第五册

大青花鱼

目录

第一章 圆 **5**

1.1 圆的基本性质 5

1.2 圆和旋转 7

1.3 圆心角和圆周角 8

1.4 点到圆的势 11

1.5 切线 13

第二章 圆和多边形 **15**

2.1 三角形的外接圆和内切圆 15

2.2 圆内接四边形 16

2.3 垂心组和外接圆 20

2.4 九点圆 23

2.5 圆内接多边形 25

2.6 弧长与面积* 27

第三章 三角函数 **33**

3.1 正弦函数 33

3.2 正弦定理 37

3.3 余弦函数 40

3.4 余弦定理 42

3.5 和差角公式 45

3.6 正切函数和余切函数 52

3.7 多边形的边角关系 55

第四章 从或许到确定 **57**

4.1 事件和见知 57

4.2 概率和分布 60

4.3 二项分布和均匀分布 62

4.4 排列和组合 64

第五章 多元映射 **71**

5.1 映射与多元映射 71

5.2 通过映射理解多元映射 74

5.3 “有求必允”与“一路全真” 75

5.4 二元命题的否定 78

第一章　圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

1.1　圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点 O 距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段 XY，到 O 的距离和 AB 等长的点构成一个圆。O 叫做**圆心**，XY 叫做圆的**半径**，长度一般记为 r。不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为 O、半径为 r 的圆，一般记为圆 (O,r) 或 $\odot(O,r)$。圆心 O 和另一点 P 确定的圆，一般记为圆 (O,P) 或 $\odot(O,P)$。如果不在意半径，在不至于混淆的情况下，也可以简记为圆 O。

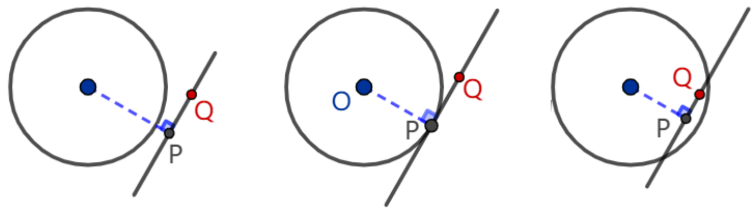
平面上的点到 O 的距离小于 r，就说它在圆内；如果等于 r，就说它在圆上；如果大于 r，就说它在圆外。

和引进直线等概念时一样，圆也有一条公理，规定它和直线的关系。

公理. 直线交圆公理 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

从这个公理出发，我们可以整理直线和圆的位置关系。

考虑直线 l 和圆 $\odot(O,r)$。过 O 作直线 $m\perp l$，记垂足为 P，$|OP|=d$。



- 如果 $d>r$，那么 P 在圆外。根据垂距定理，l 上任意点都在圆外。我们说直线 l 与圆 O **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么 P 在圆外，因此 $d>r$。
- 如果 $d=r$，那么 P 在圆上。根据垂距定理，l 上的点除了 P 都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线 l 与圆 O **相切**，称 P 为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点 Q，那么 $|OQ|=r$。l 上其他点都在在圆外，所以根据垂距定理的逆定理，$OQ\perp l$，$d=r$。
- 如果 $d<r$，那么 P 在圆内。根据直线交圆公理，直线和圆有两个交点 A、B。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于 A、B。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据直线交圆公理，直线有部分在圆内，这部分上的点到圆心距离小于 r，因此根据垂距定理，$d<r$。

设直线割圆于两点 A、B，我们说直线是圆的**割线**。根据直线交圆公理，线段 AB（除端点）在圆内。我们把线段 AB 称为圆的一条**弦**。如果 AB 过圆心 O，就说它是圆的直径，A、B 互为**对径点**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

考虑圆 O 上的弦 AB 的垂直平分线 m，圆心 O 显然在 m 上。$m\perp AB$，设垂足为 P，那么 $|AP|=|PB|$。设 m 和圆交于两点 C,D，则弦 CD 就是直径。所以我们说：**恰有一条直径平分每条弦**。

习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点 A、B，证明线段 AB（除端点）在圆内。

2. 证明：同一个圆中，直径是最长的弦。

1.2 圆和旋转

怎么画一个圆？我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角 AOB，可以这样定义**旋转**：

定义 1.2.1. 给定角 AOB，平面中一点 P 关于 $\angle AOB$ 旋转的结果，是唯一使得 $\angle POQ = \angle AOB$ 且 $|OP| = |OQ|$ 的点 Q。

O 称为旋转的**中心**。任何点 P 绕中心旋转，结果都在圆 (O, P) 上。

可以看到，给定一个圆 (O, P)，从点 P 出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是 $0°$ 到 $369°$）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为 $\gamma_{(O,P)}$。

通过 $\gamma_{(O,P)}$，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然 $[0, 360)$ 对应整个圆，那么 $[0, 180]$ 就对应半个圆，$[0, 60]$ 就对应六分之一个圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应 $[a_1, a_1 + x]$ 和 $[a_2, a_2 + x]$，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全

等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如 $[0,60]$ 对应的圆弧，起点就是 P，终点是 60 度角 POQ 的终边和圆的交点 Q。如果圆弧对应的区间长度超过 180，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180，就说它是**劣弧**；如果等于 180，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。我们说它们互为**补弧**。

同一个圆上，明确了起点 A 和终点 B，就唯一确定了圆弧 $\overset{\frown}{AB}$。如果只说了两点 A、B，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 一般指劣弧或起点为 A 终点为 B 的圆弧。

习题 1.2.1. 证明：

1. 任意线段经过旋转得到等长的线段。

2. 任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为 A，终点为 B 的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和圆上弧外一点 P，则角 APB 称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢？如右图，连接 PO，延长交圆于对径点 Q。由于 $\triangle AOP$ 是等腰三角形，$\angle OAP + \angle OPA = 0$，

同理，$\angle OBP + \angle OPB = 0$。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说，圆心角是圆周角的两倍大小，圆周角是圆心角的一半大小。

定理 1.3.1. 圆周角定理 给定圆 O 上的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及圆上弧外的点 P，如果 $P \notin \overset{\frown}{AB}$，那么：

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果点 P 在弧上，$\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 是什么关系呢？这时 $\angle APB$ 对应 $\overset{\frown}{AB}$ 的补弧，于是它是 $\overset{\frown}{AB}$ 对应的圆心角的一半大小。$\overset{\frown}{AB}$ 对应的圆心角是周角减去 $\angle AOB$，所以

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角，因此，根据圆周角定理，对径点对应的圆周角是直角。或者说，半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是，讨论圆心角时，我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时，为了方便，我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里，圆上的点 A、B 对应的圆心角 $\angle AOB$ 和点 C、D 对应的圆心角 $\angle COD$ 相等，那么根据“边角边”，圆心 O 和它们构成的三角形满足：$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。弦 AB 和 CD 也等长。不仅如此，根据圆映射，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 也等长。事实上，$\overset{\frown}{CD}$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之，如果两个圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长，那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等，那么弦 AB 和 CD

也等长。更进一步，设 P 是圆上不属于两弧的点，那么圆周角 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来，如果圆 O 上两条弦 AB 和 CD 等长，那么根据“边边边”，$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。于是圆心角相等，所以劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说，在同一个圆里，两点对应的弦长相等当且仅当对应的（劣弧）弧长相等，当且仅当对应的圆心角相等，当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角，都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点 A、B，它们对应的垂直平分线 l 平分 $\angle AOB$，即把 $\angle AOB$ 分成两个相同大小的圆心角。因此，设 l 和圆交于 P、Q，则它们也分别平分所在的圆弧（称为弧的中点）。我们把这一系列结论总称为垂径定理：

定理 1.3.2. 垂径定理 给定圆上两点，则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦，同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成：过圆 O 的弦 AB 中点的直径与弦 AB 垂直，同时平分 $\angle AOB$ 和弧 $\overset{\frown}{AB}$。

给定圆 (O,r)，弦 AB 中点记为 M，$|MO|$ 称为弦 AB 的**弦心距**。由于 $MO \perp AB$，$\triangle OAM$ 是直角三角形，根据勾股定理，

$$|OM|^2 + |AM|^2 = |OA|^2 = r^2.$$

设直线 MO 与圆 O 交于 P、Q 两点，则

$$|MP| \cdot |MQ| = (r - |OM|)(r + |OM|) = r^2 - |OM|^2.$$

比较以上两式，可以得到：

$$|MA| \cdot |MB| = |MA|^2 = |MB|^2 = |MP| \cdot |MQ|.$$

这个推论也常常被称为垂径定理。

1.4 点到圆的势

圆是到定点距离相同的点的集合，所以点对圆来说是关键的概念。一点和圆的关系，可以用它到圆的距离来理解。点 P 在圆 (O,r) 上，当且仅当它到圆心的距离为 r。

如果不知道圆心的位置，有没有办法理解点和圆的位置关系呢？我们引进点到圆的**势**的概念。

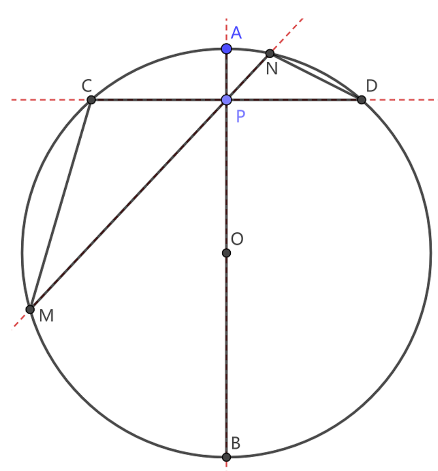
定义 1.4.1. 点 P 到圆 (O,r) 的势，等于 $|OP|^2-r^2$。

