① (a) Man kann Korollar 21.9 nicht direkt anwenden, deswegen zeigen wir zunächst, dass die dritte Gleichung aus den ersten beiden folgt.

Sei $x \in \Omega$ und zunächst $x_2 \neq 0$. Aus $x_1 x_3 = x_2^2$ folgt

$$x_2 x_3 = \frac{x_3}{x_2} \cdot x_2^2 = \frac{x_1 x_3^2}{x_2}.$$

Aus $x_2 x_4 = x_3^2$ folgt $x_1 x_4 = \frac{x_1}{x_2} \cdot x_2 x_4 = \frac{x_1 x_3^2}{x_2} = x_2 x_3$, also die dritte Gleichung. Analog argumentiert man für $x_3 \neq 0$. Sind $x_2 = x_3 = 0$, so folgt aus $x \in \Omega$, dass $x_1 \neq 0$ oder $x_4 \neq 0$, und man argumentiert wieder analog.

Es reicht also, die ersten beiden Gleichungen zu betrachten.
Dieses Gleichungssystem ist in Ω regulär:

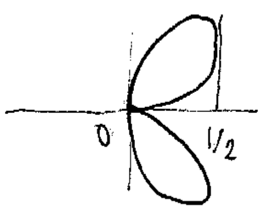
$$\nabla f_1 = (x_3, -2x_2, x_1, 0)$$

$$\nabla f_2 = (0, x_4, -2x_3, x_2)$$

Sind $a, b \neq 0$, $a\nabla f_1 + b\nabla f_2 = 0$, folgt $x_2 = x_3 = 0$, also $x_1 = +2\frac{b}{a}x_3 = 0$, $x_4 = 2\frac{a}{b}x_2 = 0$. Dies ist ausgeschlossen für $x \in \Omega$. Es folgt die Behauptung, da $4-2=2$.

(b)

(i)



(6) (ii) $\nabla v(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^4} - \frac{t^2(4t^3)}{(1+t^4)^2} \\ \frac{1}{1+t^4} - \frac{4t^4}{(1+t^4)^2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{(1+t^4)^2} \begin{pmatrix} 2t(1-t^5) \\ 1-3t^4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow$ $t \in \{0,1\}$, $1-3t^4 = 0$

Aber $1-3t^4 = \left\{ \begin{matrix} 1 & t=0 \\ -2 & t=1 \end{matrix} \right\} \neq 0,$

also hat v keinen kritischen Punkt und ist somit eine Immersion.

v injektiv: Sei $v(t) = v(s)$. Dann gilt

$\frac{t}{1+t^4} = \frac{s}{1+s^4}$, also $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} t$, $t=0 \Leftrightarrow s=0$

$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{s^2}{1+s^4}$, also $t-s = st^4 - ts^4$
$t^2 - s^2 = s^2t^4 - t^2s^4$ (*)

Es folgt $t^2-s^2 = (t-s)(t+s) = (st^4-ts^4)(t+s)$
$= st^5 - t^2s^4 + s^2t^4 - ts^5$

In Verbindung mit (*): $st^5 - ts^5 = 0$

Dann gilt für $s,t \neq 0$: $t^4 = s^4$ und somit $s=t$ (da $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} t$).

(a)) (b) (viii) Es gilt

$$\lim_{t \to \pm\infty} v(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $v(\mathbb{R})$ beschränkt (eine konv. Folge ist beschränkt). Aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v(0) \in K$, also ist K abgeschlossen. Somit folgt: K ist kompakt.

Wäre K eine UMF, so hätte K Dimension 1. Aber für jede Umgebung $U_\varepsilon(0)$ hat $K \cap U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ vier Zusammenhangskomponenten, also ist K keine UMF.

Ausführlicher: Angenommen, K sei eine UMF. Sei φ eine Karte nach 21.4 (b) und $\tilde{\varphi} = pr_1 \circ \varphi$. φ sei definiert auf $U_\varepsilon(0)$, $\varepsilon > 0$. Die Teilmengen

$K_1 = v([0,1[) \cap U_\varepsilon(0)$, $K_2 = v(]-1,0]) \cap U_\varepsilon(0)$

$K_3 = v(\{0\} \cup]1,\infty[) \cap U_\varepsilon(0)$, $K_4 = v(\{0\} \cup]-\infty,-1[) \cap U_\varepsilon(0)$

sind zusammenhängend und schneiden sich nur in $(0,0)$.

$\tilde{\varphi}(K_j) = I_j$ sind Intervalle in $\mathbb{R}$ und schneiden sich nur in $x_0 = \tilde{\varphi}(0,0)$. Da $\tilde{\varphi}$ injektiv ist, sind I_j, $j=1,\dots,4$, paarweise verschieden. Widerspruch!

Nachtrag zu (a): Tangentialraum

$$A = JF_{(1,1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\quad x \in T_{(1,1,1,1)}(M) \Leftrightarrow Ax = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$T_{(1,1,1,1)}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x - y \\ x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

② (a) Es gilt $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$, also ist

Satz 21.15 anwendbar. Es gibt an jedem Extremum

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ unter der Nebenbedingung ein λ, s.d.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda \nabla g = -\lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$2 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2}.$$

Dann folgt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ für die kritischen Punkte (dies sind auch Extrema).

(b) $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq 0$.

21.15: $$0 = \nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) (c)

$$g_1(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - 4$$
$$g_2(x,y,z) = x + y + z$$

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist $\text{Rang}\begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = 0$, solange $(x,y) \neq (0,0)$.

