Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 13

Aufgabe 1 (Stabilität des Cauchyproblems für die Wellengleichung — 5 Punkte)
Das Cauchyproblem für die eindimensionale Wellengleichung lautet

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = \varphi_0(x)\,,\ u_t(x,0) = \varphi_1(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Für gegebene Anfangsbedingungen $\varphi_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $\varphi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ist die eindeutige Lösung u gegeben durch die Gleichung in Satz 27.2.

Zeigen Sie: Das Cauchyproblem ist auf beschränkten Bereichen *stabil*, genauer: Sind u^1, u^2 die Lösungen zu Anfangsbedingungen φ_0^j, φ_1^j, $j = 1,2$, wie oben, so gilt für alle $L > 0$ und $T > 0$:

$$\max_{|x|\leqslant L\,,\,0\leqslant t\leqslant T} |u^1(x,t) - u^2(x,t)| \leqslant \max_{|\xi|\leqslant L+T} |\varphi_0^1(\xi) - \varphi_0^2(\xi)| + T \cdot \max_{|\xi|\leqslant L+T} |\varphi_1^1(\xi) - \varphi_1^2(\xi)|\,.$$

Aufgabe 2 (Das Verhalten der Wellengleichung auf Dreiecken — 5 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Menge D in der (x,t)-Ebene sei das Innere des gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecks mit den Ecken

$$A = (2a, 0)\,,\ B = (2b, 0)\,,\ C = (a+b, b-a)\,.$$

Sei $u \in \mathcal{C}^1(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^2(D)$ eine Funktion mit

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,,\ (x,t) \in D\,, \\ u_t(x,0) \leqslant 0\,,\ 2a \leqslant x \leqslant 2b\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$u(C) \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \big(u(A) + u(B)\big)\,.$$

Hinweis: Stellen Sie u als d'Alembertsche Lösung dar und verwenden Sie die Bedingung auf der Basis des Dreiecks.

Aufgabe 3 (Die inhomogene Wellengleichung — 5 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von d'Alembert die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,.$$

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 2.2.2008*, vor der Vorlesung ab.