Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 12

Aufgabe 1 (Fehlerfunktion — 5 Punkte)
Die Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x)$ (*error function*) sei definiert durch

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\, ds\,.$$

Definiere für $k > 0$

$$u(x,t) = \operatorname{erf}\left(\tfrac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\,.$$

Zeigen Sie, dass u die folgende Anfangs-Randwert-Aufgabe löst:

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{k} \cdot u_t\,,\ 0 < x < \infty\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = 0\,,\ t > 0\,,\ u(x,0) = 1\,,\ x > 0\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Burgers-Gleichung — 5 Punkte)
Die positive $\mathcal{C}^2$-Funktion $u = u(x,t) > 0$ sei eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $w(x,t) = -2\frac{u_x(x,t)}{u(x,t)}$ eine Lösung der viskosen Burgers-Gleichung ist:

$$w_t + w \cdot w_x = w_{xx}\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,.$$

(b) Konstruieren Sie eine Lösung der Burgers-Gleichung mit dem Wärmeleitungskern $\gamma(x,t) = \frac{1}{2\pi t} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Überprüfen Sie direkt, dass Sie eine Lösung erhalten.

Aufgabe 3 (Eine spezielle Anfangs-Randwert-Aufgabe — 5 Punkte)
Sei $u = u(x,t)$, $x,t \geqslant 0$, die eindeutige Lösung der Anfangs-Randwert-Aufgabe

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,,\ 0 < x < \infty\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = 1\,,\ t > 0\,,\ u(x,0) = 0\,,\ x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ gilt

$$u(\alpha x, \alpha^2 t) = u(x,t) \quad \text{für alle } x,t \geqslant 0\,.$$

Folgern Sie, dass $u(x,t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right)$ gilt.

(b) Leiten Sie für $h(\xi) = u\left(\xi, \frac{1}{4}\right)$, $0 \leqslant \xi < \infty$, eine gewöhnliche DGL her und lösen Sie diese unter den Randbedingungen $h(0) = 1$, $\lim_{\xi\to\infty} h(\xi) = 0$. Bestimmen Sie damit die Funktion $u(x,t) = h\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (Transformation auf eine Wärmeleitungsgleichung — mündlich)
Seien $d \in \mathbb{R}$, $u = u(t)$ stetig gegeben. Man betrachte die Gleichung für die $\mathcal{C}^2$-Funktion $v = v(x,t)$,

$$v_t + u(t)v_x - d \cdot v_{xx} = 0 \, .$$

Bestimmen Sie eine Funktion $z = z(t)$, so dass die Gleichung durch die Transformation

$$y = x - z(t) \ , \ w(y,t) = v(x,t)$$

in die folgende Wärmeleitungsgleichung übergeht:

$$w_t - d \cdot w_{yy} = 0 \, .$$

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 19.1.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 28.1.2009*, vor.