乍一看，点到圆的势，仍然和它到圆心的距离相关。点到圆心的距离 d 比 r 小的时候，点在圆内，这时它到圆的势小于 0。$d>r$ 的时候，点在圆外，势也大于 0。$d=r$ 的时候，点在圆上，势等于 0。

下面，我们从垂径定理出发，给出一种不依赖圆心的方法，计算点到圆的势。

首先设点 P 在圆 (O,r) 内。连接 OP，延长为直径，交圆于 A,B 两点（A、P 在 O 同侧）。过 P 作该直径的垂线，交圆于 C,D 两点。弦 CD 的垂直平分线过 O，而 $OP\perp CD$，所以 OP 就是弦 CD 的垂直平分线。根据垂径定理，$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|=r^2-|OP|^2$。这说明 $|PA|\cdot|PB|$、$|PC|\cdot|PD|$ 是 P 的势的绝对值。

过 P 任意作一条直线，和圆交于两点 M,N，是否也有这个结论呢？



如右图，可以发现，$\angle NDC$ 和 $\angle NMC$ 都对应同一段弧，且 C,M 都在弧外，所以 $\angle NDC=\angle NMC$。又对顶角 $\angle DPN=\angle CPM$，所以 $\triangle DPN\backsim\triangle MPC$。也就是说，

$$\frac{|PD|}{|PN|}=\frac{|PM|}{|PC|}.$$

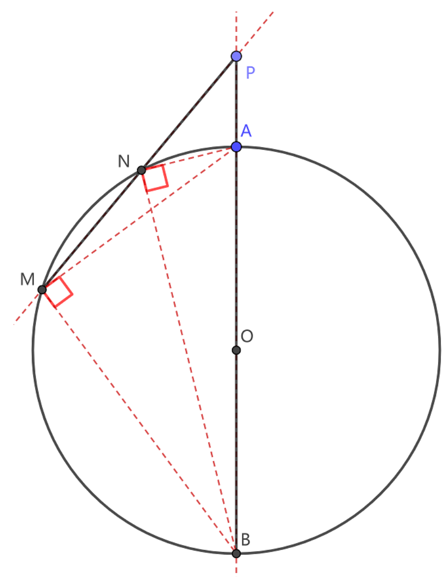
换句话说，$|PC|\cdot|PD|=|PN|\cdot|PM|$。这个结论也叫**相交弦定理**。

对圆内一点 P 来说，即便不知道圆心，只要过 P 作直线与圆交于两点，那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势的绝对值。

如果点在圆外，是否有类似的结论呢？我们仍然连接 OP，直线 OP 割圆于两点：A,B （A 位于 O、P 之间）。可以算出：

$$|PA|\cdot|PB|=(|PO|-|AO|)\cdot(|PO|+|PB|)=|OP|^2-r^2.$$

过 P 作直线 l 和圆交于两点 M,N，$|PM|\cdot|PN|$ 是否也等于 $|OP|^2-r^2$ 呢？



如右图，注意到 $\angle BNA$ 和 $\angle BMA$ 都对应半圆，所以都是直角。三角形外角 $\angle PAN=\angle ABN+\angle BNA$，而 $\angle ABN$ 和 $\angle AMN$ 对应同一段弧且都不在弧上，所以 $\angle ABN=\angle AMN$。于是，

$$\begin{aligned}\angle PAN&=\angle ABN+90^\circ\\&=\angle AMN+\angle BMA=\angle BMN.\end{aligned}$$

这说明 $\triangle PAN\backsim\triangle PBM$，所以

$$\frac{|PA|}{|PN|}=\frac{|PM|}{|PB|},$$

换句话说，$|PM|\cdot|PN|=|PA|\cdot|PB|$。这个性质也叫**割线定理**。

对圆外一点 P，即便不知道圆心，只要过 P 作直线与圆交于两点，那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势。

因此，无论在圆内还是圆外，经过一点 P 的直线与圆交于两点，则它到两点的距离乘积只与它和圆的远近关系有关。如果 P 在圆内，这个乘积等于 $r^2-|PO|^2$；如果 P 在圆外，这个乘积等于 $|PO|^2-r^2$。或者说，这个乘积就是势的绝对值。至于 P 在圆上的情形，我们可以认为它与圆交于

两点，其中一点就是它自身，所以到自身距离为 0，从而乘积总是 0，等于它的势。

定理 1.4.1. 圆势定理 过点 P 作直线与圆 (O,r) 交于两点：A、B，那么

$$|PA|\cdot|PB| = \left||PO|^2 - r^2\right|.$$

比起乘积 $|PA|\cdot|PB|$，点到圆的势多了正负号。如何理解这个正负号呢？如果过圆 (O,r) 的圆心作一条直线，在上面建立数轴。当我们把原点 P 选在圆内的时候，A 和 B 就对应符号相异的数；如果把原点 P 设在圆外，A 和 B 就代表同号的数了。所以，以 P 为原点，PO 为正方向的数轴和圆交于两点，这两点代表的数的乘积就是 P 到圆的势。或者说，圆势附带了 P 和 A、B 的位置关系的信息。

1.5 切线

过一点作直线要与圆交于两点不难，与圆交于一点则不简单。根据直线交圆公理，过圆内的点，无法作和圆相切的直线。过圆外一点，可以作与圆相切的直线直观上，我们可以把直尺从和圆相交的状态逐渐移动，直到尺子碰到圆的“边缘”，作出大致和圆相切的直线。

直线和圆相切是一种特殊的状况。过圆外或圆上一点的直线 l 如果和圆 O 相切，就说它是点到圆的**切线**。切线和圆的（唯一）交点，称为**切点**。根据相切的性质，过圆心 O 作关于 l 的垂线，切点就是垂足。过圆上一点，只有一条切线，过圆外一点，可以作两条切线。

过圆 (O,r) 外一点 P 作切线，记切点为 Q，则 $\triangle OQP$ 为直角三角形。根据勾股定理，

$$|PQ|^2 + |OQ|^2 = |OP|^2.$$

因此，$|PQ|^2 = |OP|^2 - r^2$。也就是说，点 P 到切点的距离平方，是它关于

圆的势。若过 P 作圆 O 的割线，交圆于 A、B 两点，那么

$$|PA| \cdot |PB| = |OP|^2 - r^2 = |PQ|^2.$$

也就是说，

$$\frac{|PA|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|PB|}.$$

因此，$\triangle PAQ \sim \triangle PQB$。这两个三角形的相似关系称为**切割线定理**。切割线定理可以看作割线定理的特例。

从切割线定理可以推出：$\angle PQA = \angle PBQ$。从另一个角度，可以这样理解：过圆上一点 Q 只有一条切线 PQ。如果过 Q 再作一条直线，直线于圆必交于另一点 A，而 $\angle PQA$ 等于圆弧 $\overset{\frown}{QA}$ 对应的圆周角。

思考 1.5.1. 已知圆外一点 P，如何准确作出 P 到 O 的切线？

第二章　圆和多边形

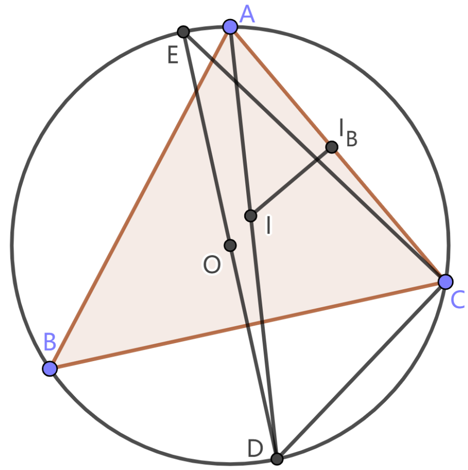
我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。

2.1　三角形的外接圆和内切圆

首先来看三个点的情形。

设 A、B、C 是圆 (O, r) 上（相异的）三点，则线段 AB、BC、AC 的垂直平分线都过圆心 O。因此，O 是 $\triangle ABC$ 的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线），$|OA| = |OB| = |OC| = r$。反之，设有（非退化的）$\triangle ABC$，以它的外心 O 为圆心，以 $|OA|$ 为半径，就可以画出一个圆，过顶点 A、B、C。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（"外心"即"外接圆圆心"的简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

三角形不仅可以内接于圆，圆也可以内接于三角形。考虑三角形 ABC 的内心，它到三角形三边的距离相等。以内心为圆心，以它到三边的距离为半径作圆，这个圆和三角形三边都相切。我们把这个圆叫做三角形的**内切圆**（"内心"即"内切圆圆心"的简称），把三角形称为圆的**外切三角形**。



除了内心，三角形还有旁心。旁心到三角形三边的距离也相等。因此，以每个旁心为圆心，以它到三遍的距离为圆心，各可以得到一个圆。每个圆都与三角形一边和另两边的延长线相切。这三个圆称为三角形的旁切圆（“旁心”即“旁切圆圆心”的简称），把三角形称为它们的**旁切三角形**。

习题 2.1.1.
如右上图，$\triangle ABC$ 的内心为 I，外心为 O。设 I 到 AC 的垂足为 I_B，射线 AI 与圆 O 交于 D，D 的对径点为 E。

1. 证明：$\triangle CDI$ 是等腰三角形，$|CD| = |DI|$。

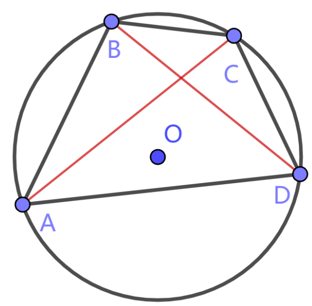
2. 证明：$\triangle CDE \sim \triangle I_B IA$。

