Hochschule für Technik
und Wirtschaft Berlin

University of Applied Sciences

Inverses Pendel: Moderne Methoden der Regelungstechnik (VA1)

Name:	**Matrikelnummer:**
Sebastian Richter	572906
Aaron Zielstorff	567183

Fachbereich:	FB1
Studiengang:	M. Elektrotechnik
Fachsemester:	2. FS
Fach:	VA1 Moderne Methoden der Regelungstechnik
Dozent:	Prof. Dr.-Ing. Horst Schulte
Abgabe am:	25. Juli 2022

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einführung in die Regelaufgabe

Ziel des Beleges ist die **Modellierung** und **Regelung** eines `Inversen Pendels`, welches auf einem durch einen Motor bewegten Schlitten befestigt ist. Über die Regelung soll es möglich sein das Pendel in der instabilen Ruhelage aufrecht stehen zu lassen. Dies soll ausschließlich über die Bewegung des Schlittens realisiert werden. Es gelten folgende Voraussetzungen für das System:

- Das Pendel ist frei gelagert.
- Der Motor (Synchronmaschine) ist momentengeregelt ($M_{\mathrm{max}} = 80N$).
- Die Position (x_{M}) und Geschwindigkeit ($\dot{x}_{\mathrm{M}}$) des Schlittens werden erfasst.
- Der Winkel (φ), aber nicht die Winkelgeschwindigkeit ($\dot{\varphi}$), des Pendels werden gemessen.

Es werden folgende Einschränkungen festgelegt:

- Der Schlitten darf den Arbeitsbereich nicht verlassen ($\pm 1m$).
- Es soll ein Zustandsregler mit vier Zuständen (x_1 bis x_4) verwendet werden.
- Für die Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit ist die Rekonstruktion über einen Beobachter notwendig.

Für die Umsetzung der Aufgabe sind nachfolgende Modellparameter gegeben:

Symbol	Parameter	Wert
l	Länge des Pendels	$40\,\mathrm{cm}$
m	Gewicht des Pendels	$260\,\mathrm{g}$
M	Gewicht des gesamten Schlittens	$3\,\mathrm{kg}$
F_{c}	Coulombsche Reibung	$16\,\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2}$
d	Dämpfungskoeffizient des Schlittens	$7\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$
d_{Mf}	Lagerreibung	$0{,}000\,95\,\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2}$

Tab. 1: Modellparameter des Inversen Pendels

Abbildung 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Versuchs. M und m sind vereinfacht als Punktmassen anzunehmen. Das Gewicht des Pendelarms kann vernachlässigt werden.

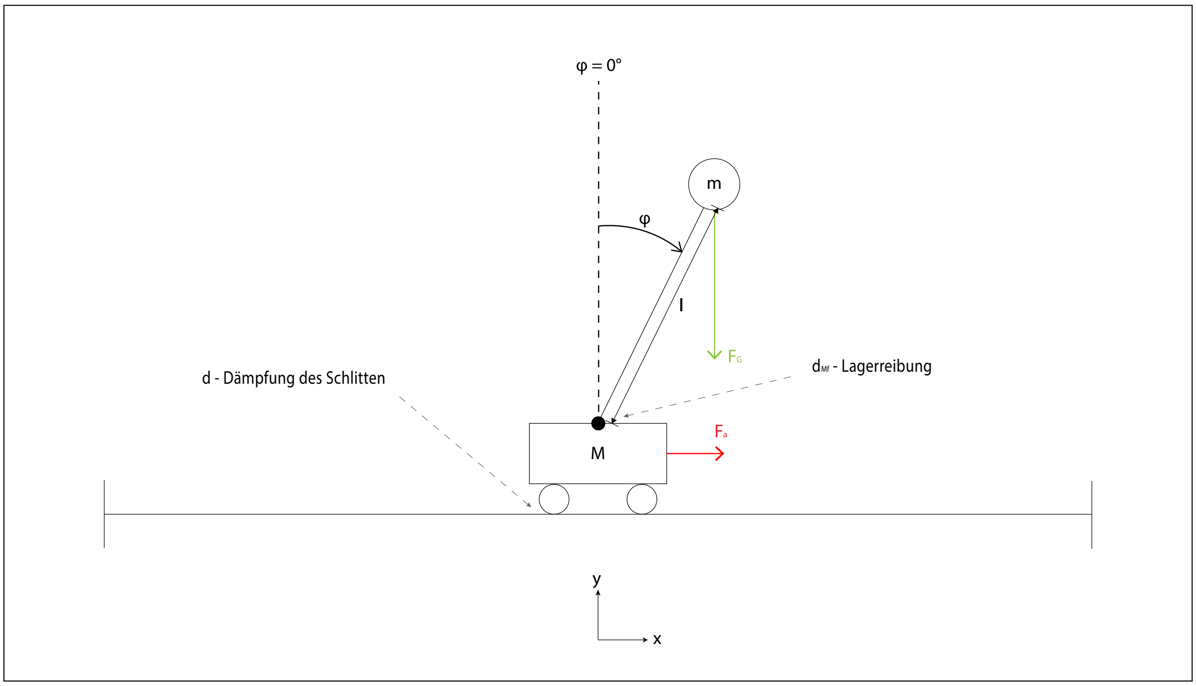

Abb. 1: Skizze des Aufbaus des Inversen Pendels mit Darstellung der einwirkenden Kräfte und Momente

2 Modellierung: Energiemethode nach Lagrange

2.1 Ansatz

Die nachfolgende Gleichung zeigt den **Lagrange Ansatz** unter Berücksichtigung der **dissipativen Funktion**. Diese besagt in Erweiterung zu der Lagrange-Formulierung, dass Energie in einem Vorgang in Wärme umgewandelt wird. Mit Hilfe der dissipativen Funktion können **Reibungsverluste** bei der Energiemethode nach Lagrange berücksichtigt werden.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mathrm{i}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} = F_\mathrm{i}} \tag{1}$$

2.2 Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen

In Abbildung 1 sind zwei Massepunkte im $\mathbb{R}^2$ zu erkennen. Somit gilt grundsätzlich:

- 2 Punkte: 4 Freiheitsgrade (FHG)

Das inverse Pendel besitzt jedoch auch zwei Zwangsbedingungen, die wie folgt formuliert werden können:

- Der Wagen kann sich nur horizontal bewegen:
  $y_\mathrm{M} = 0$
- Die Masse m am Ende des Pendels ist mit dem Wagen gekoppelt:
  $(y_\mathrm{M} - y_\mathrm{m})^2 + (x_\mathrm{M} - x_\mathrm{m})^2 = l^2$

Somit bleiben am Ende noch zwei Freiheitsgrade (FHG) übrig.

2.3 Generalisierte Koordinaten

Aus den verbliebenen Freiheitsgraden werden die beiden generalisierten Koordinaten abgeleitet.

- $q_1 = x_\mathrm{M}$
- $q_2 = \varphi$

2.4 Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie

Der Ansatz zur Berechnung einer kinetischen Energie ist nachfolgend gezeigt.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{2}$$

Zu berücksichtigen ist, dass beide Massen (m und M) eine kinetische Energie besitzen (Gleichung 3 und Gleichung 4).

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{m}}^2 \tag{3}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dot{x}_{\text{m}}^2 + \dot{y}_{\text{m}}^2\right) \tag{4}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{m}} &= x_{\text{M}} + l \cdot \sin(\varphi) \\ y_{\text{m}} &= l \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{x_{\text{m}}} &= \dot{x_{\text{M}}} + l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \\ \dot{y_{\text{m}}} &= -l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Daraus resultiert:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left((\dot{x}_{\text{M}} + l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi))^2 + (-l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi))^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dot{x}_{\text{M}}^2 + 2 \cdot \dot{x}_{\text{M}} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos^2(\varphi) + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2(\varphi)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 + m \cdot \dot{x}_{\text{M}} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \\ &\quad \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos^2(\varphi) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

Durch das Zusammenfassen der vorangegangenen Beziehung folgt Gleichung 5 für die gesamte **kinetische Energie des Systems**.

$$\boxed{E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 \cdot (M + m) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(2 \cdot \dot{x}_{\text{M}} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2\right)} \tag{5}$$

Ausschließlich die Masse m am Pendelende besitzt eine für den Lagrange-Formalismus relevante **potentielle Energie** (Gleichung 6).

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$
$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot y_{\text{m}}$$
$$\boxed{E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\varphi)} \tag{6}$$

2.5 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die Lagrange-Funktion wird aus der **Differenz** der **kinetischen** und der **potentiellen Energie** berechnet (Gleichung 7).

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \tag{7}$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_{\text{M}}^2 \cdot (M + m) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(2 \cdot \dot{x}_{\text{M}} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2\right) - m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\varphi) \tag{8}$$

Im ersten Schritt wird die Bewegungsgleichung des Wagens hergeleitet. Dafür wird zunächst Gleichung 8 nach der ersten zeitlichen Ableitung der generalisierten Koordinate x_{M} partiell differenziert:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{M}}} = (M + m) \cdot \dot{x}_{\text{M}} + m \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \tag{9}$$

Die vorangegangene Gleichung wird zeitlich differenziert:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{M}}}\right) = (M + m) \cdot \ddot{x}_{\text{M}} + m \cdot l \cdot \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi)\right) \tag{10}$$

Im zweiten Schritt wird die Lagrange-Funktion nach der generalisierten Koordinate x_{M} abgeleitet.

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\mathrm{M}}} = 0 \tag{11}$$

Abschließend wird die dissipative Funktion nach der 1. Ableitung der generalisierten Koordinate x_{M} differenziert.

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x_{\mathrm{M}}}} = d \cdot \dot{x_{\mathrm{M}}} \tag{12}$$

Durch das Einsetzen der Gleichung 9 bis Gleichung 12 in den Ansatz aus Gleichung 1 resultiert die **vollständige Bewegungsgleichung des Wagens**.

$$\boxed{(M+m) \cdot \ddot{x}_{\mathrm{M}} + m \cdot l \cdot \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi)\right) + d \cdot \dot{x}_{\mathrm{M}} = F_{\mathrm{a}}} \tag{13}$$

Analog wird die Bewegungsgleichung des Pendels entwickelt. Hierbei wird zunächst Gleichung 8 nach der 1. Ableitung der generalisierten Koordinate φ partiell differenziert.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot l \cdot \dot{x}_{\mathrm{M}} \cdot \cos(\varphi) + m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi} \tag{14}$$

Die vorangegangene Gleichung wird nach der Zeit abgeleitet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m \cdot l \cdot (\ddot{x}_{\mathrm{M}} \cdot \cos(\varphi) - \dot{x}_{\mathrm{M}} \cdot \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi}) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} \tag{15}$$

Als nächstes wird für die Bewegungsgleichung des Pendels die Lagrange-Funktion nach der generalisierten Koordinate φ abgeleitet:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{x}_{\mathrm{M}} \cdot \sin(\varphi) + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi) \tag{16}$$

Abschließend wird die dissipative Funktion analog nach der 1. Ableitung der generalisierten Koordinate φ differenziert:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = d_{\mathrm{Mf}} \cdot \dot{\varphi} \tag{17}$$

Über das Anwenden von Gleichung 1 folgt die **Bewegungsgleichung des Pendels** zu:

$$\boxed{\ddot{x}_{\mathrm{M}} \cdot \cos(\varphi) + l \cdot \ddot{\varphi} - g \cdot \sin(\varphi) + \frac{d_{\mathrm{Mf}} \cdot \dot{\varphi}}{m \cdot l} = 0} \tag{18}$$

3 Nichtlineares Zustandsraummodell

3.1 Umformungen

Zum Aufstellen des nichtlinearen Zustandsraummodells werden die Gleichung 13 und Gleichung 18 nach den höchsten Ableitungen $\ddot{x}_{\mathrm{M}}$ und $\ddot{\varphi}$ umgestellt.

$$\ddot{x}_{\mathrm{M}} = \frac{-d_{\mathrm{Mf}} \cdot \dot{\varphi} - m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi)}{m \cdot l \cdot \cos(\varphi)} \tag{19}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{\mathrm{a}} - (M+m) \cdot \ddot{x}_{\mathrm{M}} + m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) - d \cdot \dot{x}_{\mathrm{M}}}{m \cdot l \cdot \cos(\varphi)} \tag{20}$$

Beide Gleichungen sind über die Wagenbeschleunigung $\ddot{x}_{\mathrm{M}}$ und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ miteinander verkoppelt. Durch das gegenseitige Einsetzen werden die Abhängigkeiten eliminiert.

$$\ddot{x}_{\mathrm{M}} = \frac{-d_{\mathrm{Mf}} \cdot \dot{\varphi} - m \cdot l^2 \cdot \left(\frac{F_{\mathrm{a}} - (M+m) \cdot \ddot{x}_{\mathrm{M}} + m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) - d \cdot \dot{x}_{\mathrm{M}}}{m \cdot l \cdot \cos(\varphi)}\right) + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi)}{m \cdot l \cdot \cos(\varphi)} \tag{21}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{\mathrm{a}} - (M+m) \cdot \left(\frac{-d_{\mathrm{Mf}} \cdot \dot{\varphi} - m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi)}{m \cdot l \cdot \cos(\varphi)}\right) + m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) - d \cdot \dot{x}_{\mathrm{M}}}{m \cdot l \cdot \cos(\varphi)} \tag{22}$$

3.2 Zustandsraumdarstellung (nichtlinear)

Das zu untersuchende System weist vier Zustände auf, welche in Form eines Zustandsvektors $\underline{x}$ erfasst werden (siehe Gleichung 24). Die Dokumentation der zeitlichen Ableitungen erfolgt im Vektor der Zustandsänderungen $\underline{\dot{x}}$ (siehe Gleichung 25). Der Eingangsvektor $\underline{u}$ gleicht der Eingangskraft des Systems F_{a}, wie in Gleichung 23 gezeigt wird.

$$\underline{u} = F_{\mathrm{a}} \tag{23}$$

Der Zustandsvektor ergibt sich zu:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ x_{\mathrm{M}} \\ \dot{x}_{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Nach zeitlicher Ableitung des Zustandsvektors ergibt sich Der Vektor der Zustandsänderungen zu:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{x}_\mathrm{M} \\ \ddot{x}_\mathrm{M} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Mithilfe der Gleichung 23 bis Gleichung 25, durch das Einsetzen in Gleichung 21 und Gleichung 22, dem Zusammenfassen und Umstellen nach $\ddot{x}_\mathrm{M}$ und $\ddot{\varphi}$ folgt das **nichtlineare Zustandsraummodell** aus Gleichung 26.

$$\boxed{\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{\left(\frac{F_\mathrm{a} - g \cdot \tan(x_1) \cdot (M+m) - d \cdot x_4}{m \cdot l \cdot \cos(x_1)} + d_\mathrm{Mf} \cdot x_2 \cdot \left(\frac{M}{m^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2(x_1)} + \frac{1}{m \cdot l^2 \cdot \cos^2(x_1)}\right) + x_2^2 \cdot \tan(x_1)\right)}{\left(1 - \frac{1}{\cos^2(x_1)} - \frac{M}{m \cdot \cos^2(x_1)}\right)} \\ x_4 \\ \dfrac{\left(g \cdot \tan(x_1) - \frac{F_\mathrm{a}}{m \cdot \cos^2(x_1)} + \frac{d \cdot x_4}{m \cdot \cos^2(x_1)} - \frac{l \cdot x_2^2 \cdot \tan(x_1)}{\cos(x_1)} - \frac{d_\mathrm{Mf} \cdot x_2}{m \cdot l \cdot \cos(x_1)}\right)}{\left(1 - \frac{(M+m)}{m \cdot \cos^2(x_1)}\right)} \end{bmatrix}} \tag{26}$$

4 Linearisiertes Zustandsraummodell

4.1 Linearisierungsvorschrift

Das Verhalten des nichtlinearen Systems ist für große Änderungen des Eingangssignals nicht vorhersehbar. Um dennoch Aussagen über das Systemverhalten treffen zu können, wird das nichtlineare Zustandsraummodell mithilfe der Taylorreihenentwicklung um eine Ruhelage ($\underline{x}^*$) linearisiert. Die nichtlinearen Restglieder $\underline{R}(\Delta\underline{x}^2, \Delta\underline{u}^2)$ werden zu Null angenommen. Durch die Linearisierung wird das Systemverhalten für kleine Änderungen um die Ruhelage kontrollierbar. Nachfolgend ist die Taylorreihenentwicklung für Linearisierung aufgeführt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^* + \Delta\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}^* + \Delta\underline{x}, \underline{u}^* + \Delta\underline{u}) \\ &= \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) + \left[\frac{\partial f_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}}\right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial f_\mathrm{i}}{\partial u_\mathrm{j}}\right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta\underline{u} + \underline{R}(\Delta\underline{x}^2, \Delta\underline{u}^2) \end{aligned} \tag{27}$$

Durch die Annahme über das Verhalten der nichtlinearen Restglieder folgt die Struktur des linearen Zustandsraummodells dargestellt in Gleichung 28

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\underline{x}} &= \left[\frac{\partial f_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}}\right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial f_\mathrm{i}}{\partial u_\mathrm{j}}\right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta\underline{u} \\ \Delta\underline{y} &= \left[\frac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}}\right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial h_\mathrm{i}}{\partial u_\mathrm{j}}\right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta\underline{u} \end{aligned} \tag{28}$$

mit:

$$\begin{aligned} \Delta\underline{x} &= \underline{x} - \underline{x}_\mathrm{c} \\ \Delta\underline{u} &= \underline{u} - \underline{F}_\mathrm{a}. \end{aligned}$$

Die Variablen $\underline{x}_\mathrm{c}$ und $\underline{F}_a$ beschreiben die Ruhelagen des Systems. Allgemein gefasst wird das **lineare Zustandsraummodell** folgendermaßen dargestellt:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{u} \end{aligned}} \tag{29}$$

4.2 Stabile und instabile Ruhelage

Um das linearisierte Zustandsraummodell zu erhalten, werden die einzelnen Gleichungen des nichtlinearen Zustandsraummodells aus Gleichung 26 nach den Zuständen x_1 bis x_4, sowie dem Eingang F_a partiell abgeleitet und die entsprechende Ruhelage eingesetzt. Dabei werden zwei Ruhelagen Betrachtet. Nachfolgend dargestellt ist die Ruhelage des hängenden Pendels (untere Ruhelage):

$$\underline{x}_1^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Die Regelung soll dafür sorgen, dass das Pendel in der stehenden (oberen) Ruhelage verweilt. Diese wird beschrieben durch:

$$\underline{x}_2^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

4.3 Zustandsraumdarstellung (linear)

Unter der Berücksichtigung der oberen Ruhelage ergibt sich das **linearisierte Zustandsraummodell** für das hängende Pendel zu:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -26.6505 & -0.0248 & 0 & -5.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.8502 & -7.916 \cdot 10^-4 & 0 & -2.333 \end{bmatrix} \cdot \Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8333 \\ 0 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \cdot F_\mathrm{a} \\ \Delta\underline{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \Delta\underline{x} + \underline{0} \cdot F_\mathrm{a} \end{aligned}} \tag{32}$$

Wird die obere Ruhelage herangezogen folgt das **linearisierte Zustandsraummodell** zu:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 26.6505 & -0.0248 & 0 & 5.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.8502 & 7.916 \cdot 10^{-4} & 0 & -2.333 \end{bmatrix} \cdot \Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.8333 \\ 0 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \cdot F_\mathrm{a} \\ \Delta\underline{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \Delta\underline{x} + \underline{0} \cdot F_\mathrm{a} \end{aligned}} \tag{33}$$

4.4 Überprüfung der Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeit eines Systems ist gegeben, wenn unter Berücksichtigung der Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ das System von einem Anfangszustand $\underline{x}_0$ in einen beliebigen Endzustand $\underline{x}_\mathrm{e}$ gebracht werden kann. Dies wird mathematisch für quadratische Matrizen mithilfe der Determinante, und für nicht-quadratische Matrizen mit dem Rang der Steuerbarkeitsmatrix Q_s nachgewiesen. Die Berechnung der Steuerbarkeitsmatrix erfolgt durch Gleichung 34.

$$\underline{Q}_\mathrm{s} = \begin{pmatrix} \underline{B} & \underline{A} \cdot \underline{B} & \dots & \underline{A}^{(n-1)} \cdot \underline{B} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Zur Überprüfung werden die System- und Eingangsmatrix des linearisierten Modells um die instabile Ruhelage (stehendes Pendel) eingesetzt. Die Steuerbarkeitsmatrix Q_s ist quadratisch, d.h. die Determinante muss ungleich Null sein. Die **Steuerbarkeitsmatrix des Systems** wurde berechnet zu:

$$\underline{Q}_\mathrm{s} = \begin{bmatrix} 0 & -0.8333 & 1.9651 & -26.7984 \\ -0.8333 & 1.9651 & -26.7984 & 67.7740 \\ 0 & 0.3333 & -0.7784 & 2.5264 \\ 0.3333 & -0.7784 & 2.5264 & -7.5869 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Die **Determinante** folgt zu

$$\boxed{det(\underline{Q}_\mathrm{s}) = 46.41 \neq 0},$$

womit das System nachgewiesen **steuerbar** ist.

5 Vergleich beider Systeme

Der Vergleich des Systemverhaltens des nichtlinearen (Abbildung 2) und des linearen Systems (Abbildung 3) wird in der stabilen Ruhelage (Gleichung 30) durchgeführt, da hierzu keine Reglerstruktur benötigt wird. Der Vergleich wird auf Grundlage der Winkellage durchgeführt. Für den direkten Vergleich wird zu jedem Zeitpunkt ein radialer Winkel π zu dem Winkel φ des linearen Systems addiert. Dies geht aus der Vorschrift aus Gleichung 28 hervor. Als Testsignal wird ein Einheitssprung nach $0{,}5\,\mathrm{s}$ mit der Amplitude $\hat{A} = 1$ eingeprägt.

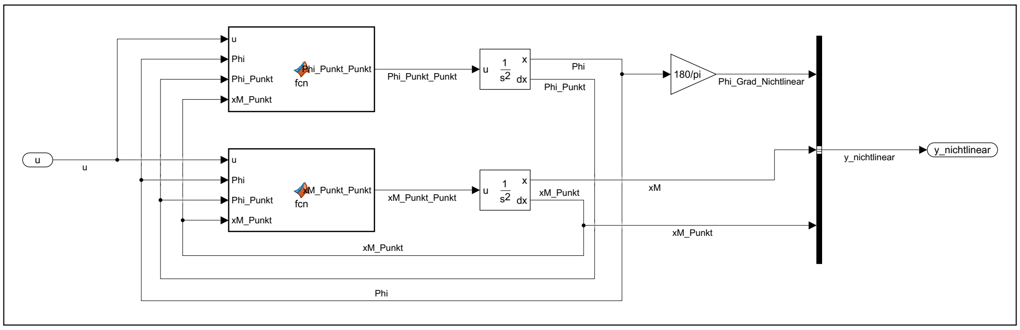

Abb. 2: Simulink-Modell des nichtlinearen Systems

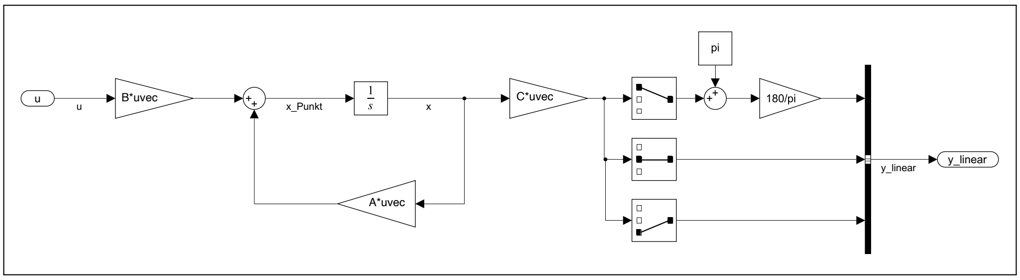

Abb. 3: Simulink-Modell des linearisierten Systems

Beim Vergleich der beiden Systemverhalten ist zu erkennen, dass diese für kleine Winkelauslenkungen nahezu identisch erscheinen (Abbildung 4 und Abbildung 5). Durch den sinusoidalen Signalverlauf wird weiter geschlussfolgert, dass eine positive Eingangskraft (Wagen fährt nach rechts) das Pendel in positive Winkelrichtung ausschlagen lässt. Da keine weiteren äußeren Kräfte auf das System eingeprägt werden, erfolgt mit steigender Zeit t durch die Reib- und Dämpfungsmomente das erneute Einpendeln in die stabile Ruhelage (hängendes Pendel).

