Übungen zu "Geometrie und Analysis von Supermannigfaltigkeiten und Lie-Supergruppen", Blatt 1

Übung 1.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so dass $X = \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ eine Menge ist. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{C}$ diskret, d.h. $\operatorname{Hom}(x, y)$ hat höchstens ein Element für alle $x, y \in X$, so ist (bis auf eine Identifizierung der Hom-Mengen) $\mathcal{C}$ die einer Präordnung zugeordnete Kategorie.

Übung 1.2. Ein Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ heißt Quasiinverses von $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, falls $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Zeigen Sie: Genau dann ist F eine Kategorienäquivalenz, wenn es ein Quasiinverses besitzt.

Übung 1.3. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1). Es gibt natürliche Transformationen

$$\alpha : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \quad \text{und} \quad \beta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$$

so dass die folgenden Kompositionen die Identität sind:

$$G \xrightarrow{\beta G} GFG \xrightarrow{G\alpha} G$$

und

$$F \xrightarrow{F\beta} FGF \xrightarrow{\alpha F} F$$

Dabei sei $(\beta G)_Y = \beta_{G(Y)}$ und $(G\alpha)_X = G(\alpha_X)$, *etc.*

(2). Es gibt eine natürliche Äquivalenz $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)$ als Funktoren $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathrm{Sets}$.

2. Übungen zu "Geometrie und Analysis von Supermannigfaltigkeiten und Lie-Supergruppen", Blatt 2

Übung 2.1. Sei J die Kategorie mit zwei Objekten x, y und $\#\mathrm{Hom}(x, y) = 2$, d.h. mit zwei parallelen Pfeilen als nicht-trivialen Morphismen. Beschreiben Sie projektive und induktive Limiten von Funktoren $F : J \to \mathcal{C}$ durch universelle Eigenschaften.

Übung 2.2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten und $G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Zeigen Sie: G ist ein Gruppenobjekt genau dann, wenn alle $G(X)$ Gruppen sind und alle $G(f)$ Gruppen-Homomorphismen.

3. Übungen zu "Geometrie und Analysis von Supermannigfaltigkeiten und Lie-Supergruppen", Blatt 3

Übung 3.1. Sei M ein R-Modul und $x \in X$, wobei X ein topologischer Raum sei. Man zeige: Es gibt genau eine Garbe M_x auf X, so dass der Halm $(M_x)_y = 0$ für $y \neq x$ und $= M$ für $y = x$ ist.

Übung 3.2. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe. Dann heißt $\mathcal{F}$ *flabby*, wenn jedes ϱ_{VU} surjektiv ist. Zeige: Es gibt eine flabby Garbe $\mathcal{G}$ und einen Monomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$. (Hinweis: Benutze die erste Übung.)

Übung 3.3. Sei $\mathcal{F}$ eine mengenwertige Garbe auf X. Definiere $|\mathcal{F}| = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$, mit der Topologie, die von den Mengen $\{s_x | x \in U\}$ für $U \subset X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$ erzeugt wird. Definiere $\pi : |\mathcal{F}| \to X$ durch $\pi(f) = x$ für alle $f \in \mathcal{F}_x$. Man zeige: π ist ein surjektiver lokaler Homöomorphismus und diese Konstruktion induziert eine Kategorienäquivalenz zwischen mengenwertigen Garben auf X und surjektiven lokalen Homöomorphismen auf X.

4. Übungen zu "Geometrie und Analysis von Supermannigfaltigkeiten und Lie-Supergruppen", Blatt 4

Übung 4.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe heißt *soft*, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ die kanonische Abbildung $\mathcal{F}(X) \to \varinjlim_{U \supset A} \mathcal{F}(U)$ surjektiv ist. Man zeige: Ist X normal, so ist die Garbe $\mathcal{C}_X$ der stetigen Funktionen auf X soft.

Übung 4.2. Sei A ein R-Modul und $f : X \to Y$ stetig. Man zeige: $f^{-1}A_Y \cong A_X$.

Übung 4.3. Sei A ein R-Modul, $x \in X$ und $j_x : x \to X$ die konstante Abbildung x. Man bestimme $(j_x)_*(A)$.

Übung 4.4. Sei $j : U \to X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge. Man zeige: Die Transformation $j^{-1}j_* \to \mathrm{id}$ ist eine Äquivalenz. Was kann man über $\mathrm{id} \to j_*j^{-1}$ sagen?

5. ÜBUNGEN ZU "GEOMETRIE UND ANALYSIS VON SUPERMANNIGFALTIGKEITEN UND LIE-SUPERGRUPPEN", BLATT 5

Übung 5.1. Analog zu super-geringten Räumen über $\mathbb{R}$ definiert man super-geringte Räume über $\mathbb{C}$. Man definiert einen Komplexifizierungsfunktor $(-)_\mathbb{C}$ durch $(X_0, \mathcal{F})_\mathbb{C} = (X_0, \mathcal{F} \otimes \mathbb{C})$. Zeigen Sie: Der Funktor $(-)_\mathbb{C}$ definiert einen volltreuen Funktor von reellen Mannigfaltigkeiten zu komplexen super-geringten Räumen, aber auf reelle Supermannigfaltigkeiten angewandt ist er nicht mehr volltreu.

6. Übungen zu "Geometrie und Analysis von Supermannigfaltigkeiten und Lie-Supergruppen", Blatt 6

Übung 6.1. Ein Superpunkt ist eine Supermannigfaltigkeit $(*, \lambda)$. Zeige: Gegeben Supermannigfaltigkeiten X und Y sind Morphismen $f : X \to Y$ durch $f(p) : X(p) \to Y(p)$, wobei p durch alle Superpunkte läuft, eindeutig bestimmt.

Übung 6.2. Man zeige, dass die Definition von Mannigfaltigkeiten als geringte Räume äquivalent zu der Definition durch Atlanten ist, ja, dass dies sogar zu isomorphen Kategorien Anlass gibt. Man formuliere eine Definition (äquivalent zur der Definition durch geringte Räume) von Supermannigfaltigkeiten und ihren Morphismen mit Hilfe von Atlanten.

Übung 6.3. Zeige, dass es inäquivalente Lie-Supergruppen-Strukturen auf $\mathbb{R}^{1|1}$ gibt. Finde alle nicht isomorphen Lie-Supergruppen-Strukturen.