Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 6

Aufgabe 1 (Ein Kompaktheitsargument — 5 Punkte)
Sei K ein kompakter metrischer Raum, $x \in K$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, so dass jede konvergente Teilfolge gegen x konvergiere. Zeigen Sie, dass (x_k) gegen x konvergiert.
Hinweis: Beweisen Sie per Widerspruch und konstruieren Sie unter der Widerspruchsannahme eine Teilfolge von (x_k), die keine gegen x konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 2 (Periodische DGL — 5 Punkte)
Sei $T \in \mathbb{R}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die stetige Funktion $F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ sei T-periodisch, d.h. es gelte $F(t+T, x) = F(t, x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in I$.

(a) Zeigen Sie: Ist ϕ eine Lösung der DGL $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$, so ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion $\psi_k(t) = \phi(t + kT)$ ebenfalls eine Lösung.

(b) Sei F nun eine C^1-Funktion und die maximale Lösung $\phi(t; 0, x_0)$ der Anfangswertaufgabe $\dot{x} = F(t, x)$, $x(0) = x_0$ sei für jedes $x_0 \in I$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Sei $p(\xi) = \phi(T; 0, \xi)$. Zeigen Sie, dass p stetig differenzierbar ist und

$$p'(\xi) = \exp \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t; 0, \xi)\, dt\,.$$

Benutzen Sie die Variationsgleichung zur Variation des Anfangswerts.

(c) Zeigen Sie, dass unter den Annahmen von (b) gilt $\phi(t + T; 0, \xi) = \phi(t; 0, p(\xi))$.

Aufgabe 3 (Eine Untermannigfaltigkeit — 5 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = x^2 + xy - y - z \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z\,.$$

Zeigen Sie, dass $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist, sowie, dass durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$ eine globale Parameterdarstellung von C gegeben ist.

Aufgabe 4 (Untermannigfaltigkeiten — mündlich)
Zeigen Sie:

(a) Die n-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ sind genau die offenen Teilmengen.

(b) Die 0-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ sind genau die Teilmengen, die aus isolierten Punkten bestehen.[1] (Solche Teilmengen heißen *diskret*.)

Hinweis: Benutzen Sie etwa Theorem 21.4.

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 24.11.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 3.12.2008*, vor.

[1]Zur Erinnerung: Ein Punkt $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ heißt isoliert, falls es eine Umgebung $U_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(a)$ außer x keinen Punkt von A enthält (d.h. $U_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$).