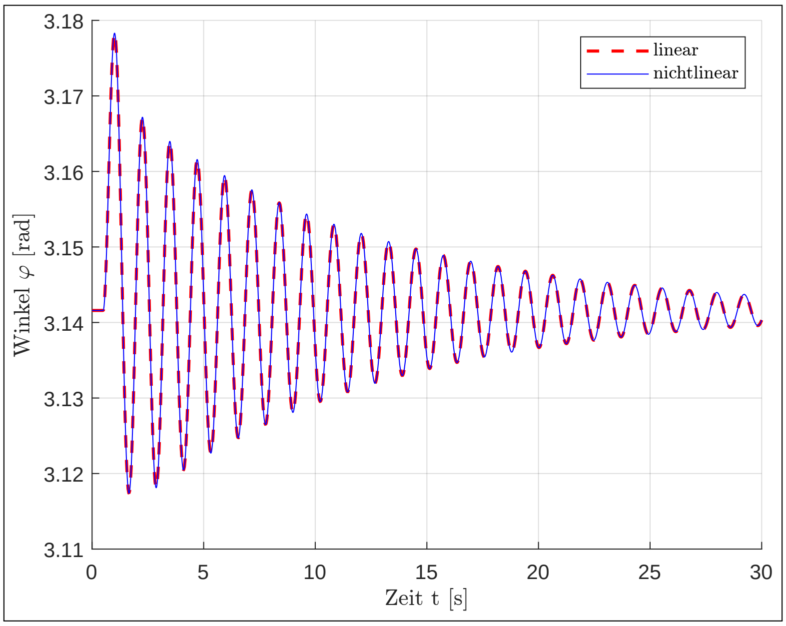

Abb. 4: Vergleich der beiden radialen Winkelverläufe

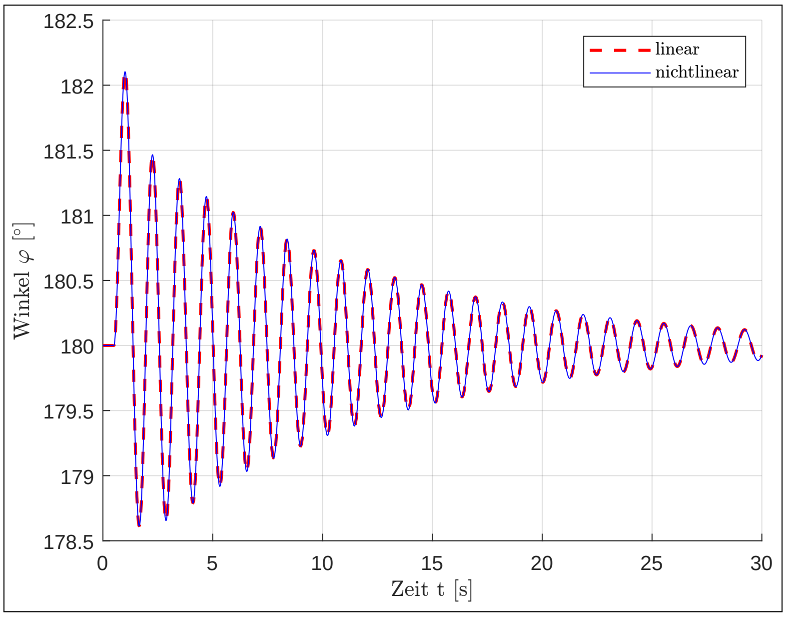

Abb. 5: Vergleich der beiden Winkelverläufe in Grad

Wird die Eingangskraft F_a, welche auf das System wirkt, signifikant vergrößert (Einheitssprung mit Amplitude $\hat{A} = 30$), werden größere Winkelauslenkungen erreicht. Dies führt zur Verringerung der Zuverlässigkeit des linearisierten Systems und zu Abweichungen zwischen dem linearen und nichtlinearem Systemverhalten (Abbildung 6).

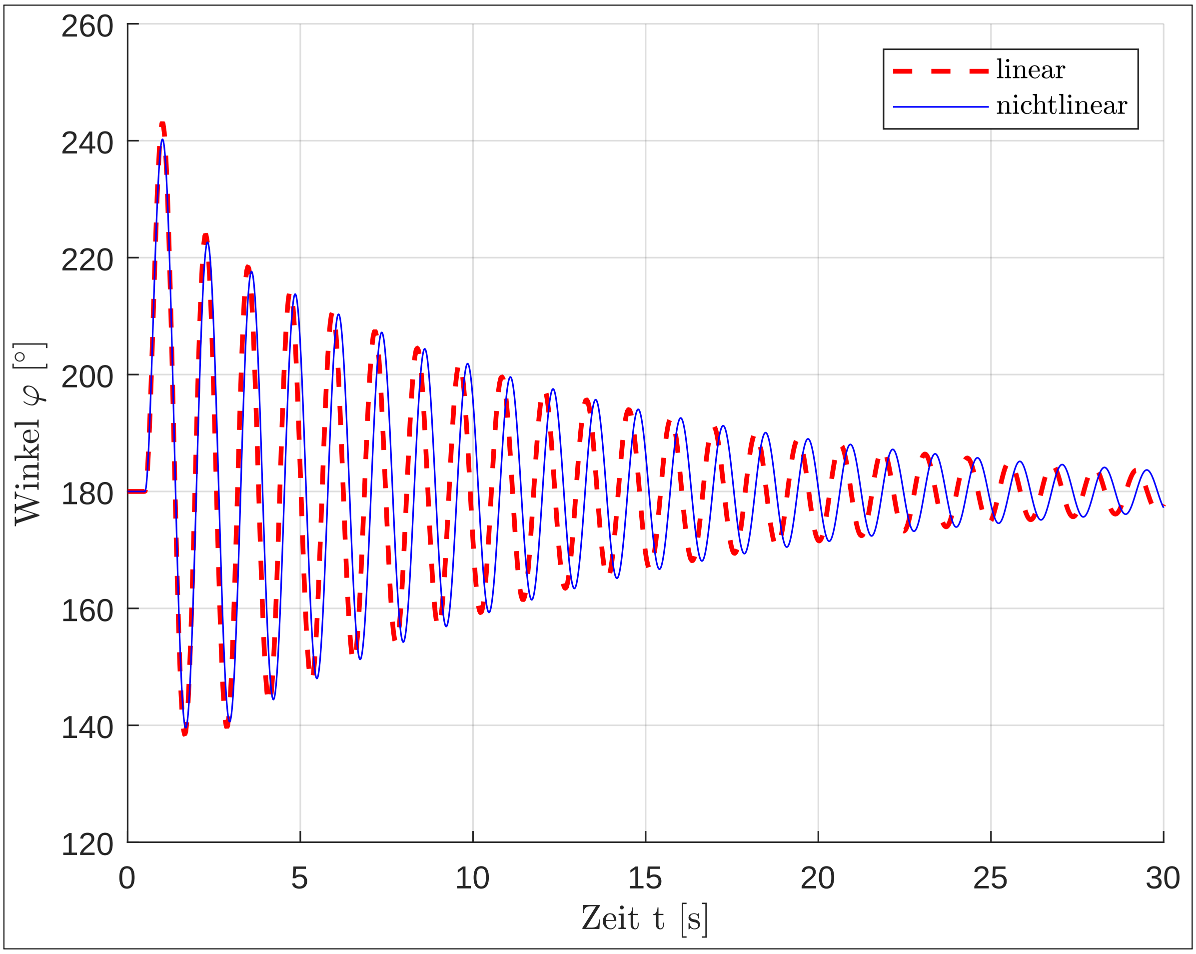

Abb. 6: Abweichungen im Systemverhalten für größere Winkelauslenkungen

6 Zustandsreglerentwurf

6.1 Einfache Zustandsrückführung

Die erste umgesetzte Regelstrategie ist die einfache Zustandsrückführung unter Anwendung der **Ackermann-Formel für Systeme mit einem Eingang**. Ziel ist es, das Pendel-System mit einem Anfangswinkel ungleich Null Grad erneut in die instabile Ruhelage zu bringen. Dafür werden mit Hilfe der Ackermann-Formel k-Faktoren berechnet, welche anschließend mit den Zuständen x_1 bis x_4 multipliziert und auf den Systemeingang zurückgeführt werden (Abbildung 7). Der Wagen wird dabei immer in den Ausgangszustand von x_{M} zurück geregelt.

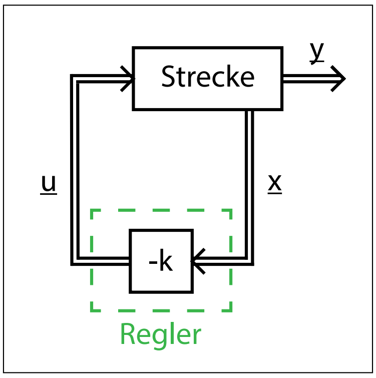

Abb. 7: Schematische Darstellung der Reglerstruktur der einfachen Zustandsrückführung

Im ersten Schritt wird der Nachweis der Steuerbarkeit des Systems benötigt. Dieser wurde bereits in Unterabschnitt 4.4 erbracht. Im zweiten Schritt erfolgt die Bestimmung der Eigenwerte der Systemmatrix A. Hierzu wird das charakteristische Polynom benötigt, welches mithilfe der Laplace-Transformation der Vektorzustandsdifferentialgleichungen $\underline{\dot{x}}$ und der anschließenden Umformung hergeleitet wird.

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s \cdot \underline{X}(s) - \underline{x}_0 = \underline{A} \cdot \underline{X}(s) + \underline{B} \cdot \underline{U}(s)$$
$$\underline{X}(s) = (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{x}_0 + (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}(s)$$

Das charakteristische Polynom folgt aus der Determinante von $(s \cdot \underline{I} - \underline{A})$. Die Matrix $\underline{I}$ stellt die Einheitsmatrix dar. Die Nullstellen des Polynoms gleichen den Eigenwerte der Systemmatrix A. Das **Charakteristische Polynom** und Eigenwertdefinition ist nachfolgend dargestellt:

$$\underline{P}(s) = det(s \cdot \underline{I} - \underline{A})$$
$$\underline{P}(s_{\mathrm{P}}) = \underline{0} = eig(\underline{A})$$

Allgemeine Form:

$$\underline{P}(s) = s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{\mathrm{n}-1} + ... + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0$$
$$\underline{P}(s) = (s - s_{\mathrm{P1}}) \cdot (s - s_{\mathrm{P2}}) \cdot ... \cdot (s - s_{\mathrm{Pn}})$$

Die Berechnung der Eigenwerte der Systemmatrix erfolgt analog zu den vorangegangenen Betrachtungen. Die **Eigenwerte des Systems** ergeben sich zu:

$$\boxed{\begin{aligned} eig(\underline{A}) &= eig \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 26.6505 & -0.0248 & 0 & 5.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.8502 & 7.916 \cdot 10^{-}4 & 0 & -2.333 \end{bmatrix} \\ eig(\underline{A}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 5.0852 \\ -5.3333 \\ -2.1100 \end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{36}$$

Die Eigenwerte müssen einen negativen Realteil aufweisen, andernfalls ist das System instabil. Die Polstellen des Reglers werden auf $s_{\mathrm{P}} = -4 + 0j$ festgelegt (Gleichung 37). Die Lage aller **Polstellen** ist in Abbildung 8 visualisiert.

$$\boxed{\underline{s}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}} \tag{37}$$

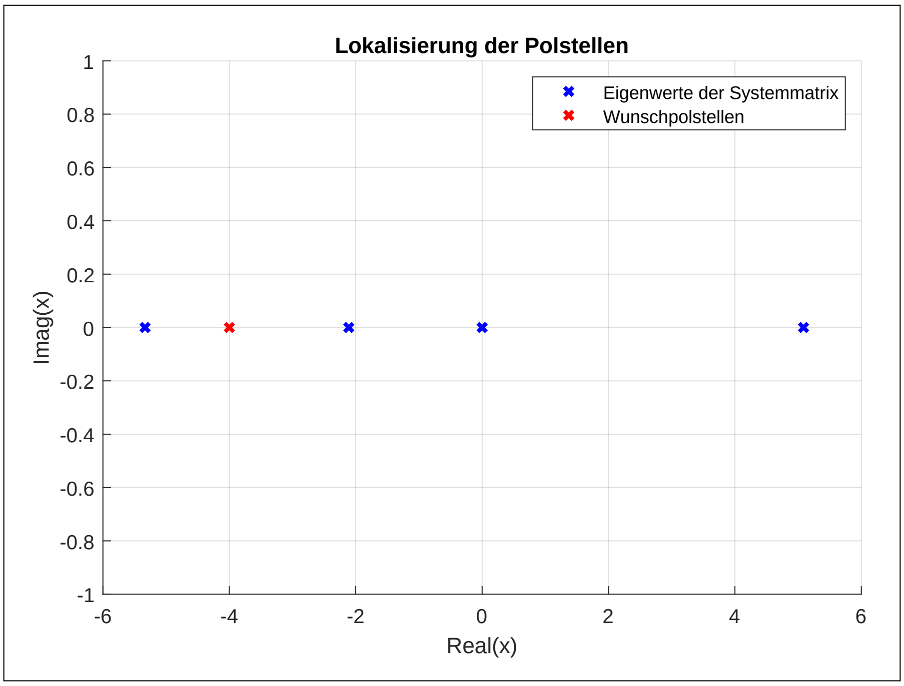

Abb. 8: Polstellenlagen des Systems mit einfachen Zustandsregler

Zur Bestimmung der Koeffizienten α_{n} bis α_0 des geregelten Systems, wird das charakteristische Polynom ausmultipliziert und die Wunschpolstellen eingesetzt.

Berechnung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\underline{P}(s) &= (s - s_{\mathrm{P1}}) \cdot (s - s_{\mathrm{P2}}) \cdot (s - s_{\mathrm{P3}}) \cdot (s - s_{\mathrm{P4}}) \\
\underline{P}(s) &= s^4 - s^3 \cdot (s_{\mathrm{P1}} + s_{\mathrm{P2}} + s_{\mathrm{P3}} + s_{\mathrm{P4}}) \\
&\quad + s^2 \cdot \left(s_{\mathrm{P1}} \cdot (s_{\mathrm{P2}} + s_{\mathrm{P3}} + s_{\mathrm{P4}}) + s_{\mathrm{P2}} \cdot (s_{\mathrm{P3}} + s_{\mathrm{P4}}) + s_{\mathrm{P3}} \cdot s_{\mathrm{P4}}\right) \\
&\quad - s \cdot \left(s_{\mathrm{P1}} \cdot (s_{\mathrm{P2}} \cdot s_{\mathrm{P3}} + s_{\mathrm{P2}} \cdot s_{\mathrm{P4}} + s_{\mathrm{P3}} \cdot s_{\mathrm{P4}}) + s_{\mathrm{P2}} \cdot s_{\mathrm{P3}} \cdot s_{\mathrm{P4}}\right) \\
&\quad + (s_{\mathrm{P1}} \cdot s_{\mathrm{P2}} \cdot s_{\mathrm{P3}} \cdot s_{\mathrm{P4}})
\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom und die Koeffizienten folgen zu:

$$\begin{aligned}
\underline{P}(s) &= s^4 + 16 \cdot s^3 + 96 \cdot s^2 + 256 \cdot s + 256 \\
\underline{\alpha} &= \begin{bmatrix} 256 & 256 & 96 & 16 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{38}$$

Zur Berechnung der Verstärkungsfaktoren des Reglers wird die letzte Zeile t_{n}^T der inversen Steuerbarkeitsmatrix Q_{s}^{-1} benötigt. Diese berechnet sich zu:

$$\underline{Q}_{\mathrm{s}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.8333 & 1.9651 & -26.7984 \\ -0.8333 & 1.9651 & -26.7984 & 67.7740 \\ 0 & 0.3333 & -0.7784 & 2.5264 \\ 0.3333 & -0.7784 & 2.5264 & -7.5869 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\underline{Q}_{\mathrm{s}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1040 & 7 & 3.26 \\ -0.1092 & -0.1142 & 3.2665 & 0.2854 \\ -0.1165 & -0.0488 & 0.2885 & 0.1221 \\ -0.0489 & 0 & 0.1223 & -0.0001 \end{bmatrix}$$

Die letzte Zeile der inversen Matrix ist:

$$\underline{t}_4^T = \begin{bmatrix} -0.0489 & 0 & -0.1223 & -0.0001 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Die finale Berechnung erfolgt auf Grundlage der Gleichung 40. Durch das Einsetzen der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix (Gleichung 39), der Faktoren aus Gleichung 38 und der Systemmatrix A folgt für die **Verstärkungsfaktoren** $\underline{k}_{\mathrm{Acker}}^T$ der Zustandsrückführung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{k}^T &= \underline{t}_{\mathrm{n}}^T \cdot (\alpha_0 \cdot \underline{I} + \alpha_1 \cdot \underline{A} + ... + \alpha_{\mathrm{n}-1} \cdot \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n) && (40) \\ \underline{k}_{\mathrm{Acker}}^T &= \begin{bmatrix} -159.9929 & -31.7079 & -31.3150 & -38.3441 \end{bmatrix} && (41) \end{aligned}}$$

6.2 Vorsteuerung

Mithilfe des Vorfilters können Referenzpositionen für die Systemzustände vorgegeben werden. Im weiteren Verlauf wird lediglich eine Referenzposition des Wagens vorgegeben, d.h. der Wagen fährt während des Pendelschwingens eine Endlage abweichend zum Ursprung an. Der Referenzwert wird auf den Systemeingang gegeben. Dieser wird anschließend mit dem Vorfilter $\underline{F}$ multipliziert. Weiterhin erfolgt die Verrechnung mit den Faktoren $\underline{k}$, welche analog zum Unterabschnitt 6.1 berechnet werden (Abbildung 9). Die **Eingangsgleichung des Systems** ist gegeben durch:

$$\underline{u}(t) = -\underline{k} \cdot \underline{x}(t) + \underline{F} \cdot \underline{y}_{ref}(t) \tag{42}$$

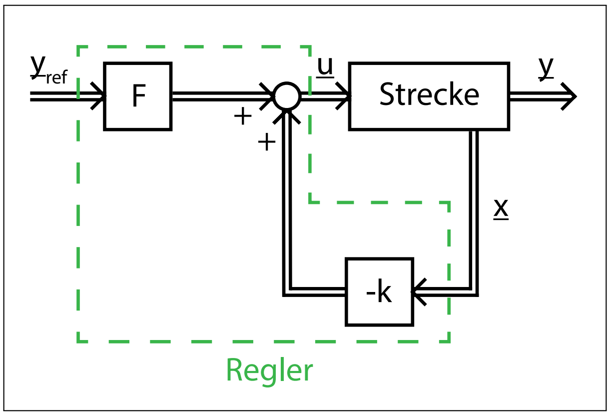

Abb. 9: Schematische Darstellung der Reglerstruktur der Referenzwert-Vorsteuerung

Zur Ermittlung der Matrix $\underline{F}$ des Vorfilters werden zuerst die im Zeitbereich geltenden Kriterien aufgestellt. Der Ausgang des Systems $\underline{y}(t)$ muss für $t \to \infty$ in den Referenzwert $\underline{y}_{ref}$ laufen. Der Referenzwert wird als konstant angenommen. Dazu gelten folgende **Kriterien im Zeitbereich**:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{y}(t) = \underline{y}_{ref} = \underline{y}_{0ref} = const. \tag{43}$$

$$\underline{y}_{ref}(t) = \begin{cases} \underline{y}_{0ref} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{44}$$

Da die Berechnungen im Zeitbereich aufwendig sind, werden weitere Betrachtungen im Laplace-Bereich vorgenommen. Vorteil der Transformation ist das Rechnen mit algebraischen Gleichungen. Zur Überführung des Ansatzes aus Gleichung 43 wird der **Grenzwertsatz der Laplace-Transformation** angewandt. Das Referenzzeitsignal $\underline{y}_{ref}(t)$ aus Gleichung 44 wird ebenfalls überführt.

$$\lim_{t\to\infty} \underline{y}(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \underline{Y}(s) = \underline{y}_{ref} = \underline{y}_{0ref} \tag{45}$$

$$\underline{Y}_{ref}(s) = \frac{1}{s} \cdot \underline{y}_{0ref} \tag{46}$$

Für weitere Betrachtungen wird das Zustandsraummodell der Strecke in den Laplace-Bereich transformiert:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s \cdot \underline{X}(s) = \underline{A} \cdot \underline{X}(s) + \underline{B} \cdot \underline{U}(s) \tag{47}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{Y}(s) = \underline{C} \cdot \underline{X}(s) \tag{48}$$

Die Gleichung 47 wird nach $\underline{X}(s)$ umgestellt und entsprechend in die Laplace-transformierte Ausgangsgleichung $\underline{Y}(s)$ eingesetzt. Aus der Umstellung geht hervor, dass das System durch eine Multiplikation aus einer Übertragungsfunktion $\underline{G}(s)$ und dem Eingangssignal $\underline{U}(s)$ gebildet werden kann.

$$\begin{aligned} \underline{B} \cdot \underline{U}(s) &= (s \cdot \underline{I} - \underline{A}) \cdot \underline{X}(s) && (49) \\ \underline{X}(s) &= (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) &= \underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}(s) && (50) \\ \underline{G}(s) &= \underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} \end{aligned}$$

Die Eingangsgleichung des Systems (Gleichung 42) wird transformiert und anschließend in Gleichung 49 eingesetzt.

$$\underline{U}(s) = -\underline{k} \cdot \underline{X}(s) + \underline{F} \cdot \underline{Y}_{\text{ref}}(s)$$

Einsetzen und Umformung nach $\underline{X}(s)$:

$$\begin{aligned} \underline{B} \cdot (\underline{F} \cdot \underline{Y}_{\text{ref}}(s) - \underline{k} \cdot \underline{X}(s)) &= (s \cdot \underline{I} - \underline{A}) \cdot \underline{X}(s) \\ \underline{B} \cdot \underline{F} \cdot \underline{Y}_{\text{ref}}(s) &= (s \cdot \underline{I} - \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{X}(s) \\ \underline{X}(s) &= (s \cdot \underline{I} - \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{k})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{F} \cdot \underline{Y}_{\text{ref}}(s) && (51) \end{aligned}$$

Die Gleichung 51 wird in Gleichung 48 eingesetzt, um die **Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises** zu erhalten.

$$\underline{Y}(s) = \underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{k})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot F \cdot \underline{Y}_{\text{ref}}(s) \tag{52}$$

Aus der vorangegangenen Betrachtung ist nur die Matrix $\underline{F}$ des Vorfilters unbekannt. Um dasjenige F zu ermitteln, welches die **stationäre Exaktheit** erfüllt, wird der Grenzwertsatz aus Gleichung 45 angesetzt und die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises (Gleichung 52) eingesetzt.

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \underline{Y}(s) = \underline{y}_{0ref}$$
$$\lim_{s\to 0} s \cdot (\underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{k})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{F} \cdot \frac{1}{s} \cdot \underline{y}_{0ref}) = \underline{y}_{0ref} \tag{53}$$

Nach dem Vereinfachen der Gleichung 53 geht hervor, dass der Term $\underline{C} \cdot (-\underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{k})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{F}$ der Einheitsmatrix $\underline{I}$ gleichen muss (Gleichung 54). Andernfalls ist die Gleichung nicht erfüllbar. Durch die Kenntnis kann die **Matrix $\underline{F}$ des Vorfilters** bestimmt werden durch:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{C} \cdot (-\underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{k})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{F} &= \underline{I} \\ \underline{F} &= (\underline{C} \cdot (-\underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{k})^{-1} \cdot \underline{B})^{-1} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (54) \\ (55) \end{aligned}$$

Die Anwendbarkeit des Reglergesetztes ist eingeschränkt, da nur quadratische Matrizen invertierbar sind. Die Dimensionen der einzelnen Matrizen lauten wie folgt:

- $A \in \mathbb{R}^{(nxn)}$
- $B \in \mathbb{R}^{(nxm)}$
- $C \in \mathbb{R}^{(pxn)}$
- $k \in \mathbb{R}^{(mxn)}$

Die Matrix $\underline{F}$ ist quadratisch, sobald $p = m$ gilt, d.h. die Anzahl der Systemeingänge muss gleich der Anzahl der Systemausgänge sein, d.h. die benötigte **C-Matrix zur Berechnung des Vorfilters** lautet:

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0].$$

Die **Polstellen** der Reglerstuktur werden folgendermaßen festgelegt:

$$\boxed{\underline{s}_P = \begin{bmatrix} -4.5 & -4.5 & -4.5 & -4.5 \end{bmatrix}} \tag{56}$$

Die Polstellenlagen sind in Abbildung 10 dargestellt.