3. 证明：I 关于圆 O 的势 $\mathtt{R}^2 - |OI|^2 = 2\mathtt{R}\mathtt{r}$。其中 $\mathtt{R}$ 是外接圆半径，$\mathtt{r}$ 是内切圆半径。

4. 设 J_A, J_B, J_C 是 $\triangle ABC$ 的旁心，证明：它们关于圆 O 的势分别等于外接圆半径与对应旁切圆半径乘积的两倍。

2.2 圆内接四边形

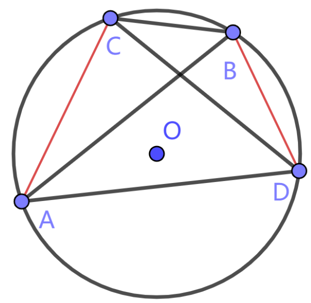
在三个点的基础上再加一个点 D，四个点 A、B、C、D 能否恰好对应一个圆呢？显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。



如右图，设 A、B、C、D 圆 (O, r) 上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现，$\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 是整个圆的分划，因此，它们对应的圆心角之和是

周角。根据圆周角定理，$\angle ABC+\angle CDA=180°$。同理，$\angle BCD+\angle DAB=180°$。

我们还可以发现，圆周角 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都对应 $\overset{\frown}{BC}$，因此根据"等弧对等角"，$\angle BAC=\angle BDC$。同理可得：$\angle ACB=\angle ADB$，$\angle CAD=\angle CBD$，$\angle DBA=\angle DCA$。



如果 A、B、C、D 顺序改变，如右图，那么四边形 $ABCD$ 就是蝶形。$\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 对应同一段圆弧 $\overset{\frown}{AC}$。这时 $\angle ABC+\angle CDA=0°$，或者说 $\angle ABC=\angle ADC$。同理，$\angle BAD=\angle BCD$。

综合两种情况，**圆内接四边形对角要么和为平角，要么相等**。

可以看到，如果把相交的对边 AB、CD 看作对角线，把对角线 AC、BD 看作对边，我们就得到一个凸四边形 $ACBD$。因此，观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现，我们仍然有 $\angle BAC=\angle BDC$、$\angle ACB=\angle ADB$，$\angle CAD=\angle CBD$，$\angle DBA=\angle DCA$。如果对角线 AC 和 BD 交于点 P，仍然有 $\triangle APB\backsim\triangle CPD$、$\triangle BPC\backsim\triangle DPA$。换句话说，即便圆内接四边形不是凸四边形，用它的顶点也能画出圆内接凸四边形，并且不妨碍我们讨论相关的性质。所以，我们总把圆内接四边形问题归结为凸四边形来讨论，也称之为四点共圆问题。

以上是圆内接四边形边和角的性质，反过来，满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢？或者说，满足什么条件的四个点共圆呢？

定理 2.2.1. 如果凸四边形 $ABCD$ 中的一对内角 $\angle ABC$ 与 $\angle CDA$ 的和是平角，那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明： $\angle ABC+\angle CDA=180°$，所以要么两个角都是直角，要么一个是钝角，一个是锐角。
如果两个角都是直角，作对角线 AC，取它的中点 O。$\triangle ABC$ 是直角三角

形，AC 是斜边，根据直角三角形的中线定理，$|AO| = |BO| = |CO|$。同理，$\triangle CDA$ 是直角三角形，AC 是斜边，于是 $|AO| = |DO| = |CO|$。因此 A, B, C, D 四点都在 $\odot(O, A)$ 上。
如果两个角一个是钝角，一个是锐角。不妨设 $\angle ABC > 90° > \angle CDA$。作对角线 AC，则 B、D 在 AC 两侧。作对角线 AC 的垂直平分线 l。显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的外心都在 l 上，只需证明两者是同一点。
设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot(O_1, B)$。$\angle ABC$ 是钝角，因此它的圆心角对应优弧。于是，O_1 和 B 在直线 AC 两侧。$\angle CO_1A = 360° - 2\angle ABC$。
另一方面，设 $\triangle CDA$ 的外接圆为 $\odot(O_2, D)$。$\angle CDA$ 是锐角，因此它的圆心角对应劣弧。于是，O_2 和 D 在直线 AC 同一侧。$\angle CO_2A = 2\angle CDA$。
以上两个结论说明，O_1 和 O_2 都和 D 在直线 AC 同一侧，且 $\angle CO_1A = \angle CO_2A$。而 $\triangle CO_1A$ 和 $\triangle CO_2A$ 都是等腰三角形，所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。A, B, C, D 四点都在 $\odot(O_1, A)$ 上。 □

从这个定理可以推出，矩形、等腰梯形和正方形都是圆内接四边形。

定理 2.2.2. 如果凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ACB = \angle ADB$，那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明： $ABCD$ 是凸四边形，所以 C 和 D 在直线 AB 同侧。作边 AB 的垂直平分线 l，显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的外心都在 l 上，只需证明它们是同一点。
设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot(O_1, C)$，$\triangle ABD$ 的外接圆为 $\odot(O_2, D)$。如果 $\angle ACB$ 是钝角，那么它的圆心角对应优弧。于是，O_1 和 C 在直线 AB 两侧，且 $\angle BO_1A = 360° - 2\angle ACB$。这时，$\angle ADB = \angle ACB$ 也是钝角，所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 两侧，且 $\angle BO_2A = 360° - 2\angle ADB$。如果 $\angle ACB$ 是锐角，那么它的圆心角对应劣弧。于是，O_1 和 C 在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_1A = 2\angle ACB$。这时，$\angle ADB = \angle ACB$ 也是锐角，所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_2A = 2\angle ADB$。
因此，O_1 和 O_2 总在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_1A = \angle BO_2A$。而 $\triangle BO_1A$ 和

$\triangle BO_2A$ 都是等腰三角形，所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。A, B, C, D 四点都在 $\odot(O_1, A)$ 上。 □

定理 2.2.3. 过一点 P 的两条直线 m, n 上各有两点：$A, C \in m$ 和 $B, D \in n$，分别各在 P 两侧。如果

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$

那么四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明： 考虑 $\triangle APB$ 和 $\triangle DPC$。对顶角 $\angle APB = \angle DPC$。而 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 等于说

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

因此根据“边角边”，$\triangle APB \sim \triangle DPC$。于是有 $\angle ABP = \angle DCP$，$\angle BAP = \angle CDP$。因此，根据定理 2.2.2，四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。□ 这个定理也可以理解为：两条线段相交，如果交点把每条线段分成的两部分长度之积相等，那么线段端点共圆。也就是说，这两条线段实际上是圆的两条相交的弦，乘积 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 是 P 关于圆的势。这个定理是相交弦定理的逆定理。

习题 2.2.1.

1. $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 上分别有点 X, Y, Z。设 $\triangle AYZ$ 的外接圆和 $\triangle BXZ$ 的外接圆交于点 P，证明：C, X, Y, P 四点共圆。

2. 直线 XYZ 与三角形 ABC 的边 BC, CA, AB 所在直线分别交于点 X, Y, Z。证明：$\triangle AYZ$、$\triangle BXZ$、$\triangle CXY$、$\triangle ABC$ 的外接圆过一公共点。

3. P 是平面上一点。过 P 作直线 l_1, l_2, l_3 与 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 分别交于点 X, Y, Z。如果 $\angle AYP = \angle BZP = \angle CXP$，证明：$A, Y, Z, P$ 四点共圆、B, X, Z, P 四点共圆、C, X, Y, P 四点共圆。

给定圆内接凸四边形 $ABCD$。E 是对角线 AC 上一点。$\angle CDE = \angle BDA$。

4. 证明：$\triangle CDE \sim \triangle BDA$。

5. 证明：$\triangle CDB \sim \triangle EDA$。

6. 证明：$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

给定凸四边形 $ABCD$，作射线 CE 使得 $\angle ECD = \angle ABD$，作射线 DE 使得 $\angle CDE = \angle BDA$。两射线交于点 E。

7. 证明：$\triangle CDE \sim \triangle BDA$。

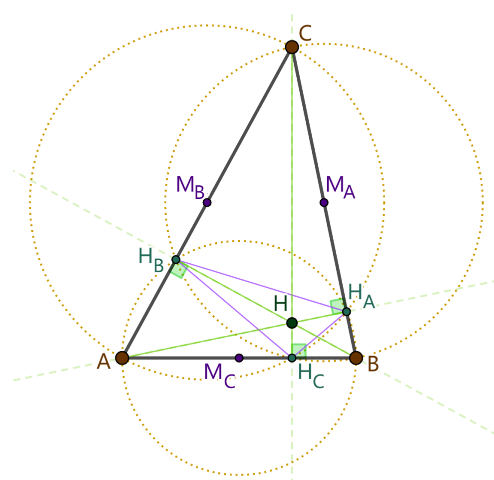
8. 证明：$\triangle CDB \sim \triangle EDA$。

9. 证明：$|AC| \cdot |BD| \geqslant |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

10. 证明，凸四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

11. 证明：A, B, C, D 四点共圆，当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

2.3 垂心组和外接圆



考虑锐角三角形 ABC，把顶点到对边的垂足分别记作 H_A, H_B, H_C，垂心为 H。由于 $\angle HH_AB = \angle BH_CH = 90°$，两角之和为平角，故 H, H_A, H_C, B 四点共圆，$\angle H_CHH_A + \angle H_ABH_C = 180°$。这说明 $\angle CHA = \angle H_CHH_A$ 是钝角，$\triangle AHC$ 是钝角三角形。

