Lösung Blatt 5

(1) Man hat $F(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man setzt $\phi_0(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\phi_{k+1}(t) = \int_0^t F(t, \phi_k(t))\, dt + x_0 .$$

Man berechnet einige Folgenglieder:

$$\phi_1(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 2t \\ -2t^3 \\ 2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^4/2 + 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\phi_4(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} -t^5 + 2t \\ -2t^3 \\ 2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^6/6 + t^2 \\ -t^4/2 + 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\phi_5(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} -t^5 + 2t \\ t^7/3 - 2t^3 \\ 2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^6/6 + t^2 \\ t^8/24 - t^4/2 + 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Dies führt zu folgender Vermutung:

$$\phi_k(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^{j-1} \frac{1}{(2j-1)!} t^{4j-2} \\ \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} t^{4j} \\ 2t \end{pmatrix} \quad (k \geq 1)$$

Dies beweisen wir nun durch Induktion:

<u>$k=1$:</u> Die Beh. ist nach obiger Rechnung klar.

$k \mapsto k+1$:

$$\phi_{k+1}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 2\sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} t^{4j+1} \\ -2\sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^{j-1} \frac{1}{(2j-1)!} t^{4j-1} \\ 2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{2}{4j+2} \cdot \frac{1}{(2j)!} \cdot t^{4j+2} \\ 1 + \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{2}{4j} \cdot \frac{1}{(2j-1)!} \cdot t^{4j} \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Index-}\\\text{Verschiebung}\\\text{in der 1. Zeile}}}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^{j-1} \frac{1}{(2j-1)!} t^{4j-2} \\ \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{1}{(2j)!} t^{4j} \\ 2t \end{pmatrix}$$

Da

$$\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\{ \begin{array}{ll} m+1 & k = 2m+1 \\ m-1+1 = m & k = 2m \end{array} \right\} = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$$

und $\left\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, beweist das die vermutete Formel.

Grenzübergang $k \to \infty$: $\phi(t) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1}{(2j-1)!} t^{4j-2} \\ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} t^{4j} \\ 2t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j-1)!} (t^2)^{2j-1} \\ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} (t^2)^{2j} \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t^2 \\ \cos t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

(①) Test:

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} 2t\cos t^2 \\ -2t\sin t^2 \\ 2 \end{pmatrix} = F(t, \phi(t))$$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$, also löst ϕ tatsächlich

die Anfangswert-Aufgabe.

② Mit $F(x,y) = \frac{2y}{x}$ für $(x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}$

ist das AWP für $x_0 \neq 0$ gegeben durch

$y'(x) = F(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$. Da F C^1 ist,

sind Voraussetzungen von Korollar 20.8 und somit von Theorem 20.6 erfüllt und das AWP ist in diesem Fall eindeutig lösbar. Fall (c) tritt also für $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}$ auf. [Da $|F(x,y) - F(x,y')| = \frac{2}{|x|} \cdot |y - y'|$, kann man die Lipschitzbedingung auch per Hand überprüfen.]

Sei nun $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Für beliebiges $C \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = C \cdot x^2$ offenbar eine Lösung des AWP. Es liegt also Fall (b) (unendlich viele Lösungen) vor.

Sei schließlich $x_0 = 0$ und $y_0 \neq 0$. Wäre y eine Lösung, so würde $y_0 = y(0) = \frac{1}{2} x y'(x) |_{x=0} = 0$ folgen, ein Widerspruch! Somit liegt hier Fall (a) (keine Lösung) vor.

③ Es reicht zu zeigen, dass

$$L = \sup F(K \times K) = \sup_{y \neq z} \frac{\| f(y) - f(z) \|}{\| y - z \|} < \infty.$$

Sei $(x,y) \in K \times K$. Ist $x \neq y$, so ist F an (x,y) stetig, so dass es $L_{x,y} < \infty$ und eine offene Umg $U_{x,y}$ von (x,y) in $K \times K$ gibt, mit $\sup F(U_{x,y}) \leq L_{x,y}$.

Ist $x = y$, so gilt nach Voraussetzung mit $L_{x,x} := L_x$ und $U_{x,x} = U_\delta(x)$, dass $\sup F(U_{x,x}) \leq L_{x,x}$.

Da $K \times K$ kompakt ist, gibt es endlich viele $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in K \times K$ mit $K \times K \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{x_j, y_j}$. Dann folgt

$$L = \sup F(K \times K) \leq \max_{j=1}^{k} L_{x_j, y_j} < \infty,$$ also die Behauptung.

(4) Es gelte $f(t) \leq g(t) \quad \forall t_0 \leq t < T$,

wobei $g(t) = a + \int_{t_0}^{t} b(s) f(s)\, ds$.

Es gilt $g(t_0) = a$ und $g'(t) = b(t) f(t)$, also

$$h(t) := g'(t) - b(t) g(t) = \underbrace{b(t)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(f(t) - g(t))}_{\leq 0} \leq 0.$$

Die AW-Aufgabe

$$y'(t) - b(t) y(t) = h(t), \quad y(t_0) = a$$

hat die eindeutige Lösung

$$y(t) = \left(a + \int_{t_0}^{t} h(s) e^{-\int_{t_0}^{s} b(r)\,dr} ds \right) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds}.$$

Da $h \leq 0$ ist, folgt $y(t) \leq a \cdot e^{\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds}$.

Wir haben oben gesehen, dass g die AW-Aufgabe löst, also folgt $g \equiv y$. Somit

$$f(t) \leq g(t) \leq a \cdot e^{\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds} \quad (t_0 \leq t < T).$$