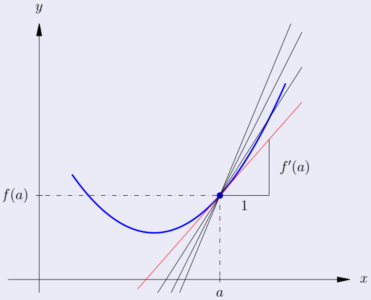
Ableitung

Eine Funktion f ist in einem Punkt a differenzierbar, wenn der als Ableitung bezeichnete Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert.



Geometrisch bedeutet Differenzierbarkeit, dass die Steigungen der Sekanten gegen die Steigung der durch

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

gegebenen Tangente konvergieren.
Man schreibt auch

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$$

mit $y = f(x)$. Diese Schreibweise symbolisiert den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ in dem Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}\,.$$

Höhere Ableitungen werden mit $f'', f''', \ldots$ bzw. $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ bezeichnet.
Eine Funktion f heißt differenzierbar auf einer Menge D, wenn $f'(x)$ für alle $x \in D$ existiert.

Linearität der Ableitung

Die Ableitung ist linear, d.h. für differenzierbare Funktionen f und g gilt

$$\begin{aligned}(rf)' &= rf', \quad r \in \mathbb{R},\\ (f \pm g)' &= f' \pm g'.\end{aligned}$$

Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r,\ r \neq 0$	rx^{r-1}
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Produktregel

Die Ableitung des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist

$$(fg)' = f'g + fg'\,.$$

Allgemeiner gilt für ein Produkt $f = f_1 \cdots f_n$

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}\,.$$

Beispiel:

Ableitung des Polynoms

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Produktregel $\rightsquigarrow$

$$p'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

an den Nullstellen $x = 1, 2, 3$ jeweils nur ein Faktor relevant:

$$\begin{aligned} p'(1) &= (1-2)(1-3) = 2 \\ p'(2) &= (2-1)(2-3) = -1 \\ p'(3) &= (3-1)(3-2) = 2 \end{aligned}$$

analog:

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} p'(k) &= (k-1)\cdots(k-(k-1))\cdot(k-(k+1))\cdots(k-n) \\ &= (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)! \end{aligned}$$

fr $k = 1, \ldots, n$

Quotientenregel

Die Ableitung des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

an allen Punkten x mit $g(x) \neq 0$. Insbesondere gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

Beispiel:

Ableitung der rationalen Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

Quotientenregel $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2 \rightsquigarrow$

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} =$$
$$\frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}$$

alternativ: Produktregel und Formel $(1/g)' = -g'/g^2 \rightsquigarrow$

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2}$$

Kettenregel

Für die Verkettung von Funktionen

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

ist die Ableitung

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)\,.$$

Mit $f(y) = z,\; g(x) = y,\; h(x) = z$ schreibt man auch

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,.$$

Beispiel:

Ableitung von

$$h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)$$

Kettenregel $\implies$

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)g'(x)$$

innere Ableitung, berechnet ebenfalls mit der Kettenregel:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)$$

insgesamt:

$$h'(x) = \frac{2x\,\cos(\ln(1+x^2))}{1+x^2}$$

alternativ: Verwendung der differentiellen Schreibweise
$z = \sin y,\ y = \ln w,\ w = 1 + x^2 \rightsquigarrow$

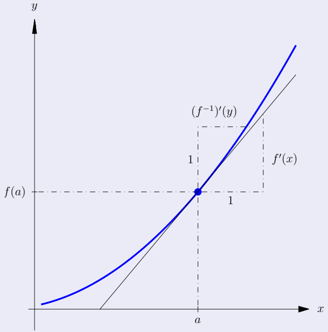
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)\frac{1}{1+x^2}(2x)$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Ist eine Funktion $y = f(x)$ stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist f in einer Umgebung von x invertierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$$

bzw. $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$; die Steigungen von f und f^{-1} sind reziprok.



Beispiel:

Ableitung der Umkehrfunktion $x = \arctan y$ der Tangensfunktion

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion $\implies$

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x$$

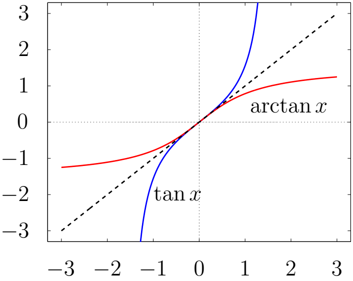
Darstellung als Funktion von y

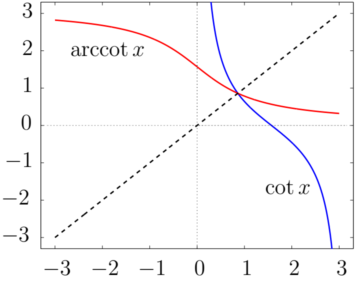
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

$\implies$

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}$$

analoge Berechnung der Umkehrfunktion des Kotangens


arctan x
tan x
3
2
1
0
−1
−2
−3


arccot x
cot x
3
2
1
0
−1
−2
−3

Regel von l'Hospital

Haben zwei stetig differenzierbare Funktionen f und g eine gemeinsame Nullstelle oder Polstelle in a, so gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert (gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn).

Beispiel:

(i) Fall $0/0$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2}{6x - 7} = -1$$

(ii) Fall $-\infty/\infty$:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

(iii) Fall $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

(iv) mehrfache Anwendung:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = 0\end{aligned}$$

beachte: Existenz der zu berechnenden Grenzwerte erst durch die Existenz der nach Anwendung der Regel von l'Hospital enstehenden Grenzwerte gesichert

Taylor-Polynom

Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

interpoliert die Ableitungen einer Funktion f im Punkt a bis zur Ordnung n, d. h. $p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0, \ldots, n$.
Ist f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, so gilt

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

für ein t zwischen a und x.

Beispiel:

(i) Taylor-Polynome der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$:
Ableitungen

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^{(4)} = f = \sin x, \ldots$$

$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ \ldots \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} p_1(x) = p_2(x) &= x \\ p_3(x) = p_4(x) &= x - \frac{x^3}{6} \\ p_5(x) = p_6(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \end{aligned}$$

(ii) Taylor-Polynome der Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$:

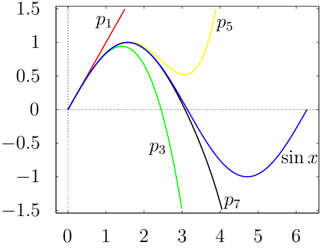
$$\begin{aligned} p_0(x) = p_1(x) &= 1 \\ p_2(x) = p_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} \\ p_4(x) = p_5(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

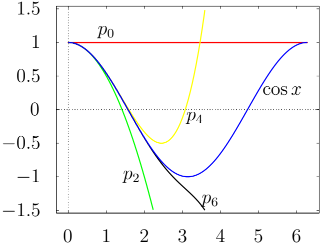
(iii) Fehler:
sehr genaue Approximation für kleine x, z.B.:

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983...$$

Restglied

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!} 0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$





Fehler der Taylor-Polynome für einige x-Werte

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000

Beispiel:

quadratisches Taylor-Polynom der Logarithmus-Funktion $f(x) = \ln x$ im Punkt $a = 1$