考察钝角三角形 AHC，它的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C，而垂心是 B。

类似地，我们可以证明 H, H_B, H_C, A 四点共圆，H, H_A, H_B, C 四点共圆。钝角三角形 BHC、CHA 的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C，而垂心分别是 A 和 B。

于是，从锐角三角形 ABC 及其垂心 H 出发，可以得出四个三角形，

每三个点构成的三角形的垂心，是四个点中剩余的那个点。我们把这样的四点称为**垂心组**。

从钝角三角形及其垂心出发，一样可以得到一个垂心组。从直角三角形出发，其垂心和直角顶点重合，四点的垂心组退化为三点。

从上面的讨论可知，垂心组四点共享三个垂足。任一顶点、垂心和另外两个顶点对应的垂足四点共圆。

考察 A, H_B, H_A, B 四点。由 $\angle AH_BB = 90^\circ = \angle AH_AB$ 可知，A, H_B, H_A, B 四点共圆。由于 $\angle AH_BB$ 是直角，A, H_B, H_A, B 四点所在的圆，圆心是边 AB 的中点 M_C。同理，A, H_C, H_A, C 四点共圆，圆心是边 AC 的中点 M_B；B, H_C, H_B, C 四点共圆，圆心是边 BC 的中点 M_A。

从 A, H_B, H_A, B 四点共圆可以推出：$\angle A = \angle CH_AH_B$，$\angle B = \angle H_AH_BC$。也就是说，$\triangle CH_BH_A \backsim \triangle CBA$。

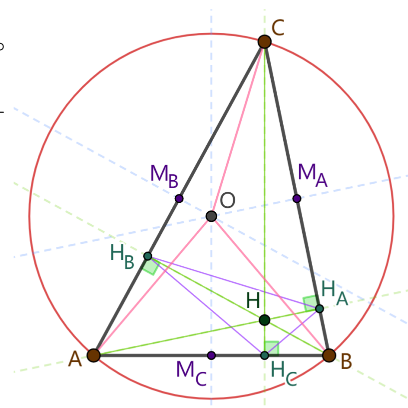
从以上两个四点共圆性质还可以推出 $\angle HH_CH_A = \angle CAH$，$\angle HH_AH_C = \angle ACH$。因此，$\triangle HH_AH_C \backsim \triangle HCA$。

以上是三角形垂心组的基本性质。垂心是顶点到对边垂线的交点。另外一个和边垂直的概念是边的中垂线。如果把三角形的垂心和外心一起来看，会发现两者有密切的关联。

考虑锐角三角形 ABC、其垂心 H 及其外心 O。边 BC 可以看作 $\triangle ABC$ 外接圆的弦。圆心角 $\angle BOC = 2\angle A$，因此在等腰三角形 BOC 中，

$$\angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A = \angle HBA.$$

同理，$\angle BAO = \angle HAC$，$\angle ACO = \angle HCB$。



此外，$\angle H_CH_AB = \angle A$，因此 $\angle H_CH_AB + \angle CBO = 90^\circ$。这说明半径 $OB \perp H_AH_C$。同理，半径 $OA \perp H_BH_C$，$OC \perp H_AH_B$。

作点 A 在 ABC 外接圆上的对径点 A'，

AA' 是直径，所以 $\angle ACA'$ 是直角。因此

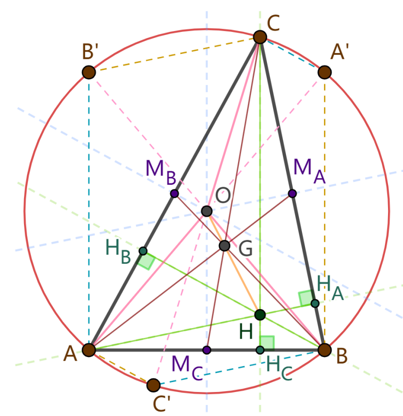
$$\angle H_C H A' = 90^\circ - \angle ACH_C = \angle A.$$

另一方面，A, H_B, H, H_C 四点共圆，所以

$$\angle H_C H B = 180^\circ - \angle H_B H H_C = \angle A.$$

这说明 $CA' \mathbin{/\!/} HB$。同理，我们可以得到 $BA' \mathbin{/\!/} HC$。因此四边形 $A'BCH$ 是平行四边形。

作 B, C 的对径点 B', C'，同样可以证明，四边形 $AB'HC$ 和 $AHBC'$ 是平行四边形。



连接圆心 O 和 AB 中点 M_C，O 是直径 AA' 的中点，所以 OM_C 平行于 $A'B$，且长度为 $A'B$ 一半。我们把这种关系简称为"OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半"。

连接 OH 和 AM_C。由于 OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半，$A'B$ 平行且等于 HC，因此 OM_C 平行且等于 HC 的一半。记 OH 和 CM_C 交点为 G，不难看出，$\triangle OGM_C \sim \triangle GHC$，且

$$\frac{|M_C G|}{|GC|} = \frac{|OG|}{|GH|} = \frac{|OM_C|}{|HC|} = \frac{1}{2}.$$

也就是说，点 G 在三角形 ABC 中线 CM_C 上，且到 C 点的距离是到 M_C 距离的两倍。这说明 G 就是三角形 ABC 的重心。我们发现，三角形的垂心、外心和重心满足以下的性质：

定理 2.3.1. 三心共线定理

三角形 ABC 的垂心、外心和重心共线，重心位于外心和垂心为端点的线段上，而且重心到垂心的距离是重心到外心距离的两倍。

习题 2.3.1. 沿用本节记号，证明：

1. $|AH|\cdot|HH_A|=|BH|\cdot|HH_B|=|CH|\cdot|HH_C|$.

2. H 是 $\triangle H_AH_BH_C$ 的内心。

3. 记 $\triangle ABC$ 的内心为 I，旁心分别为 J_A,J_B,J_C，则 I 是 $\triangle J_AJ_BJ_C$ 的垂心。

4. H 关于 AB 的对称点 H^C 在 ABC 外接圆上，且 $\overset{\frown}{AC'}=\overset{\frown}{H^CB}$。

5. $\triangle AHB$、$\triangle AHC$ 和 $\triangle CHB$ 的外接圆都和 $\triangle ABC$ 的外接圆一样大。它们的圆心分别是 $\triangle ABC$ 的外心 O 关于三边的对称点，和 O 组成垂心组。并且这个垂心组和垂心组 A,B,C,H 全等。

2.4 九点圆

我们已经了解过三角形的外接圆、内切圆和旁切圆。本节我们再介绍三角形内部的一个特殊的圆。

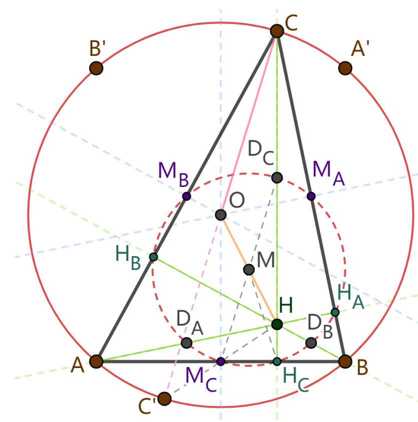
设有三角形 ABC，上一节中，我们证明了 $\triangle ABC$ 的垂心 H、外心 O 和重心 G 共线。考虑线段 OH，作它的中点 M。我们知道 $AHBC'$ 是平行四边形，所以 M_C 是其对角线 HC' 的中点。因此，MM_C 平行且等于 OC' 的一半。

作 CH 的中点 D_C，由于 OM_C 平行且等于 CH 的一半，因此平行且等于 HD_C。也就是说，四边形 HD_COM_C 是平行四边形，于是 M_C,M,D_C 共线，M 是 M_CD_C 的中点，$|MD_C|=|MM_C|=\frac{1}{2}|M_CD_C|$。

$\triangle M_CH_CD_C$ 是直角三角形，所以斜边中点 M 到直角顶点 H_C 的距离是斜边长度 M_CD_C 的一半。也就是说，

$$|MD_C|=|MM_C|=|MH_C|=\frac{1}{2}|OC'|=\frac{\mathtt{R}}{2}.$$

其中 $\mathtt{R}$ 是 ABC 的外接圆半径。



同理，我们也有

$$|MD_A| = |MM_A| = |MH_A| = \frac{R}{2},$$
$$|MD_B| = |MM_B| = |MH_B| = \frac{R}{2}$$

所以，以 M 为圆心，以 $\frac{R}{2}$ 为半径画圆，我们就会发现，这个圆经过三边中点，三边上的垂足，以及三顶点到垂心连线的中点，合共九点。我们把这个圆称为**九点圆**。

定理 2.4.1. 九点圆定理
三角形三边中点、三边垂足，以及三顶点到垂心连线的中点共圆。圆心为外心与垂心的中点，半径为三角形外接圆半径的一半。

三角形的九点圆的大小，刚好是三角形外接圆的一半。如果我们把三角形的垂心 H 看作“起点”，那么三角形的外接圆可以看作是九点圆外延加倍得到的。比如，把线段 HD_C 加倍延长，就得到 HC；把线段 HM_C 加倍延长，就得到 HC'；把线段 HH_C 加倍延长，就得到外接圆上一点 H^C。一般来说，从 H 出发，连接 H 和九点圆上任一点，加倍延长后，终点就会落在外接圆上。

习题 2.4.1. 沿用本节记号，证明：

1. 作外心 O 关于三边的对称点：O_A, O_B, O_C，则垂心 H 是 $\triangle O_AO_BO_C$ 的外心。

2. $\triangle O_AO_BO_C \simeq \triangle ABC$。两者关于点 M 对称，有共同的九点圆。

3. 记 $\triangle ABC$ 的旁心为 J_A, J_B, J_C，则 $\triangle J_AJ_BJ_C$ 的九点圆是 $\triangle ABC$ 的外接圆。

2.5 圆内接多边形

九点圆涉及了内接于同一个圆的九边形。对一般的多边形来说，成为圆内接多边形意味着什么呢?