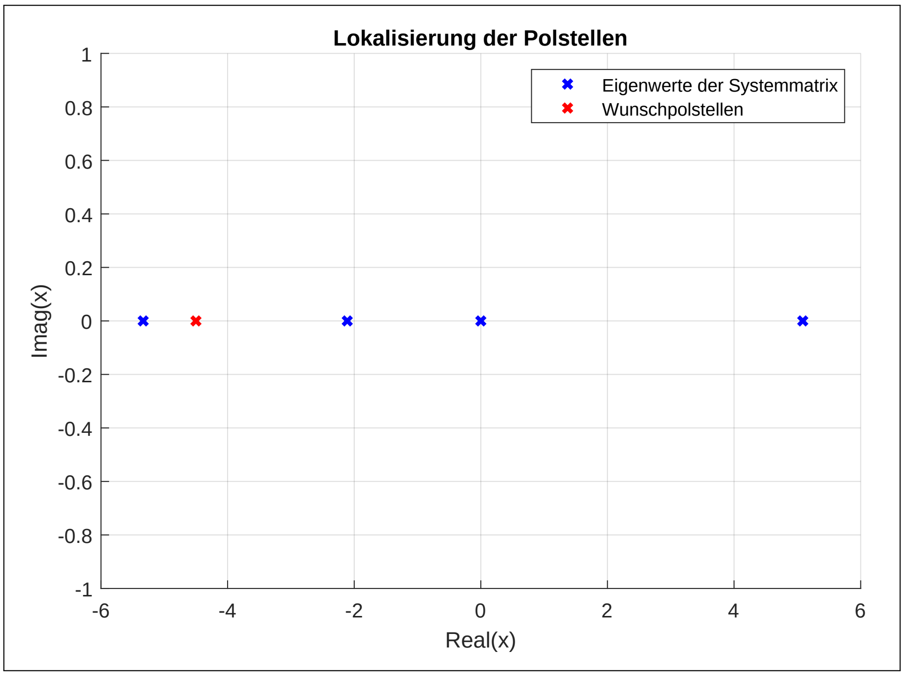

Abb. 10: Polstellenlagen des Systems mit Referenzwert-Vorsteuerung

Die **k-Faktoren der Zustandsrückführung** folgen zu:

$$\boxed{\underline{k}_{Vor}^{T} = \begin{bmatrix} -198.2525 & -39.4238 & -50.1606 & -51.6339 \end{bmatrix}} \tag{57}$$

Wird das linearisierte Zustandsraummodell (Gleichung 33) und die Faktoren $\underline{k}$ aus Gleichung 57 in das Reglergesetz eingesetzt, resultiert der **Faktor** F zu

$$\boxed{F = -50.1606}. \tag{58}$$

Der Faktor F ist ein skalarer Wert, da nur ein Referenzwert vorliegt.

6.3 I-Regelung

Bei der Regelung mit Referenzwert-Vorsteuerung entsteht ein Regelfehler, welcher zu einem ungenauen Ergebnis führt. Der Regelfehler folgt aus der Differenz des Referenzwertes am Systemeingang ($\underline{y}_{\mathrm{ref}}$) und dem zugehörigen Endwert am Systemausgang ($\underline{y}$). Um den Regelfehler zu minimieren, wird dieser entsprechend aufintegriert. Die Folge ist ein größerer Stellgrößenaufwand. Die Systemstruktur ist in Abbildung 11 dargestellt. Das Reglergesetzt mit den Faktoren $\underline{k}_\mathrm{I}$ (I-Verstärkungskoeffizient) und $\underline{k}_\mathrm{x}$ (Zustandsrückführungskoeffizient) kann in Gleichung 59 nachvollzogen werden.

$$\underline{u} = \underline{k}_\mathrm{I} \cdot \int_0^t (\underline{y}_\mathrm{ref} - \underline{y}) d\tau - \underline{k}_\mathrm{x} \cdot \underline{x} \tag{59}$$

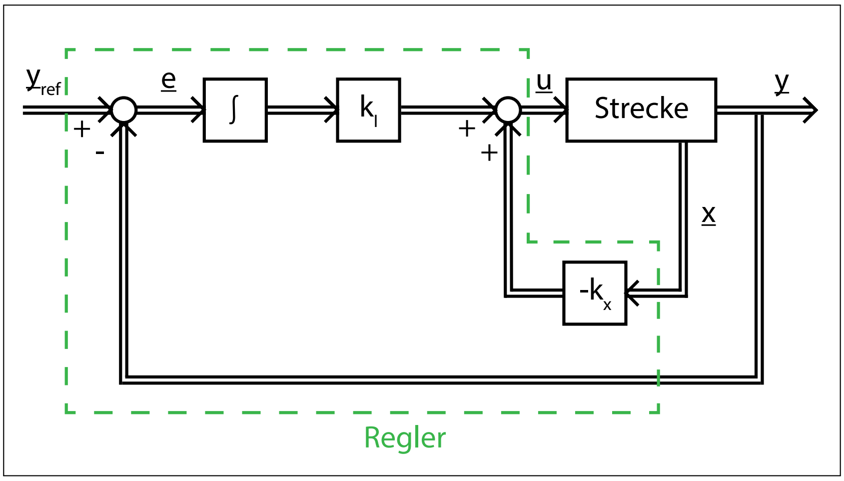

Abb. 11: Schematische Darstellung der Reglerstruktur mit I-Regelung

Mit der Definition (Gleichung 60) wird das Reglergesetz verändert aufgeschrieben. Aus der Definition

$$\underline{x}_\mathrm{I} := \int_0^t (\underline{y}_\mathrm{ref} - \underline{y}) d\tau \tag{60}$$

folgt nach Einsetzen und Umformen

$$\begin{aligned}
\underline{u} &= \underline{k}_\mathrm{I} \cdot \underline{x}_\mathrm{I} - \underline{k}_\mathrm{x} \cdot \underline{x} \\
\underline{u} &= -\underline{k}_\mathrm{x} \cdot \underline{x} + \underline{k}_\mathrm{I} \cdot \underline{x}_\mathrm{I} \\
\underline{u} &= -\begin{bmatrix} \underline{k}_\mathrm{x} & -\underline{k}_\mathrm{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_\mathrm{I} \end{bmatrix} && (61) \\
\underline{\tilde{k}} &= \begin{bmatrix} \underline{k}_\mathrm{x} & -\underline{k}_\mathrm{I} \end{bmatrix}. && (62)
\end{aligned}$$

Um das erweiterte Zustandsraummodell aufstellen zu können, wird der **Zustandsänderungsvektor** $\dot{\tilde{\underline{x}}}$ definiert.

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{x}} &= \begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{x}_{\mathrm{I}}\end{bmatrix}\\ \dot{\tilde{\underline{x}}} &= \begin{bmatrix}\dot{\underline{x}}\\ \dot{\underline{x}}_{\mathrm{I}}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{63}$$

Die benötigten Vektoren folgen zu:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{B}\cdot\underline{u} \tag{64}$$

$$\dot{\underline{x}}_{\mathrm{I}} = \frac{d}{dx}\cdot\int_0^t(\underline{y}_{\mathrm{ref}} - \underline{y})d\tau = \underline{y}_{\mathrm{ref}} - \underline{y}$$

$$\dot{\underline{x}}_{\mathrm{I}} = \underline{y}_{\mathrm{ref}} - \underline{C}\cdot\underline{x} \tag{65}$$

Auf Grundlage der Gleichung 63 bis Gleichung 65 folgt das **erweiterte Zustandsraummodell** zu

$$\boxed{\dot{\tilde{\underline{x}}} = \begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{0}\\ -\underline{C} & \underline{0}\end{bmatrix}\cdot\tilde{\underline{x}} + \begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{0}\end{bmatrix}\cdot\underline{u} + \begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}\cdot\underline{y}_{ref}} \tag{66}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{A}} &= \begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{0}\\ -\underline{C} & \underline{0}\end{bmatrix} \quad ; \tilde{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{(n+p)x(n+p)}\\ \tilde{\underline{B}} &= \begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{0}\end{bmatrix} \quad ; \tilde{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{(n+p)x(m)}\\ \tilde{\underline{B}}_{\mathrm{y}} &= \begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix} \quad ; \tilde{\underline{B}}_{\mathrm{y}} \in \mathbb{R}^{(n+p)x(p)}.\end{aligned}$$

Die Matrix C wird analog zum Regler mit Referenzwert-Vorsteuerung betrachtet. Mithilfe der Matrizen $\tilde{\underline{A}}$ und $\tilde{\underline{B}}$ werden die Verstärkungskoeffizienten ($\underline{k}_{\mathrm{x}}$ und $\underline{k}_{\mathrm{I}}$) analog zu Unterabschnitt 6.1 berechnet. Die **Polstellen des Reglers** werden entsprechend festgelegt (Gleichung 67).

$$\boxed{\underline{s}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} -3.2 & -3.2 & -3.2 & -3.2 & -3.2 \end{bmatrix}} \tag{67}$$

Die Länge des Vektors folgt auf Grundlage der Größe der Matrix $\underline{\tilde{A}}$. Die Lage der Polstellen ist in Abbildung 12 dargestellt.

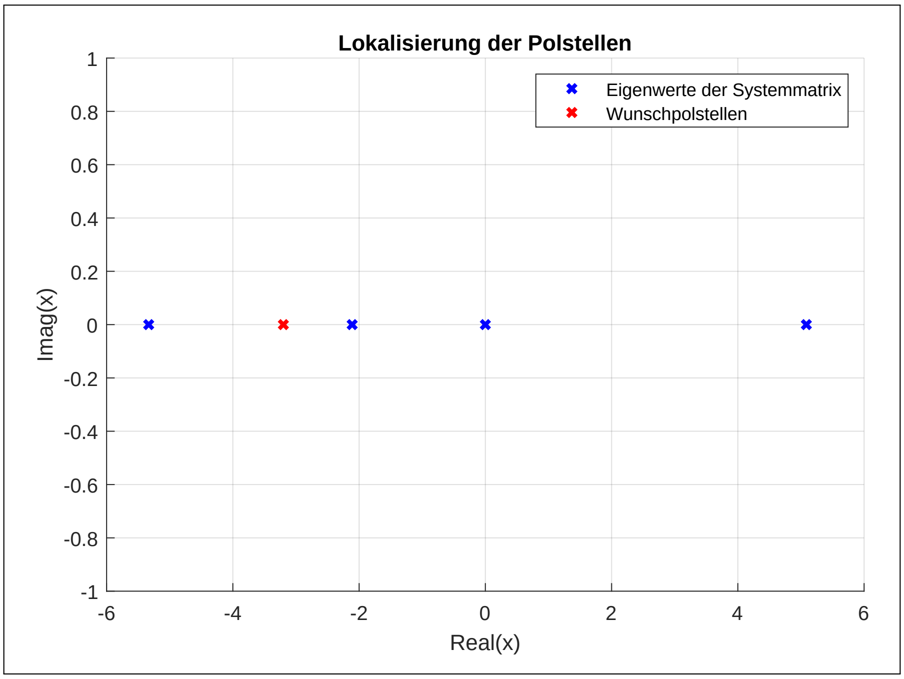

Abb. 12: Polstellenlage des Systems mit I-Regelung

Die $\underline{\tilde{k}}$-**Matrix** resultiert zu:

$$\underline{\tilde{k}} = \begin{bmatrix} -180.9111 & -35.8968 & -64.1713 & -48.8165 & 41.0452 \end{bmatrix} \tag{68}$$

Gemäß Gleichung 62 folgen die Verstärkungskoeffizienten (unterteilt in **Zustandsrückführungskoeffizienten** und **I-Verstärkungskoeffizienten**) wie nachfolgend gezeigt:

$$\boxed{\underline{k}_\mathrm{x} = \begin{bmatrix} -180.9111 & -35.8968 & -64.1713 & -48.8165 \end{bmatrix}} \tag{69}$$

$$\boxed{\underline{k}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -41.0452 \end{bmatrix}} \tag{70}$$

7 Reglervalidierung

Ziel der Reglervalidierung ist das Bestätigen des Regelverhaltens der modellierten drei Regler aus dem Abschnitt 6. Dies wird mit Hilfe des Matlab Tools *Simulink* durchgeführt. Die zuvor in Matlab berechneten Matrizen (siehe z. B. Gleichung 41) werden an das Simulink-Modell übergeben und dort genutzt. Die Simulationsergebnisse werden anschließend auf ihre Plausibilität geprüft. Dazu werden zum einen die Eingangsparameter (Anfangsauslenkung und Referenzposition) variiert und zum anderen wird der jeweilige Regler am linearen als auch am nichtlinearen Modell getestet.

7.1 Validierung des linearen Modells

Zunächst findet die Validierung der Regler am linearen Zustandsraummodell der Strecke statt. Die Simulink Implementierung der linearen Regelstrecke ist in Abbildung 3 dargestellt.

7.1.1 Zustandsregler mit einfacher Rückführung

Der erste Regler ist erneut der einfache Zustandsregler mit Rückführung. Dessen Implementierung in Simulink kann in Abbildung 13 nachvollzogen werden. Als Simulationsergebnisse werden zum einen der Winkel des Pendels φ, die Wagenposition x_{M} und die benötigte Eingangskraft u bzw. F_{a} in Diagrammform dargestellt.
Um das Verhalten des Reglers zu testen, wird die Simulation für verschiedene Anfangsauslenkungen des Pendels simuliert. Es wird untersucht, für welche Polstellen des Reglers welche Anfangsauslenkungen maximal eingeprägt werden dürfen, dass die Grenzen der Anlage nicht überschritten werden. Ziel ist es, zu bestätigen, welche Störung des Pendels (Abweichung des Winkels von der oberen Ruhelage) maximal auf dieses einwirken darf, so dass weder die maximale Eingangskraft von 80 N noch die maximale Wagenposition von ± 1 m überschritten wird. Dabei gilt es, die Polstellen nicht zu weit nach links auf der Real-Achse zu schieben, da dies den Regler beschleunigen würde. Dies führt jedoch zu größeren wirkenden Kräften und Momenten.

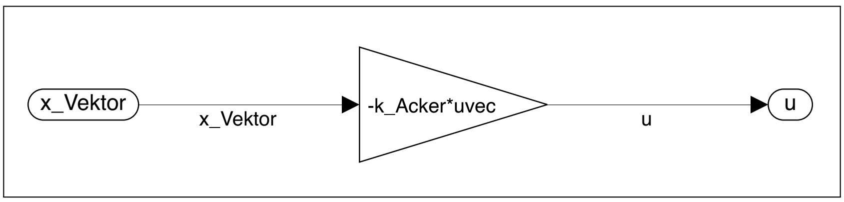

Abb. 13: Simulink Regler-Blockschaltbild für den einfachen Zustandsregler (lineares Zustandsraummodell)

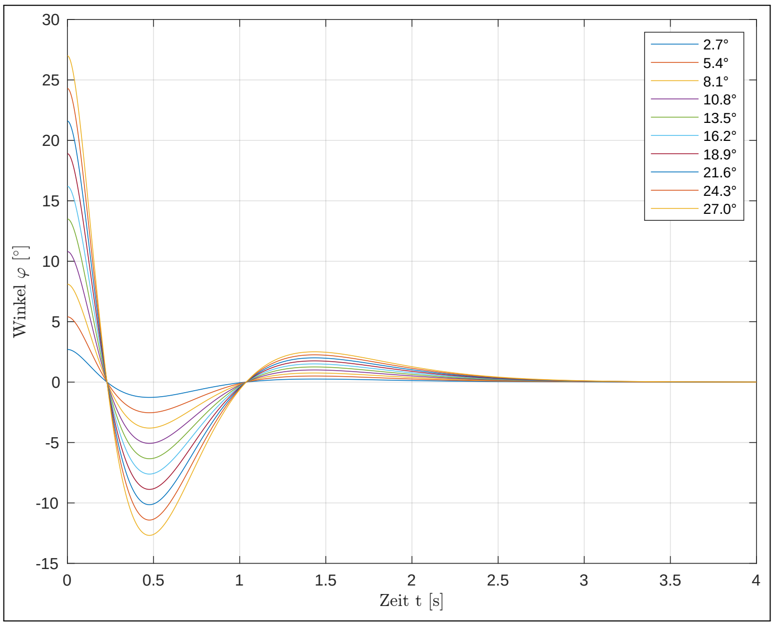

Abb. 14: φ für verschiedene Anfangsauslenkungen am einfachen Zustandsregler für das lineare Zustandsraummodell

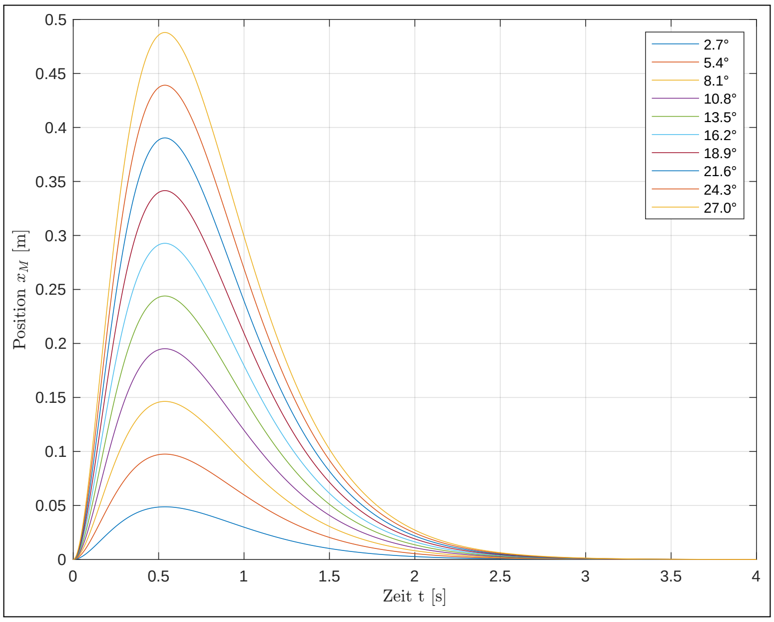

Abb. 15: x_{M} für verschiedene Anfangsauslenkungen am einfachen Zustandsregler für das lineare Zustandsraummodell

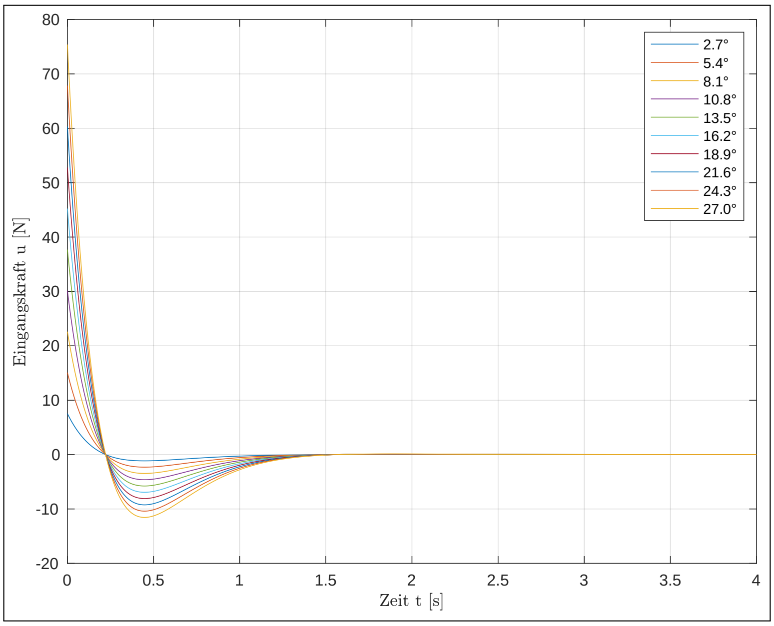

Abb. 16: u für verschiedene Anfangsauslenkungen am einfachen Zustandsregler für das lineare Zustandsraummodell

Die für die oben gezeigten Diagramme gewählten Reglerpolstellen sind in Gleichung 37 gezeigt.

Abbildung 14 bestätigt, dass der Regler wie definiert eine Anfangsauslenkung zu $0°$ (obere Ruhelage) ausregeln kann. Dabei ist zu erkennen, dass der Winkel φ des Pendels erst leicht überschwingt, bevor er abschließend ausgeregelt wird. Der gesamte Vorgang dauert ca. 3 s.

Das Verhalten des Wagens ist in Abbildung 15 gezeigt. Zu erkennen ist, dass bei einer positiven Anfangsauslenkung eine Bewegung des Wagens nach rechts stattfindet. Die Wagenposition x_{M} nimmt dementsprechend positive Werte an. Es handelt sich dabei um das zu erwartende Verhalten. Weiterhin bestätigt die Abbildung, dass selbst für einen Auslenkungswinkel von $27°$ die maximale Wagenposition nicht überschritten wird. Von möglichen 100 cm werden lediglich knapp unter 50 cm benötigt. Da der einfache Zustandsregler keine Referenzpositionen für den Wagen entgegennehmen kann, ist die Position dieses am Ende wieder der Nullpunkt.

Das dritte Diagramm (Abbildung 16) zeigt die benötigte Kraft des Motors am Schlitten, um den Wagen in entsprechender Zeit an die zuvor gezeigte Position zu bewegen. Zu erkennen ist, dass für einen Winkel von $27°$ der Motor maximal belastet wird. Es werden ca.

80 N benötigt. Für kleinere Auslenkungen ist weniger Kraft nötig, da auch die Position des Wagens weniger signifikant vom Ausgangspunkt abweicht. Es fällt auf, dass die Initialkraft am größten ist. Dies ist zu erklären über die Beschleunigung des Wagens. Beim Abbremsen kommt es auch hier zu einem Überschwingen, welches durch die negative Beschleunigung zu erwarten ist. Zuletzt ist festzuhalten, dass bereits nach rund 1,5 s der Motor keine Kraft mehr liefern muss. Somit ist die Eingangskraft bereits nach ca. der Hälfte der Ausregelzeit wieder bei u = 0 N angelangt.

Zusammenfassend kann bestätigt werden, dass sich der Regler erwartungsgemäß verhält und die Grenzen der Anlage bezüglich maximaler Position und Kraft nicht überschritten werden.

7.1.2 Zustandsregler mit Referenzwert-Vorsteuerung

Nachfolgend soll der Regler mit Vorsteuerung validiert werden. Dessen Simulink-Struktur ist in Abbildung 17 aufgezeigt. Im Unterschied zu Unterunterabschnitt 7.1.1 kann bei diesem Regler eine Referenzposition für den Wagen vorgegeben werden.
In Diagrammform werden erneut der Winkel des Pendels φ, die Wagenposition x_{M} und die benötigte Eingangskraft u bzw. F_{a} dargestellt. Zusätzlich wird die Validierung für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} vorgenommen.
Ziel ist auch hier das Bestätigen des Einhaltens der Grenzen der Anlage für die gewählten Polstellen bei untersuchten Anfangsauslenkungen und Referenzpositionen.

