(1) Nach den Cauchy-Abschätzungen gilt für

$n \geq 2$

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{R^n} \sup_{|z|=R} |f(z)|$$

$$\leq \frac{AR+B}{R^n} = \frac{A}{R^{n-1}} + \frac{B}{R^n} \to 0$$

(für $R \to \infty$). Somit ist $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 2$

und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f'(0) \cdot z + f(0)$

für alle $z \in \mathbb{C}$ (Satz 17.8). Mit $a = f'(0)$ und

$b = f(0)$ folgt die Behauptung.

(2) (a)

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \qquad z_0 = 1$$

$$= \frac{e^{2(z-1)} \cdot e^2}{(z-1)^3}$$

$$= e^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (z-1)^{k-3}$$

$$= 8e^2 \cdot \sum_{k=-3}^{\infty} \frac{2^k}{(k+3)!} (z-1)^k$$

Pol 3. Ordnung

Reihe konvergiert $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k+3)!}(z-1)^k$ konv.

KK: $$\frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{(k+3)!}{(k+4)!} = \frac{2}{k+4} \longrightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = L$$

Der Konvergenzradius ist $R = \frac{1}{L} = 2$.

Die Laurentreihe konv. auf $U_2(1) \setminus \{1\}$

absolut und lokal glm.

(b)

$$f(z) = (z+2-5)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-2k} - 5\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+2)^{-k} \quad , \text{wobei } c_k = \begin{cases} \frac{(-1)^l}{(k+1)!} & k=2l \\ \frac{(-1)^l}{k!} & k=2l+1 \end{cases}$$

z_0 ist eine <u>wesentliche</u> Singularität. $\qquad = \frac{(-1)^{\lfloor k \rfloor}}{k!}$

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L}$$

Konvergenzgebiet: $\quad \mathbb{C}\setminus\{-2\}$.

(c) $$f(z) = \frac{1}{(z+2)}\cdot(z+2-2)\cdot\frac{-1}{1-(z+2)}$$

$$= \frac{-1}{(z+2)}(z+2-2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(z+2)^k \qquad (|z+2|<1)$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}(z+2) + 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(z+2)^{k-1}$$

$$= \frac{2}{z+2} + \sum_{k=0}^{\infty}(z+2)^k$$

Pol erster Ordnung an $z_0 = -2$.

$\left|\frac{1}{1}\right| = 1 \longrightarrow 1 = L$, $R = \frac{1}{1}$. Konvergenzgebiet $U_1(-2)\setminus\{-2\}$

(②) (d)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \quad (|z|<1)$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\left(1+(z-1)\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-z}\left(1+(z-1)\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n n^n (z-1)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n n^n \left((z-1)^{n-1} + (z-1)^n + (z-1)^{n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{z-1} + 2 - 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} (z-1)^n$$

$$\frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1 \cdot \frac{1}{e} =: L, \quad R = \frac{1}{L} = e$$

Konvergenzgebiet ist $U_e(1) \setminus \{1\}$.

(3) (a) $$(1-e^z)\big|_{z=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad |f(z)| \longrightarrow \infty \qquad (z \to 0)$$

Damit handelt es sich um einen <u>Pol</u> (Theorem 18.3).

Da $$1-e^z = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = -z \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k}_{\text{hol, an } 0 \text{ Wert } \neq 0},$$

hat der Pol die Ordnung 1.

(b) $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{5-2k}. \qquad \frac{1}{k!} \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Folglich ist 0 eine wesentliche Singularität.

(c) Der Grenzwert $\lim_{z \to 0} |\cos(\frac{1}{z})|$ ~~[illegible]~~ existiert nicht, (mindestens) jedes $x \in [0,1]$ ist ein Häufungspunkt. Es handelt sich um eine ~~wesentliche~~ Singularität.

(d) $$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}}_{\text{hol. fsbar in } 0}.$$ Die Singularität ist hebbar.

④ (a) $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} = \dfrac{z}{(z+1)^2(z+2)}$

f hat in $I(\Gamma)$ die Singularitäten $-1, -2$.

Dies sind offenbar Pole der Ordnungen 2 bzw. 1.

$$\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \left.\frac{z}{(z+1)^2}\right|_{z=-2} = -2$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{1!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \frac{z}{z+2}$$

$$= \left[\frac{1}{z+2} - \frac{z}{(z+2)^2}\right]_{z=-1} = 1+1 = 2$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-2} f(z)\right) = 0$$

(b) $f(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} = \dfrac{e^{zt}}{z^2((z+1)^2+1)}$

$$= \frac{e^{zt}}{z^2(z+1+i)(z+1-i)}$$

$|1 \pm i| = \sqrt{2} < 3$

Residuen an 0, $-1 \pm i$.

Dies sind Pole der Ordnung 2 bzw. 1.

((4) (b))

$$\operatorname*{Res}_{z=-1\pm i} f(z) = \left.\frac{e^{zt}}{z^2(z+1\pm i)}\right|_{z=-1\pm i} = \frac{e^{(-1\pm i)t}}{(-1\pm i)^2(\pm 2i)}$$

$$= \frac{e^{(-1\pm i)t}}{-4} = -\frac{e^{-t}e^{\pm it}}{4}.$$

$(1+i)^2 = 2i$
$(1-i)^2 = -2i$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{d}{dz}\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2}\right|_{z=0}$$

$$= \left[\frac{te^{zt}}{z^2+2z+2} - \frac{e^{zt}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}\right]_{z=0}$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{2}{4} = \frac{t-1}{2}.$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{e^{-t}}{4}(e^{it}+e^{-it}) + \frac{t-1}{2}\right)$$

$$= -\pi i e^{-t}\cos t + 2\pi i(t-1).$$