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点 A、B、C、D 按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形 $ABCD$ 是凸四边形，否则，四边形 $ABCD$ 可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类: 顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说，设圆 O 上有 n 个点: $A_1, A_2, \cdots, A_n$，从 A_1 出发构造圆映射 $\gamma_{(O,A_1)}$，把 $[0, 360)$ 映射到圆周，那么 0 对应 A_1。设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别对应 n 个点，那么 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$。这样定义的圆内接多边形: $A_1A_2\cdots A_n$ 就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数 n，凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是 n 边形的边，和其余 $n-3$ 个顶点的连线是对角线。因此每个点是 $n-3$ 条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢? 我们知道三角形的内角和是平角，凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角)。边数继续增多时，我们定义凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内角和为:

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n + \angle A_{n-1}A_nA_1 + \angle A_nA_1A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形，我们可以这样证明：n 个顶点把圆分为 n 段圆弧。每个顶点张成的内角，对应了其中 $n-2$ 段圆弧。如果考虑所有 n 个内角对应的圆弧，则每段圆弧计入 $n-2$ 次（圆弧两端是内角顶点的时候不计入，其它情况下都计入）。也就是说，n 个内角和对应 $n-2$ 个整圆。这些内角都是圆周角，因此它们的和是 $n-2$ 个整圆对应的圆周角，即 $n-2$ 个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况，我们可以通过不断"裁剪"三角形来证明。我们还记得，凸四边形可以裁成两个三角形，因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看，我们通过裁掉一个三角形，把凸四边形变成了三角形。对一般的凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 来说，由于它的每个内角都介于零角和平角之间，我们可以考虑裁掉某个角，把它变成 $n-1$ 边形。比如，沿着线段 A_1A_3 剪一刀，就把 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成了三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。

定理 2.5.1. 凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

证明： 用归纳法证明。命题 $P(n)$：凸 $n+2$ 边形的内角和是 n 个平角。我们要证明 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。
$n=1$ 时，由于三角形内角和是平角，$P(1)$ 成立。
假设 $P(n)$ 成立，下面证明 $P(n+1)$ 成立。
设有凸 $n+3$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，将它裁成三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。前者的内角和是平角。根据 $P(n)$，后者的内角和是 n 个平角，因此，$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内角和是 $n+1$ 个平角。于是 $P(n+1)$ 成立。
因此对所有正整数 n，命题 $P(n)$ 成立。 □

满足什么条件时，凸多边形是圆内接多边形呢？最直接的条件，自然是平面上有一个圆，使多边形顶点都在圆上。或者说，能找到一点，到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点，可以查看多边形各边和各条对角线的垂

直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形各个的内角角度是 $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$。

习题 2.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？

2. 设有整数 $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$，圆内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，$\angle A_iA_kA_j$ 和 $\angle A_iA_lA_j$ 有什么关系？

2.6 弧长与面积*

我们已经学习过圆的周长和面积：圆的周长和直径成正比，比率大约是 3.14。这个比率对任意圆都一样，称为**圆周率**，一般记为 π。圆的面积则与圆的直径的平方成正比，比率为 $\frac{\pi}{4}$。如果已知圆的半径 r，圆的周长是它的 2π 倍，圆的面积则是 πr^2。我们是这样求圆的面积的：

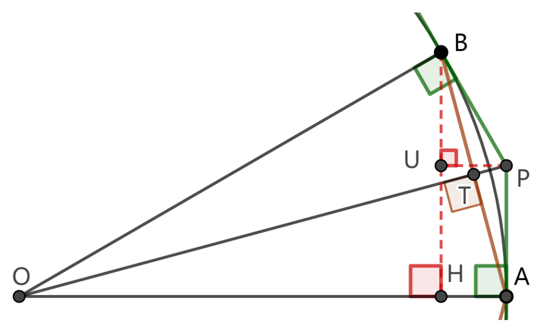
- 将圆按圆心均匀分成 n 份，每份是一个小扇形。
- 将 n 个小扇形上下交错地排成一排。
- n 很大时，小扇形排成一排后近似一个矩形。它的长是圆周长的一半，宽是圆的半径。
- 因此圆的面积等于矩形面积，也就是周长乘半径的一半，或者说半径平方的 π 倍。

以上的思路中，不少部分是模糊的，比如“n 很大”、“近似矩形”等等。下面，我们从更严格的角度重新认识圆的弧长和面积。

圆是曲线图形。我们知道，圆弧作为圆的一部分，它的长度和半径以及圆心角成正比。设圆的半径为 r，圆心角为 m 度，则弧长为 $\frac{m\pi r}{180}$。比如，圆心角为直角，对应的弧长就是 $\frac{\pi r}{2}$。另一方面，圆的面积和半径的平方成正比。这是无法从已有公理得到的。我们需要一条新的公理：

公理. 相似形面积公理 相似形面积之比是相似比的平方。

圆的定义只涉及圆心和半径，而圆心的位置移动时，圆的大小不变。因此，圆的大小只和半径有关。而圆的形状与大小无关，也就是说所有圆都相似，而相似比是半径的比。因此，根据相似形面积公理，相似的圆，面积之比是相似比的平方，也就是半径比的平方。如果设半径为 1 的圆的面积是 S_1，那么半径为 r 的圆，面积是 $S_1 r^2$。



下面来论证 $S_1 = \pi$。为此，我们需要详细讨论前面提到的小扇形的面积。

如上图，单位圆的圆心为 O，半径 $|OA| = 1$，圆心角 $\angle AOB = \frac{360°}{n}$，小扇形 AOB 的面积是圆 O 面积的 n 分之一。它大于三角形 AOB 的面积。过 B 作 OA 的垂线，记垂足为 H，则

$$S_{扇形AOB} > S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |BH| = \frac{1}{2}|BH|.$$

另一方面，作 A、B 的中垂线交线段 AB 于点 T，交圆 O 在 A 点的切线于 P，则 BP 是圆 O 在 B 点的切线。小扇形 AOB 的面积小于三角形 AOP 面积与三角形 BOP 面积之和。

过 P 作 BH 的垂线，垂足为 U，则

$$|AP|+|BP|=|HU|+|BP|<|HU|+|PU|+|BU|=|BH|+|AH|.$$

因此，

$$\begin{aligned}S_{\text{扇形}AOB}&<S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}\\&=\frac{1}{2}\left(|OA|\cdot|AP|+|OB|\cdot|BP|\right)\\&=\frac{1}{2}(|AP|+|BP|)\\&<\frac{1}{2}(|BH|+|AH|).\end{aligned}$$

我们知道圆弧 $\widehat{AB}$ 的长度为 $\frac{2\pi}{n}$。$|BH|<|AB|$，而 AB 作为线段，长度小于 $\widehat{AB}$。如果可以证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP|+|BP|$，那么就有

$$|BH|<\frac{2\pi}{n}\leqslant|AP|+|BP|<|BH|+|AH|.$$

而从图中我们可以猜测，$\angle AOB$ 接近零角的时候，$|AH|$ 比 $|BH|$ 小得多。这个猜测不无道理，实际上，

$$|AH|=|OA|-|AH|=1-\sqrt{1-|BH|^2},$$

而我们可以证明，当 $0<x<1$ 时，$1-\sqrt{1-x}<x$，因此，

$$|AH|<|BH|^2<\frac{4\pi^2}{n^2}.$$

于是

$$|BH|>\frac{2\pi}{n}-|AH|>\frac{2\pi}{n}-\frac{4\pi^2}{n^2}.$$

小扇形 AOB 的面积是单位圆面积的 n 分之一，因此，从前面讨论可以得到：

$$\frac{n}{2}|BH|<n\cdot S_{\text{扇形}AOB}=S_1<\frac{n}{2}(|BH|+|AH|).$$

因此，单位圆的面积在以下范围内：

$$\pi - \frac{2\pi^2}{n} < S_1 < \pi + \frac{2\pi^2}{n}.$$

这个结论对任何 n 成立，所以可以写成：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_1 - \pi| < \frac{2\pi^2}{n}.$$

无论 n 多大，单位圆的面积和圆周率 π 之间的差别总小于 $\frac{2\pi^2}{n}$。这说明单位圆的面积只能等于 π。否则，设 $|S_1 - \pi| > 0$，则当 n 为比 $\frac{2\pi^2}{|S_1-\pi|}$ 大的整数时，就会有 $|S_1 - \pi| \geqslant \frac{2\pi^2}{n}$，产生矛盾。

最后，我们还需要解决一个问题，就是证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP|+|BP|$。这需要我们对曲线长度有更多的了解。要知道，至今为止，我们对曲线长度的唯一认识，就是从“两点之间线段最短”推出的“连接两点的曲线总比两点之间的线段长”。曲线什么时候比线段短呢？我们需要引入一个新的公理：

