Prof. Dr.-Ing. H. Brandtstädter h.brandtstaedter@htw-berlin.de	Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin Bachelor Studiengang Elektrotechnik	Modellbildung und Simulation Arbeitsblatt 2: Linearisierung WS 2018/ 19

Linearisierung eines zeitinvarianten, nichtlinearen Zustandsmodells

Oft werden nichtlineare Reglerentwurfsprobleme durch Linearisierung der nichtlinearen Dynamik und Anwendung linearer Reglerentwurfsverfahren gelöst. Eine Möglichkeit ist die Approximation der nichtlinearen Dynamik mittels einer Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied. Allerdings ist diese Linearisierung durch Näherung nur in einer kleinen Umgebung der verwendeten Referenzlösung gültig. Verlässt der Systemzustand diese Umgebung, so ist das Verhalten des Systems nicht mehr vorhersehbar.

Für ein zeitinvariantes, nichtlineares System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}\,, \underline{u}) \\ \underline{y} &= \underline{g}(\underline{x}\,, \underline{u}) \end{aligned} \tag{1}$$

liege eine Referenzlösung

$$\underline{x}^*,\ \underline{y}^*,\ \underline{u}^* \tag{2}$$

vor, z.B. eine Ruhelage oder ein Arbeitspunkt.

Definition: Arbeitspunkt Die Arbeitspunkte des Systems (1) bezüglich $\underline{u}^* =$ konstant sind alle Zustandspunkte, für die gilt

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{f}(\underline{x}^*,\, \underline{u}^*,\, t) = \underline{0} \quad \text{für beliebige } t \geq t_0.$$

■

Definition: Ruhelage Die Ruhelagen des Systems (1) sind alle Arbeitspunkte mit $\underline{u}^* = \underline{0}$. ■

Das *Großsignalverhaltens* des Systems (1) ist nichtlinear. Regelungstechnisch reicht jedoch häufig die Kenntnis des *Kleinsignalverhaltens* des Systems aus. Es beschreibt das Systemverhalten in der Nähe der Referenzlösung. Das Kleinsignalverhalten $\Delta\underline{x}$ $\Delta\underline{u}$, $\Delta\underline{y}$ bezüglich der Referenz (2) kann mittels einer Taylorreihenentwicklung der Zustandsdifferentialgleichung ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^* + \Delta\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}^* + \Delta\underline{x},\ \underline{u}^* + \Delta\underline{u}) \\ &= \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(x^*,u^*)} \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right]_{(x^*,u^*)} \Delta\underline{u} + \underline{R}(\Delta\underline{x}^2, \Delta\underline{u}^2) \end{aligned} \tag{3}$$

Bei der Bildung dieser Reihe wird mehrfach von der *Funktional- oder Jacobi-Matrix* von $\underline{f}(\cdot)$ Gebrauch gemacht. Es gilt

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Die zweite Gleichung in (1) kann wie in (3) entwickelt werden. Vernachlässigt man in beiden Reihen die nichtlinearen Restglieder, d.h. $\underline{R}(\Delta\underline{x}^2, \Delta\underline{u}^2) \approx \underline{0}$, dann folgt für das auf die Referenz bezogene Kleinsignalmodell

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{\underline{x}} &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(x^*,u^*)} \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right]_{(x^*,u^*)} \Delta\underline{u} \\
\Delta\underline{y} &= \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right]_{(x^*,u^*)} \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial u_j}\right]_{(x^*,u^*)} \Delta\underline{u} \,.
\end{aligned}$$

Ergebnis der Linearisierung eines nichtlinearen Systems um eine zeitunabhängige Referenzlösung ist ein LTI-Zustandsmodell in der Standardform

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\
\underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}
\end{aligned} \,. \tag{4}$$

mit auf die Ruhelage bezogenen konstanten Zustandsmatrizen.

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{\underline{x}} &= A\Delta\underline{x} + B\Delta\underline{u} \\
\Delta\underline{y} &= C\Delta\underline{x} + D\Delta\underline{u}
\end{aligned} \tag{5}$$

Hinweis: Geht aus dem Zusammenhang hervor, dass es sich bei (5) um ein Kleinsignalmodell handelt, dann wird zur Vereinfachung der Schreibweise das Symbol Δ häufig unterdrückt.