UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Institut für Mathematik

Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 7

Aufgabe 1 (Untermannigfaltigkeiten — 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass in $\Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ durch das folgende Gleichungssystem eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M definiert wird:

$$x_1x_3 - x_2^2 = 0\,,\ x_2x_4 - x_3^2 = 0\,,\ x_1x_4 - x_2x_3 = 0\,.$$

Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(1,1,1,1)}(M)$.

(b) Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $v(t) = \frac{1}{1+t^4} \cdot \binom{t^2}{t}$.

(i) Skizzieren Sie das Bild $K = v(\mathbb{R})$.

(ii) Zeigen Sie, dass v eine injektive Immersion ist.

(iii) Zeigen, dass Bild $K = v(\mathbb{R})$ eine kompakte Teilmenge ist, aber keine Untermannigfaltigkeit.

Aufgabe 2 (Lagrange-Multiplikatoren — 5 Punkte)

Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die kritischen Punkte der folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen. In Teil (c) sollen sie auch die lokalen Extrema unter den Nebenbedingungen finden.

(a) $f(x,y) = x + y\,;\, x^2 + y^2 = 1\,.$

(b) $f(x,y,z) = x + z\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\,.$

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2\,;\, 3x^2 + y^2 - 4 = 0$ und $x + y + z = 0\,.$

Aufgabe 3 (Ein spezielle Extremwertaufgabe — 5 Punkte)

Sei $A = (a_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sei durch $q_A(x) = \langle x|Ax\rangle = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}x_jx_k$ die zugeordnete quadratische Form q_A definiert.

(a) Zeigen Sie $\nabla q_A(x) = 2Ax\,.$

(b) Man bestimme Sie alle kritischen Punkte von q_A unter der Nebenbedingung $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Zeigen Sie insbesondere, dass es mindestens $2n$ solcher kritischer Punkte gibt.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Werte von q_A. Wieviele gibt es höchstens?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (Die Oberfläche des Torus — mündlich)

Der Torus mit Radien $0 < r < R$ ist die folgende zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$: $T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + (z - R)^2 = r^2\right\}$. Sei

$$v\colon]-\pi, \pi[^2 \to \mathbb{R}^3 \,,\; v(s,t) = \begin{pmatrix} (R + r\cos t)\cos s \\ (R + r\cos t)\sin s \\ r\sin t \end{pmatrix} .$$

Sei $S = v(]-\pi, \pi[^2) \subset T$.

(a) Zeigen Sie, dass $S : x = v(s,t)$ injektiv parametrisiert ist.

(b) Bestimmen Sie die Gramsche Determinante $g(s,t)$ für v.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_2(S)$.

(d) Man kann zeigen, dass T das Produkt von zwei Kreislinien ist. Wie können Sie das an Ihrer Formel für den Flächeninhalt erkennen?

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 1.12.2008*, vor der Vorlesung ab. Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 10.12.2008*, vor.