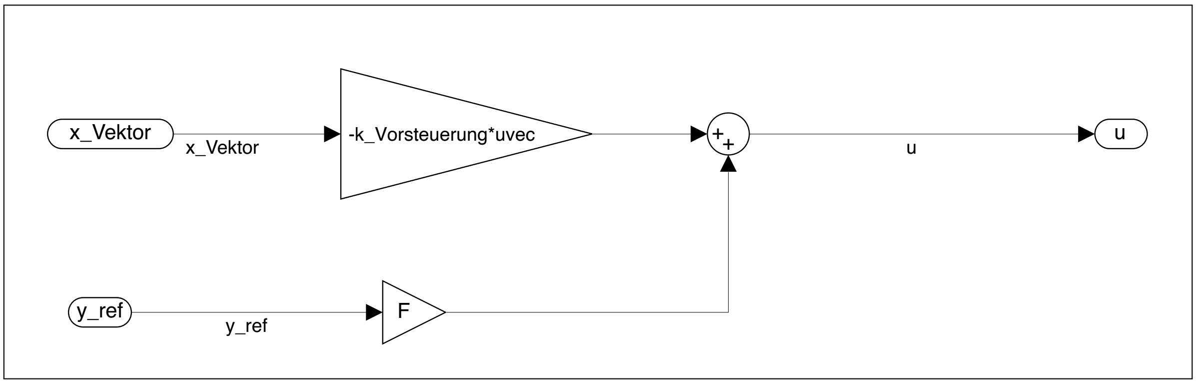

Abb. 17: Simulink Regler-Blockschaltbild für den Zustandsregler mit Vorsteuerung (lineares Zustandsraummmodell)

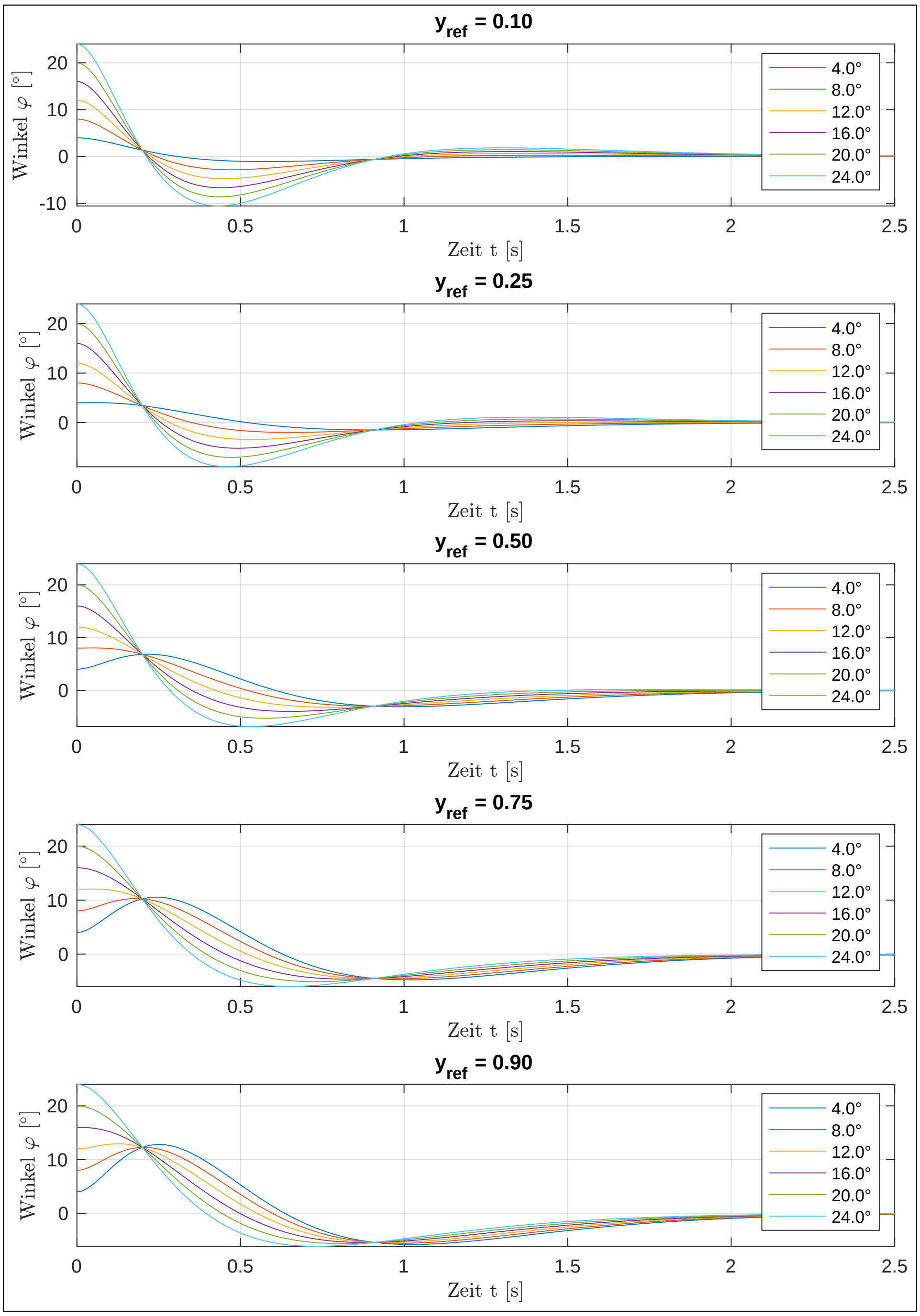

Abb. 18: φ für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit Vorsteuerung für das lineare Zustandsraummodell

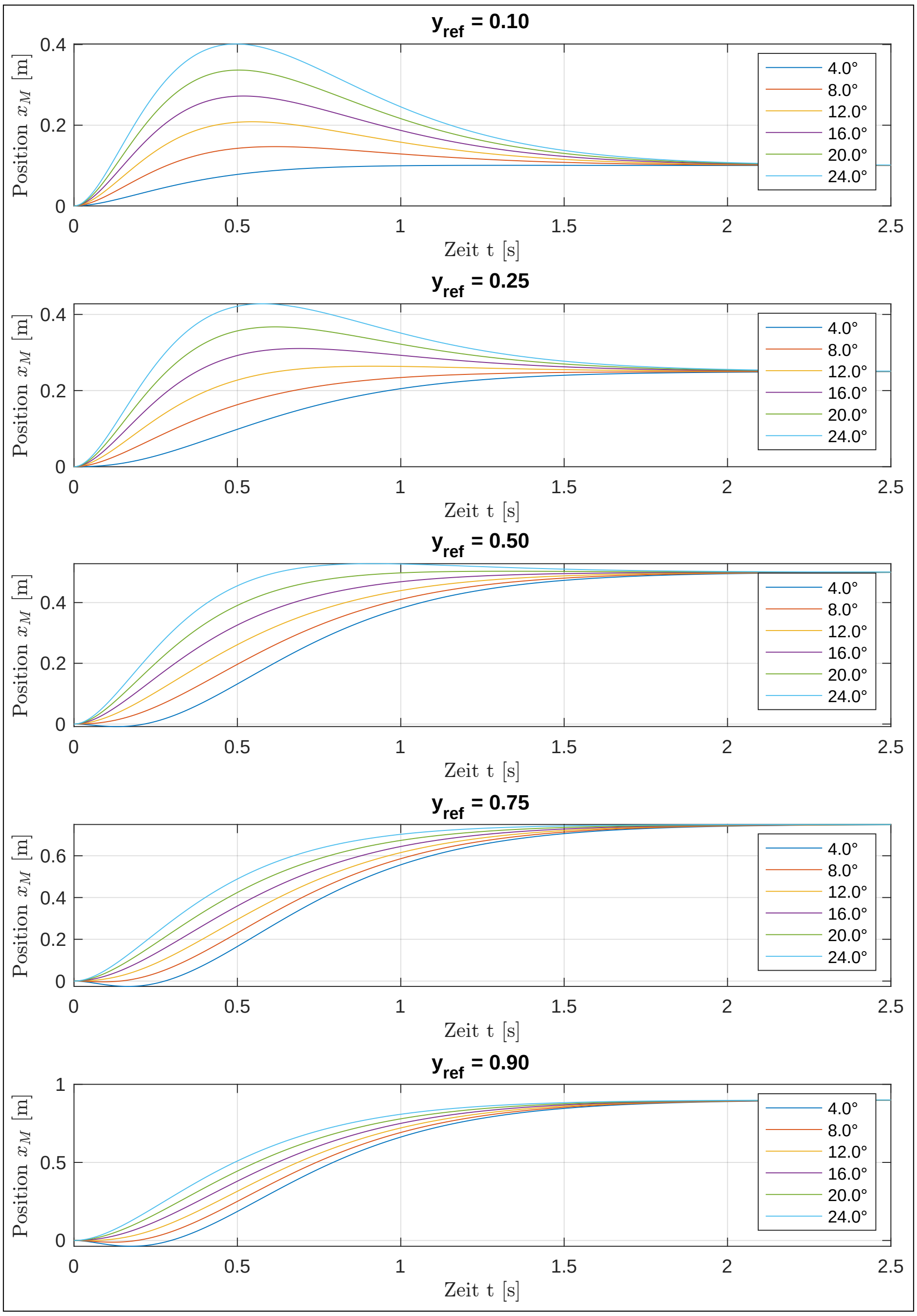

Abb. 19: x_{M} für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit Vorsteuerung für das lineare Zustandsraummodell

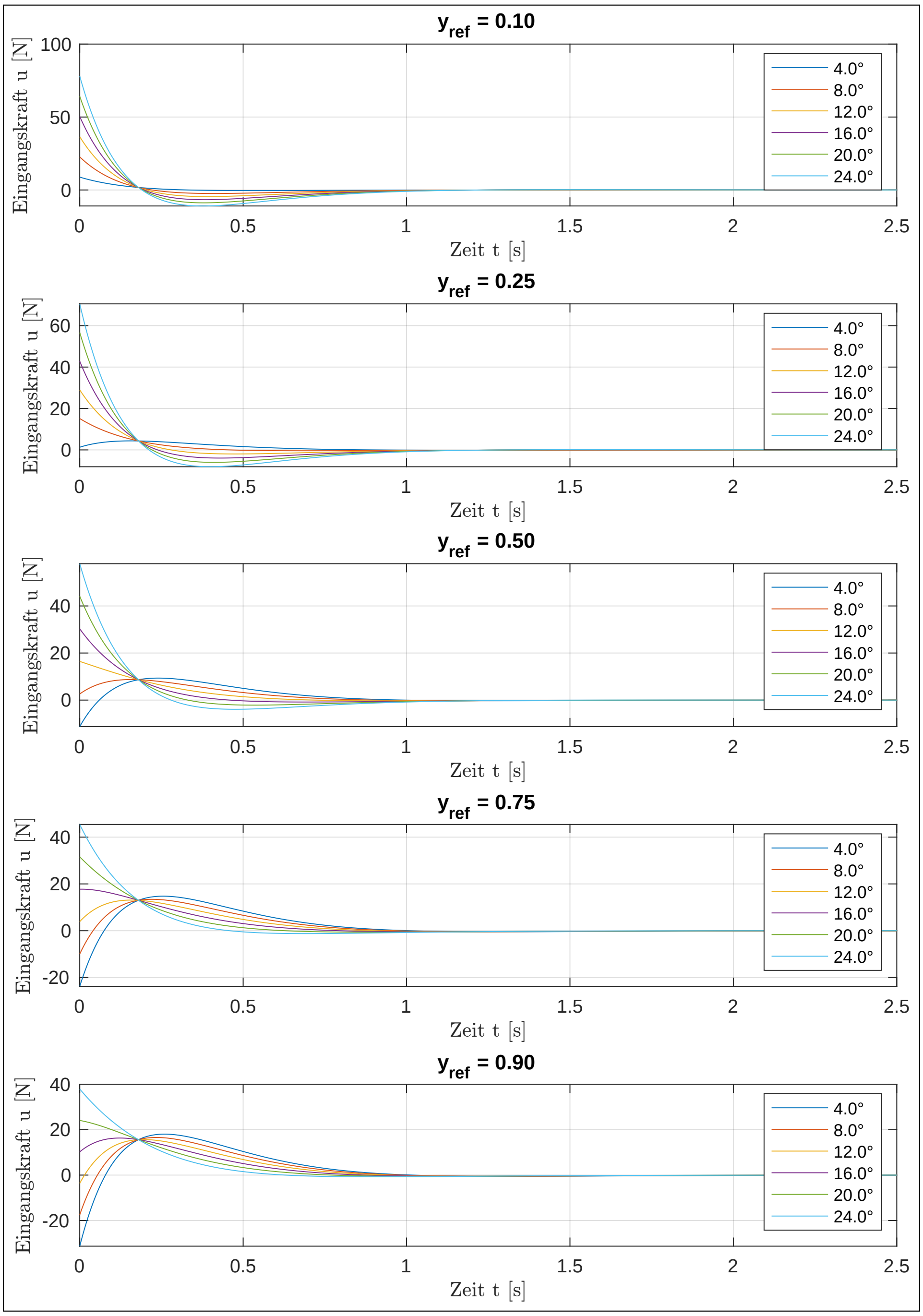

Abb. 20: u für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit Vorsteuerung für das lineare Zustandsraummodell

Die für die oben gezeigten Diagramme gewählten Reglerpolstellen sind in Gleichung 56 gezeigt.

Abbildung 18 bestätigt analog zum Regler mit einfacher Zustandsrückführung (Ackermann-Formel), dass der Regler mit Vorsteuerung, wie definiert, eine Anfangsauslenkung zu $0°$ (obere Ruhelage) ausregeln kann. Der Winkel ist nach ca. 2,5 s wieder in der Ruhelage angelangt.

Das Verhalten des Wagens ist gezeigt in Abbildung 19. Zu erkennen ist, dass je nach vorgegebenem Referenzwert die jeweilige Referenzposition am Ende des Regelvorgangs erreicht wird. Weiterhin bestätigt die Abbildung, dass selbst für einen Auslenkungswinkel von $24°$ und eine Referenzposition von 0,9 m die maximale Wagenposition nicht überschritten wird.

Das dritte Diagramm (Abbildung 20) zeigt die benötigte Kraft des Motors am Schlitten, um den Wagen in entsprechender Zeit an die zuvor gezeigte Position zu bewegen. Zu erkennen ist, dass für größere Referenzpositionen bei großen Winkeln eine kleinere Eingangskraft benötigt wird. Dafür steigt jedoch bei kleinen Anfangsauslenkungen und großen Referenzwerten die benötigte Eingangskraft. In diesem Fall jedoch mit einem negativen Vorzeichen. Das beschriebene Verhalten entspricht den Erwartungen. Zuletzt ist festzuhalten, dass bereits nach rund 1,25 s der Motor keine Kraft mehr liefern muss.

Zusammenfassend kann bestätigt werden, dass sich der Regler erwartungsgemäß verhält und die Grenzen der Anlage bezüglich maximaler Position und Kraft nicht überschritten werden.

7.1.3 Zustandsregler mit I-Regelung

Der dritte untersuchte Regler ist der Zustandsregler mit I-Regelung. Die Simulink-Struktur des Reglers ist in Abbildung 21 gezeigt. Wie schon in Unterunterabschnitt 7.1.2 können Referenzpositionen vorgegeben werden. Im Unterschied zur Vorsteuerung soll jedoch durch das Aufintegrieren des Regelfehlers die Möglichkeit bestehen die Polstellen weiter nach Rechts zu schieben und somit den Regler zu beschleunigen. Dies gilt zu zeigen.
In Diagrammform werden erneut der Winkel des Pendels φ, die Wagenposition x_{M} und die benötigte Eingangskraft u bzw. F_{a} dargestellt. Zusätzlich wird die Validierung für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} vorgenommen.
Ziel ist auch hier das Bestätigen des Einhaltens der Grenzen der Anlage für die gewählten Polstellen bei untersuchten Anfangsauslenkungen und Referenzpositionen.

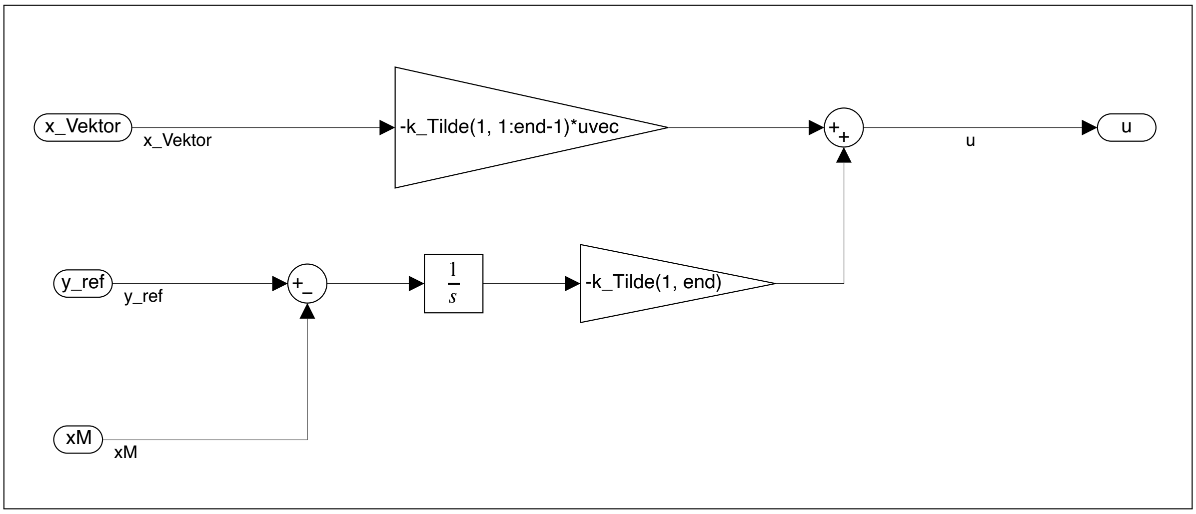

Abb. 21: Simulink Regler-Blockschaltbild für den Zustandsregler mit I-Regelung (lineares Zustandsraummodell)

Die für die nachfolgend gezeigten Diagramme gewählten Reglerpolstellen sind in Gleichung 67 gezeigt.

Abbildung 22 bestätigt analog zu den vorangegangenen Reglern, dass der I-Regler wie definiert eine Anfangsauslenkung zu $0°$ (obere Ruhelage) ausregeln kann. Der Winkel ist nach ca. 2,5 s wieder in der Ruhelage angelangt.

Das Verhalten des Wagens ist gezeigt in Abbildung 23. Zu erkennen ist, dass je nach vorgegebenem Referenzwert die jeweilige Referenzposition am Ende des Regelvorgangs erreicht wird. Der Vorgang braucht jedoch merklich länger mit rund 3,5 s.

Das dritte Diagramm (Abbildung 24) zeigt die benötigte Kraft des Motors, um den Wagen an die zuvor gezeigte Position zu bewegen. Zu erkennen ist, dass für größere Referenzpositionen bei großen Winkeln eine kleinere Eingangskraft benötigt wird. Dafür steigt jedoch bei kleinen Anfangsauslenkungen und großen Referenzwerten die benötigte Eingangskraft. In diesem Fall jedoch mit einem negativen Vorzeichen. Zuletzt ist festzuhalten, dass bereits nach rund 1,25 s der Motor keine Kraft mehr liefern muss.

Zusammenfassend kann bestätigt werden, dass sich der Regler bei festgelegten Polstellen immer noch erwartungsgemäß verhält und die Grenzen der Anlage bezüglich maximaler Position und Kraft nicht überschritten werden.

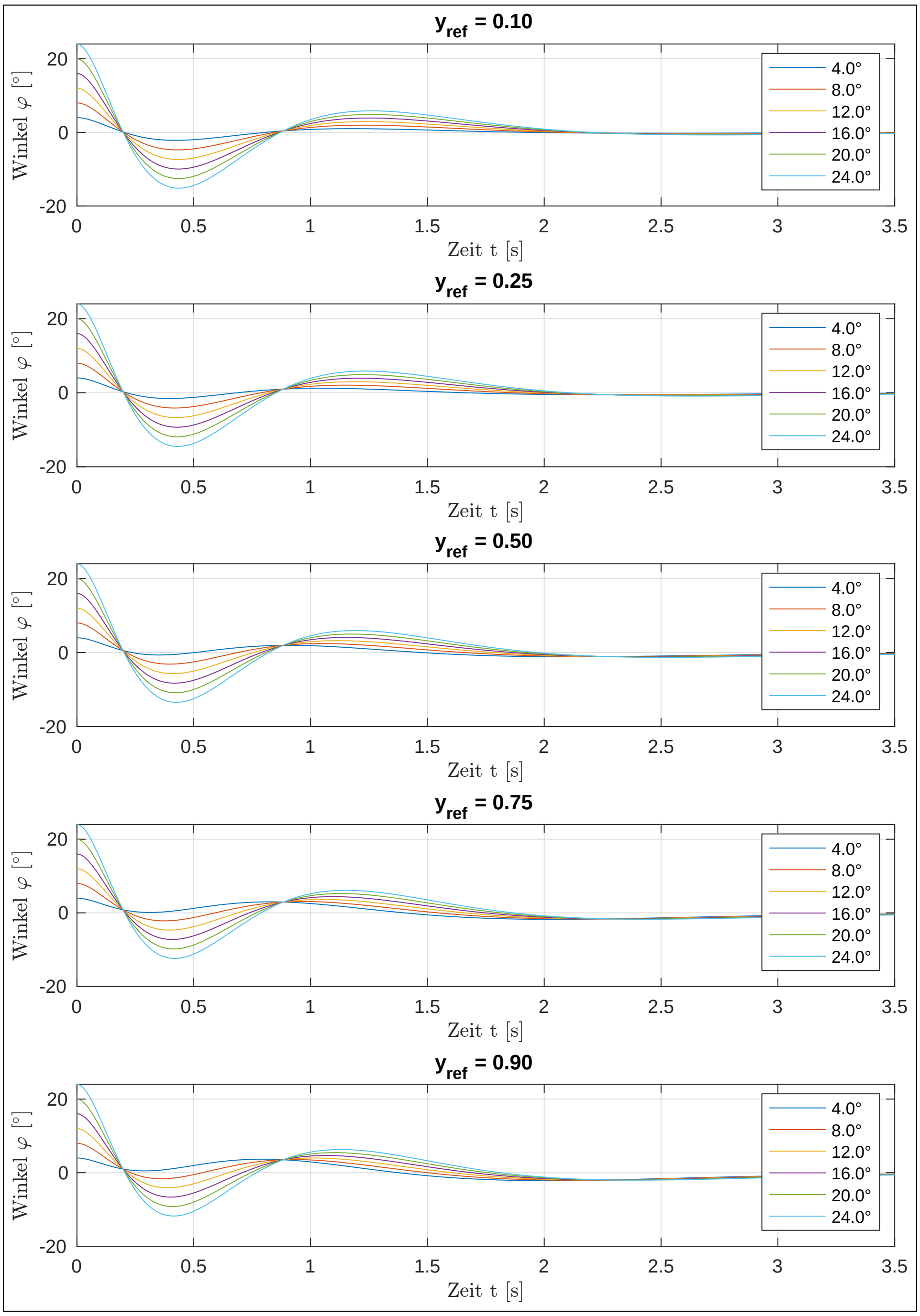

Abb. 22: φ für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung für das lineare Zustandsraummodell

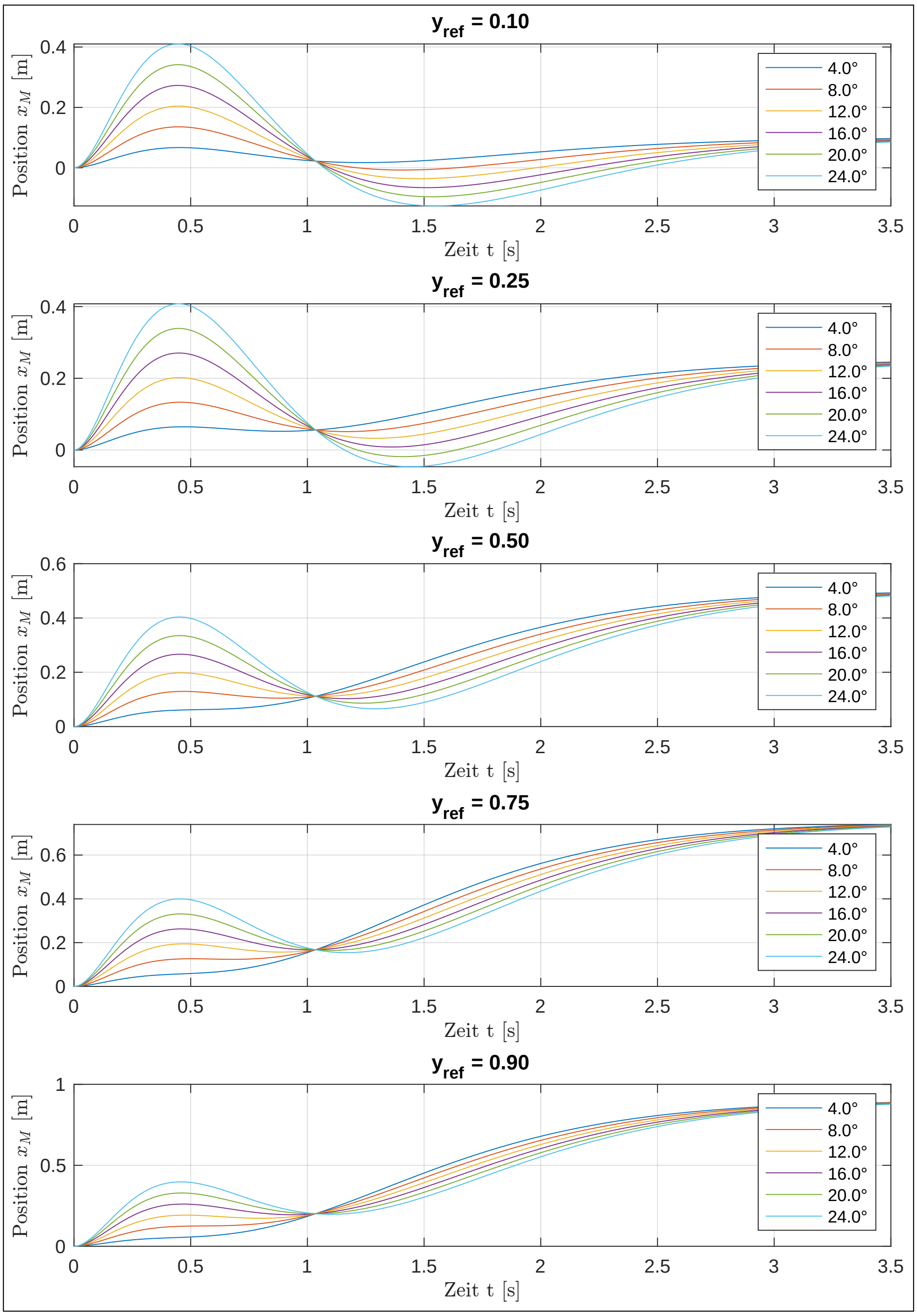

Abb. 23: x_{M} für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung für das lineare Zustandsraummodell

