Lösung Übung 4

① (a)

$$\frac{1}{h}\left(e^{A(t+h)} - e^{A(t)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{h}\left(A(t+h)^k - A(t)^k\right) = (*)$$

NR:

$$\frac{1}{h}\left(A(t+h)^k - A(t)^k\right) = \frac{1}{h}\Big[A(t+h)^{k-1}\cdot(A(t+h)-A(t)) +$$

$$+ \left(A(t+h)^{k-1} - A(t)^{k-1}\right)\cdot A(t)\Big] = \dots =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k-1} A(t+h)^j\left(A(t+h)-A(t)\right)A(t)^{k-j-1}$$

$$\underset{[A(t+h),A(t)]=0}{=} \frac{1}{h}\left(A(t+h)-A(t)\right)\cdot\sum_{j=0}^{k-1} A(t+h)^j A(t)^{k-j-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} A(t+h)^j A(t)^{k-j-1} \cdot \frac{1}{h}\left(A(t+h)-A(t)\right)$$

Damit $\frac{d}{dt}A(t)^k = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(A(t+h)^k - A(t)^k\right) = A'(t)\cdot\sum_{j=0}^{k-1}A(t)^{k-1}$

$$= k\,A'(t)A(t)^{k-1}$$

$$= k\,A(t)^{k-1}A'(t).$$

Somit $(*) \xrightarrow[(h\to 0)]{} A'(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,k\,A(t)^{k-1} = A'(t)e^{A(t)}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,k\cdot A(t)^{k-1}A'(t) = e^{A(t)}A'(t)$$

(Man kann $\lim_{h\to 0}$ und $\sum_{k=1}^{\infty}$ vertauschen, da die Reihe glm. konvergiert.)

(b) $x(0) = e^{U(0)} x_0 = e^0 x_0 = E \cdot x_0 = x_0$.

$\dot{x}(t) = \dot{U}(t) e^{U(t)} x_0 = A(t) e^{U(t)} x_0 = A(t) x(t)$ ✓

(c) $e^{U(t)}$ ist regulär, X_0 ist regulär $\Rightarrow e^{U(t)} X_0$ ist regulär. Weiter $(e^{U(t)} X_0)' = U'(t) e^{U(t)} X_0$

$= A'(t) e^{U(t)} X_0$.

(d) $x(0) = e^{U(0)} (x_0 + 0) = x_0$.

$$\dot{x}(t) = U'(t) \underbrace{e^{U(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-U(t)} b(t)\, dt \right)}_{= x(t)}$$

$$+ \underbrace{e^{U(t)} \cdot e^{-U(t)}}_{= E} b(t)$$

$= A(t) x(t) + b(t)$. ✓

(2) A hermitesch $\Leftrightarrow A^* = A \Leftrightarrow (iA)^* + iA = 0$

$\Leftrightarrow iA \in u(n) = u_E(n)$

$\Leftrightarrow t \longmapsto e^{t \cdot iA} : \mathbb{R} \longrightarrow U(n) = U_E(n)$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : e^{tiA}$ unitär.

(3) $A^* G + GA = 0 \Rightarrow A \in u_G(n)$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$: $U(t) = e^{tA} \in U_G(n)$. Insbesondere gilt:

$1 = |\det e^{tA}| = |e^{t \,\mathrm{Spur}\, A}| = e^{t \cdot \mathrm{Re}\,\mathrm{Spur}\, A} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\mathrm{Spur}\, A = \log 1 = 0$.

④ (a)

$$\dot{x}_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a-t) & t \le a \\ 0 & a \le t \le b \\ \frac{1}{2}(t-b) & b \le t \end{cases}$$

$$\sqrt{|x_{a,b}(t)|} = \begin{cases} \frac{1}{2}|a-t| = \frac{1}{2}(a-t) & t \le a \\ 0 & a \le t \le b \\ \frac{1}{2}|t-b| = \frac{1}{2}(t-b) & b \le t \end{cases}$$

$x_{a,b}(0) = 0$. Damit sind $x_{a,b}$ Lösungen.

(b) $f(y) = \sqrt{|y|}$ erfüllt bei 0 keine lokale Lipschitz-Bedingung: Es gilt

$$\frac{\sqrt{1/k}}{1/k} = \sqrt{1/k} \longrightarrow \infty \qquad (k \longrightarrow \infty),$$

obwohl $1/k \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$. Damit ist

$$\infty = \sup_{k \geq 1,\ \frac{1}{k} < \varepsilon} \left| \frac{f(1/k) - f(0)}{1/k - 0} \right|$$

$$\leq \sup_{|x|, |y| < \delta} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|,$$

aber die rechte Seite wäre $\leq L$, falls

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \qquad \text{für } x, y \in [-\delta, \delta]$$

gelten würde.