Ableitungen:

$$f^{'}(x) = \frac{1}{x}, \quad f^{''}(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{'''}(x) = \frac{2}{x^3}$$

Auswertung bei $x = 1 \rightsquigarrow$

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Restglied:

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{3!}\, f^{'''}(\xi)\,(x-1)^3 = \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3$$

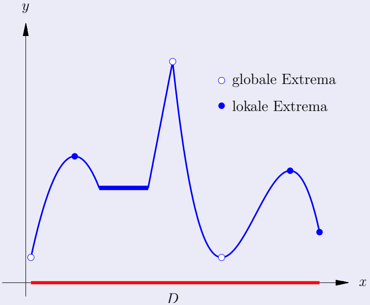
mit ξ zwischen x und 1

Extremwert

Eine Funktion f hat in a ein globales Minimum auf einer Menge D, wenn

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D\,.$$

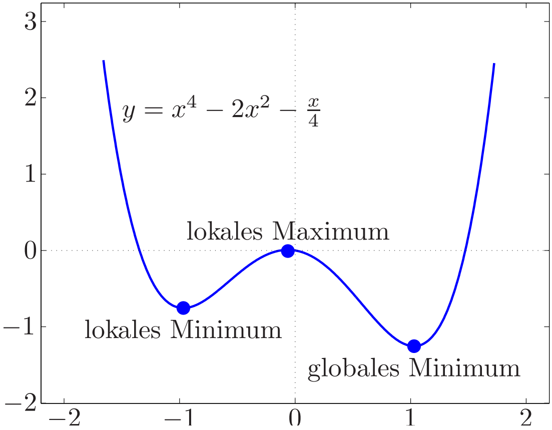
Bei einem lokalen Minimum ist der Funktionswert $f(a)$ nur in einer hinreichend kleinen Umgebung $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ minimal.
Globales und lokales Maximum sind analog definiert.



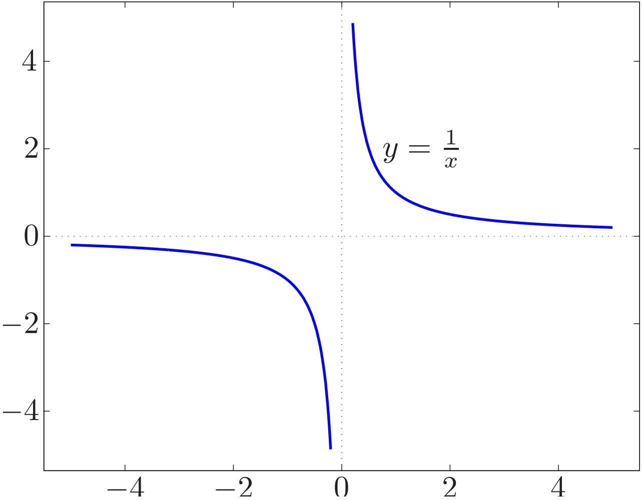
Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall können Extremwerte nur an den Nullstellen der Ableitung, Unstetigkeitsstellen oder Randpunkten auftreten. Der Typ kann mit Hilfe höherer Ableitungen und durch Vergleichen der Funktionswerte ermittelt werden.

Beispiel:

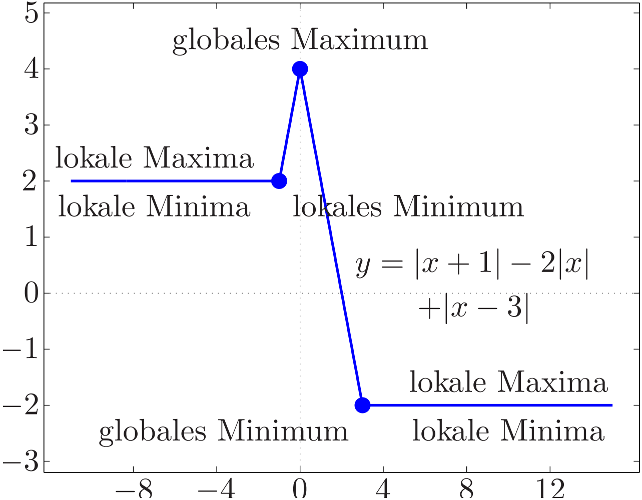
(i) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$, $D = \mathbb{R}$:
ein lokales und ein globales Minimum, ein lokales Maximum
kein globales Maximum, da $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$



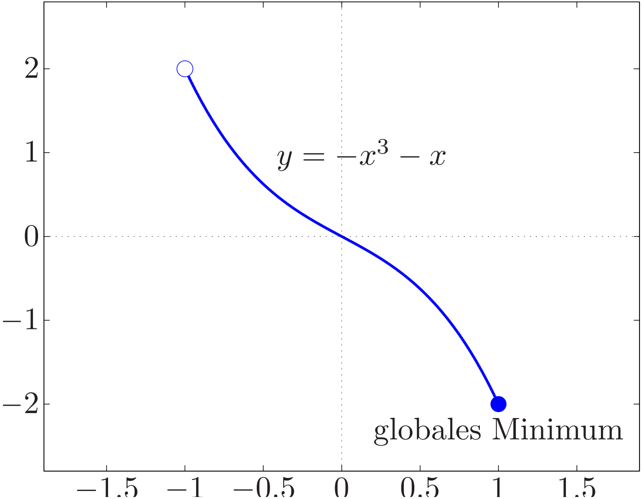
(ii) $f(x) = 1/x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
strikt monoton auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$
$\rightsquigarrow$ keine Extrema



(iii) $f(x) = |x+1| - 2|x| + |x-3|$, $D = \mathbb{R}$:
Monotoniebereiche: Extrema am Rand
Bereiche mit konstantem Wert: alle Punkte lokal Extremstellen

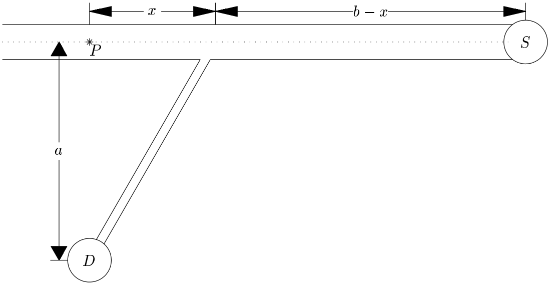


(iv) $f(x) = -x^3 - x$, $D = (-1, 1]$:
unter Umständen kein Extremum bei offenen oder halboffenem Definitionsbereich



Beispiel:

schnellstmögliche Verbindungsstraße vom Dorf D zur Stadt S:
Durchschnittsgeschwindigkeit:
$v_a = 120$ km/h auf der Autobahn und $v_n = 60$ km/h auf der Nebenstrecke



Fahrtzeit:

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

Nullsetzen der Ableitung,

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

$\rightsquigarrow$

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = \sqrt{a^2/((v_a/v_n)^2-1)} = a/\sqrt{3}$$

$(v_a/v_n = 2)$
Vergleich der Zeit mit Zeiten an den Intervallendpunkten:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}, \quad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

$t(0) \geq t(x_m)$ ✓

x_m optimal für $a/\sqrt{3} = x_m \le b$, da

$$\begin{aligned} t(b) \ge t(x_m) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2+b^2} \ge \sqrt{3}a + b \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^2 + 4b^2 \ge 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

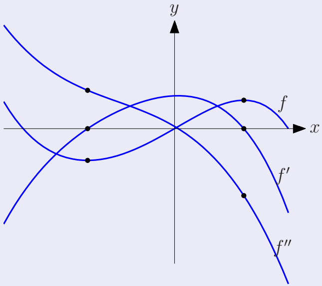
$\rightsquigarrow$ minimale Zeit für

$$x = \min(x_m, b)$$

(Extremum am Rand für $x_m \ge b$)

Extremwerttest

Der Typ eines Extremwerts lässt sich mit Hilfe höherer Ableitungen entscheiden.



