: $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = d^4y/dx^4$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

n **-te Ableitung** von f in x

n heißt die **ORDNUNG der Ableitung**.

Beispiel: Ableitungen bis zur vierten Ordnung

$$f(x) = 3x^{-1} + 6x^3 - x^2 \qquad (x \neq 0)$$

$$f'(x) = -3x^{-2} + 18x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 6x^{-3} + 36x - 2$$

$$f'''(x) = -18x^{-4} + 36$$

$$f^{(4)}(x) = 72x^{-5}$$

Kapitel 3.5

ABLEITUNG SPEZIELLER FUNKTIONEN

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = e^x \cdot \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Für den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ist e^x eine Konstante.

Nach Beispiel 6.5.1 gilt: $(e^{\Delta x}-1)/\Delta x \to 1$, wenn $\Delta x \to 0$, d.h.

$$\boxed{f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x}$$

Für die **natürliche Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$ gilt:

Ihre **Ableitung ist gleich der Funktion** selbst.

Nach der Kettenregel folgt:

$$y = e^{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad y' = e^{g(x)} g'(x)$$

Beispiel: Differenzieren Sie

Bilden sie die erste Ableitung von (b)

$$\text{(b)} \quad \boldsymbol{y = x^{p} e^{ax}} \qquad (\boldsymbol{p} \text{ und } \boldsymbol{a} \text{ Konstanten})$$

Lösung

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

Mit der Produktregel folgt dann:

$$y' = px^{p-1}e^{ax} + x^p ae^{ax} = x^{p-1}e^{ax}(p + ax)$$

Die **(natürliche) Exponentialfunktion**

$$f(x) = \exp(x) = e^x \qquad (e = 2.71828\ldots)$$

ist **differenzierbar**, **streng monoton wachsend** und **konvex** und es gilt

$$f'(x) = f(x) = e^x$$

Es gilt für alle Exponenten s und t:

(a) $e^s e^t = e^{s+t}$ (b) $e^s / e^t = e^{s-t}$ (c) $(e^s)^t = e^{st}$

Ferner:

$e^x \to 0$, für $x \to -\infty$ $e^x \to \infty$, für $x \to \infty$

Welches ist die Ableitung von $y = a^x \qquad (a > 0)$?

Für positives a gilt: $a = e^{\ln a}$

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x} = e^{g(x)} \qquad \text{mit } g(x) = (\ln a)x$$

Nach (6.10.2): $y = e^{g(x)} \implies y' = \underbrace{e^{g(x)}}_{a^x} g'(x)$

$$g(x) = (\ln a)x \implies g'(x) = \ln a$$

$$\boxed{y = a^x \implies y' = a^x \ln a}$$

Beispiel: Bestimmen Sie die Ableitungen von

a) $f(x) = 10^{-x} = 10^{u} \quad u = -x \quad \Longrightarrow$

$$f'(x) = 10^{u} \ln 10 \cdot u' = -10^{-x} \ln 10$$

(b) $g(x) = x \underbrace{2^{3x}}_{y} \qquad y = 2^{3x} = 2^{u} \quad \text{mit } u = 3x$

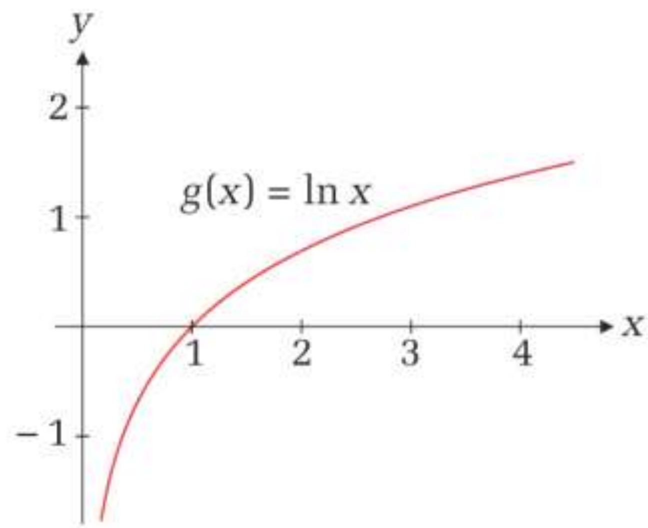
Nach der Kettenregel ist:

$$y' = (2^{u} \ln 2) u' = (2^{3x} \ln 2) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{3x} \ln 2$$

Nach der Produktregel ist:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \cdot y + x y' \\ &= 1 \cdot 2^{3x} + x \cdot 3 \cdot 2^{3x} \ln 2 \\ &= 2^{3x} (1 + 3x \ln 2) \end{aligned}$$

$$g(x) = \ln x$$



$g(x)$ hat die Inverse $f(x) = e^x$, d.h.

$$e^{g(x)} = x$$

Auf beiden Seiten nach x differenzieren:

$$e^{g(x)} g'(x) = 1, \quad \text{d.h.} \quad x g'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{g(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)}$$

Ableitung einer mit ln verketteten Funktion

$$y = \ln h(x)$$

Dies ist nur definiert, falls $h(x) > 0$.

Nach der Kettenregel folgt:

$$\boxed{y = \ln h(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{h'(x)}{h(x)}}$$

Beispiel: Definitionsbereich und Ableitung bestimmen

$$y = \ln(1 - x)$$

Die Funktion ist definiert, wenn $1 - x > 0$, d.h. wenn $x < 1$.

Um Formel (6.11.2)

$$y = \ln h(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

anzuwenden, setzen wir

$$h(x) = 1 - x \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = -1 \quad \Longrightarrow$$

$$y' = \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{-1}{1 - x} = \frac{1}{x - 1}$$

Logarithmisches Differenzieren, Beispiel:

Bestimmen Sie die Ableitung von $y = x^x \quad (x > 0)$.

Potenzregel für $y = x^a$ nicht anwendbar, da der **Exponent eine Konstante** sein muss.

Regel für allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x$ nicht anwendbar, da die **Basis eine Konstante** sein muss.

Und nun???

1. Beide Seiten logarithmieren:

$$\ln y = x \ln x$$

2. Beide Seiten nach x differenzieren:

$$y'/y = 1 \cdot \ln x + x(1/x) = \ln x + 1$$

3. Beide Seiten mit $y = x^x$ multiplizieren:

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Ableitung der Logarithmus-Funktion zur Basis a

$$y = \log_a x \qquad y' = ???$$

Nach Formel (4.10.5) gilt:

$$y = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}}$$