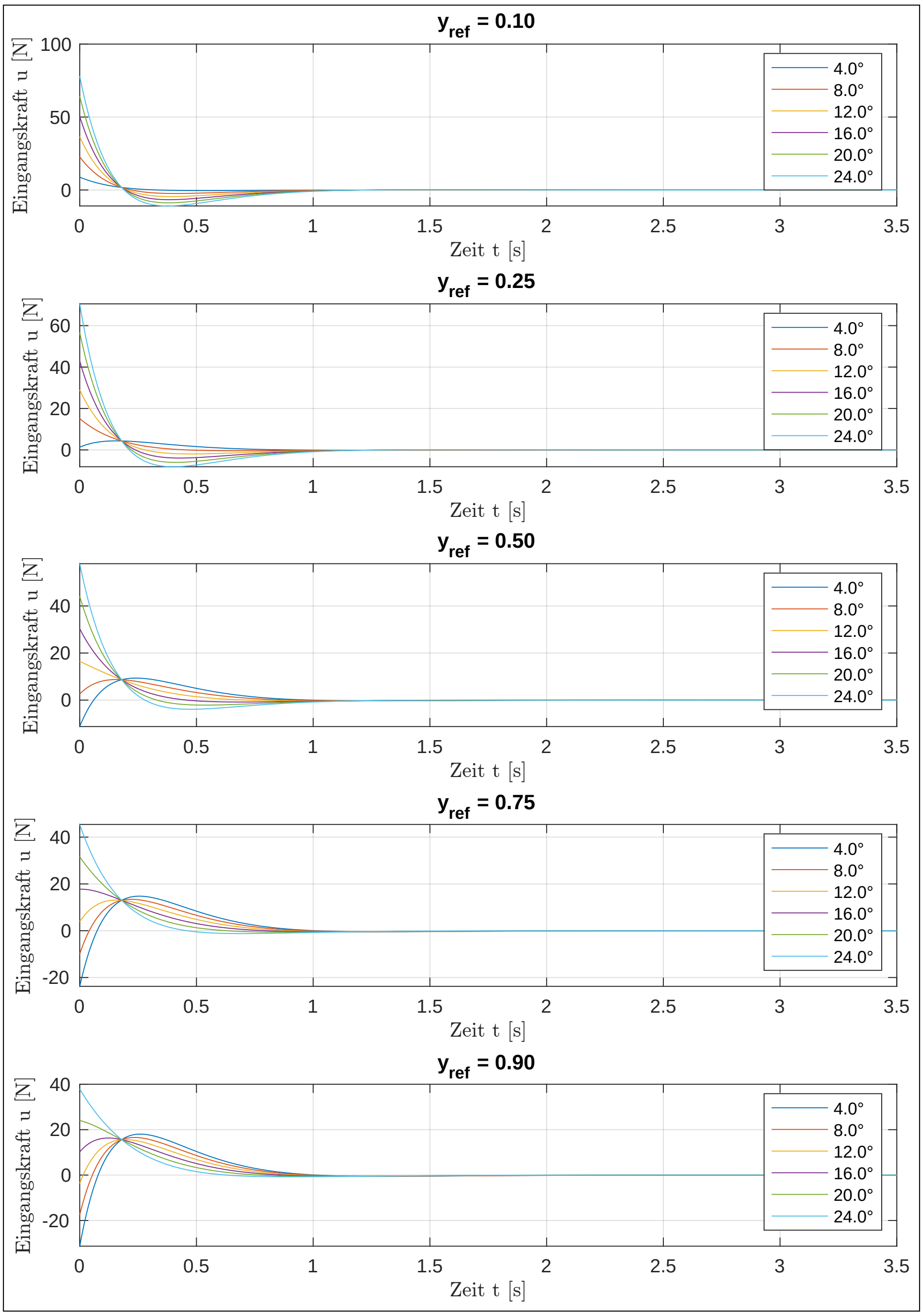

Abb. 24: u für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung für das lineare Zustandsraummodell

7.1.4 Vergleich des Regelverhaltens

Im folgenden werden die drei implementierten Regelstrategien verglichen. Dabei soll herausgearbeitet werden, welche Vorteile für einen bestimmten Regler sprechen und welcher am geeignetsten für die Regelaufgabe ist.
Um eine gewisse Vergleichbarkeit sicherzustellen, wurden alle drei Simulink-Modelle der Regler inklusive Regelstrecke mit der gleichen Anfangsauslenkung simuliert. Weiterhin wurde auch die selbe Referenzposition beim Zustandsregler mit Vorsteuerung und beim Regler mit I-Regelung genutzt.
In Diagrammform werden nachfolgend der Winkel des Pendels φ, die Wagenposition x_M und die benötigte Eingangskraft u bzw. F_a für die drei Zustandsregler dargestellt.
Es ist wichtig die gewählten Polstellen für den jeweiligen Regler zu berücksichtigen und diese mit in den Vergleich einzubeziehen. Nachfolgen sind die Polstellen aufgeführt:

$$\underline{s}_{\mathrm{P}_{Acker.}} = \begin{bmatrix} -4.0 & -4.0 & -4.0 & -4.0 \end{bmatrix}$$
$$\underline{s}_{\mathrm{P}_{Vorst.}} = \begin{bmatrix} -4.5 & -4.5 & -4.5 & -4.5 \end{bmatrix}$$
$$\underline{s}_{\mathrm{P}_{I-Reg.}} = \begin{bmatrix} -3.2 & -3.2 & -3.2 & -3.2 \end{bmatrix}$$

Die Wahl der Polstellen beruht auf der Optimierung der Regelgeschwindigkeit bei maximalem Ausreizen der Systemgrenzen.

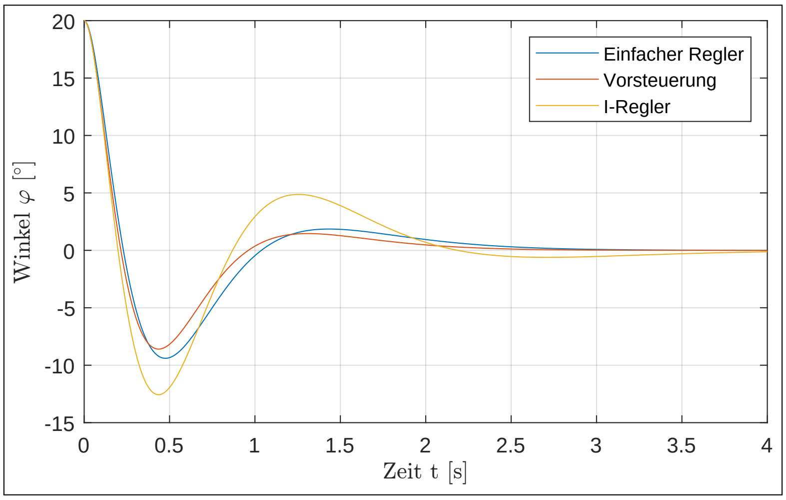

Abb. 25: φ für Regler mit einfacher Zustandsrückführung, Regler mit Vorsteuerung und Regler mit I-Regelung bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am linearen Zustandsraummodell

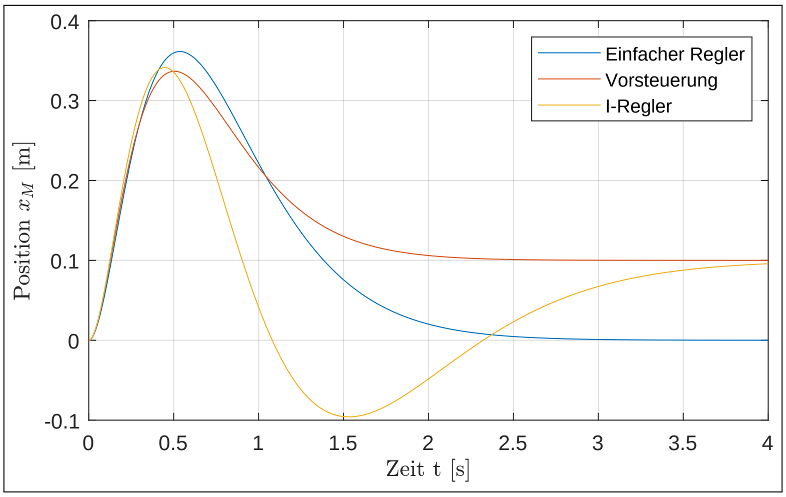

Abb. 26: x_{M} für Regler mit einfacher Zustandsrückführung, Regler mit Vorsteuerung und Regler mit I-Regelung bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am linearen Zustandsraummodell

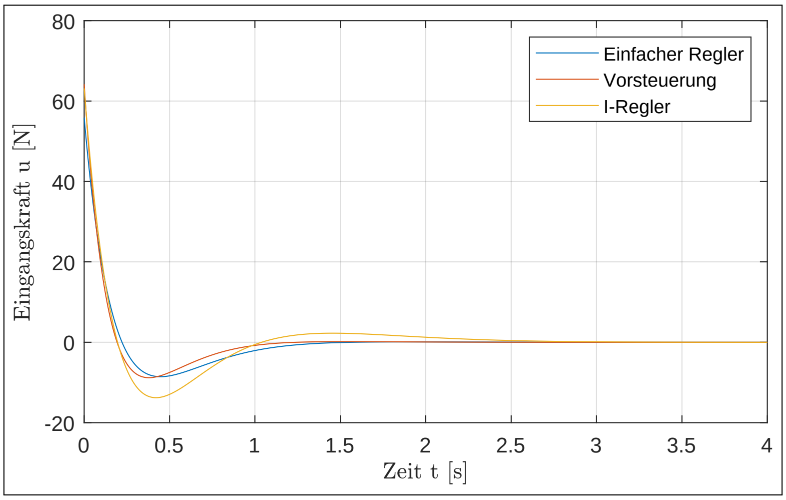

Abb. 27: u für Regler mit einfacher Zustandsrückführung, Regler mit Vorsteuerung und Regler mit I-Regelung bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am linearen Zustandsraummodell

Abbildung 25 zeigt, dass der Winkel des Pendels bei der Regelung mit Vorsteuerung für die oben gewählten Polstellen am schnellsten wieder in der Ruhelage ausgeregelt ist. Dieses Verhalten lässt sich dadurch begründen, dass die Polstellen bei der Vorsteuerung etwas

weiter nach links gelegt wurden im Vergleich zum Regler mit einfacher Zustandsrückführung, wodurch der Regler schneller wird. Grundsätzlich würden die Kurvenverläufe der beiden genannten Regler annähernd identisch sein, wenn die Polstellen die gleichen sind und bei der Vorsteuerung die Referenzposition zu Null gewählt wird. Verschiebt man bei positiver Anfangsauslenkung jedoch die Referenzposition nach rechts, so würde der Regler mit Vorsteuerung deutlich schneller wieder in die Ruhelage regeln, da er nicht dafür sorgen muss, dass der Wagen wieder auf der Nullposition stehen bleibt. Der Zustandsregler mit I-Regelung scheint im Gegensatz generell etwas langsamer zu sein, selbst wenn die Polstellen für alle Regelstrategien gleich gewählt werden.
Weiterhin ist zu erkennen, das bei der I-Regelung ein stärkeres Schwingen auftritt, welches durch das Aufintegrieren des Regelfehlers zu erklären ist.

In Abbildung 26 ist vor allem der wesentliche Unterschied zwischen dem Regler mit einfacher Zustandsrückführung und den Reglern mit Zustandsrückführung und Referenzwertvorgabe zu erkennen. Bei der Vorsteuerung und I-Regelung kann in den jeweiligen Graphen die gewählte Referenzposition am rechten Ende des Diagramms abgelesen werden. Der einfache Zustandsregler regelt die Wagenposition wieder auf Null zurück.
Auch hier kann das stärkere Schwingverhalten des I-Reglers identifiziert werden.

Der wesentliche Grund für die Wahl der Polstellen wird in Abbildung 27 ersichtlich. Für eine einheitliche Auslenkung des Pendels ist die Eingangskraft u annähernd gleich bei den drei Reglern. Für die in den vorangegangenen Unterabschnitten ermittelten maximalen Auslenkungen ist die Eingangskraft u bzw. F_{a} im Maximum knapp unter 80 N groß. Somit wird das System bei den gewählten Polstellen maximal ausgereizt.
Wie auch schon bei der Betrachtung des Winkels φ und der Wagenposition x_{M} kann ein stärkeres Schwingungsverhalten beim Zustandsregler mit I-Regelung erkannt werden.

7.2 Validierung des nichtlinearen Modells

Im folgenden werden die drei Regler für das nichtlineare Zustandsraummodell validiert. Die Simulink Implementierung der nichtlinearen Regelstrecke ist in Abbildung 2 dargestellt.

Wie im vorangegangenen Unterabschnitt werden Diagramme für den Winkel des Pendels φ, die Wagenposition x_{M} und die benötigte Eingangskraft u bzw. F_{a} für die drei Zustandsregler gezeigt. Es wird jedoch auf Kommentare verzichtet, da die Anwendung der Regler auf das nichtlineare Zustandsraummodell zu analogen Ergebnissen führt, was bereits in Abschnitt 5 nachgewiesen wurde.

7.2.1 Zustandsregler mit einfacher Rückführung

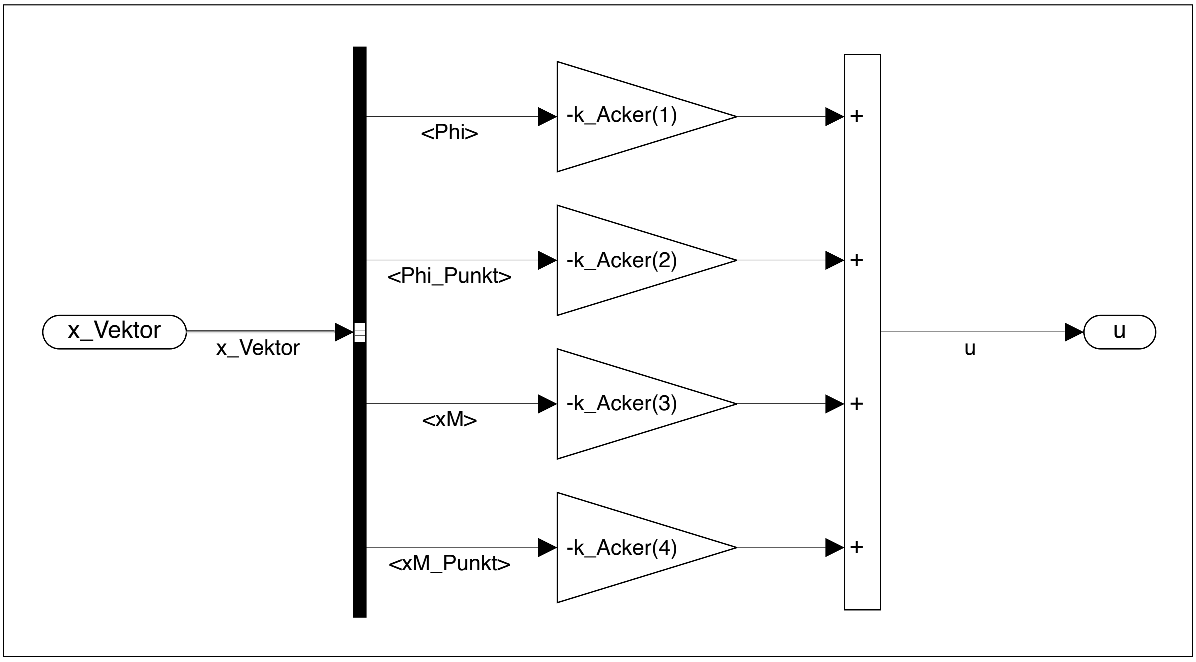

Abb. 28: Simulink Regler-Blockschaltbild für den Zustandsregler mit einfacher Zustandsrückführung (nichtlineares Zustandsraummodell)

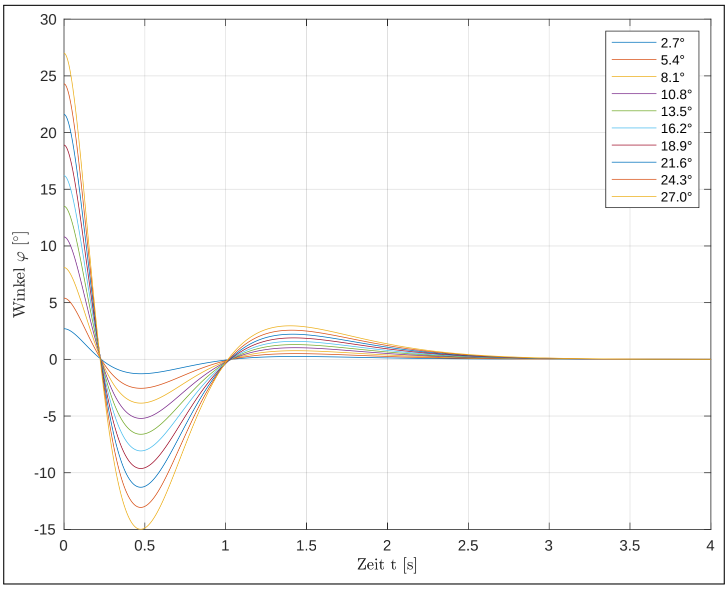

Abb. 29: φ für verschiedene Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit einfacher Rückführung für das nichtlineare Zustandsraummodell

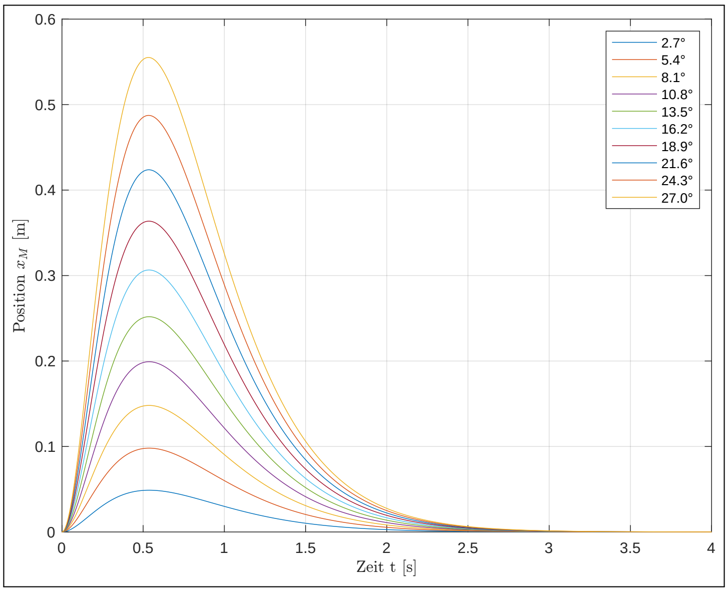

Abb. 30: x_{M} für verschiedene Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit einfacher Rückführung für das nichtlineare Zustandsraummodell

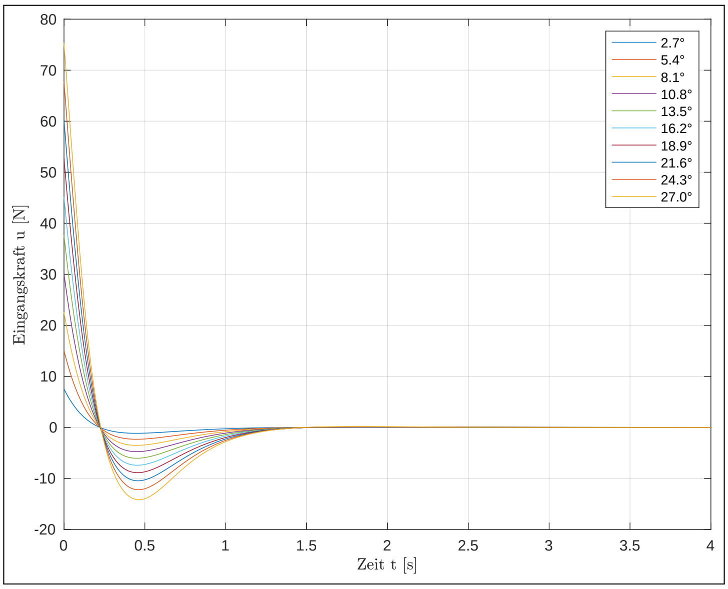

Abb. 31: u für verschiedene Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit einfacher Rückführung für das nichtlineare Zustandsraummodell

7.2.2 Zustandsregler mit Vorsteuerung

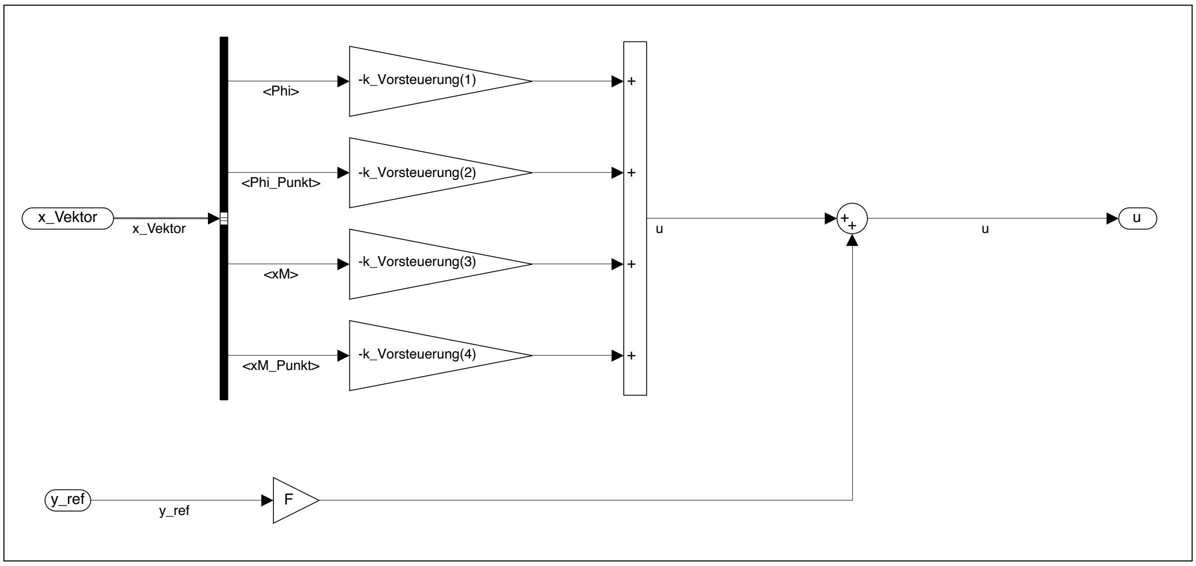

Abb. 32: Simulink Regler-Blockschaltbild für den Zustandsregler mit Vorsteuerung (nichtlineares Zustandsraummodell)

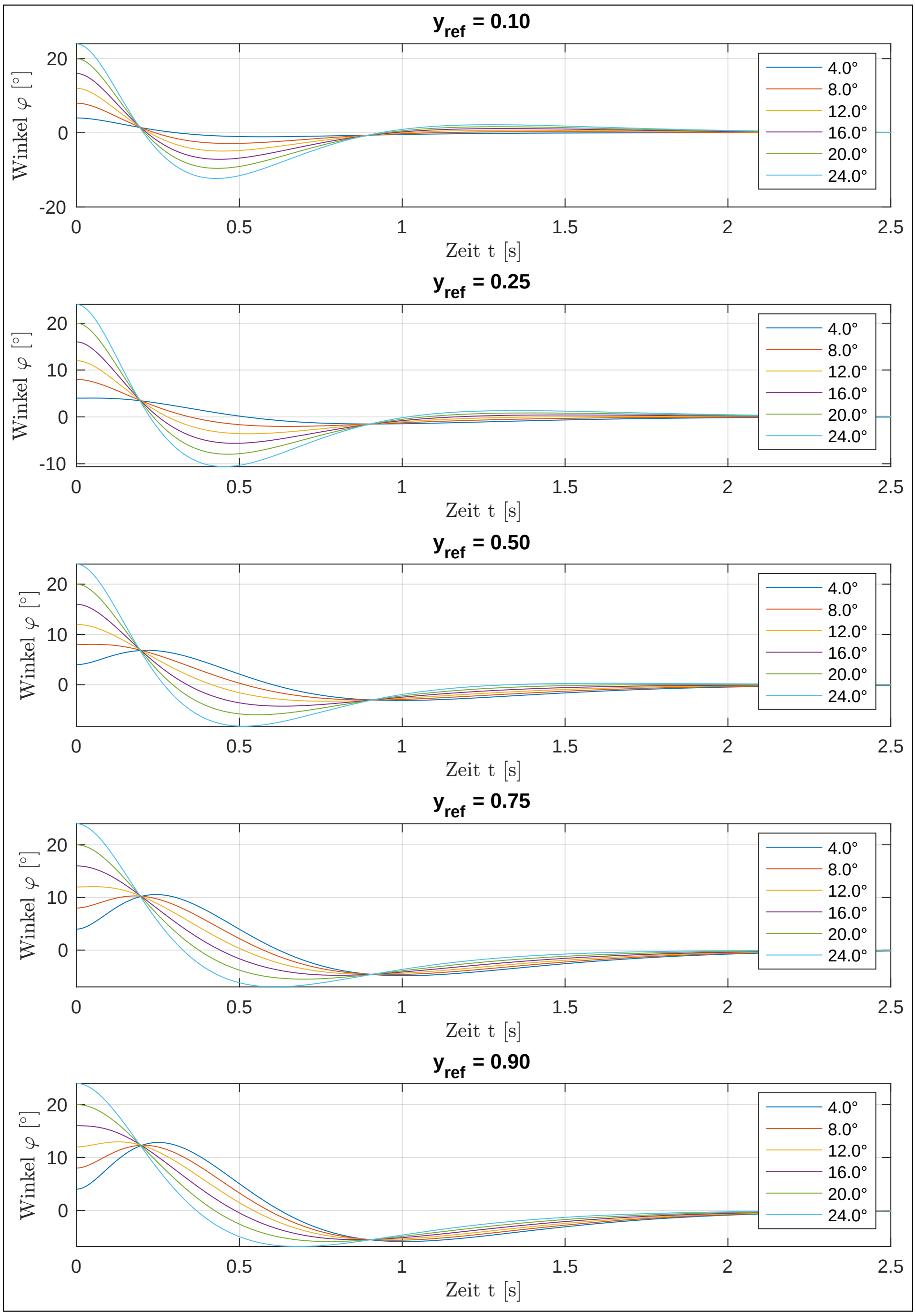

Abb. 33: φ für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit Vorsteuerung für das nichtlineare Zustandsraummodell