Ist f zweimal stetig differenzierbar und

$$f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0 \qquad (f''(a) < 0)\,,$$

so hat f ein lokales Minimum (Maximum) bei a.

Verschwindet die zweite Ableitung an der Stelle a, so müssen höhere Ableitungen zur Entscheidung herangezogen werden. Gilt

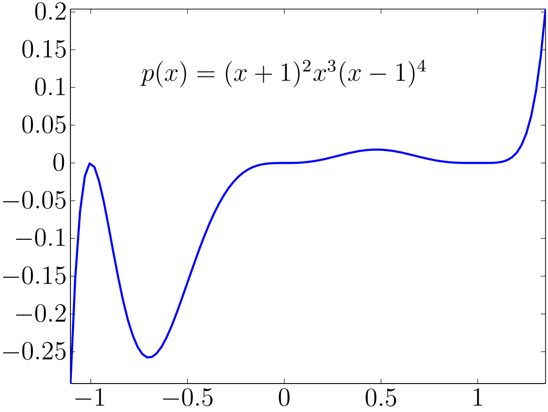
$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

so hat f in a genau dann eine Extremstelle, wenn n gerade ist. In diesem Fall hat f in a ein lokales Maximum bzw. Minimum, wenn $f^{(n)}(a) < 0$ bzw. $f^{(n)}(a) > 0$ ist.

Beispiel:

Extrema des Polynoms

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$



keine globalen Extrema, da

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

(i) Nullstellen der Ableitung bei $x = -1, 0, 1$:
$p'(-1) = 0,\ p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0$
$\implies$ lokales Maximum, Funktionswert 0
$p'(0) = p''(0) = 0,\ p'''(0) \neq 0$
(ungerade Ordnung der ersten nichttrivialen Ableitung)
$\implies$ kein Extremwert
$p'(1) = p''(1) = p'''(1) = 0,\ p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0$
(gerade Ordnung der ersten nichttrivialen Ableitung)
$\implies$ lokales Minimum, Funktionswert 0

(ii) weitere Nullstellen von p'

$p(-1) = p(0) = p(1) = 0$

$\implies$ mindestens je eine weitere lokale Extremstelle in $(-1, 0)$ und $(0, 1)$

Grad $p' = 8$, Gesamtvielfachheit der Nullstellen von p' bei -1, 0, 1 gleich 6

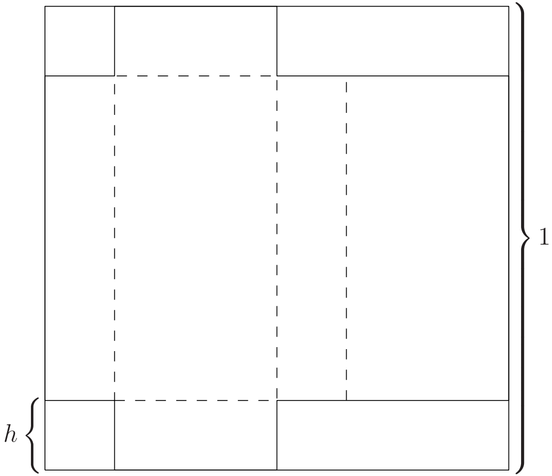
$\implies$ Ableitung an genau zwei Stellen $s \in (-1, 0)$ und $t \in (0, 1)$ Null

Typ der Extrema bei ± 1

$\rightsquigarrow$ lokales Minimum bei s ($p < 0$ auf $(-1, 0)$) und lokales Maximum bei t ($p > 0$ auf $(0, 1)$)

Beispiel:

Schachtel möglichst großen Volumens gemäß dem abgebildeten Schnittmuster



Volumen

$$V(h) = \underbrace{(1-2h)}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

Nullsetzen der Ableitung,

$$V'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0\,,$$

$\rightsquigarrow$

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

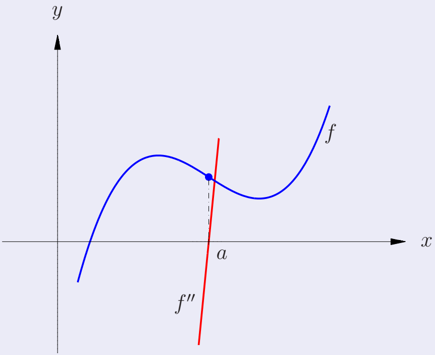
geometrisch sinnvoll: $h = 1/6$ mit

$$V(1/6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

Maximum auf zulässigem Bereich $h \in [0, 1/2]$, da Volumen Null an den Randpunkten

Wendepunkte

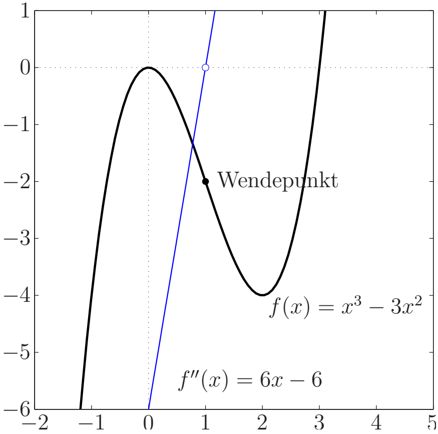
An einem Wendepunkt a einer Funktion f wechselt die zweite Ableitung das Vorzeichen.



Für eine glatte Funktion ist notwendig, dass $f''(a) = 0$ und hinreichend, dass $f'''(a) \neq 0$.

Beispiel:

kubisches Polynom



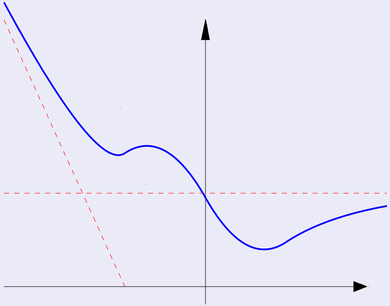
lineare zweite Ableitung

$\Longrightarrow$ Existenz genau eines Wendepunktes

Asymptoten

Eine lineare Funktion $p(x) = ax + b$ ist eine Asymptote von f, wenn

$$f(x) - p(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty \text{ oder } x \to -\infty\,.$$

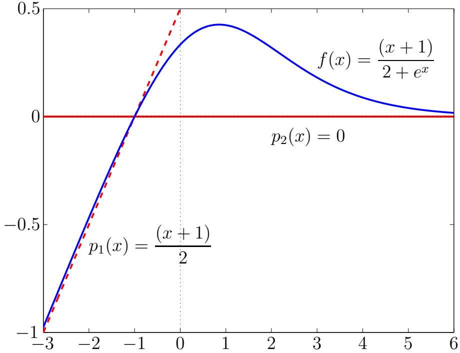


Wie in der Abbildung illustriert, beschreibt eine Asymptote das Verhalten der Funktion f für große x.