公理. 曲线长公理 设 γ 是连接两点 A、B 的曲线。给定正实数 c。如果对 γ 上任意依次选取的若干点 $A = A_0, A_1, \cdots, A_m = B$，总有

$$|A_0A_1| + |A_1A_2| + \cdots + |A_{m-1}A_m| \leqslant c,$$

那么曲线 γ 的长度小于等于 c。

通常把线段 A_0A_1、A_1A_2 等合称为曲线 γ 上的折线，记为 $A_0A_1 \ldots A_m$。曲线长公理说明，曲线的长度就是曲线上折线长度的上限。

来看圆弧的长度。

定理 2.6.1. 给定圆 O，设圆心与圆上两点 B、C 的连线分别交圆在圆上一点的切线于 D、P，则 $|BC| < |DP|$。

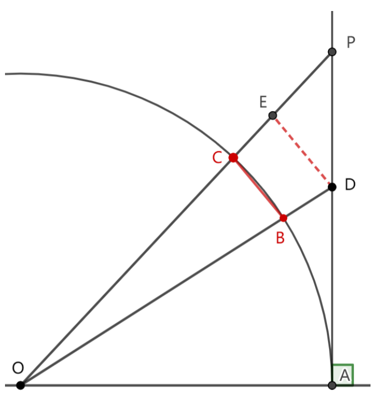
证明： 如下图左，我们过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 OP 于 E，则 $\triangle BOC \sim \triangle DOE$。$|OD| > |OB|$，因此 $|BC| < |DE|$。另外，$\triangle DOE$ 也是等腰三角形，因此 $\angle OED = \angle EDO$。于是

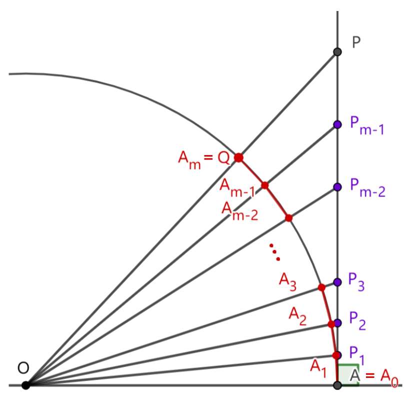
$$\begin{aligned}\angle OPD &= 180^\circ - \angle DOP - \angle PDO \\ &> 180^\circ - \angle EDO \\ &= 180^\circ - \angle OED = \angle DEP\end{aligned}$$

这说明 $\triangle EDP$ 中，$|DE| < |DP|$。于是

$$|BC| < |DE| < |DP|.$$

□



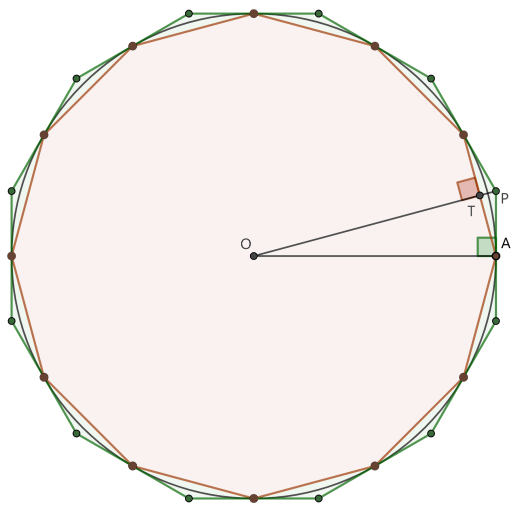


下面证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP| + |BP|$。设 OP 交圆于 Q，如上图右，设有 $\widehat{AQ}$ 上的折线 $AA_1A_2 \cdots A_{m-1}Q$。从圆心出发经过折线各端点的射线分别交 AP 于 P_1、P_2、P_{m-1}、$P_m = P$，根据定理 2.6.1，

$$|AA_1| < |AP_1|,\ |A_1A_2| < |P_1P_2|,\ \cdots,\ |A_{m-1}Q| < |P_{m-1}P|.$$

因此折线长度小于 $|AP|$。根据曲线长公理，$\widehat{AQ}$ 的长度小于等于 $|AP|$。同理，$\widehat{QB}$ 的长度小于等于 $|BP|$。因此 $\widehat{AB}$ 的长度小于等于 $|AP| + |BP|$。

总结以上的讨论，我们从圆周率 π 出发，说明了圆的面积等于半径平方的 π 倍。那么，圆周率本身是否存在呢？我们仍然可以从曲线长公理和定理 2.6.1 出发讨论。



如果一个多边形覆盖一个圆，且每条边都和它相切，就说这个多边形是圆的**外切多边形**。我们可以做出圆的内接正 n 边形和外切正 n 边形。上图是 $n = 12$ 的情形。

圆的周长总大于等于其内接多边形的周长，而根据定理 2.6.1，圆的周长总小于等于其外切正多边形的周长。因此，我们总能得到圆周率的范围。比如，$n = 4$ 时，我们可以得出 $2\sqrt{2} < \pi < 4$。随着 n 增大，直观上圆的外切正 n 边形和内接正 n 边形的相似比将越来越接近 1，它们的周长之差将越来越小，因此越来越接近圆的周长。最终两者将趋于同一个值，也就是圆的周长。

思考 2.6.1. 以上证明圆的面积的过程中

1. 是否有别的方法证明 $|AH| < |BH|^2$?
2. 是否能证明 $\widehat{AB}$ 的长度小于 $|AP| + |BP|$?

习题 2.6.1.

1. 证明：对 $0 < x < 1$，总有 $1 - x < \sqrt{1 - x}$.
2. 证明：延长等腰三角形 OAB 两腰至 C, D，则 $|AB| < |CD|$。

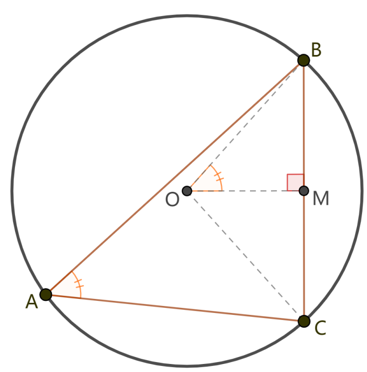
第三章　三角函数

通过研究点、直线、角和三角形、四边形、圆形，我们对简单的平面图形有了更多的认识。其中对三角形的研究贯通了我们对各种形状的探索。通过对三角形性质的理解，我们建立了三角形和四边形、圆形乃至更复杂的形状之间的关系。

如果对前面学习的知识做一次整理，我们会发现，大多数的结论要么和共点、共线、共圆有关，要么是长度之间、角度之间的相等或简单倍数关系。我们把这些结论称为定性结论。

在科学研究和生产实践中，我们更需要知道的是形状之间定量的关系。比如，如果三角形的三边长度分别是 $4, 5, 6$，我们希望知道三角形内角到底是多少度。又比如，如果菱形两条邻边长度为 1，夹角为 $50°$，我们希望知道菱形对角线的长度。为此，我们从三角形的边角关系着手研究。

我们的目标是解三角形：已知三角形部分边角的大小，求其余边角的值。



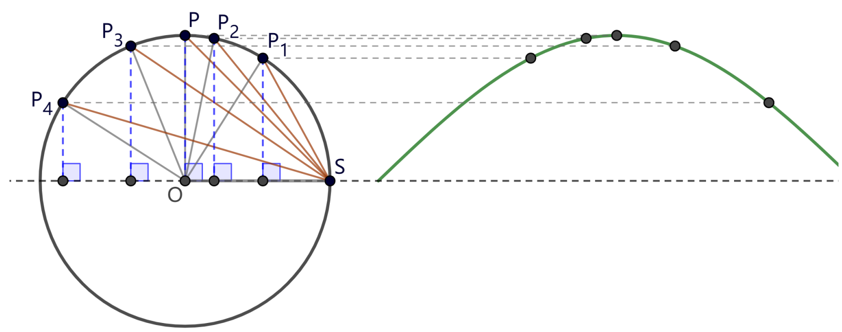
3.1　正弦函数

如右图，我们想知道三角形 ABC 中 $\angle A$ 的角度和对边 BC 长度的关系。为此，我们

作 ABC 的外接圆 O，则 BC 是 O 的弦。$\angle A$ 作为圆周角，是圆心角 $\angle COB$ 的一半。作 BC 中点 M，则 $\angle A = \angle MOB$。这样，我们就把一般三角形的边角关系转化成了直角三角形 MBO 的边角关系。

那么，直角三角形的角和边有什么关系呢？我们先来看另一个问题。

考虑半径为 1 的圆 O（这个圆以后会经常出现，我们把它叫做**单位圆**）和圆上一点 S。给定角 α，以 OS 为始边，角的终边交圆 O 于点 P。称 $\triangle SOP$ 为角 α 对应的**单位三角形**（如下图）。根据三角形面积公式（底乘高除以 2），单位三角形的面积等于 P 到始边距离的一半。



不难看出，α 为直角时，单位三角形的面积最大，为 $\frac{1}{2}$。其它情况下，运用勾股定理可知，P 到始边距离小于半径，因此面积小于 $\frac{1}{2}$。

我们把角 α 对应的单位三角形的面积和直角对应的单位三角形面积之比称为 α 的正弦或正弦值，记为 $\sin\alpha$。$\sin A$ 就是 P 到始边距离，也就是前面直角三角形 MBO 中 BM 与外接圆半径之比，或弦长与外接圆直径之比。

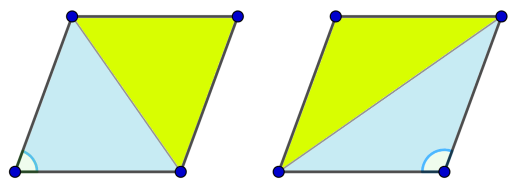
角度在零角到平角之间的每个角，都可以按以上方法定义正弦。更准确来说，我们定义的是角度的正弦。不过，它实际上对应着一个把数映射到数的映射，也就是函数。比如，0 和 180 之间的任何实数，都通过角度制的圆映射对应某个角度，从而对应某个正弦值。