Aber $g_1(0,0,z) = -4 \neq 0$, also ist 21.15 anwendbar.

$$0 = \nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 6x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2+6\lambda_1)x + \lambda_2 \\ (2+2\lambda_1)y + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= (2+6\lambda_1)x \\ 0 &= (2+2\lambda_1)y \end{aligned}$$

Ist $x \neq 0$, so folgt $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ und $\frac{5}{3}y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Ist $y \neq 0$, so folgt $\lambda_1 = -1$ und $-4x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ist $x \neq 0$, so folgt $y=0$, $x^2 = \frac{4}{3}$, also $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$,

sowie $z = -x = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ist $y \neq 0$, so folgt $x = 0$, $y^2 = 4$, also $y = \pm 2$,

sowie $z = -y = \mp 2$.

Es gilt $f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \mp \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3}$, sowie

$f(0, \pm 2, \mp 2) = 4$. Es gibt auf der

kpt. Menge $E = \{(x,y,z) \mid g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}$

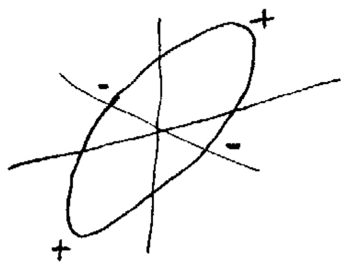
Pkte a und b, an denen f minimal bzw.

maximal wird. Dann folgt $f(a) = \frac{4}{3}$ und $f(b) = 4$,

da $\{a,b\} \subset \left\{ \pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \pm(0,2,-2)\right\}$. Somit

ist $\frac{4}{3} \leq f \leq 4$ auf E und $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

sind Minima, $\pm(0,2,-2)$ Maxima.



+ Maxima

− Minima.

③ (a) $$\frac{\partial}{\partial x_m} q_A(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_m}(x_j x_k)}_{\delta_{jm} x_k + x_j \delta_{mk}}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk} \delta_{jm} x_k + a_{jk} \delta_{mk} x_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{jm}}_{= a_{mj}} x_j = (2Ax)_m$$

A symmetrisch

Es folgt $\nabla q_A(x) = 2Ax$.

(b), (c) $g(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. $\nabla g(x) = 2x$.

$$0 = \nabla q_A(x) + \lambda \nabla g(x) = 2(Ax + \lambda x)$$

$\Leftarrow)$ $Ax = -\lambda x$. $g(x) = 1 \Rightarrow x \neq 0$

D.h. $-\lambda$ muss ein Eigenwert von A sein und x ein Eigenvektor der Länge 1.

$q_A(x) = \langle x | Ax \rangle = -\lambda \underbrace{\langle x | x \rangle}_{= g(x)} = -\lambda$ kritischer Wert.

Da A höchstens n verschiedene Eigenwerte hat, hat q_A höchstens n verschiedene kritische Werte

A besitzt eine Basis aus Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n$

zu EW $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$ (mögl. nicht pw. verschieden).

Dann gilt $\quad A x_j = -\lambda_j x_j \quad$ (EW ist $-\lambda_j$).

Man kann annehmen, dass $\langle x_j | x_j \rangle = 1$, d.h.

$\pm x_1, \ldots, \pm x_n$ erfüllen die Nebenbedingung und

sind kritische Punkte. Es sind $2n$ Stück.

(4) (a) Es gilt

$$\checkmark \; J v(s,t) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos t)\sin s & -r\sin t\cos s \\ (R + r\cos t)\cos s & -r\sin t\sin s \\ 0 & r\cos t \end{pmatrix}$$

Für $t \neq \pm\frac{\pi}{2}$ ist offenbar $\operatorname{Rang}(\ldots) = 2$

$v(s,t)$

Für $t = \pm\frac{\pi}{2}$: $\quad J v(s, \pm\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -R\sin s & \mp r\cos s \\ R\cos s & \mp r\sin s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

also auch dann: $\operatorname{Rang}(\ldots) = 2 \Rightarrow v$ ist eine Immersion.

Ist $v(s,t) = v(s',t')$, so folgt $\sin t = \sin t'$, sowie

$$(R + r\cos t)^2 \underbrace{(\cos^2 s + \sin^2 s)}_{=1} = (R + r\cos t')^2 \underbrace{(\cos^2 s' + \sin^2 s')}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad (R + r\cos t)^2 = (R + r\cos t')^2.$$

(a) Da $|r\cos t| \le r < R$, ist $R + r\cos t > 0$

und $R + r\cos t = R + r\cos t' \Rightarrow \cos t = \cos t'$

$\Rightarrow t = t'$. Weiter $\begin{pmatrix}\sin s\\ \cos s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin s'\\ \cos s'\end{pmatrix} \Rightarrow s = s'$.

Also ist v injektiv.

(b)

$$g(s,t) = \det Jv^t Jv = \begin{vmatrix} (R+r\cos t)^2(\sin^2 s + \cos^2 s) & 0 \\ 0 & r^2\sin^2 t(\cos^2 s + \sin^2 s) + r^2\cos^2 t \end{vmatrix}$$

$$= (R + r\cos t)^2 r^2$$

(c)

$$A_2(S) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g(s,t)}\, ds\, dt$$

$$= 2\pi r \int_{-\pi}^{\pi} (\underbrace{R + r\cos t}_{>0,\ s.o.})\, dt$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R r$$

(d) $2\pi r$ = Bogenlänge des Kreises mit Radius r

$2\pi R$ = ——"—— R

Flächeninhalt von (T) $(= A_2(S))$ = Produkt der Bogenlängen.