Beispiel:

Asymptoten der Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{2+\mathrm{e}^x}$$



(i) $x \to \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}\\ &= \frac{0}{0+1} = 0\end{aligned}$$

$\implies$ x-Achse als Asymptote

(ii) $x \to -\infty$:

$\mathrm{e}^x \to 0 \implies$ Asymptote

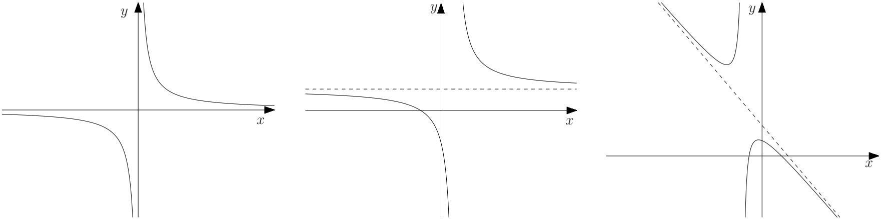
$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

Beispiel:

rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

lineare Asymptote, falls Grad $p \leq$ Grad $q + 1$



Grad $p <$ Grad $q \implies$

$$\lim_{x \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

x-Achse ist Asymptote

Grad $q \leq$ Grad $p \leq$ Grad $q+1$
$\rightsquigarrow$ lineare Asymptote, bestimmt mit Hilfe von Polynomdivision:

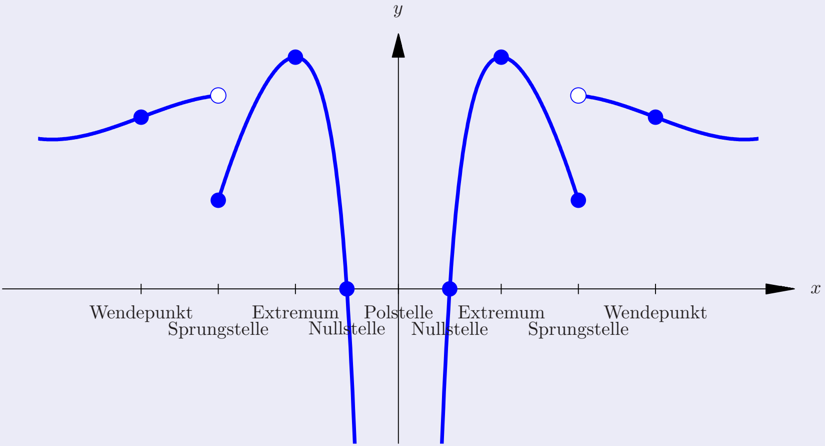
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

mit Grad $\tilde{p} <$ Grad q
waagrechte Asymptote ($a = 0$), falls Grad $p =$ Grad q

Kurvendiskussion

Zur Beurteilung des qualitativen Verhaltens einer Funktion können folgende Merkmale herangezogen werden:

- Symmetrien
- Periodizität
- Unstetigkeitsstellen
- Nullstellen ($\rightarrow$ Vorzeichen)
- Extrema ($\rightarrow$ Monotoniebereiche)
- Wendepunkte ($\rightarrow$ Konvexitätsbereiche)
- Polstellen
- Asymptoten



Eine entsprechende Analyse der Funktion wird als Kurvendiskussion bezeichnet.

Beispiel:

Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

(i) Symmetrie:
undegrade, da $\sin x = -\sin(-x)$
(ii) Periodizität:
Periode $2\pi \rightsquigarrow$ betrachte nur das Intervall $[-\pi, \pi]$
(iii) Unstetigkeitsstellen:
keine
(iv) Nullstellen:
Additionstheorem $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \rightsquigarrow$

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}$$

$\Longrightarrow$ Nullstellen bei 0 und $\pm\pi$

(v) Extrema:
Ableitung

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\, \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

$(\sin^2 x = 1 - \cos^2 x)$
Null für $\cos x = 0$ oder $\cos x = \pm 1/\sqrt{2} \rightsquigarrow$ mögliche Extrema bei

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4$$

Periodizität $\rightsquigarrow$ keine Randwerte zu untersuchen
zweite Ableitung

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\, \sin x$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung und Vergleich der Funktionswerte $\rightsquigarrow$ Typ der Extrema

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

(vi) Wendepunkte:
Umformung der zweiten Ableitung

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

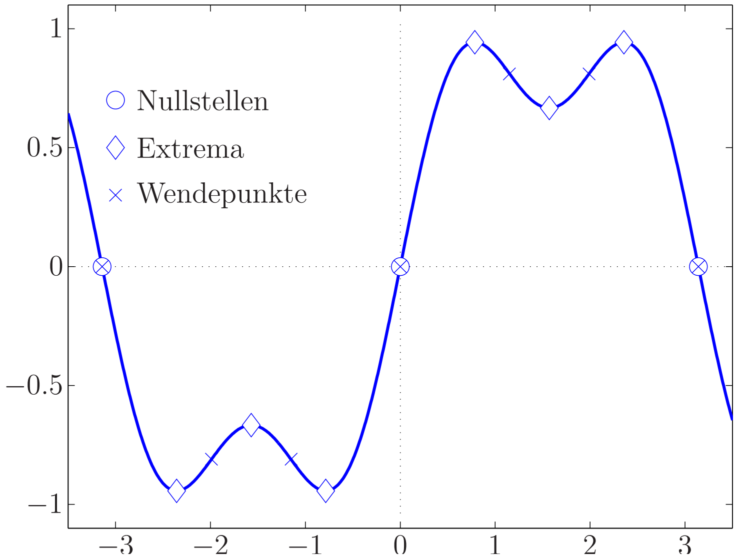
$(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$ Null für $\sin x = 0$ oder $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$, d.h.

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

dritte Ableitung ungleich Null $\rightsquigarrow$ Wendepunkte bei

$$(0,0),\ (\pm\pi,0),\ (-1.99,-0.81),\ (-1.15,-0.81),\ (1.15,0.81),\ (1.99,0.81)$$

(vii) Polstellen:
keine
(viii) Asymptoten:
keine, da f periodisch und nicht konstant


Nullstellen
Extrema
Wendepunkte
1
0.5
0
−0.5
−1
−3
−2
−1
0
1
2
3

Beispiel:

Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$$

(i) Symmetrie:
ungerade, da Quotient aus ungeradem Zähler und geradem Nenner
(ii) Periodizität:
nicht periodisch
(iii) Unstetigkeitsstellen:
Nennernullstellen ± 1, Zähler ungleich Null $\rightsquigarrow$ nicht hebbar
(iv) Nullstellen:
Zähler $x(5x^2 + 4)$ Null bei $x = 0$

(v) Extrema:
Ableitung

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-4)(5x^2+1)}{(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ mögliche Extrema bei $x = \pm 2$
einfache Pole (Vorzeichenwechsel) $\rightsquigarrow$ keine globalen Extrema
$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ und $x \to -1$
$\implies$ lokales Maximum in $(-\infty, -1)$
analog lokales Minimum in $(1, \infty)$
$\rightsquigarrow$ lokale Extrema an den beiden Nullstellen der Ableitung
lokales Maximum: $(-2, 16)$, lokales Minimum: $(2, 16)$
(vi) Wendepunkte:
zweite Ableitung

