Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 4

Aufgabe 1 (Variation der Konstanten für Systeme — 5 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine matrixwertige C^1-Kurve mit $[A(s), A(t)] = 0$ für alle $s, t \in I$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\frac{d}{dt}e^{A(t)} = A'(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}A'(t)$.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Die Anfangswertaufgabe
$$\dot{x} = A(t)x \ , \ x(t_0) = x_0$$
hat die Lösung $x(t) = e^{U(t)}x_0$, wobei $U(t) = \int_{t_0}^t A(s)\,ds$.

(c) Für jede reguläre Matrix $X_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist $e^{U(t)}X_0$ eine Fundamentalmatrix der Anfangswertaufgabe in (b).

(d) Sei $b : I \to \mathbb{K}^n$ eine vektorwertige C^1-Kurve. Eine Lösung der Anfangswertaufgabe
$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \ , \ x(t_0) = x_0$$
ist gegeben durch $x(t) = e^{U(t)}\big(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-U(t)}b(t)\,dt\big)$.

Aufgabe 2 (Klassische Gruppen — 5 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann hermitesch ist, wenn die Matrizen e^{itA} für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär sind.

Aufgabe 3 (Klassische Gruppen — 5 Punkte)
Seien $A, G \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wobei G regulär sei. Zeigen Sie: Falls $A^*G + GA = 0$, so gilt $\operatorname{Spur} A \in i\mathbb{R}$. **Hinweis:** Betrachten Sie e^{tA}.

Aufgabe 4 (Fehlende Eindeutigkeit — mündlich)
Man betrachte die Anfangswertaufgabe
$$\dot{x} = \sqrt{|x|} \ , \ x(0) = 0 \ . \tag{$*$}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(*)$ folgenden unendlich vielen Lösungen besitzt:
$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(a-t)^2 & t \leqslant a \ , \\ 0 & a \leqslant t \leqslant b \ , \\ \frac{1}{4}(t-b)^2 & b \leqslant t \ . \end{cases}$$

(b) Warum ist der Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar?

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 10.11.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 19.11.2008*, vor.