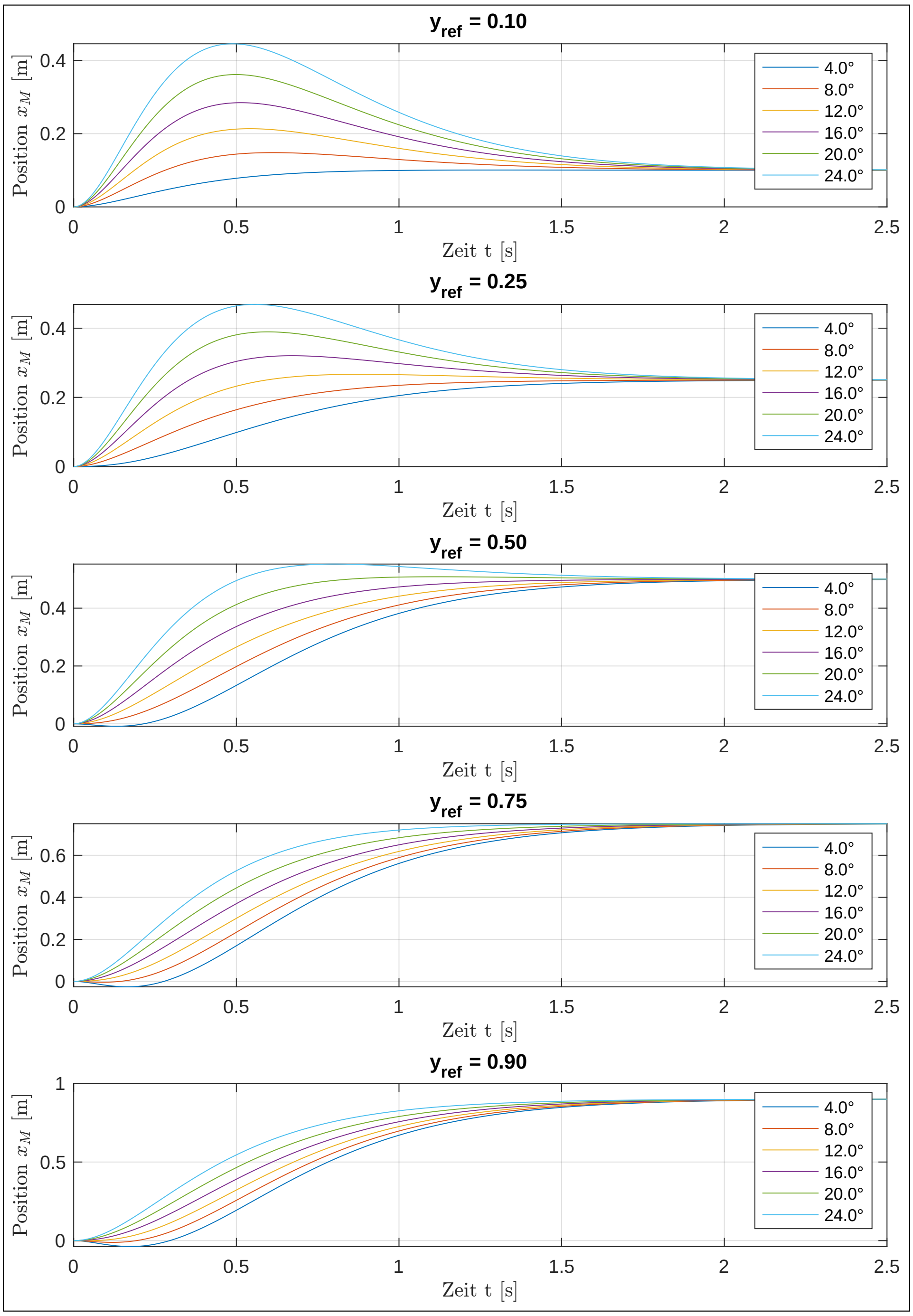

Abb. 34: x_{M} für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit Vorsteuerung für das nichtlineare Zustandsraummodell

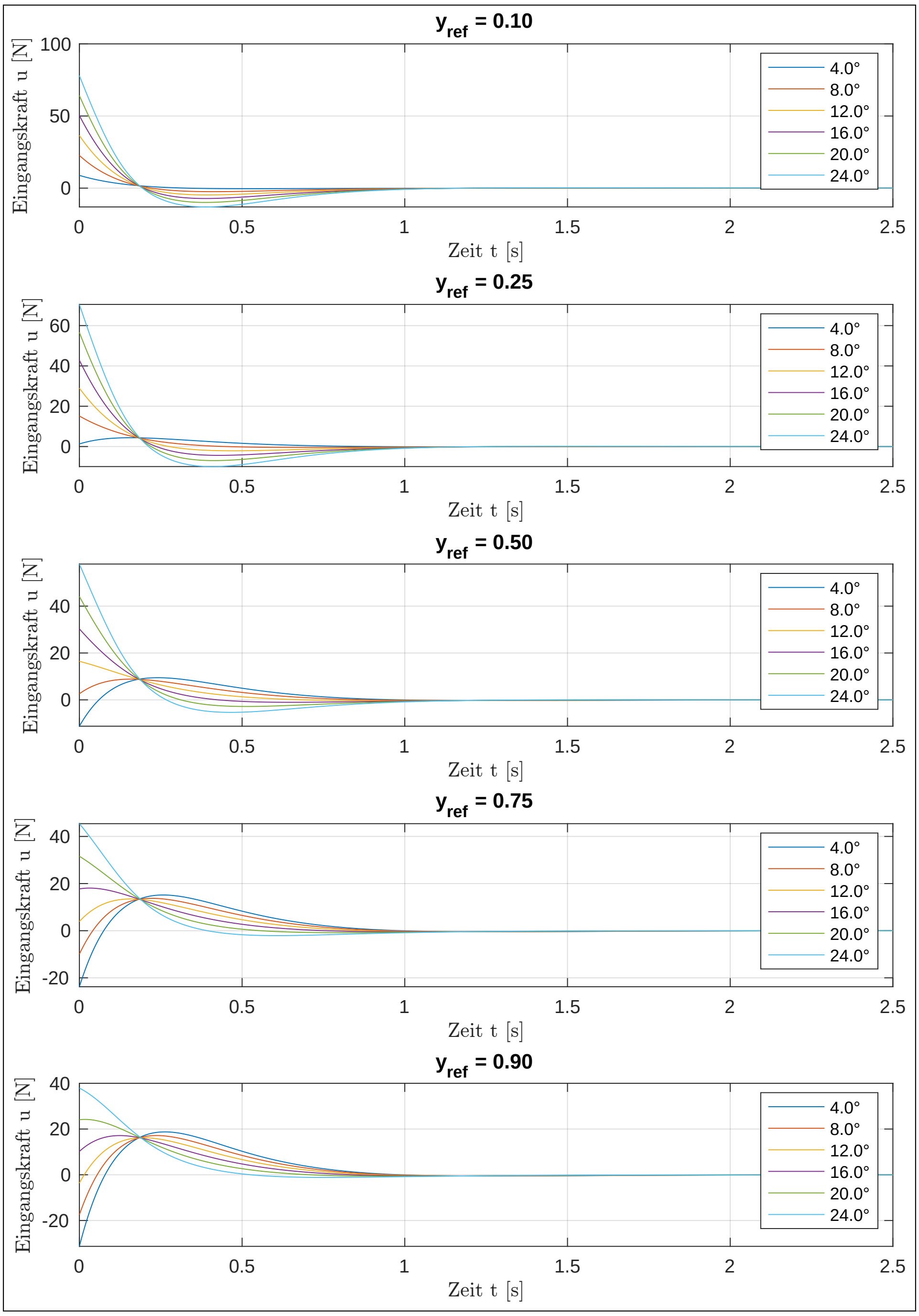

Abb. 35: u für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit Vorsteuerung für das nichtlineare Zustandsraummodell

7.2.3 Zustandsregler mit I-Regelung

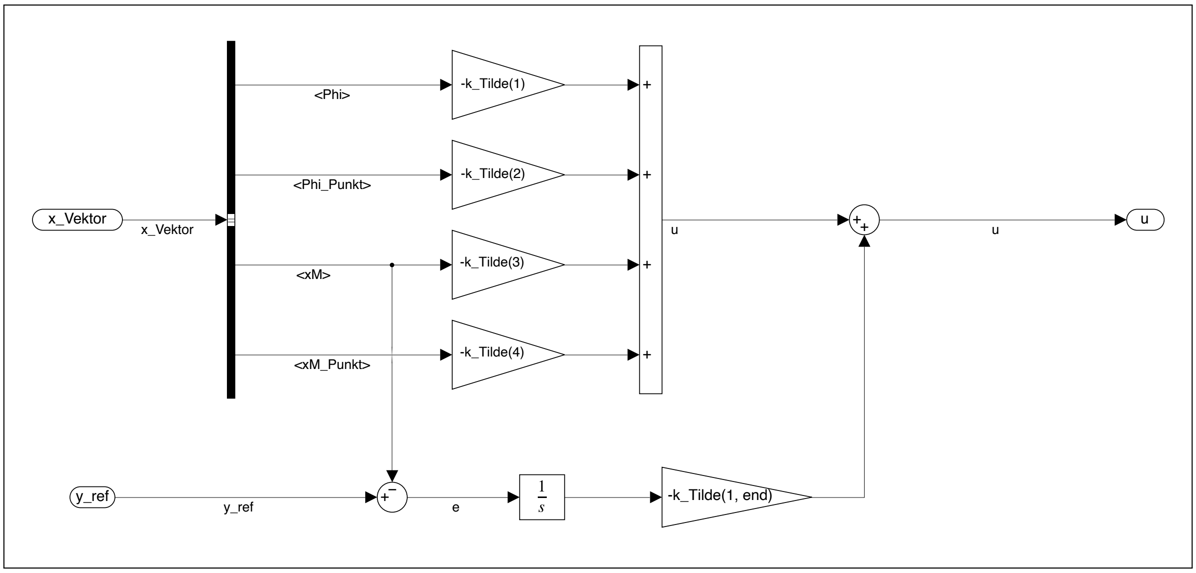

Abb. 36: Simulink Regler-Blockschaltbild für den Zustandsregler mit I-Regelung (nichtlineares Zustandsraummodell)

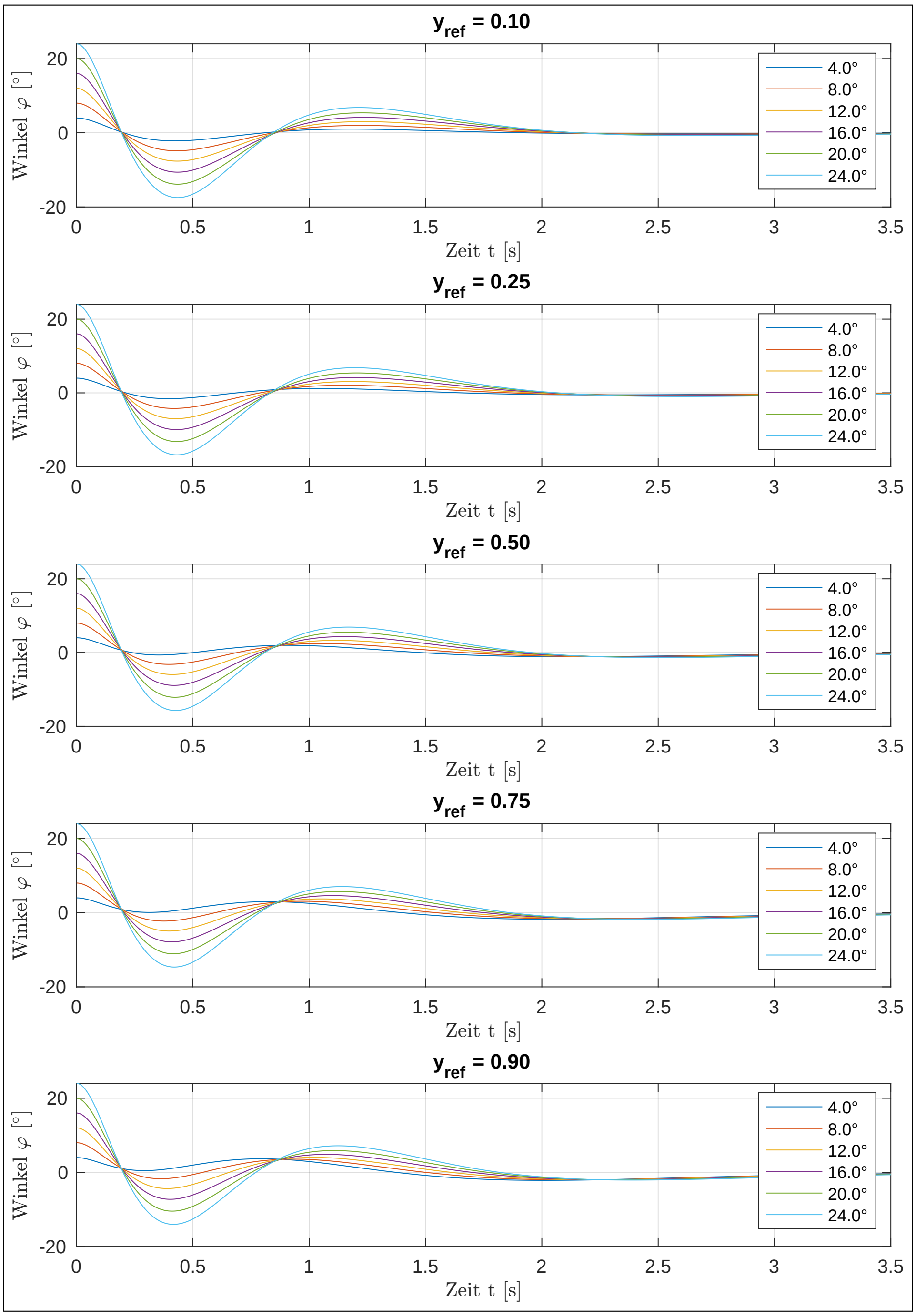

Abb. 37: φ für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung für das nichtlineare Zustandsraummodell

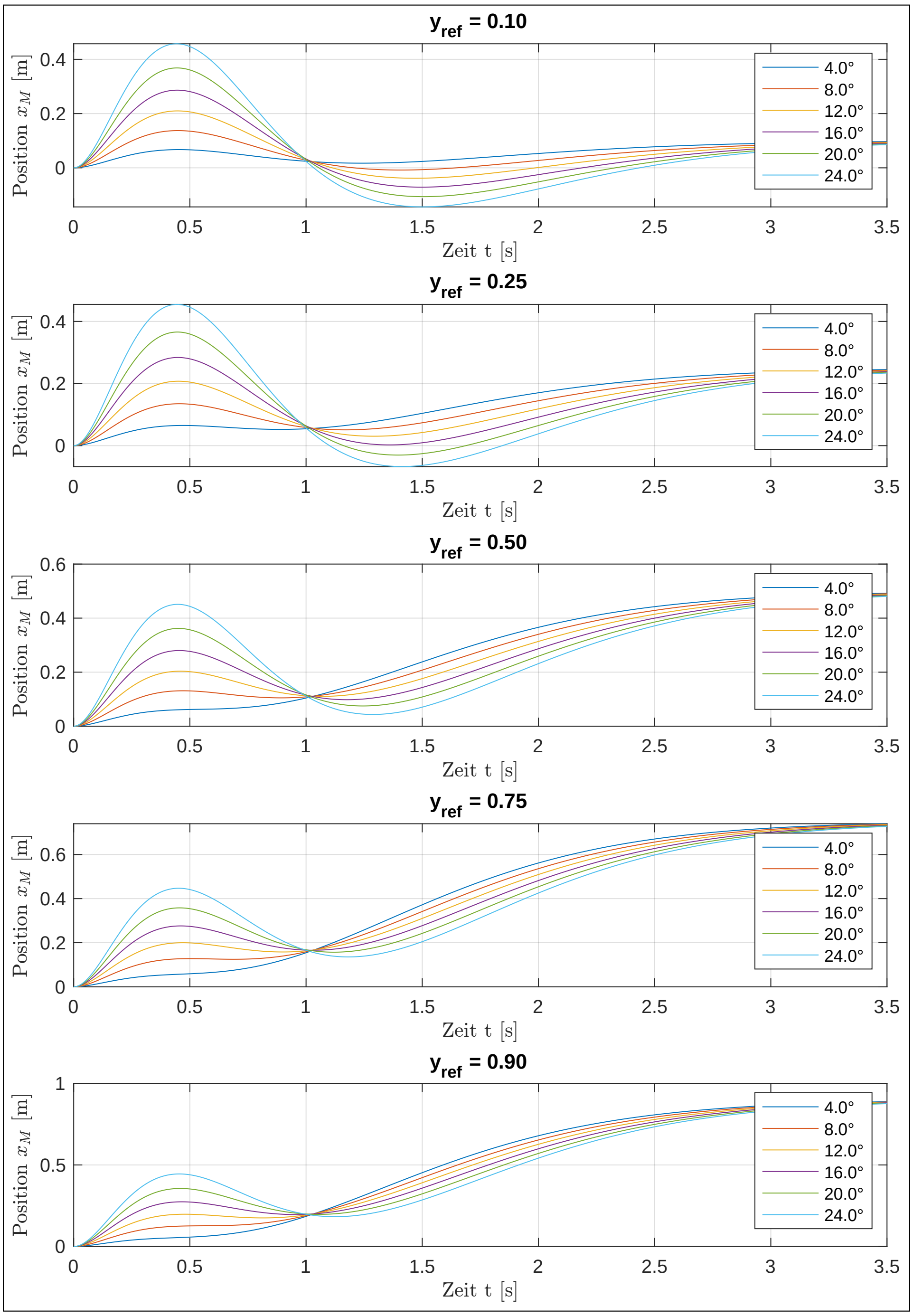

Abb. 38: x_{M} für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung für das nichtlineare Zustandsraummodell

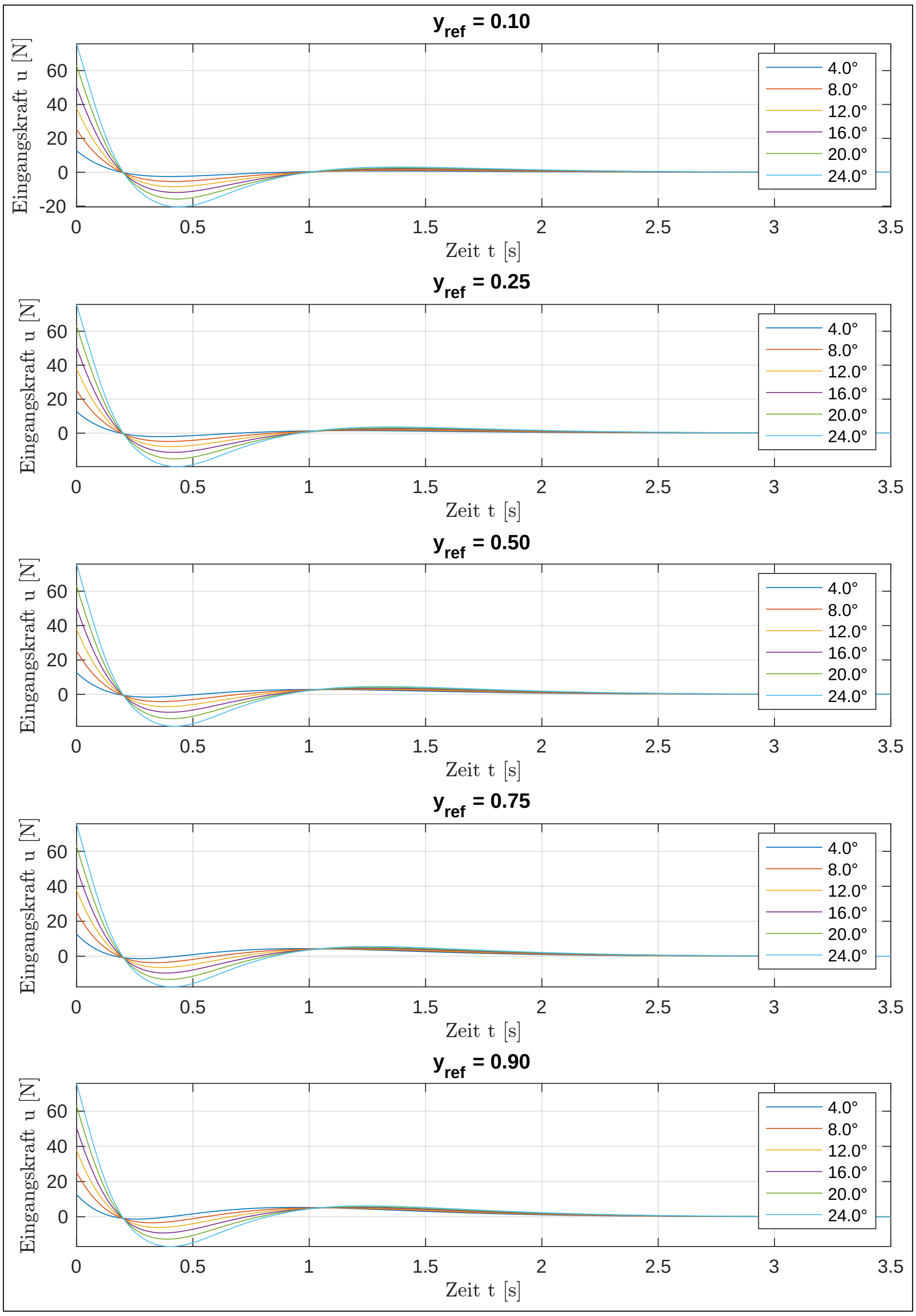

Abb. 39: u für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung für das nichtlineare Zustandsraummodell

7.2.4 Vergleich des Regelverhaltens

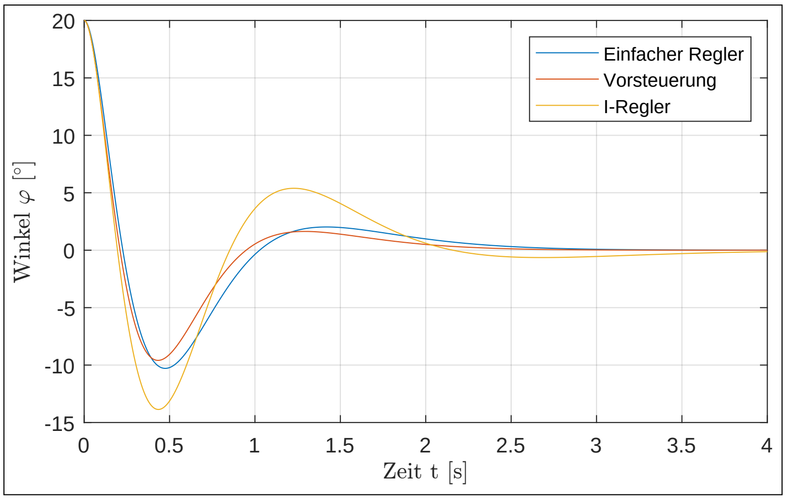

Abb. 40: φ für Regler mit einfacher Zustandsrückführung, Regler mit Vorsteuerung und Regler mit I-Regelung bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am nichtlinearen Zustandsraummodell

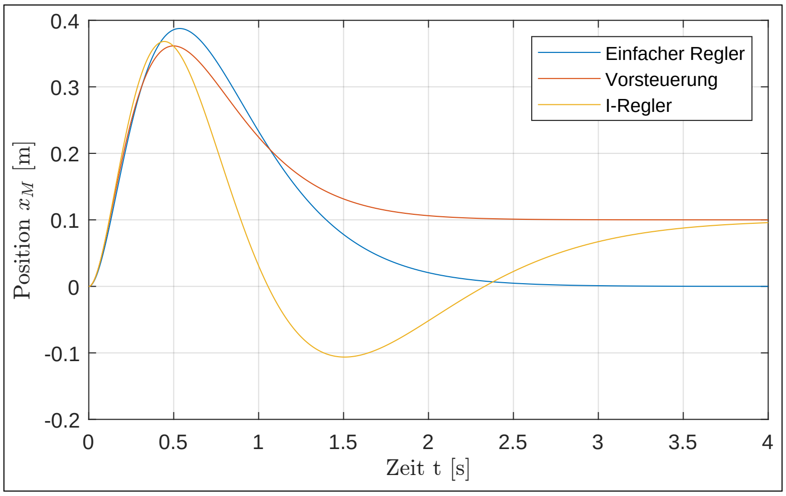

Abb. 41: x_{M} für Regler mit einfacher Zustandsrückführung, Regler mit Vorsteuerung und Regler mit I-Regelung bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am nichtlinearen Zustandsraummodell

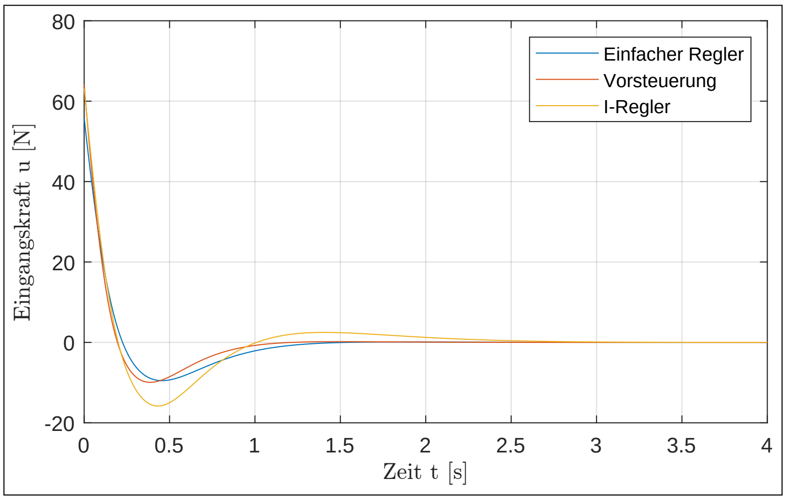

Abb. 42: u für Regler mit einfacher Zustandsrückführung, Regler mit Vorsteuerung und Regler mit I-Regelung bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am nichtlinearen Zustandsraummodell

8 Beobachter

Bisher wurde von einer wesentlichen Vereinfachung der Realität ausgegangen. Nämlich dass für Stabilisierung, Zustandsrückführung etc. der gesamte Zustandsvektor des Kontrollsystems zur Verfügung steht. Tatsächlich sind in der Regel nicht alle Zustandsinformationen bekannt. Beispielsweise weil sie technisch überhaupt nicht messbar sind oder nur unter großem technischen beziehungsweise finanziellen Aufwand ermittelt werden könnten. Sprachlich wird vereinfacht gesagt, dass die entsprechenden Größen *nicht messbar* sind.

$$dim(y) < dim(x)$$

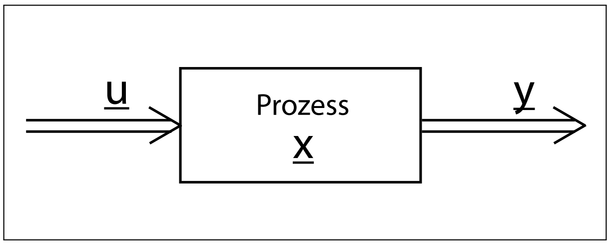

Abb. 43: Schematische Darstellung eines allgemeinen Systems im Zustandsraum

Da aber dennoch alle Zustände für die Zustandsregelung benötigt werden, wird der Beobachter eingeführt.
Mit dessen Hilfe ist es möglich innere Zustände zu rekonstruieren. Dies erfolgt über ein **Modell** und dem **Vergleich** der rekonstruierten Zustände mit den gemessenen Ausgängen (Abbildung 44).

