1 Für $I(\varphi) = \int_a^b f(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = f_y(x,\varphi(x),\varphi'(x))$$

(a) $$f(x,y,y') = \frac{(y')^2}{x^3}.$$

$$f_{y'}(x,y,y') = \frac{2y'}{x^3} \qquad \frac{d}{dx} f_{y'}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) =$$

$$= \nabla(f_{y'})(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \\ \varphi''(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\cancel{8}\,6\varphi'(x)}{x^4}, 0, \frac{2}{x^3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \\ \varphi''(x) \end{pmatrix} = -\frac{6}{x^4}\varphi'(x) + \frac{2}{x^3}\varphi''(x)$$

$$f_y(x,y,y') = 0$$

E-L Gleichung: $$-\frac{6}{x^4}\varphi'(x) + \frac{2}{x^3}\varphi''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{x}{3}\varphi''(x)$$

Da die rechte Seite dieser DGL C^1 ist, ist jede dazugehörige AWA eindeutig lösbar. $\varphi(x) = x^3$ ist eine Lösung, also sind alle Lösungen der Euler-Lagrange-

Gleichung gegeben durch $\varphi(x) = c_1 x^4 + c_2$,

wobei $c_1 a^4 + c_2 = A$, $\cancel{c_2} b^4 + c_2 = B$.

(b) $f(x,y,y') = y^2 + 2ye^x + (y')^2$.

$f_{y'}(x,y,y') = 2y'$

$f_y(x,y,y') = 2y + 2e^x = 2(y+e^x)$

$$\frac{d}{dx}\left[f_{y'}(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right] = (0,0,2)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \varphi'(x)\\ \varphi''(x)\end{pmatrix} = 2\varphi''(x).$$

EL-Gleichung: $\varphi''(x) = \varphi(x) + e^x$

Dies ist eine lineare inhomogene DGL.

Allgemeine Lösung der homogenen DGL $\varphi''(x) = \varphi(x)$ ist

$c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Spezielle Lösung der inhomogenen

DGL: $\varphi(x) = \frac{x}{2}e^x$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^x$

$\varphi''(x) = (\frac{1}{2}x + 1)e^x = \varphi(x) + e^x$.

Allgemeine Lösung der EL-Gleichung:

$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{x}{2}e^x$ mit

$\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$.

② (a)

$$f(x,y,y') = \sin^2(x)\cdot(y')^2.$$

$$f_{y'}(x,y,y') = 2\sin^2(x)\,y'$$

$$f_y(x,y,y') = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[f_{y'}(t,y(t),\dot y(t))\right] = -2\sin(t)\cos(t)\,\dot y(t)^2 + 2\sin^2(t)\,\ddot y(t)$$

EL-Gleichung:

$$\sin^2(t)\,\ddot y(t) = \sin(t)\cos(t)\,\dot y(t)$$

$$\ddot y(t) = \cot(t)\cdot\dot y(t)$$

$$\left(\sin(t) > 0 \quad \forall t \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}]\right)$$

$$\log \dot y(t) - \log \dot y(\pi/4) = \int_{\pi/4}^{t} \frac{\dot y(\tilde t)}{\ddot y(\tilde t)}\, d\tilde t$$

$$= \int_{\pi/4}^{t} \tan(s)\, ds = -\Big[\log(\cos(s))\Big]_{s=\pi/4}^{t}$$

$$= -\log(\cos(t)) + \log\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\Rightarrow \quad \dot y(t) = C\cos(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 + c_2\sin(t)$$

$$1 = y(\pi/4) = c_1 + c_2\sin(\tfrac{\pi}{4}) = c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{2}}$$

(②) $$0 = y(\pi/2) = c_1 + c_2 \sin(\pi/2) = c_1 + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \sin(t) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

(3) $h(x,y,y') = y + \lambda\sqrt{1+(y')^2}$.

$h_y(x,y,y') = 1$

$h_{y'}(x,y,y') = \dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$.

EL-Gleichung: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\lambda\varphi'(x)}{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}}\right] = 1$

Sei φ eine Lösung.

$$\lambda\varphi'(x) = (x+c)\sqrt{1+\varphi'(x)^2}$$

$$\lambda^2\varphi'(x)^2 = (x+c)^2(1+\varphi'(x)^2)$$

$$(\lambda^2-(x+c)^2)\varphi'(x)^2 = (x+c)^2$$

$$\varphi'(x) = \pm\frac{x+c}{\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}}$$

$$\varphi(x) = \mp\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2} + c'$$

$$0 = \varphi(0) = \mp\sqrt{\lambda^2-c^2} + c'$$

$$0 = \varphi(1) = \mp\sqrt{\lambda^2-(1+c)^2} + c'$$

$\sqrt{\lambda^2-c^2} = \sqrt{\lambda^2-(1+c)^2} \Rightarrow c^2 = (1+c)^2 \Rightarrow 2c = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c' = \pm\sqrt{\lambda^2-\frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = \pm\left(\sqrt{\lambda^2-(x-\tfrac{1}{2})^2} - \sqrt{\lambda^2-\tfrac{1}{4}}\right) \Rightarrow |\lambda| \geq \tfrac{1}{2} \quad (\varphi \in C^1([0,$$

$$\varphi'(x) = \mp \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda^2-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$1+\varphi'(x)^2 = \frac{\lambda^2-(x-\frac{1}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2}{\lambda^2-(x-\frac{1}{2})^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-(x-\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda^2}(x-\frac{1}{2})^2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx$$

$$\left[\ t = \frac{x-\frac{1}{2}}{\lambda} \qquad dt = \frac{1}{\lambda}\,dx\ \right]$$

$$= \lambda \cdot \int_{-1/2\lambda}^{1/2\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \lambda \cdot \Big[\arcsin t\Big]_{t=-1/2\lambda}^{1/2\lambda}$$

$$= \lambda \cdot \left[\arcsin\frac{1}{2\lambda} - \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right]$$

$$= 2\lambda \cdot \arcsin\frac{1}{2\lambda} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\lambda} = \sin\frac{\pi}{4\lambda} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2\lambda} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

(3) Es folgt

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{x - x^2} = \pm\sqrt{x(1-x)}.$$

Da $I(\varphi) > 0$ für $+$ und $I(\varphi) < 0$ für $-$,

folgt $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

~~Die EL-Gleichung ist anwendbar, da die NB unabhängig ist.~~

(4) Es gilt

$$I(\varphi) \underset{\substack{\text{part.}\\\text{Integration}}}{=} \underbrace{\varphi(x)^2\cos(x)\Big|_{x=-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(x)^2 \sin(x)\,dx$$

$$- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(x)^2 \sin(x)\,dx = 0,$$

I ist also $\equiv 0$. Jedes $\varphi \in C^1([-\pi/2, \pi/2])$ mit

$\varphi(\pm\pi/2) = \pm 1$ ist eine Lösung des Variationsproblems.

Um zu sehen, dass es unendlich viele solcher gibt,

betrachte man $\varphi_k(x) = \sin((4k+1)x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Dann gilt $\varphi_k \in C^1$ und $\varphi_k(\pm\frac{\pi}{2}) =$

$$= \sin\left(\pm\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right) = \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1.$$

Da $k \neq l \Rightarrow \varphi_k \not\equiv \varphi_l$, folgt die Behauptung. □.