① Angenommen, $x_k \not\to x$, d.h.

Wir schreiben $d(x,y) = |x-y|$ der Anschaulichkeit halber.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists k \geq N: \ |x - x_k| \geq \varepsilon.$

Sei $k_1 \geq 1$ mit $|x - x_{k_1}| \geq \varepsilon$.

$\exists \ k_2 \geq k_1 + 1$ mit $|x - x_{k_2}| \geq \varepsilon$

Induktiv existieren $k_1 < \dots < k_n < \dots$ mit

$|x - x_{k_j}| \geq \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Keine Teilfolge von $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$

kann gegen x konvergieren. Aber K ist kompakt, also

existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{n_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$.

Die ist aber auch eine Teilfolge von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und muss

folglich gegen x konvergieren, Widerspruch! Also konvergiert

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x.

② (a) Es gilt

$$\dot\psi_k(t) = \dot\phi(t+kT) = F(t+kT, \phi(t+kT))$$

$$= F(t, \psi_k(t)).$$

(b) Nach Theorem 20.11 ist p stetig differenzierbar.

Sei $a(t,\xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \phi(t,0,\xi))$. Nach (20.25) gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \xi} \phi(t;0,\xi) = a(t,\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(t,0,\xi), \text{ sowie}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(0;0,\xi) = 1.$$ Dann folgt $\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(t;0,\xi) = \exp \int_0^t a(s,\xi)\, ds$

Insbesondere gilt

$$p'(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(T;0,\xi) = \exp \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t; \phi(t;0,\xi))\, dt.$$

(c) $\psi(t) = \phi(t+T;0,\xi)$ ist nach (a) eine Lösung der DGL und auf $\mathbb{R}$ definiert. Weiter gilt

$$\psi(0) = \phi(T;0,\xi) = p(\xi) \quad \text{(nach Definition)}.$$

Damit ist $\psi(t) = \phi(t;0,p(\xi)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(2) Es gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x-2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $-3\nabla f + \nabla g = \begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also sind $\nabla f, \nabla g$ überall linear unabhängig und C ist eine UMF der Codimension 2, also der Dimension 1.

Es gilt

$$f(\varphi(t)) = f(t, t^2, t^3) = t^2 + t^3 - t^2 - t^3 = 0$$
$$g(\varphi(t)) = g(t, t^2, t^3) = 2t^2 + 3t^3 - 2t^2 - 3t^3 = 0,$$

also bildet φ nach C ab. Weiter ist

$$(g - 2f)(x, y, z) = xy - z \quad \text{und falls}$$

$xy = z$, so ist $g(x, y, z) = 0 \iff x^2 = y$

Daher gilt für $(x, y, z) \in C$: $y = x^2$ und $z = xy = x^3$, d.h., φ ist surjektiv.

Zuletzt: $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \neq 0$, also ist φ eine Immersion.

(4) (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Definiere $F : U \to \underset{\{0\}}{\overset{\|}{\mathbb{R}^0}}$ durch $F(x) = 0$. Dann gilt 21.4. (a).

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dim UMF. Sei $a \in U$ und F nach 21.4 (a) gegeben: $F : V \to \mathbb{R}^0$, V offene Umg von a,

$U \cap V = F^{-1}(0) = V$, denn F ist konstant $\equiv 0$ ($\mathbb{R}^0 = \{0\}$).

Damit ist $V \subset U$ und U somit offen.

(b). Sei M diskret und $a \in M$. Es gibt eine offene Umgebung U von a, so dass $U \cap M = \{a\}$. Definiere $F: U \to \mathbb{R}^n$ durch

$F(x) = x - a$. Dann gilt $\{a\} = F^{-1}(0) = U \cap M$, sowie

$DF \equiv E$, so dass F eine Submersion ist.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine 0-dim UMF und $a \in M$. Nach 21.4 (a) existiert eine offene Umg. U von a und eine Submersion

$F: U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap M = F^{-1}(0)$. Da $\operatorname{rk} F(a) = n$, ist F ein lokaler Diffeomorphismus und nach Verkleinerung von a kann man annehmen, dass F injektiv ist. Dann gilt

$a \in U \cap M$, also $F(a) = 0$, aber F ist injektiv, also

$M \cap U = F^{-1}(0) = \{a\}$.