Ansatz von Luenberger:

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underbrace{\underline{A} \cdot \hat{\underline{x}} + \underline{B} \cdot \underline{u}}_{Modell} + \underbrace{\underline{L} \cdot \left(\underline{y} - \hat{\underline{y}}\right)}_{Vergleich}$$

$$\hat{\underline{y}} = \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}$$

Im Fall des behandelten inversen Pendels kann die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ nicht gemessen werden, sondern muss über den Beobachter rekonstruiert werden. Der mathematische Ansatz und die Umsetzung in Matlab/Simulink sind in den beiden folgenden Unterabschnitten beschrieben.

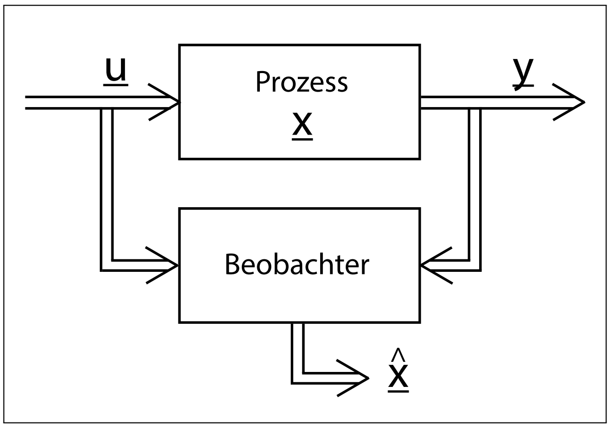

Abb. 44: Schematische Darstellung eines allgemeinen Systems mit Beobachter im Zustandsraum

8.1 Überprüfung der Beobachtbarkeit

Naheliegend ist zunächst die Überlegung anzustellen, wann sich der Gesamtzustand $\underline{x}$ aus dem Ausgang $\underline{y}$ rekonstruieren lässt. Dies wird auch **Beobachtbarkeit** des Systems genannt. Konkret gilt der Satz:

Ein System ist beobachtbar, falls mit der Messung von $\underline{u}$ und $\underline{y}$ nach endlicher Zeit t der unbekannte Zustandsvektor $\underline{x}$ vom System rekonstruiert werden kann.

Der Beobachter lässt sich auf die Klasse der linearen zeitinvarianten Systeme (LTI) anwenden:

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \underline{A} \cdot \underline{\hat{x}} + \underline{B} \cdot \underline{u} + \underline{L} \cdot \left(\underline{y} - C \cdot \underline{\hat{x}}\right) \tag{71}$$

Ein System ist vollständig beobachtbar, falls für die **Beobachtbarkeitsmatrix**

$$Q_{\mathrm{Obs}} = \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{pmatrix} \tag{72}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$, $C \in \mathbb{R}^{(p \times n)}$ für SISO Systeme

$$det(Q_{\text{Obs}}) \neq 0 \tag{73}$$

und für MIMO bzw. SIMO Systeme

$$rank(Q_{\text{Obs}}) = n \quad \text{bzw.} \quad m \tag{74}$$

gilt, wobei n die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen einer Matrix ist und m die Anzahl der linear unabhängigen Spalten. Falls

$$\begin{aligned} n > m : \\ rank(X) = m \end{aligned}$$

und falls

$$\begin{aligned} m > n : \\ rank(X) = n. \end{aligned}$$

Die konkrete **C-Matrix** für das inverse Pendel

$$C_{\text{Obs}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{75}$$

besitzt p Zeilen, wobei sich die Anzahl der Zeilen nach den messbaren Zuständen richtet. Zu erkennen ist, dass ein SIMO System auf Beobachtbarkeit untersucht werden muss. Somit muss der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix bestimmt werden. Das Aufstellen der Beobachtbarkeitsmatrix führt zu

$$
Q_{\text{Obs}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.8502 & 0.0008 & 0 & -2.3333 \\ 26.6505 & -0.0248 & 0 & 5.8333 \\ -0.8502 & 0.0008 & 0 & -2.3333 \\ 2.0049 & -0.8521 & 0 & 5.4491 \\ -5.6209 & 26.6557 & 0 & -13.7559 \\ 2.0049 & -0.8521 & 0 & 5.4491 \\ -27.3408 & 2.0304 & 0 & -17.6849 \end{bmatrix}. \tag{76}
$$

Der **Rang der Beobachtbarkeitsmatrix** folgt zu:

$$
\boxed{rank(Q_{\text{Obs}}) = 4} \tag{77}
$$

Da $n > m$ muss $rank(Q_{\text{Obs}}) = 4$ gelten. Da dies der Fall ist, ist das System **beobachtbar**.

8.2 Beobachterentwurf

Wie bereits bei der Untersuchung der Beobachtbarkeit festgestellt wurde, handelt es sich bei dem zu beobachtenden System um ein SIMO System. Im Folgenden soll der Beobachter auf einen Zustandsregler mit I-Regelung (wie bereits in Unterabschnitt 6.3 mit Referenzwertvorgabe für x_{M}) angewendet werden. Damit der Beobachter auf diesen Regler angewendet werden kann, muss dieser zunächst implementiert werden. Dazu müssen bevor der Beobachterentwurf stattfinden kann, zunächst passende k-Faktoren über die Formulierung von linearen Matrixungleichungen gefunden werden. Als Ansatz gelten die **Quadratischen Ljapunov Funktionen**:

$$
\begin{aligned}
V(\underline{x}) &= \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x} \\
V(\underline{x}) > \underline{0} \curvearrowright \underline{P} > \underline{0} \quad &mit \quad \underline{P} = \underline{P}^T
\end{aligned} \tag{78}
$$

Die zeitliche Ableitung der Funktion folgt zu:

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{\dot{x}}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{\dot{x}} \tag{79}$$

mit $\underline{\dot{x}} = (\underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{x}) &= ((\underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{x})^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot (\underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{x} \\ \dot{V}(\underline{x}) &= \underline{x}^T \cdot (\underline{A}^T \cdot \underline{P} - \underline{k}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{A} - \underline{P} \cdot \underline{B} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{x} \end{aligned} \tag{80}$$

Gewählt wurde weiterhin der Ansatz für **exponentielle Stabilität**. Gesucht ist somit

$$\dot{V}(\underline{x}) < -2 \cdot \alpha \cdot V(\underline{x}) \tag{81}$$

mit $\alpha > 0$ als als vorgegebene **Abklingrate (Decay-Rate)**.

Mit dem Kriterium für exponentielle Stabilität folgt:

$$\underbrace{\underline{x}^T \cdot (\underline{A}^T \cdot \underline{P} - \underline{k}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{A} - \underline{P} \cdot \underline{B} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{x}}_{\dot{V}(\underline{x})} < \underbrace{-2 \cdot \alpha \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{x}}_{-2 \cdot \alpha \cdot V(\underline{x})}$$

$$\underline{x}^T \cdot (\underline{A}^T \cdot \underline{P} - \underline{k}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{A} - \underline{P} \cdot \underline{B} \cdot \underline{k} + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{P}) \cdot \underline{x} < \underline{0} \tag{82}$$

Dies ist erfüllt, falls die zusammengesetzte Matrix negativ definit ist, also

$$\underline{A}^T \cdot \underline{P} - \underline{k}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{A} - \underline{P} \cdot \underline{B} \cdot \underline{k} + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{P} < \underline{0}$$

gilt.

Die Gleichung 82 enthält nichtlineare Terme. Zur Überführung in eine lineare Gleichung wird eine Variable $\underline{M} = \underline{k} \cdot \underline{x}$ eingeführt.

$$\underline{x} \cdot \underline{A}^T + \underline{A} \cdot \underline{x} - \underline{M}^T \cdot \underline{B}^T - \underline{B} \cdot \underline{M} + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{x} < \underline{0} \qquad (83)$$
$$\underline{x} > \underline{0}$$

Analog zu Unterabschnitt 6.3 wird die **Matrix C** wie folgt gewählt:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebenfalls müssen wieder $\underline{\tilde{A}}$ und $\underline{\tilde{B}}$ bestimmt werden:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ -\underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad ; \underline{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^{(n+p)x(n+p)}$$
$$\underline{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad ; \underline{\tilde{B}} \in \mathbb{R}^{(n+p)x(m)}$$

Zuletzt wird α gewählt zu

$$\boxed{\alpha = 0.6}.$$

Über die LMI-Funktionen in Matlab kann nun die **lineare Matrixungleichung** aus Gleichung 83 gelöst werden. Die $\tilde{k}$-Matrix mit $\underline{k} = \underline{M} \cdot \underline{x}^{-1}$ resultiert zu:

$$\underline{\tilde{k}} = \begin{bmatrix} -314.9301 & -58.3101 & -108.2878 & -84.0734 & 59.0425 \end{bmatrix} \qquad (84)$$

Gemäß Gleichung 62 folgen die Verstärkungskoeffizienten (unterteilt in **Zustandsrückführungskoeffizienten** und **I-Verstärkungskoeffizienten**) wie nachfolgend gezeigt:

$$\boxed{\underline{k}_{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} -314.9301 & -58.3101 & -108.2878 & -84.0734 \end{bmatrix}} \qquad (85)$$

$$\boxed{\underline{k}_{\mathrm{I}} = [-59.0425]} \qquad (86)$$

Die **Polstellen des Reglers** können abschließend berechnet werden über:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{s}_{\mathrm{P}} &= eig(\underline{\tilde{A}} - \underline{\tilde{B}} \cdot \underline{\tilde{k}}) \\ &= \begin{bmatrix} -9.4+5.1i & -9.4-5.1i & -1.2+0i & -1.5+1.2i & -1.5-1.2i \end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{87}$$

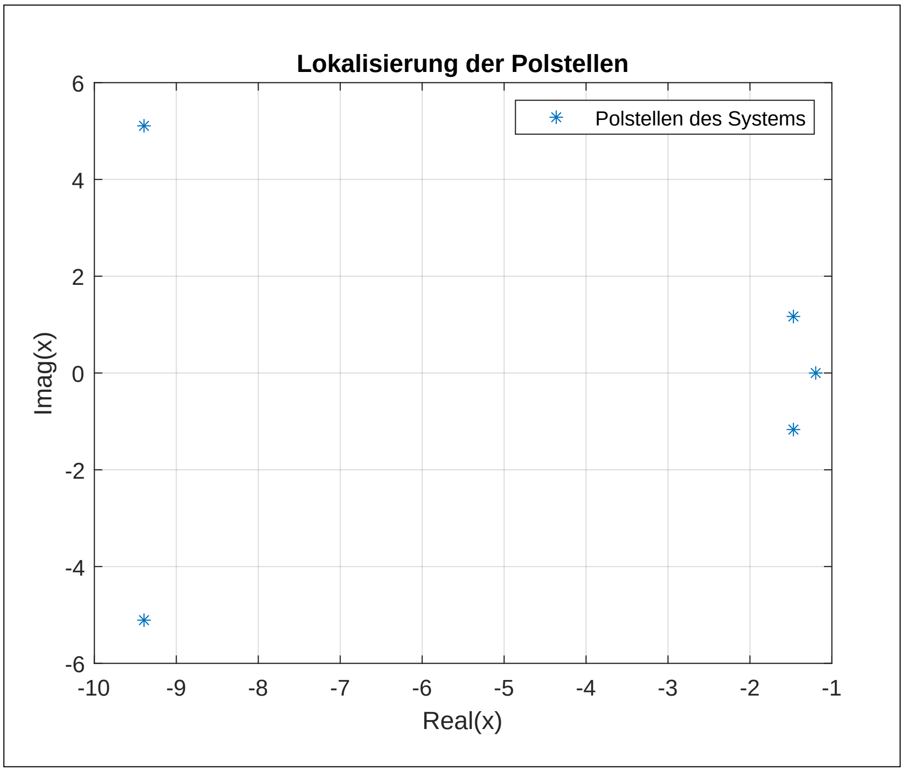

Abb. 45: Polstellenlage des Systems mit I-Regelung und LMI

Nachdem der Regler nun erfolgreich über LMI's implementiert wurde, kann nun mit dem Beobachterentwurf fortgesetzt werden.
Eine wichtige Erkenntnis wurde bis jetzt vorenthalten. zwischen dem Zustandsreglerentwurf und dem Beobachterentwurf besteht eine **Dualität**. Das heißt konkret, das erneut der Ansatz mit quadratischen Ljapunov-Funktionen angesetzt werden kann, um den Beobachter umzusetzen.

$$V(\underline{e}) = \underline{e}^T \cdot \underline{P} \cdot \underline{e} \quad mit \quad V(\underline{e}) > 0 \quad , \quad \underline{e} \neq 0 \tag{88}$$

Auch hier wird ein Beobachter mit Abklingrate gewählt, um diesmal einen exponentiellen Verlauf des Beobachterfehlers zu ermöglichen. Über α kann die Abklingrate des Fehlers genau eingestellt werden. Gesucht ist nun:

$$\dot{V}(\underline{e}) + 2 \cdot \alpha \cdot V(\underline{e}) < 0 \tag{89}$$

Somit kann analog zum Regler eine LMI Formulierung mit $\underline{N} = \underline{P} \cdot \underline{L}$ vorgenommen werden.

$$\begin{aligned} \underline{A}^T \cdot \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{A} - \underline{N} \cdot \underline{C} - \underline{C}^T \cdot \underline{N} + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{P} &< 0 \\ \underline{P} &> 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Zuletzt wird α gewählt zu

$$\boxed{\alpha_{Obs} = 4.0}.$$

Über die LMI-Funktionen in Matlab kann nun die lineare Matrixungleichung aus Gleichung 90 gelöst werden. Die **L-Matrix** mit $\underline{L} = \underline{P}^{-1} \cdot \underline{N}$ resultiert zu:

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 9.7627 & -0.1421 & 1.1786 \\ 72.8250 & -0.6596 & 11.3192 \\ 0.2876 & 4.5000 & 1.0417 \\ -3.2221 & -0.0416 & 2.1657 \end{bmatrix}} \tag{91}$$

Die **Polstellen des Beobachters** können abschließend berechnet werden über:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{s}_{\mathrm{P}} &= eig(\underline{A} - \underline{L} \cdot \underline{C}) \\ &= \begin{bmatrix} -4.9 + 5.0i & -4.9 - 5.0i & -4.5 + 0.03i & -4.5 - 0.03i \end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{92}$$

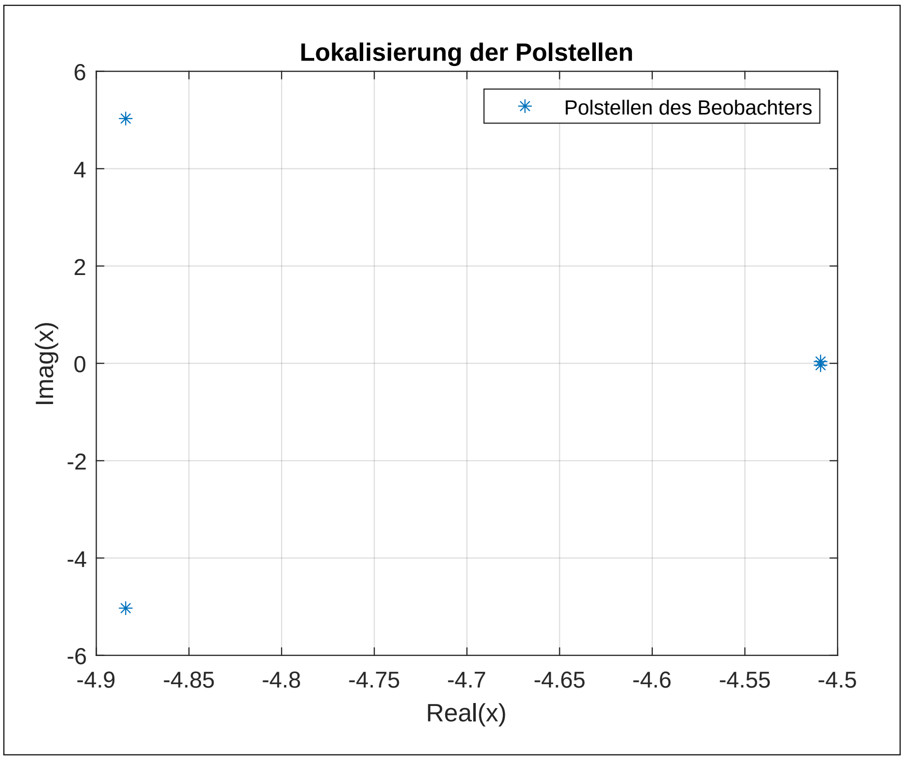

Abb. 46: Polstellenlage des Beobachters

Wichtig ist dabei zu beachten, dass das Systemverhalten des Beobachter schneller sein muss, als das des geschlossenen Regelkreises. Es gilt:

$$\left|Re\{\underline{s}_{\mathrm{P}_{Obs}}\}\right| > \left|Re\{\underline{s}_{\mathrm{P}_{Regler}}\}\right| \cdot (2...3) \tag{93}$$

Abbildung 47 zeigt die Systemstruktur des Zustandsreglers mit I-Regelung inklusive Beobachter.

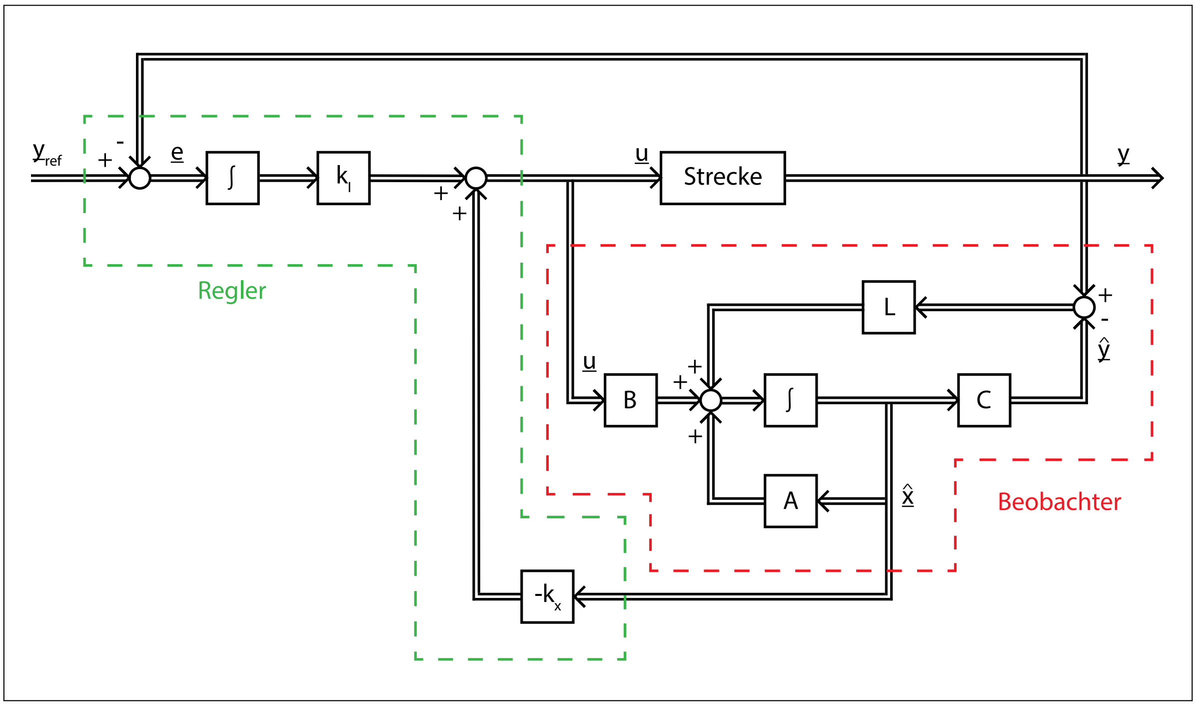

Abb. 47: Schematische Darstellung des Zustandsreglers mit I-Regelung und Beobachter

8.3 Beobachtervalidierung

Im letzten Unterabschnitt der Arbeit soll der entwickelte Beobachter auf seine Funktionstüchtigkeit validiert werden. Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt postuliert, wird der Beobachter auf den Zustandsregler mit I-Regelung angewendet. Das Modell in Simulink wird entsprechend des entworfenen Schemas in Abbildung 47 umgesetzt. Abbildung 48 zeigt die Blockstruktur des Beobachters, welcher mit in den Regelkreis integriert wurde. $\underline{\hat{x}}$ enthält die vier rekonstruierten Zustände des Systems. Unter anderem ist dort auch der Zustand $\dot{\varphi}$ wiederzufinden, der wie eingangs erwähnt nicht gemessen, sondern ausschließlich über den Beobachter ermittelt werden kann. Abbildung 49 zeigt das Ergebnis der erfolgreichen Rekonstruktion der Winkelgeschwindigkeit des Pendels. Der Kurvenverlauf verhält sich ähnlich zum messbaren Winkel φ des Systems. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Winkelgeschwindigkeit wieder zu $0m/s$ ausgeregelt wird, was ebenfalls plausibel ist, da das Pendel wieder in der Ruhelage verharrt, sobald eine Eingangsstörung (in diesem Fall eine Auslenkung von $20°$) auf das System ausgeregelt wurde.

