Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 9

Aufgabe 1 (Euler–Lagrange-Gleichung — 5 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen der Euler–Lagrange-Gleichungen für die folgenden Funktionale, wobei als zulässige Menge Z_1 alle $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ mit $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$ zu betrachten seien.

(a) $I(\varphi) = \int_a^b \frac{\varphi'(x)^2}{x^3}\,dx$.
(b) $I(\varphi) = \int_a^b \big(\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)e^x\big)\,dx$.

Aufgabe 2 (Lösung von Variationsproblemen via Euler–Lagrange — 5 Punkte)
Lösen Sie das folgende Variationsproblem, indem Sie die zugehörige Euler–Lagrange-Gleichung lösen. Sie müssen anschließend nicht die Extremalität der entsprechenden Lösung überprüfen.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dot{y}(t)^2 \sin^2(t)\,dt \to \min \quad , \quad y(\pi/4) = 1\,,\, y(\pi/2) = 0\,.$$

Aufgabe 3 (Ein isoperimetrisches Problem — 5 Punkte)
Lösen Sie unter allen $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ das isoperimetrische Problem

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \to \max$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 4 (Ein schlecht gestelltes Variationsproblem — mündlich)
Betrachten Sie für $\varphi \in \mathcal{C}^1([-\pi/2, \pi/2])$ mit $\varphi(\pm\pi/2) = \pm 1$ das Funktional

$$I(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(2\varphi(x)\varphi'(x)\cos(x) - \varphi(x)\sin(x)\big)\,dx\,.$$

Zeigen Sie, dass das Variationsproblem

$$I(\varphi) \to \min$$

unendlich viele Lösungen besitzt, für die I immer den gleichen Wert annimmt.

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 15.12.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 7.1.2009*, vor.