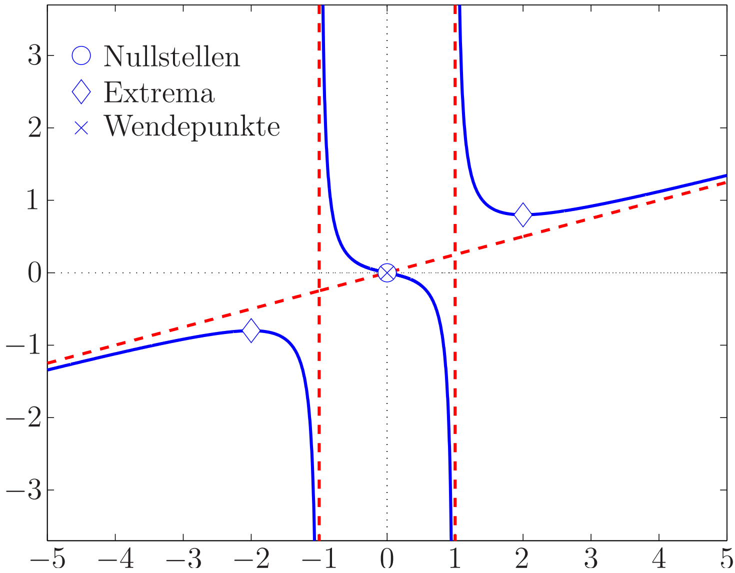
$$f''(x) = \frac{18x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ Wendepunkt $(0, 0)$, da dritte Ableitung bei 0 ungleich Null

(vii) Polstellen:
einfache Polstellen bei $x = \pm 1$
(viii) Asymptoten:
Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$f(x) = 5\,x + 0 + \frac{9x}{x^2 - 1}$$

Asymptote: $p(x) = 5\,x$


Nullstellen
Extrema
Wendepunkte
3
2
1
0
−1
−2
−3
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

Beispiel:

Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{4|x|}{\mathrm{e}^4}$$

(i) Symmetrie:
gerade, da x^2 und $|x|$ gerade
(ii) Periodizität:
nicht periodisch
(iii) Unstetigkeitsstellen:
stetig, Ableitung unstetig bei Null wegen Betragsfunktion
(iv) Nullstellen:
keine, wegen Positivität der Exponential- und Betragsfunktion

(v) Extrema:
Ableitung

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{4}{\mathrm{e}^4}\operatorname{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0, \quad x \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ mögliche Extrema bei $x = \pm 2$
zusätzlich Unstetigkeitsstelle der Ableitung bei $x = 0$
$f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$
$\implies$ kein globales Maximum, mindestens ein globales Minimum
Vergleich der Funktionswerte der möglichen Extrema

$$(x, y):\ (-2, 9/\mathrm{e}^4),\ (0, 1),\ (2, 9/\mathrm{e}^4)$$

Symmetrie $\rightsquigarrow$ globale Minima bei $x = \pm 2$
lokales Maximum bei $x = 0$ wegen Existenz eines Maximums in $[-2, 2]$

(vi) Wendepunkte:
zweite Ableitung

$$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2} + 4x^2\mathrm{e}^{-x^2} \overset{!}{=} 0, \quad x \neq 0$$

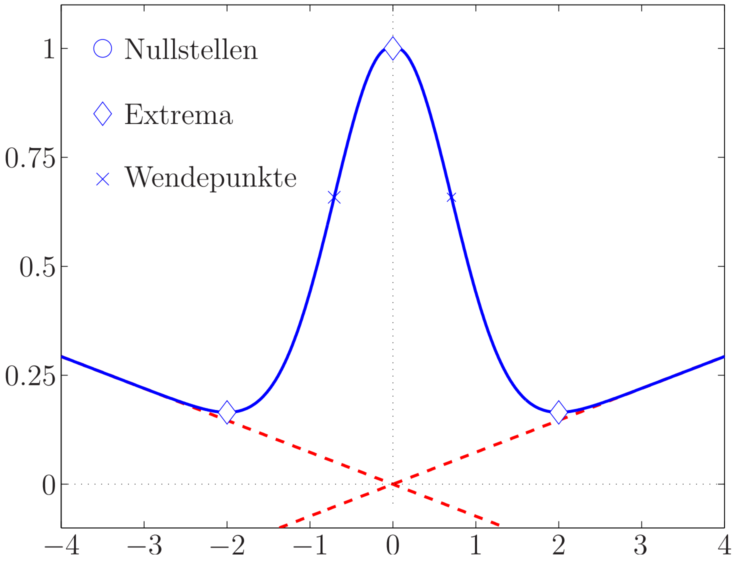
dritte Ableitung an den Nullstellen $x = \pm 1/\sqrt{2}$ nicht Null $\rightsquigarrow$ Wendepunkte

$$\left(\pm\, 1/\sqrt{2},\, \mathrm{e}^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^4} \right)$$

(vii) Polstellen:
keine
(viii) Asymptoten:
e^{-x^2} schneller gegen Null als als $|x|$ für $x \to \infty$
$\rightsquigarrow$ Asymptoten

$$p_+(x) = \frac{4x}{\mathrm{e}^4}, \quad p_-(x) = \frac{-4x}{\mathrm{e}^4}$$

für $x \to \pm\infty$


Nullstellen
Extrema
Wendepunkte
1
0.75
0.5
0.25
0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Eigenschaften des Integrals

Das bestimmte Integral besitzt folgende Eigenschaften:

- Linearität: $\displaystyle\int rf = r\int f\,,\ \int f+g = \int f + \int g$
- Monotonie: $\displaystyle f \leq g \implies \int f \leq \int g$
- Additivität: $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

In Übereinstimmung mit der letzten Eigenschaft definiert man $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Stammfunktion

Eine Funktion F mit $F' = f$ ist eine Stammfunktion von f, und man schreibt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

für die Menge aller Stammfunktionen, die als unbestimmtes Integral von f bezeichnet wird.
Die Integrationskonstante c ist beliebig. Beispielsweise ist

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

mit $F_a(a) = 0$ eine mögliche Stammfunktion.
Nicht zu allen elementaren Funktionen ist die explizite Angabe einer solchen Stammfunktion möglich, ein Beispiel ist $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
x^s , $s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Hauptsatz der Integralrechnung

Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion f, d.h. $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

bzw. in Kurzschreibweise

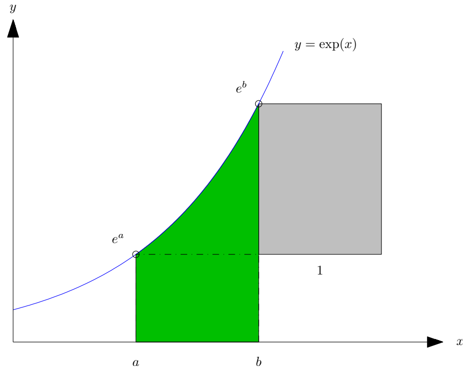
$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

Ein bestimmtes Integral lässt sich also als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion an den Intervallendpunkten berechnen.

