① Man hat

$$0 = \Delta(f(x)g(y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (f(x)g(y)) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (f(x)g(y))$$

$$= f''(x)g(y) + f(x)g''(y),$$

also $$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rechte Seite von x unabh. $\Rightarrow$ $\frac{f''}{f} \equiv K$ (const.)

Linke Seite von y unabh. $\Rightarrow$ $\frac{g''}{g} \equiv -K$

$$f''(x) = K \cdot f(x)$$

$$g''(y) = -K \cdot g(y).$$

Es ergibt sich

<u>$K>0$</u>:
$$f(x) = a e^{\sqrt{K}x} + b e^{-\sqrt{K}x}$$
$$g(y) = c \cdot \cos(\sqrt{K} y) + d \sin(\sqrt{K} y)$$

<u>$K<0$</u>:
$$f(x) = a \cdot \cos(\sqrt{-K}x) + b \cdot \sin(\sqrt{-K}x)$$
$$g(y) = c \cdot e^{\sqrt{-K}y} + d \cdot e^{-\sqrt{-K}y}$$

<u>$K=0$</u>:
$$f(x) = ax + b, \quad g(y) = cy + d$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beliebig.

② Es gilt

$$G(x,y) = \begin{cases} \gamma(r) - \gamma\left(\frac{\|x\|}{R} r^*\right) & x \neq 0 \\ \gamma(r) - \gamma(R) & x = 0, \end{cases}$$

wobei $r = \|x-y\|$, $r^* = \|x^* - y\|$,

$$x^* = \frac{R^2}{\|x\|^2} \cdot x \quad (x \neq 0).$$

Weiter $\gamma(r) = \gamma(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \log(\|x-y\|)$.

Es ist $\nabla_y \gamma(x,y) = -\gamma'(r) \frac{x-y}{r} = \frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{\|x-y\|^2}$,

analog $\nabla_y \gamma(x^*,y) = -\gamma'(r^*) \frac{x^*-y}{r} = \frac{1}{2\pi} \frac{x^*-y}{\|x^*-y\|^2}$ $(x \neq 0)$.

Da für $x \neq 0$ gilt

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\Big(\gamma(x,y) \underbrace{- \log(\|x^*-y\|)}_{\gamma(x^*,y)} - \log \frac{\|x\|}{R}\Big),$$

folgt für $x \neq 0$:

$$\nabla_y G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|^2} - \frac{x^*-y}{\|x^*-y\|}\right).$$

(②)

Sei nun $\|y\| = R$. Dann gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) = \left\langle \frac{y}{R}, \nabla_y G(x,y) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\langle x,y\rangle - \|y\|^2}{R\,\|x-y\|^2} - \frac{\langle x^*,y\rangle - \|y\|^2}{R\,\|x^*-y\|^2} \right).$$

Es gilt $\langle x^*, y\rangle = \frac{R^2}{\|x\|^2}\langle x,y\rangle$ und nach

Lemma 25.14: $\|x^* - y\| = \frac{R}{\|x\|} \cdot \|x-y\|$, also

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\langle x,y\rangle - R^2}{R\,\|x-y\|^2} - \frac{\frac{R^2}{\|x\|^2}\langle x,y\rangle - R^2}{\frac{R^3}{\|x\|^2}\,\|x-y\|^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\|x\|^2 - R^2}{R\,\|x-y\|^2}.$$

Für $x = 0$ ist

$G(x,y) = \gamma(r) - \gamma(R)$, also $\nabla_y G(x,y) = \nabla_y \gamma(r)$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-y}{\|y\|^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R^2}{R^3}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\|0\|^2 - R^2}{R\cdot\|0-y\|^2} \quad (x = 0,\ \|y\| = R).$$

□.

③ <u>Vorbemerkung</u>: Ist $g \geq 0$ stetig auf Ω und

$$\int_\Omega g \, d^n x = 0,$$

so gilt $g \equiv 0$ auf Ω.

<u>Beweis</u>: Sei $x_0 \in \Omega$ mit $\varepsilon = g(x_0) > 0$. Da g stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset \Omega$ und $g \geq \frac{\varepsilon}{2}$ auf $U_\delta(x_0)$. Dann folgt

$$\int_\Omega g \, d^n x \geq \int_{U_\delta(x_0)} g \, d^n x \geq \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{vol}_n(U_\delta(x_0)) > 0.$$

$\square$.

(a) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\Delta u_j = f \quad , \quad u_j \equiv \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Es gilt mit $v = w = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2 \, d^n x = \int_\Omega (v \cdot \underbrace{\Delta w}_{= f - f = 0} + \langle \nabla v, \nabla w \rangle) \, d^n x$$

$$\underset{\text{Green I}}{=} \int_{\partial\Omega} \underbrace{v}_{\equiv \varphi - \varphi \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega} \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} \, d\sigma = 0 . \quad \text{Mit } g = \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2$$

in der Vorbemerkung folgt $\nabla(u_1 - u_2) \equiv 0$ auf Ω.

Damit ist $u_1 - u_2 \equiv \text{const}$ auf Ω, also auf $\bar{\Omega}$

(wg. der Stetigkeit). Aber $u_1 \equiv \varphi \equiv u_2$ auf $\partial\Omega$, also

$u_1 - u_2 \equiv 0$ auf $\partial\Omega$. Somit $\text{const} = 0$ und $u_1 \equiv u_2$.

(b) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit

$$\Delta u_j = f, \quad \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \equiv \varphi \text{ auf } \partial\Omega.$$

Es folgt mit $v = w = u_1 - u_2$

$$\int_\Omega \|u_1 - u_2\|^2 d^n x = \int_\Omega (v \underbrace{\Delta w}_{\equiv f - f \equiv 0 \text{ auf } \Omega} + \langle \nabla v, \nabla w \rangle)\, d^n x$$

$$\underset{\text{Green I}}{=} \int_{\partial\Omega} v \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \nu}}_{\equiv \varphi - \varphi \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega} d\sigma = 0$$

Wie oben folgt $u_1 - u_2 \equiv \text{const}$. $\square$.

④

$$J(u) = \int_\Omega g(x, u, \nabla u)\, d^n x \quad , \qquad \text{wobei}$$

$$g(x, u, \nabla u) = \frac{1}{2} \| \nabla u \|^2 - f(x) \cdot u \, .$$

$$g_{u_{x_j}}(x, u, \nabla u) = u_{x_j}$$

$$g_u(x, u, \nabla u) = f(x)$$

E-L-Gleichung: $\qquad \forall x \in \Omega$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g_{u_{x_j}}(x, u, \nabla u) \right) = g_u(x, u, \nabla u)$$

$$\begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g_{u_{x_j}}(x, u, \nabla u) \right) & = & g_u(x, u, \nabla u) \\ \| & & \| \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_{x_j}(x) \right) & & f(x) \\ \| & & \\ \Delta u(x) & & \end{array}$$

D.