① (a)

$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - \underbrace{v_{yx}}_{= v_{xy} \ (v \in C^2)} = 0$$

(b) Es gilt für $g = u_x - i u_y$:

$$g_x = u_{xx} - i u_{xy} \quad , \quad g_y = u_{xy} - i u_{yy} \ .$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Re} g) = u_{xx} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{Im} g) = -u_{xy}$$

$$\frac{d}{dy}(\operatorname{Re} g) = u_{xy} \qquad \frac{d}{dy}(\operatorname{Im} g) = -u_{yy} \ .$$

$$-\frac{d}{dx}(\operatorname{Im} g) = \frac{d}{dy}(\operatorname{Re} g)$$

u harmonisch $\Rightarrow$ $u_{xx} = -u_{yy}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{Re} g) = \frac{d}{dy}(\operatorname{Im} g)$$

$\Rightarrow$ CR-DGL gelten für $g \Rightarrow g$ harmonisch.

16.22

$\Rightarrow$ Existiert f hol. mit $f' = (\operatorname{Re} f)_x + i(\operatorname{Im} f)_x$

$$= (\operatorname{Im} f)_y - i(\operatorname{Re} f)_y = g \ .$$

Es folgt $(\mathrm{Re} f)_x = u_x$ und $-i(\mathrm{Re} f)_y = -iu_y$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re} f = u + \text{const}$. Man kann f durch const verändern, ohne $g = f'$ zu verändern oder die Holomorphie zu zerstören $\to \exists f$ hol., $\mathrm{Re} f = u$.

(2) (a) $f(z) := z^2$ ist hol.,

$\mathrm{Re} f(x+iy) = x^2 - y^2 = h(x,y)$ ist harmonisch nach (1).

(d) $$h(x,y) = e^{x^2-y^2} + \underbrace{\mathrm{Re}(\cos^7(x+iy))}_{\text{harmonisch nach (1)}}$$

$$\Delta(e^{u(x,y)}) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} u_x e^u \\ u_y e^u \end{pmatrix} = \Delta u \cdot e^u + (u_x^2 + u_y^2) \cdot e^u$$

Für $u(x,y) = x^2 - y^2$: $\Delta(e^{x^2-y^2}) = 4(x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \not\equiv 0$.

$\Rightarrow$ $e^{x^2-y^2}$ nicht harmonisch $\Rightarrow$ h nicht harmonisch.

(b) $$\Delta h = -y^2\sin(xy) - y^2\cos(xy) - x^2\sin(xy) - x^2\cos(xy)$$

$$= -(x^2+y^2)\,h(x,y) \not\equiv 0$$ nicht harmonisch.

(2) (b) $\exp \circ \cos^4$ ist holomorph, also ist

$\operatorname{Im} e^{\cos^4(x+iy)}$ harmonisch (1) und

h harmonisch $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}(\sin^{12}(x-iy))$ harmonisch.

$\overset{(1)(b)}{\Leftrightarrow}$ $\exists\ u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x+iy) = u(x,y) + i\sin^{12}(x-iy)$ holomorph

(CRDGL)

$\operatorname{Re} f$ ist bis auf eine Konstante durch $\operatorname{Im} f$ festgelegt,

also müsste $\quad f(x+iy) = \sin^{12}(x-iy)$ holomorph sein.

Aber es gilt

$$\frac{d}{dx} \sin^{12}(x-iy) = 12 \sin^{11}(x-iy)\cos(x-iy)$$

und $$\frac{d}{dy} \sin^{12}(x-iy) = -i12 \sin^{11}(x-iy)\cos(x-iy)$$

Mit $\quad \sin^{12}(x-iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ folgt

$$u_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 12 \cdot 2^{-6} = \frac{3}{16}$$

$$v_y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{11} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{16} \quad \times$$

$\Rightarrow$ CRDGL sind nicht erfüllt, $\sin^{12}(x-iy)$ nicht holomorph.

③

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\underset{\text{CRDGl}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \text{, also } (\nabla v)^\perp = \mathbb{R} \cdot \nabla u.$$

Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1-Kurve mit

$v(\gamma(t)) \equiv a$. Dann durch Ableitung:

$\langle \nabla v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \equiv 0$.

Es folgt, dass $\forall t \in I: \dot\gamma(t) = c \cdot \nabla u(\gamma(t))$

gilt für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Durch Umparametrisierung von γ kann man $c = 1$ erreichen,

also $\dot\gamma(t) = \nabla u(\gamma(t))$, d.h.: γ ist eine Trajektorie

von $F = \nabla u$.

(4) (a) Hier ist $v(x,y) = \operatorname{Im}((x+iy)^2)$

$= 2xy$

Es gilt mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$\nabla v(\gamma(t)) = \dot\gamma(t) \Leftrightarrow \exists a \; 2x(t)y(t) = a$

$\Leftrightarrow \; y(t) = \dfrac{a}{2x(t)} \quad (\exists a)$

Da für $a \neq 0$ gilt $x(t), y(t) \neq 0$.

Die Trajektorien von ∇u sind in $x^2+y^2>0$.

$\Gamma : \; y = \dfrac{a}{x}, \quad a \neq 0$

Doppelhyperbeln in Quadranten I & III bzw. II & IV.

(b) Hier ist $v(x,y) = \operatorname{Im}(e^{x+iy}) = e^x \sin y$.

Dann gilt für jede Trajektorie

$\Gamma : \; e^x \sin y = a, \; -1 < \dfrac{a}{e^x} < 1$

$\Leftrightarrow \; y = \arcsin(ae^{-x}) + 2\pi k \quad x > \log|a|, k \in \mathbb{Z}$

(c) Hier ist $v(x,y) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{x+iy}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

Es gilt für die Trajektorien von ∇u:

$\Gamma: \quad -\dfrac{y}{x^2+y^2} = a$

$\Leftrightarrow \quad -y(1+y) = ax^2 \quad \Leftrightarrow \quad y(1+y) = -ax^2$

$\Leftrightarrow \quad (\tfrac{1}{2}+y)^2 - \tfrac{1}{4} = -ax^2$

$\Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - ax^2}$, $\quad \sqrt{|a|}\,|x| \leq \tfrac{1}{2}$

$(a<0)$, oder

$x \in \mathbb{R}$ beliebig

$(a \geq 0)$

Man bekommt die Trajektorien

$y = 0, \quad y = -1$

$(1+2y)^2 + 4ax^2 = 1 \qquad a>0$

Ellipsen um $(0,-\tfrac{1}{2})$ mit Radien $\tfrac{1}{2}$ und $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$(1+2y)^2 - 4ax^2 = 1 \qquad a>0$

Doppelhyperbeln mit Scheitelpunkten $(0,0)$ und $(0,-1)$.