Beispiel:

$(d/dx)\exp(x) = \exp(x) \implies$

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$$



Fläche unter dem Graph zwischen *a* und *b* entspricht einem Rechteck mit Breite 1 und dem Abstand der Funktionswerte als Höhe

Logarithmusfunktion:

$$F(x) = \ln(x), \quad f(x) = F'(x) = 1/x, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$\Longrightarrow$

$$\int_a^b 1/x \, dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Beispiel:

Arkustangensfunktion: Stammfunktion von $f(x) = 1/(1+x^2)$
z.B.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Stammfunktion der Tangensfunkion

$$F(x) = -\ln(\cos x), \quad |x| < \pi/2$$

(Kettelregel $\implies F'(x) = -|\cos x|^{-1}(-\sin x))$
z.B.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) + \ln(1) = \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0.347$$

Partielle Integration

Aus der Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ ergibt sich eine analoge Formel für unbestimmte Integrale:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Entsprechend gilt

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

für bestimmte Integrale.
Dabei ist zu beachten, dass der Randterm $[fg]_a^b$ verschwindet, wenn eine der beiden Funktionen an den Intervallendpunkten Null ist. Er entfällt ebenfalls für periodische Funktionen mit Periodenlänge $(b - a)$.

Beispiel:

$\int (1+x)^\alpha \, dx = (1+x)^{\alpha+1}/(\alpha+1) + c$ für $\alpha \neq -1 \implies$

$$\begin{aligned} \int \underset{u}{x} \underset{v'}{\sqrt{1+x}} \, dx &= x \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \, dx \\ &= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c \end{aligned}$$

analog

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underset{u}{x} \underset{v'}{\sqrt{1-x}} \, dx &= \left[-x \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \, dx \\ &= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Beispiel:

partielle Integration logarithmischer Faktoren
z.B.

$$\begin{aligned}\int x^n \ln|x|\,dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln|x| - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln|x| - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c\end{aligned}$$

analoge Integration von Ausdrücken der Form

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

Beispiel:

partielle Integration von Produkten aus Monomen und Exponentialfunktionen
rekursive Berechnung durch Reduktion des Polynomgrades:

$$\begin{aligned}\int x^n \mathrm{e}^x \, dx &= x^n \mathrm{e}^x - \int n x^{n-1} \mathrm{e}^x \, dx \\ &= x^n \mathrm{e}^x - n x^{n-1} \mathrm{e}^x + \int n(n-1) x^{n-2} \mathrm{e}^x \, dx \\ &= \cdots \\ &= \mathrm{e}^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + c\end{aligned}$$

analog: partielle Integration von Produkten aus Monomen und Sinus oder Kosinus

$$\begin{aligned}\int x^n \left\{ \begin{array}{r} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx &= x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Beispiel:

partielle Integration von Produkten aus Exponentialfunktionen und Sinus oder Kosinus
zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx\end{aligned}$$

Umformung $\rightsquigarrow$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

Variablensubstitution

Aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

folgt durch Bilden von Stammfunktionen für eine Substitution $y = g(x)$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

Entsprechend gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

für bestimmte Integrale.

Mit Hilfe von Differentialen läßt sich diese Formel in der Form

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

schreiben.
Ein einfacher Spezialfall ist eine lineare Variablensubstitution:

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

In diesem Fall ist

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,F(y) + c$$

bzw.

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

Beispiel:

einfache Variablensubstitution bei erkennbarer innerer Ableitung
z.B.

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$$

Substitution $y = g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow$

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3} y^3 + c$$

Rücksubstitution $\rightsquigarrow$

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$$

Beispiel:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{3y}}{\mathrm{e}^{2y}-1}\,dy$$

Substitution

$$x = e^y \quad , \qquad dx = e^y\,dy$$

Transformation des Integrals, Partialbruchzerlegung $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx &= \int \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)\,dx \\
&= \int 1\,dx + \int \frac{1/2}{x-1}\,dx - \int \frac{1/2}{x+1}\,dx \\
&= x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c
\end{aligned}$$

Rücksubstitution von $x = \mathrm{e}^y$ $\rightsquigarrow$

$$F(y) = \mathrm{e}^y + \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{e}^y-1}{\mathrm{e}^y+1}\right| + c$$

Beispiel:

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin(\varepsilon x)}{x} dx$$

Substitution $u = \varepsilon x$, $dx = \frac{1}{\varepsilon} du$
Transformation der Integrationsgrenze $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$
$\rightsquigarrow$

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin(\varepsilon x)}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

allgemeine Transformationregel:

$$\int_a^b f(rx) \frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u) \frac{du}{u}$$

bei Skalierung der Variablen, d.h. $u = rx$, $dx/x = du/u$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

(i) unbestimmtes Integral
Substitution $y = (x-3)/2,\ dx = 2dy \rightsquigarrow$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$$

Substitution $y = \cosh t,\ dy = \sinh t\, dt \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} = \int dt = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c = \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c = \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c
\end{aligned}$$

($\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$, Formel für die Umkehrfunktion von cosh)

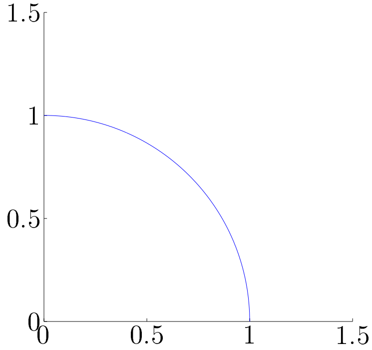
(ii) Beispiel eines bestimmten Integrals

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(4/2+\sqrt{12}/2)-\ln 1\\ &= \ln(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

Beispiel:

Viertelkreis

$$K: \; y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$



Flächeninhalt

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$$

(i) Substitution $x = \sin u$, $dx = \cos u \, du$ mit $x = 0 \to u = 0$,
$x = 1 \to u = \frac{\pi}{2} \implies$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 u}}_{\cos u} \cos u \, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

(ii) Substitution $x = \cos u$, $dx = -\sin u \, du$ mit $x = 0 \to u = -\pi/2$,
$x = 1 \to u = 2\pi \implies$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u \, du = -\frac{5\pi}{4}$$

falsche Berechnung der Wurzel.
richtig: $\sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u| \rightsquigarrow$ korrektes Ergebnis

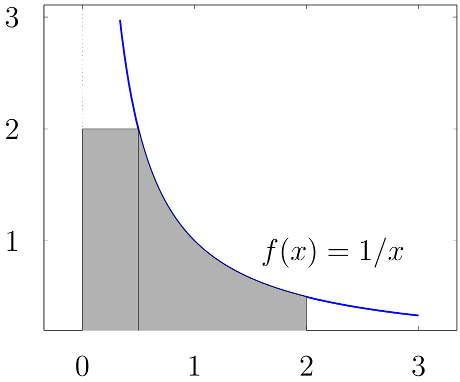
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}$$

Elementare rationale Integranden

Die Stammfunktionen der drei Grundtypen rationaler Funktionen sind

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{ax+b} &= \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c \\
\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c \\
\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c
\end{aligned}$$