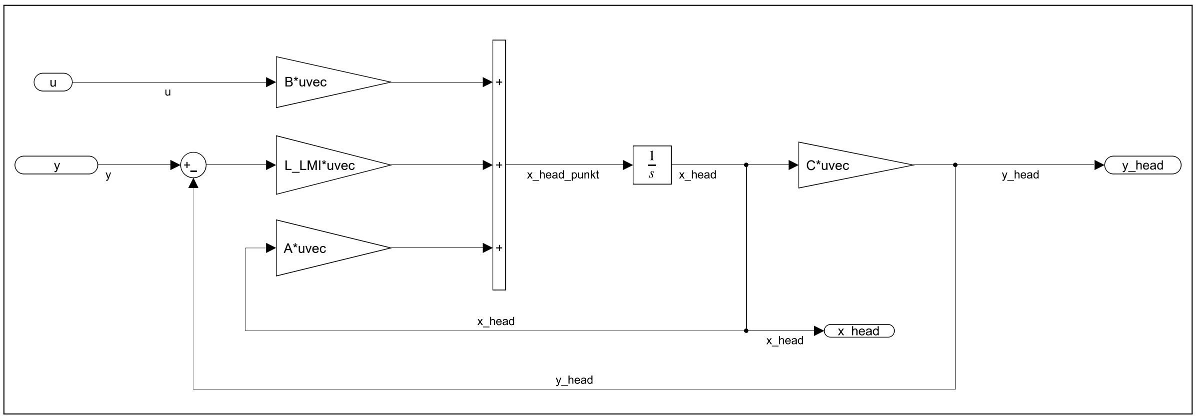

Abb. 48: Simulink Beobachter-Blockschaltbild für Zustandsregler mit I-Regelung und LMI

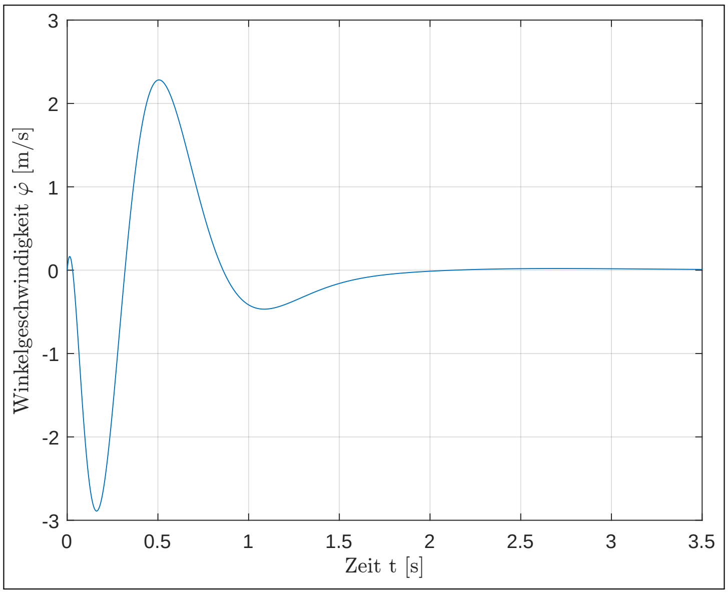

Abb. 49: Ergebnis der Rekonstruktion von $\dot{\varphi}$ über den Beobachter

Anschließend werden die messbaren Zustände φ, x_M und $\dot{x}_M$ mit den zugehörigen rekonstruierten Zuständen $\hat{\varphi}$, $\hat{x}_M$ und $\hat{\dot{x}}_M$ verglichen, um zu prüfen, wie groß die durch den Beobachter erzeugten Abweichungen zwischen den realen und den rekonstruierten Zuständen sind. In Abbildung 50 fällt auf, dass die Abweichungen zu Beginn vergleichsweise groß sind, jedoch über wenige Sekunden annähernd verschwinden. Grund für die anfängliche Differenz zwischen φ und $\hat{\varphi}$ ist das Integrationsglied im Beobachter, welches bei Null startet.

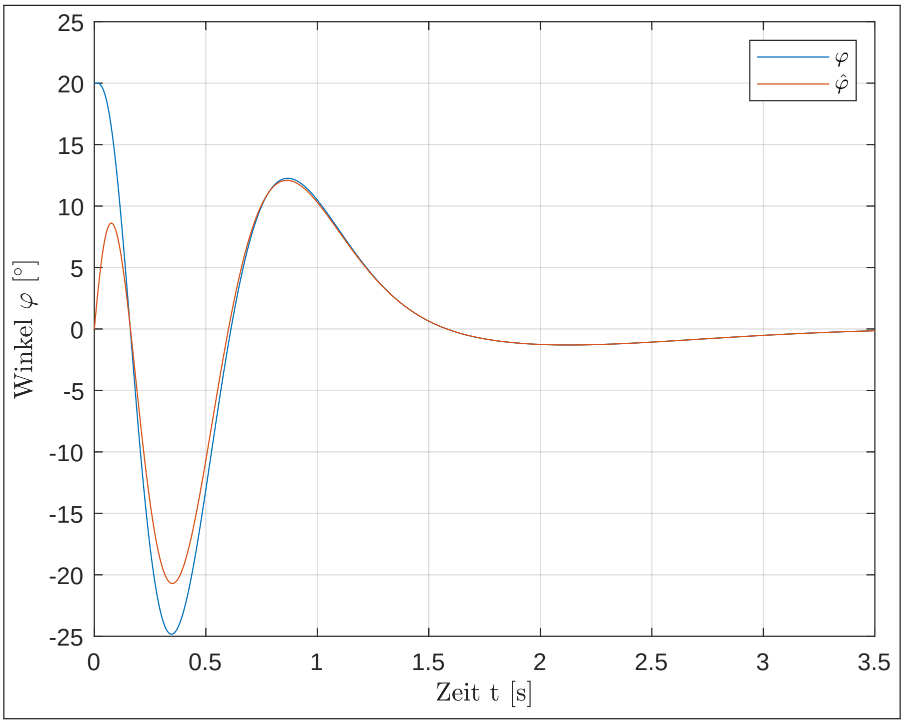

Abb. 50: Validierung des Beobachters anhand von φ über den Vergleich mit $\hat{\varphi}$ bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am linearen Zustandsraummodell

Bei der Position x_M und der Geschwindigkeit $\dot{x}_M$ des Wagens (zu sehen in Abbildung 51 und Abbildung 52) fallen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Kurvenverläufen der rekonstruierten Zustände und der realen bzw. gemessenen Zustände auf. Somit kann geschlussfolgert werden, dass die Implementierung des Beobachters erfolgreich war.

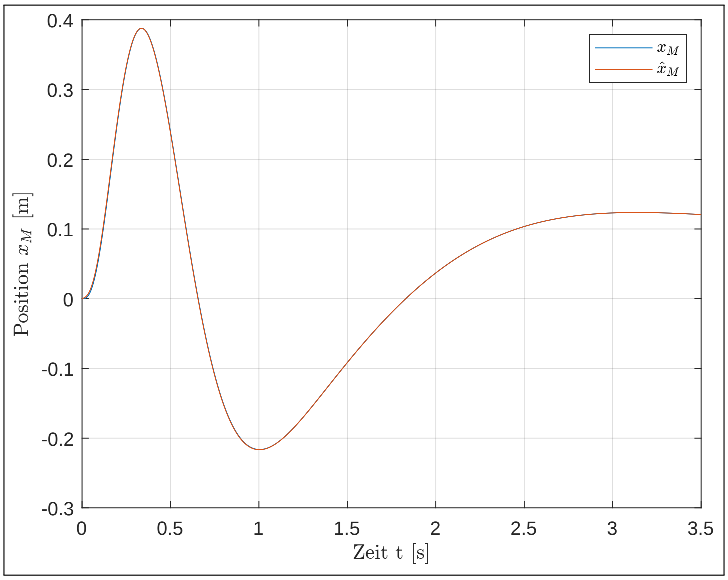

Abb. 51: Validierung des Beobachters anhand von x_M über den Vergleich mit $\hat{x}_M$ bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am linearen Zustandsraummodell

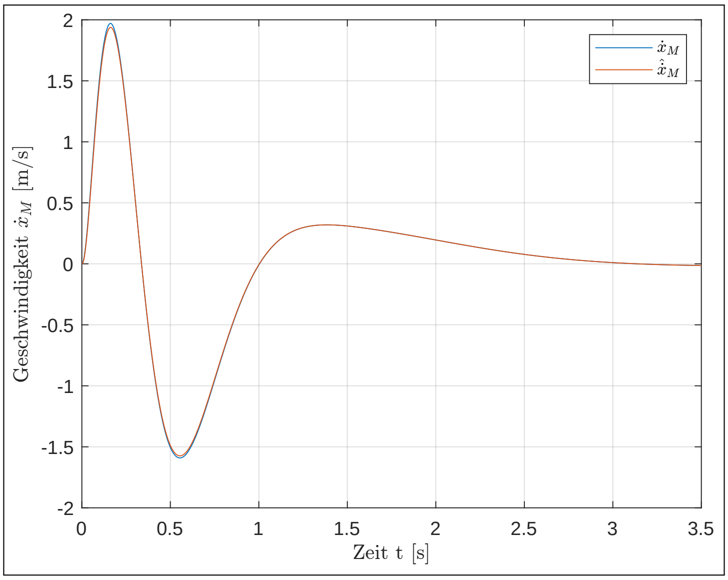

Abb. 52: Validierung des Beobachters anhand von $\dot{x}_M$ über den Vergleich mit $\hat{\dot{x}}_M$ bei einer Anfangsauslenkungen von $20°$ und einer Referenzposition $y_{ref} = 0,1m$ am linearen Zustandsraummodell

Abschließend soll geprüft werden, ob die Systemgrenzen des Inversen Pendelversuchs für den umgesetzten Regler mit quadratischen Ljapunov-Funktionen und LMI's inklusive des Beobachters eingehalten werden. Wie auch schon bei der Reglervalidierung in Abschnitt 7 werden zum einen die Eingangsparameter (Anfangsauslenkung und Referenzposition) variiert und zum anderen wird der Regler am linearen Modell getestet. Es wird dabei ausschließlich der im vorherigen Unterabschnitt entwickelte I-Regler untersucht. Außerdem findet die Validierung ausschließlich an der linearen Regelstrecke statt, da die Ergebnisse des nichtlinearen Systems annähernd identisch sind, wie bereits in Abschnitt 5 nachgewiesen wurde. Zu prüfen ist, ob für die gewählten Abklingraten (Decay-Rate) des Reglers und des Beobachters sowohl die Grenzen der maximalen Wagenposition eingehalten werden ($x_{\mathrm{M}_{\max}} = \pm 1m$) als auch die maximale Eingangskraft des Motors ($u_{\max} = 80N$).

Zunächst wird der Winkel φ des Pendels am Zustandsregler mit I-Regelung und Beobachter betrachtet. Die Ergebnisse der Simulation mit Simulink sind in Abbildung 53 aufgezeigt. Der wesentliche Kurvenverlauf spricht mit dem I-Regler aus Abbildung 22 überein. Unterschiede sind vor allem durch die abweichenden Polstellen des Reglers zu begründen. Wurden zunächst in Abschnitt 7 die Polstellen vorgegeben, so kamen nun durch den Ansatz mit quadratischen Ljapunov-Funktionen mit lediglich der Vorgabe einer Abklingrate andere Polstellen zustande. Weiterhin schwingt der Winkel im Vergleich zur Implementation ohne Beobachter etwas mehr über. Grund dafür ist die anfänglich größere Abweichung zwischen dem rekonstruierten und gemessenen Winkel des Pendels.

Mit Hilfe von Abbildung 54 kann erfolgreich nachgewiesen werden, dass die maximale Position des Wagens nicht überschritten wird. Weiterhin ist es möglich wie bei der I-Regelung in Unterunterabschnitt 7.1.3 eine Referenzposition vorzugeben, die nach dem Regelvorgang erreicht wird. Die Kurvenverläufe der Wagenposition mit Beobachter decken sich weitestgehend mit denen in Abbildung 23.

Abbildung 55 ist der Nachweis, dass für sämtliche Referenzpositionen innerhalb der Systemgrenzen bei einer maximalen Anfangsauslenkung von $24°$ die Eingangskraft u von maximal 80 N nicht überschritten wird. Bei einer Wahl der Abklingrate des Reglers von $\alpha_{\mathrm{Regler}} = 0.6$ und einer Abklingrate des Beobachters mit $\alpha_{\mathrm{Obs}} = 4$ wird die zur Verfügung stehende Eingangskraft maximal ausgereizt. Im Vergleich zu Abbildung 24 (Eingangskraft bei I-Regler ohne Beobachter) fällt auf, dass erneut durch das Integrationsglied in der Beobachter Blockstruktur eine anfängliche Abweichung auftritt.

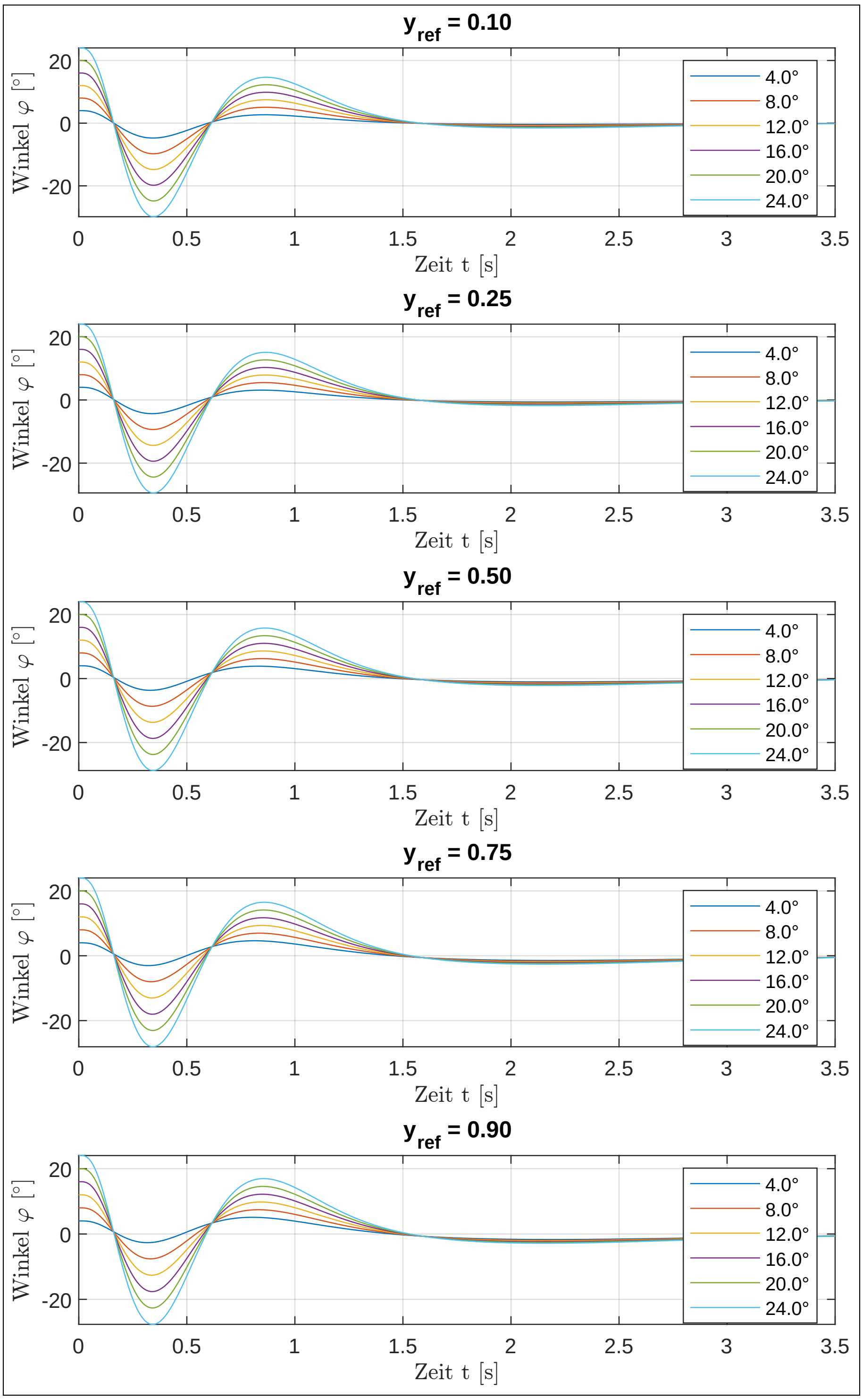

Abb. 53: φ für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung und Beobachter für das lineare Zustandsraummodell

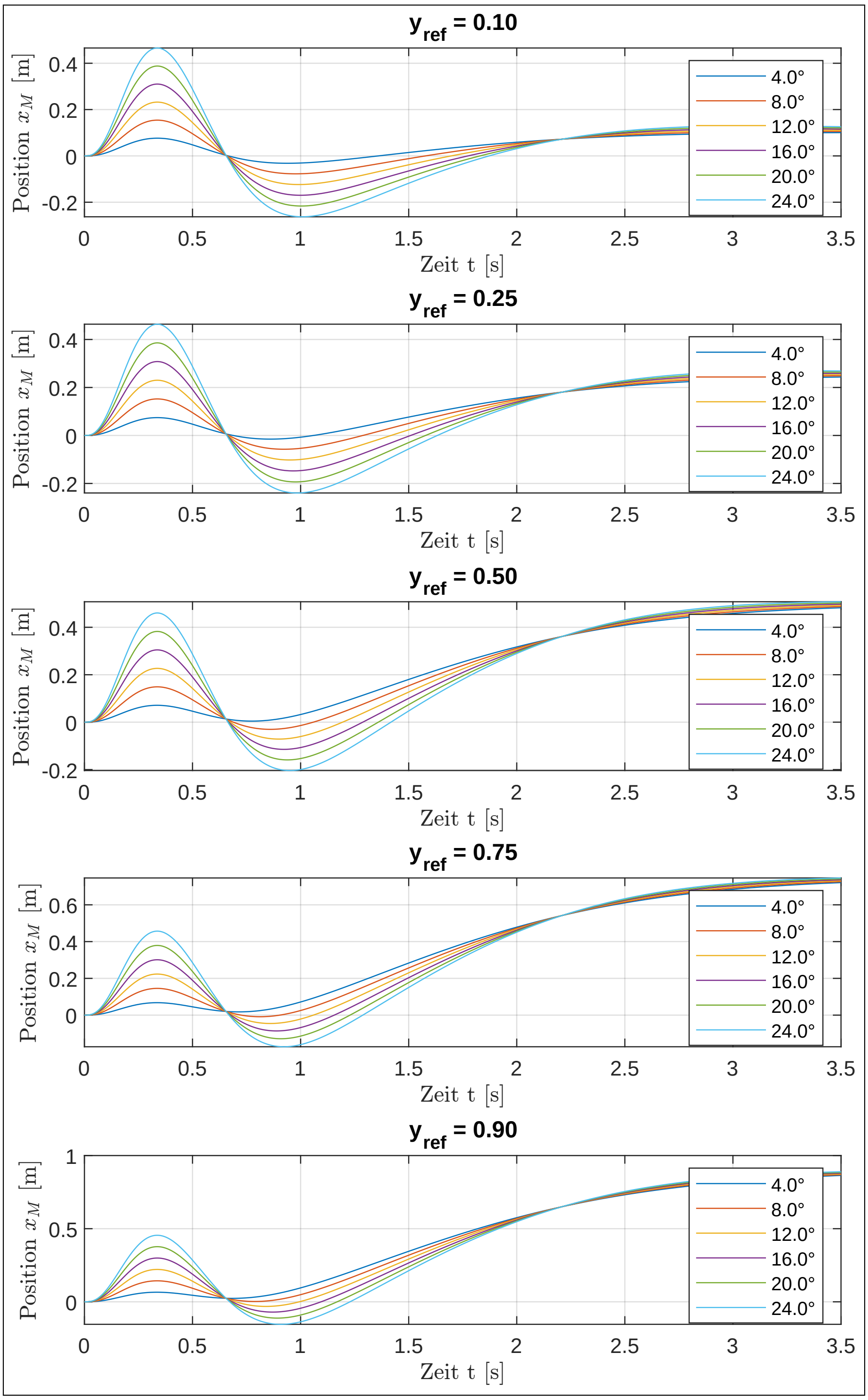

Abb. 54: x_M für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung und Beobachter für das lineare Zustandsraummodell

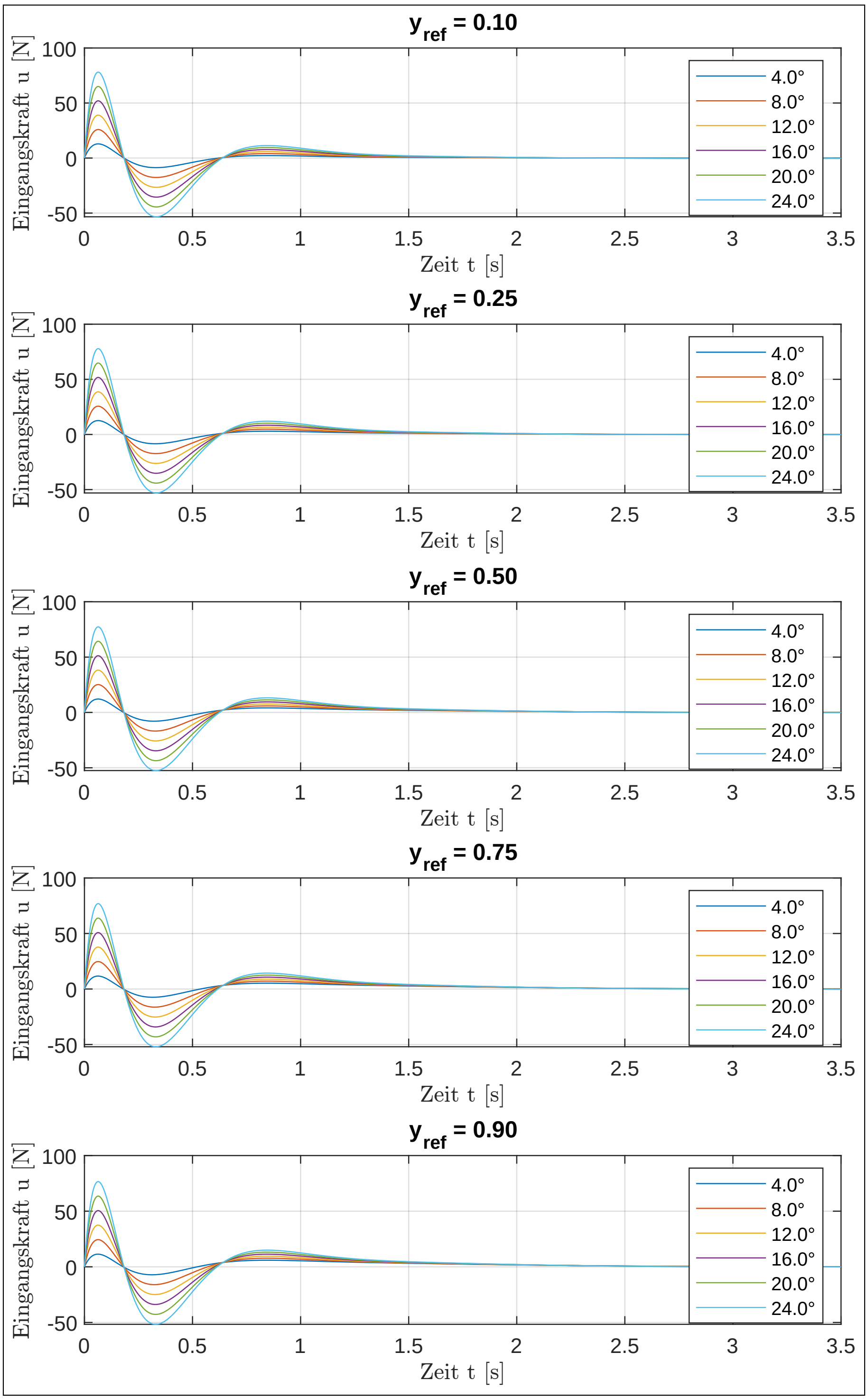

Abb. 55: u für verschiedene Referenzpositionen y_{ref} und Anfangsauslenkungen am Zustandsregler mit I-Regelung und Beobachter für das lineare Zustandsraummodell

Literaturverzeichnis

[1] HTW-Logo auf dem Deckblatt
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Logo_HTW_Berlin.svg
Stand: 17.08.2018 um 14:49 Uhr

[2] HTW-Logo in der Kopfzeile
http://tonkollektiv-htw.de/
Stand: 17.08.2018 um 14:53 Uhr

[3] Skript Moderne Methoden der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. Horst Schulte

[4] Anleitung Linearisierung eines zeitinvarianten,
nichtlinearen Zustandmodells
Prof. Dr.-Ing. Heide Brandstädter

[5] Regelungs- und Steuerungstechnik: Polstellenverteilung
Prof. Dr.-Ing. M. Buss

[6] Beobachtbarkeit und Beobachter für lineare Kontrollsysteme
Judith Schmidt, Universität Bayreuth