另一种对应方法使用弧度，也就是把角度在单位圆上对应的弧长映射

到角度的正弦值。比如，60° 角对应着圆周的六分之一，在单位圆上对应的弧长是 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$。我们就说 60° 角的正弦值是 $\sin\frac{\pi}{3}$。把角度或角度在单位圆上的弧长对应到角度的正弦值的函数，称为**正弦函数**。

正弦函数有什么性质呢？观察不同角度对应的单位三角形可知，零角的正弦值是 0（退化的三角形面积为 0）。从零角出发，随着角度增大，正弦值不断增大；直角时，正弦值达到最大值 1。然后，随着角度增大，正弦值不断减小；平角时，正弦值减为 0。

两个角互为补角时，对应的单位三角形是同一个菱形按不同对角线剖开得到的一半。所以两者面积相等。也就是说，**两个角互为补角，则正弦值相等**。因此，我们将把重点放在研究锐角的正弦值上。



对具体的某个角度来说，怎么计算它的正弦值呢？这个问题不简单。以我们掌握的知识，还无法精确计算任意角度的正弦值，甚至难以估计任意角度的正弦值。求解任意角度的正弦值属于实变函数分析的重要基础内容。目前，我们可以使用正弦函数表，查找角度的正弦值，或通过使用计算器、编程等方式，借助计算机计算角度的正弦值。使用正弦表，可以方便地查找角度对应的正弦值。以下是整数角度的正弦表：

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0°	0.0000	0.1736	0.3420	0.5000	0.6428	0.7660	0.8660	0.9397	0.9848
1°	0.0175	0.1908	0.3584	0.5150	0.6561	0.7771	0.8746	0.9455	0.9877
2°	0.0349	0.2079	0.3746	0.5299	0.6691	0.7880	0.8829	0.9511	0.9903
3°	0.0523	0.2250	0.3907	0.5446	0.6820	0.7986	0.8910	0.9563	0.9925
4°	0.0698	0.2419	0.4067	0.5592	0.6947	0.8090	0.8988	0.9613	0.9945
5°	0.0872	0.2588	0.4226	0.5736	0.7071	0.8192	0.9063	0.9659	0.9962
6°	0.1045	0.2756	0.4384	0.5878	0.7193	0.8290	0.9135	0.9703	0.9976
7°	0.1219	0.2924	0.4540	0.6018	0.7314	0.8387	0.9205	0.9744	0.9986
8°	0.1392	0.3090	0.4695	0.6157	0.7431	0.8480	0.9272	0.9781	0.9994
9°	0.1564	0.3256	0.4848	0.6293	0.7547	0.8572	0.9336	0.9816	0.9998

每列的数据十位相同，每行的数据个位相同。比如，要查 26° 的正弦值，就在十位为 2 的第三列，找到个位为 6 的第七行，查得正弦值为 0.4384。

对于非整数角度的正弦值，我们可以查询更精确的正弦表，或者用一次函数来近似估计。如果我们把整数角度的正弦值看作正弦函数的函数值，在直角坐标系上画出函数值对应的点，可以观察到正弦函数的值从 0 平稳增长到 1。因此，可以认为两个整数角度之间，正弦函数的图像近似于线段，也就是一次函数图像的一部分。因此，非整数角度的正弦值可以通过计算线段上点的坐标而得到。

举例来说，37° 和 38° 之间的角度（比如说 37.3°）的正弦值，可以看作经过 $(37, \sin 37°)$ 和 $(38, \sin 38°)$ 两点的一次函数图像在横坐标为 37.3 时对应的纵坐标。这个一次函数可以写成:

$$y = \sin 37° + \frac{\sin 38° - \sin 37°}{38 - 37} \cdot (x - 37)$$

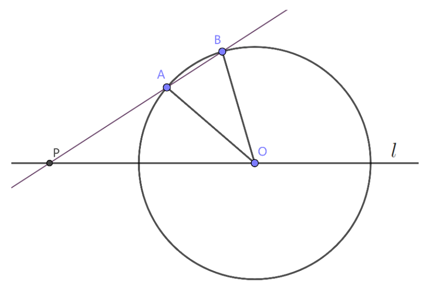
横坐标 $x = 37.3$ 时，代入函数表达式，就得到：

$$\begin{aligned} y &= \sin 37^\circ + 0.3 \cdot (\sin 38^\circ - \sin 37^\circ) \\ &= 0.6018 + 0.3 \cdot (0.6157 - 0.6018) \approx 0.60597 \end{aligned}$$

实际上 $\sin 37.3^\circ \approx 0.60599$，可见偏差不大。

反过来，如果已知角的正弦值，也可以通过查表，估计角度的大小。比如，已知 $\sin A = 0.83$，查表可知 $\angle A$ 大小在 56° 和 57° 之间。

想一想，如果要得到更精确的结果，除了查询更精确的正弦表，还可以怎么做?



习题 3.1.1. 如右图，延长 BA 交 l 于点 P。

1. 计算 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$。

2. 通过比较 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$，证明锐角的正弦值随角度增大而增大，钝角的正弦值随角度增大而减小。

3. 从 46°、48° 的正弦值出发，用一次函数近似估计 47°，和正弦表上的值比较。哪个值比较大? 对别的角度试一试，估计值的偏差有什么规律?

4. 已知某锐角的正弦值为 0.73，请估计它的角度大小。

3.2 正弦定理

我们可以用正弦值来探讨三角形的边角关系。首先把正弦值应用到一般三角形的面积上。我们知道 $\angle A$ 对应的单位三角形的面积是 $\frac{1}{2}\sin A$。如果 $\angle A$ 的两邻边长度分别是 b 和 c，那么根据等高三角形的面积关系，三角形的面积是单位三角形的 bc 倍，也就是 $\frac{1}{2}bc\sin A$。

定理：三角形两边长度为 b 和 c，夹角为 A，则面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A$。

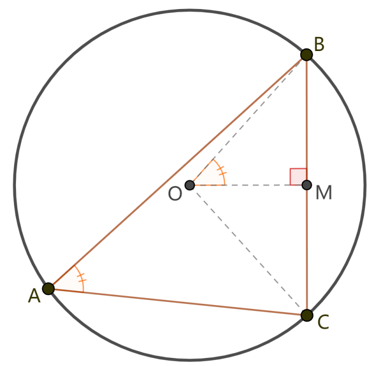
设三角形 ABC 中 A, B, C 对边长度为 a, b, c，那么它的面积可以用三

种方式表示:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

两边除以 $\frac{abc}{2}$，就得到:

$$\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}.$$



上式告诉我们，三角形三个内角的正弦值和对边长度的比是定值 $\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}$。如何理解这个定值呢？让我们回到前面的三角形 MOB。我们知道 $BM=\mathtt{R}\sin A$，其中 $\mathtt{R}$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径。所以 $\frac{a}{2}=\mathtt{R}\sin A$，即 $\frac{\sin A}{a}=\frac{1}{2\mathtt{R}}$。也就是说，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\mathtt{R}.$$

定理 3.2.1. 正弦定理 三角形任一边长与其对角正弦值之比为外接圆直径。

从正弦定理可以立刻得出：三角形的面积等于三边长之积与外接圆半径之比的四分之一。

$$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4\mathtt{R}}.$$

下面来看正弦定理的具体应用。

例子 3.2.1. 三角形 ABC 中，边 AB、AC 长度分别为 3 和 5，$\angle B=80°$，求 BC 的长度和 $\angle C$ 的大小。

解答. 根据正弦定理:

$$\frac{|AC|}{\sin B}=\frac{|AB|}{\sin C},$$

所以 $\sin C=\frac{|AB|\sin B}{|AC|}$。查表知 $\sin 80°=0.9848$，算得 $\sin C\approx 0.5909$，反查正弦表可知 $\angle C\approx 36.2°$ 或 $\angle C\approx 143.8°$。由于三角形内角和是平

角，$\angle C+\angle B<180°$，故排除 $\angle C\approx 143.8°$。于是 $\angle C\approx 36.2°$，$\angle A=180°-\angle B-\angle C\approx 63.8°$，使用正弦定理可算得：

$$|BC|=\frac{|AB|\sin A}{\sin B}=\frac{3\cdot\sin 80°}{\sin 63.8°}\approx 3.29$$

已知三角形两边长度和其中一边对角的大小，可以根据正弦定理得出另一边对角的正弦值，从而得出它的角度。用平角减去两角角度，就得到第三个角的大小。再次使用正弦定理，就得到第三边的长度。要注意的是，用正弦定理算出的是角的正弦值，而不是角度。由于互为补角的正弦值相等，同一个正弦值对应两个互为补角的角度。因此，给定三角形两边和其中一边的对角，并不一定能确定三角形的形状。换句话说，“边边角”不能用来证明三角形全等。

例子 3.2.2. 已知三角形 ABC 中，$\angle A=64°$，$\angle B=75°$，$\angle C$ 对边长度 $c=4$，求另两边的长度。

解答. 三角形内角和为平角，所以 $\angle C=180°-\angle A-\angle B=41°$。根据正弦定理：

$$\frac{a}{\sin 64°}=\frac{b}{\sin 75°}=\frac{c}{\sin 41°}.$$

所以 $a=\frac{c\sin 64°}{\sin 41°}=\frac{4\times 0.8988}{0.6561}\approx 5.48$，$b=\frac{c\sin 75°}{\sin 41°}=\frac{4\times 0.9659}{0.6561}\approx 5.89$。

已知两内角大小和一边的长度，等于知道所有内角大小和一边边长。根据正弦定理，可以算出另两边的长度。这说明“角边角”和“角角边”都可以用来证明三角形全等。

正弦定理不仅可以用来处理定量关系，也可以用来处理定性关系。三角形的边长和对角的正弦值之比是定值，所以，边长越大，对角的正弦值也越大。而锐角的正弦值随着角度增大而增大，至直角达到最大。所以，锐角和直角三角形中，较大的边，对角也较大，较大的角，对边也较大。这个性质称为“**大边对大角**”、“**大角对大边**”。

对钝角三角形，“大边对大角”、“大角对大边”的结论是否也成立呢？设三角形 ABC 中 $\angle A$ 是钝角，则 $\angle A$ 的补角是锐角。三角形内角和为平角，所以 $180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C > \angle B$，$\angle A$ 的补角大于 $\angle B$，即 $\sin A = \sin(B+C) > \sin B$。同理，$\sin A > \sin C$。钝角 $\angle A$ 作为较大的角，其正弦值大于锐角 $\angle B$ 和 $\angle C$。而 $\angle B$ 和 $\angle C$ 同为锐角，“大边对大角”、“大角对大边”的结论在两者之间同样成立。综上所述，任意三角形中，“大边对大角”、“大角对大边”的结论总成立。

习题 3.2.1.