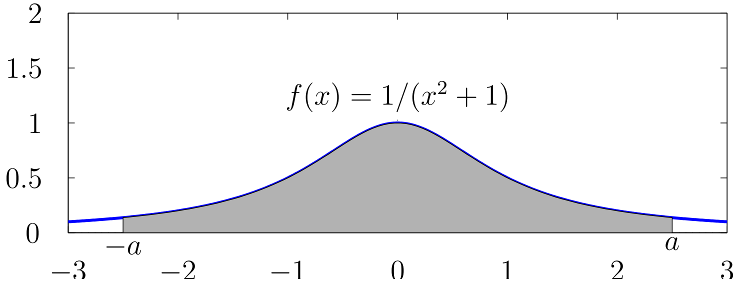
Beispiel:



Inhalt der grauen Fläche:

$$2\frac{1}{2} + \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x} dx = 1 + \ln 2 - \ln \frac{1}{2} = 1 + \ln 4$$

Beispiel:



Fläche unter dem Graph von $f(x) = 1/(x^2+1)$:

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} \quad = \quad \lim_{a\to\infty} (\arctan a - \arctan(-a)) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Beispiel:

Berechnung der Stammfunktion von

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

quadratische Ergänzung des Nenners

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)$$

Anpassung des Zählers

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)$$

$\rightsquigarrow$ Zerlegung in Standardausdrücke:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}$$

Stammfunktionen der elementaren Integranden $\rightsquigarrow$

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{9}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Berechnung eines bestimmten Integrals durch Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion
z.B.

$$\int_1^3 r(x)\,dx = \frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4\right) + \frac{9}{4}\left(\arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 + \frac{9}{16}\,\pi$$

Partialbruchzerlegung

Durch reelle Partialbruchzerlegung lässt sich eine reelle rationale Funktion als Summe der drei elementaren Grundtypen

$$ax^n\,, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,, \quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0\,,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ darstellen. Mit Hilfe der Stammfunktionen für diese Grundfunktionen können somit die Stammfunktionen für beliebige rationale Funktionen bestimmt werden.

Beispiel:

Berechnung von

$$\int r(x)dx, \quad r(x) = \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

mit Partialbruchzerlegung
Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$r(x) = x + \frac{2x^3 + 5x^2 + 8x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

Faktorisierung des Nenners $\rightsquigarrow$

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x+1)(x-1)(x^2+9)$$

Ansatz

$$r(x) - x = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx}{x^2+9} + \frac{d}{x^2+9}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\begin{aligned} &2x^3 + 5x^2 + 8x + 25 = \\ &\qquad a(x-1)(x^2+9) + b(x+1)(x^2+9) + (cx+d)(x^2-1) \end{aligned}$$

Koeffizienten-Vergleich $\implies$ $a = -1,\ b = 2,\ c = 1$ und $d = 2$

Stammfunktionen der Grundfunktionen $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9} = \\ &\qquad \int x dx - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{xdx}{x^2+9} + \int \frac{2dx}{x^2+9} = \\ &\qquad \frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c \end{aligned}$$

Integration trigonometrischer Polynome

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

und Additionsthoereme

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

werden Häufig verwendet, um trigonometrische Integrande, insbesondere Polynome in sin und cos, auf elementaren Formen zu bringen.
Folgende speziallfälle

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \quad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

sind sehr hilfsreich.

Beispiel:

Berechnung von

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x \, dx \\
&= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx \\
&= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \, dx - 3 \int \sin^4 x \, dx
\end{aligned}$$

$(\cos^2 = 1 - \sin^2)$
Auflösen nach $\int \sin^4 \rightsquigarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = 0 + 3\pi/4$$

Trigonometrische Substitutionen

Mit Hilfe der folgenden Substitutionen lassen sich eine Reihe von elementaren algebraischen Integranden explizit berechnen:

$$\begin{array}{lll} x = a \sin t: & dx = a \cos t \, dt & \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \\ x = a \tan t: & dx = a / \cos^2 t \, dt & \sqrt{a^2 + x^2} = a / \cos t \\ x = a / \cos t: & dx = a \sin t / \cos^2 t \, dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t \end{array}$$

Gegebenenfalls müssen die Argumente der Wurzel zunächst durch quadratische Ergänzung auf Standardform gebracht werden.

Beispiel:

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

trigonometrische Substitution:

$$x = \sin t,\ dx = \cos t\, dt, \quad x = 0 \to t = 0,\ x = 1/2 \to t = \pi/6$$

$\rightsquigarrow$

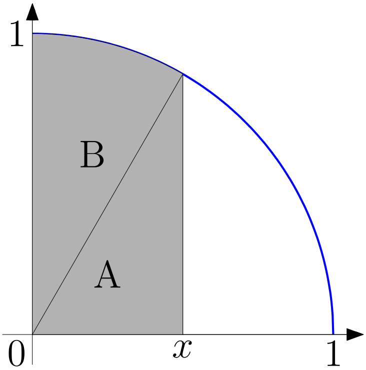
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\, dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t \cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$$

Rücktransformation von $[\ldots] \rightsquigarrow$ Stammfunktion

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c$$

$(\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2})$

(ii) geometrisches Argument:



Fläche unter dem Graph von $\sqrt{1-x^2}$: Summe von zwei Teilflächen
Dreieck: $|A| = x\sqrt{1-x^2}/2$
Kreissektor mit Öffnungswinkel t: $|B| = t/2 = (1/2)\arcsin x$
$\leadsto$ gleiche Stammfunktion $|A| + |B|$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

trigonometrische Substitution $x = \tan t, \quad dx = 1/\cos^2 t\, dt \rightsquigarrow$

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c$$

($\sqrt{1+x^2} = 1/\cos t$, Formel für Stammfunktion von $1/\sin$)
Rücksubstitution $\implies$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c$$

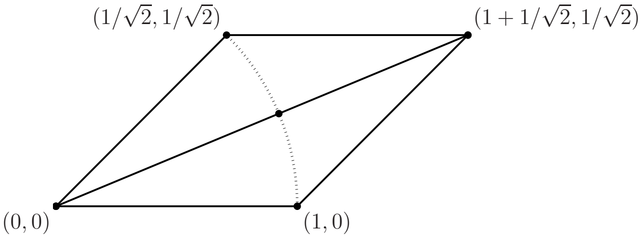
bestimmtes Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Verwendung der berechneten Stammfunktion $\rightsquigarrow$

$$\ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| = \ln 1 - \ln(\sqrt{2}-1) = \ln(1+\sqrt{2})$$

Berechnung von $\tan(\pi/8)$ mit Hilfe der Diagonale einer Raute mit spitzem Winkel $\pi/4$



$$\implies \tan(\pi/8) = (1/\sqrt{2})/(1/\sqrt{2}+1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$$

quadratische Ergänzung $\rightsquigarrow$ Standardform der Wurzel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 - 4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2 - 1}}$$

vorbereitende Substitution $y = (x-3)/2$, $dx = 2dy$ $\rightsquigarrow$ Vereinfachung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

trigonometrische Substitution $y = 1/\cos t$, $dy = \sin t/\cos^2 t\, dt$, $\sqrt{y^2-1} = \tan t \rightsquigarrow$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right| + c$$

(Formel für $\int \cos^{-1}$, Überprüfung durch Differenzieren)
Rücksubstitution $\rightsquigarrow$

$$\ln\left|y + y\sqrt{y^2-1}\right| + c = \ln\left|\frac{x-3}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1}\right| + c$$

Uneigentliches Integral

Für eine auf $[a, b)$ stückweise stetige Funktion f wird durch

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

der Integralbegriff auf unendliche Intervalle ($b = \infty$) und unbeschränkte Integranden ($f(b) = \pm\infty$) erweitert.
Analog wird eine Singularität an der unteren oder an beiden Grenzen behandelt. Im letzteren Fall muss der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folgen $c \to a+$, $d \to b-$ sein. Hinreichend für die Existenz eines uneigentlichen Integrals ist die absolute Intergrierbarkeit von f, d. h.

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ const}$$

für alle Teilintervalle $[c, d] \subset (a, b)$.

Beispiel:

Berechnung des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1$$

direkte Verwendung uneigentlicher Grenzen bei elementaren Grenzwerten:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

Beispiel:

uneigentliches Integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^r}\,dx$$

Substitution $y = \ln x$, $dy = dx/x \rightsquigarrow$

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^r}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{y^r}\,dy \;=\begin{cases} \dfrac{(\ln b)^{1-r} - (\ln 2)^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\,, & r = 1 \end{cases}$$

Grenzwert für $b \to \infty$ existiert genau dann wenn $r > 1$:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^r}\,dx = \frac{(\ln 2)^{1-r}}{r-1}$$

Beispiel:

uneigentliches Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$$

Singularität bei $x = \frac{\pi}{2}$ $\rightsquigarrow$ betrachte obere Grenze $b < \pi/2$:

$$\int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = \left[-2\sqrt{\cos x}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos b} + 2$$

Grenzwert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos b} + 2\right) = 2$$

Beispiel:

uneigentliches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

Stammfuntion des Integranden:

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

(i) falsche Berechnung:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b} \\ &= \lim_{b\to\infty} (2\arctan(b)) = \pi\end{aligned}$$

$(\arctan(-b) = -\arctan(b))$

(ii) korrekte Argumentation:
unabhängige Betrachtung der unteren und oberen Grenze

$$\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \left(-\arctan(c) - \ln(1+c^2)\right)$$

$$\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \left(\arctan(d) + \ln(1+d^2)\right)$$

$\Longrightarrow$ keine endlichen Grenzwerte in beiden Fällen
$\Longrightarrow$ Divergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

Vektorraum der n-Tupel

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein Element $a \in K^n$ bezeichnet man als n-Tupel, n-Vektor oder einfach Vektor:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K.$$

K^n ist mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

für $a_i, b_i, \lambda \in K$, ein Vektorraum.

Oft ist es bequem, n-Tupel als Zeilenvektor

$$a^{\mathrm{t}} = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{bzw.} \quad a = (a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{t}}$$

zu schreiben. Durch das Symbol „t“ der Transposition wird von der Standardkonvention als Spaltenvektor unterschieden.

Linearkombination

Für Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m \in K^n$ bezeichnet man

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

mit Skalaren $\lambda_i \in K$ als Linearkombination der Vektoren v_i.

Die Menge aller solchen Linearkombinationen nennt man die lineare Hülle der v_i:

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K \right\} .$$

Beispiel:

(i) $v = (1,2,3)^{\mathrm{t}}$ ist eine Linearkombination der Vektoren

$$v_1 = (3,4,5)^{\mathrm{t}},\; v_2 = (1,1,1)^{\mathrm{t}},$$

denn

$$v = v_1 - 2v_2\,.$$

ii) $v = (1,0)^{\mathrm{t}}$ ist keine Linearkombination der Vektoren

$$v_1 = (0,1)^{\mathrm{t}},\; v_2 = (0,2)^{\mathrm{t}},$$

denn jede Linearkombination von v_1 und v_2 hat die Form $(0,?)^{\mathrm{t}}$.

iii) $v = (0,0,0,0)^{\mathrm{t}}$ ist auf verschiedene Art als Linearkombination von

$$v_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{t}},\; v_2 = (0,2,2,0)^{\mathrm{t}},\; v_3 = (0,0,3,3)^{\mathrm{t}},\; v_4 = (4,0,0,4)^{\mathrm{t}}$$

darstellbar:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

$V = \mathbb{R}^3$

(i) $v_1 = (1, -1, 0)^\mathrm{t}$, $v_2 = (0, 1, -1)^\mathrm{t}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{span}(v_1, v_2) &= \{\lambda_1(1,-1,0)^\mathrm{t} + \lambda_2(0,1,-1)^\mathrm{t} : \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, -\lambda_2)^\mathrm{t} : \lambda_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ebene, orthogonal zu $(1, 1, 1)^\mathrm{t}$

(ii) $v_3 = (-1, 0, 1)^\mathrm{t}$:
gleiche lineare Hülle, da

$$v_3 = -v_1 - v_2$$

(darstellbar als Linearkombination von v_1 und v_2)
keine eindeutige Darstellung von Vektoren in $\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$:

$$(0, 0, 0)^t = \lambda(v_1 + v_2 + v_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Matrix

Unter einer $(m \times n)$-Matrix $(m, n \in \mathbb{N})$ über K versteht man ein Rechteckschema

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; a_{ij} \in K.$$

Man bezeichnet $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ als i-ten Zeilen- und $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^{\mathrm{t}}$ als j-ten Spaltenvektor von A. Speziell ist eine $(n \times 1)$-Matrix ein Spalten- und eine $(1 \times n)$-Matrix ein Zeilenvektor.

Die $(n \times m)$-Matrizen bilden den Vektorraum $K^{n \times m}$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ $(\mathbb{C}^{n \times m})$ bezeichnet die reellen (komplexen) Matrizen. Die Vektorraumoperationen sind komponentenweise definiert:

$$C = A \pm B \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$
$$B = \lambda A \;\Leftrightarrow\; b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Beispiel:

Verschiedene Matrixdimensionen

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

Spalten- bzw. Zeilenvektor, quadratische und rechteckige Matrix

Linearität, Bild und Kern

Sei A eine $(m \times n)$-Matrix. Die durch die Multiplikation der Matrix A mit einem Vektor v

$$v \mapsto Av$$

definierte Abbildung ist linear, d.h.

$$A(u+v) = Au + Av,\ A(\lambda v) = \lambda(Av)$$

für alle Vektoren $u, v \in K^n$ und Skalare $\lambda \in K$.

Man bezeichnet mit

$$\operatorname{Kern} A = \{v \in K^n :\ Av = 0\} \ \subseteq K^n$$

den Kern und mit

$$\operatorname{Bild} A = \{w \in K^m :\ \exists v \in K^n \text{ mit } Av = w\} \ \subseteq K^m$$

das Bild von A.

Matrix-Multiplikation

Das Produkt einer $(\ell \times m)$-Matrix A und einer $(m \times n)$-Matrix B ist die $(\ell \times n)$-Matrix

$$C = AB\,, \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}\,,$$

d.h. zur Definition von c_{ik} werden die Produkte der Elemente aus Zeile i von A und Spalte k von B summiert:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & c_{ik} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{jk} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass dazu die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmen muss.

Die Matrixmultiplikation entspricht der Komposition der linearen Abbildungen

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av\,,$$

d.h. $C = AB$ ist die Matrixdarstellung von $S \circ T$.
Die Matrix-Multiplikation ist i.a. nicht kommutativ.

Beispiel:

einige konkrete Matrix-Produkte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$