1. 设三角形 ABC 内角 A,B 的公共边为 c，证明：$S_{\triangle ABC} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)}$。

2. 三角形一边的长度是另一边的 2 倍。证明：至少有一个内角不大于 30°，一个内角不小于 75°。

3. 已知三角形 ABC 中 $\angle A = 36^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，$\angle C$ 对边长度 $c = 8$，求另两边的长度。

4. 已知三角形两边长度是 4、5，一个内角是 40°，第三边的长度有几种可能？找出所有满足条件的三角形。

5. 已知三角形两边长度是 4、5，一个内角是 70°，第三边的长度有几种可能？结论和上一题有什么不同？找出所有满足条件的三角形。

3.3　余弦函数

例子 3.3.1.

1. 三角形 ABC 中，边 BC、AC 的长度分别是 4、6，$\angle C = 50^\circ$，求 AB 长度。

2. 三角形 ABC 中，边 AB、AC、BC 的长度分别为 3、5、6，求三个内角的大小。

使用正弦定理，我们列出以下等式：

1. $\frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{|BC|}{\sin 50^\circ}$.

2. $\frac{6}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$.

每个等式中都有两个未知量。我们无法直接用正弦定理计算内角的正弦值了。不过，既然我们能通过“边边边”和“边角边”证明三角形全等，这让我们猜想，有别的方法计算内角的角度。

第一题中，让我们把 $\angle C$ 改为直角，那么根据勾股定理，$|AB| = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13}$。

第二题中，让我们把 AB、AC、BC 的长度换成 3、4、5，我们观察到最长边边长的平方等于另两边边长的平方和。根据勾股定理逆定理，三角形是直角三角形。所以 $\angle A$ 是直角。用正弦定理解得 $\sin B = 0.8$，$\sin C = 0.6$，查表可知 $\angle B \approx 53°$，$\angle C \approx 37°$。

可以看出，对于直角三角形，由于有勾股定理作为“武器”，我们总可以破解三角形的边角关系。因此，我们需要“升级装备”，把勾股定理推广为对一般的三角形也适用的结论。为此，我们需要定义角的余弦。

什么是角的余弦呢? 我们已经定义了角的正弦。在直角三角形中，锐角的正弦是对边长度与斜边长度之比。这个公式中我们用到了三角形的两条边。我们定义锐角的**余弦**（或**余弦值**）为剩余的直角边（也就是相邻的直角边）长度与斜边长度之比。在 MOB 的例子中，角 A 的余弦就是弦 BC 的弦心距，记为 $\cos A$。

显然，直角三角形中，一个锐角的邻边就是另一个锐角的对边。所以**锐角的余弦等于它的余角的正弦**:

$$\forall\ 0 \leqslant A \leqslant 90°,\ \ \cos A = \sin(90° - A).$$

这样我们就定义了**余弦函数**。零角的余弦是 1。从零角出发，随着角度增大，角的余弦逐渐减小。直角时，余弦值达到最小值 0。

此外，角的正弦和余弦分别是直角三角形两条直角边和斜边的比值。所

以根据勾股定理，

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

其中 $\cos^2 A, \sin^2 A$ 分别是 $(\cos A)^2, (\sin A)^2$ 的简便记法。这个结论也叫三**角勾股定理**。

怎么计算角的余弦值呢？从三角勾股定理定理可以看出，已知锐角的正弦，就可以得到它的余弦：$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$。所以，可以查正弦表得到角的正弦值，再求出余弦值。反过来，已知锐角的余弦，可以先算出它的正弦，然后查表得到角度。

习题 3.3.1.

1. 从等腰直角三角形的性质出发，计算 $45°$ 的正弦和余弦值。

直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 是直角。斜边长度 c 是直角边长度 a 的 2 倍。

2. 作斜边中点 M，证明：$\triangle BMC$ 是正三角形。

3. 计算 $30°$ 和 $60°$ 的正弦和余弦值。

等腰三角形 ABC 中，顶角 $\angle A$ 是底角 $\angle B$ 的 2 倍。

4. 设 $\angle B$ 的平分线交对边于点 D。证明：$\triangle ABC \sim \triangle BCD$。

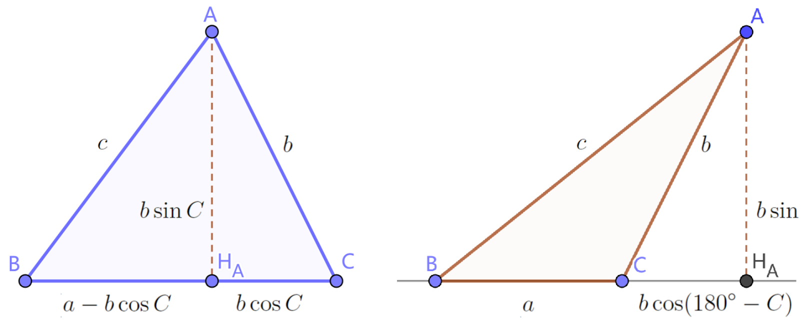
5. 设底边长 $a = 1$，腰长 $b = c = x$，证明：$x^2 - x - 1 = 0$。

6. 计算 $18°$、$36°$、$54°$ 和 $72°$ 的正弦和余弦值。

3.4　余弦定理

定义了角的余弦，我们再来看前面“边边边”的问题（例题 3.3.1第一题）。如果 $\angle C$ 是直角，那么根据勾股定理，可以直接求出 AB 长度。如果 $\angle C$ 不是直角，我们希望把问题转化为直角三角形的边角关系。

作顶点 A 到 BC 的高，记垂足为 H_A，则 $H_A \neq C$。$\triangle ACH_A$ 是直角三角形，所以 $|AH_A| = |AC| \sin C = b \sin C$。如果 $\angle C$ 是锐角，那么 H_A 在线段 BC 上，$|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos C$；如果 $\angle C$ 是钝角，那么 H_A 在线段 BC 延长线上，$|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos(180° - C)$。



$\triangle ABH_A$ 是直角三角形。根据勾股定理，$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2$。如果 $\angle C$ 是锐角，那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| - |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 \\ &= b^2\sin^2 C + b^2\cos^2 C + a^2 - 2ab\cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

我们得到了 a、b、c 和 $\angle C$ 的关系。这个关系叫做**余弦定理**。可以看出，$\angle C$ 为直角时，余弦定理就变成了勾股定理。所以，余弦定理是勾股定理的“升级版本”，勾股定理可以看作是余弦定理的特例。使用余弦定理，我们可以解决例题 3.3.1第一题。

解答. 根据余弦定理，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6\cos 50^\circ \approx 21.15.$$

因此 $c \approx \sqrt{21.15} \approx 4.6$。

用同样的方法，能否解决第二题呢？我们列出等式：

$$6^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5\cos C$$

解得 $\cos C = -\frac{1}{15}$。显然，任何锐角或直角的余弦都不是负数。我们猜测，这是因为 C 是钝角，而前面的推导中，$\angle C$ 是锐角。

来看 $\angle C$ 是钝角的情况。如果 $\angle C$ 是钝角，那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| + |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b\sin C)^2 + (a + b\cos(180^\circ - C))^2 \\ &= b^2\sin^2 C + b^2\cos^2(180^\circ - C) + a^2 + 2ab\cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

可以看到，对钝角三角形，余弦定理的表达式比锐角三角形复杂很多。把 $a = 3$、$b = 5$、$c = 6$ 代入钝角的余弦定理公式，我们发现难以解出 C。公式中，含有 C 的项无法像锐角的情况里那样合并化简，原因在于我们没有定义钝角的余弦值，只能用锐角 $180^\circ - C$ 的余弦值来表示。

如何定义钝角的余弦值呢？钝角的正弦为其补角的正弦。我们希望钝角的余弦也满足三角勾股定理：

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

这就要求

$$\begin{aligned} \cos C &= \sqrt{1 - \sin^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(180^\circ - C)} \\ &= \pm\cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦：$\cos C = \cos(180^\circ - C)$，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C.$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦的相反数：$\cos C = -\cos(180^\circ - C)$，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

显然，后一种情况下，钝角三角形和锐角三角形余弦定理的形式就统一了。接下来我们会看到，后者在各个方面都更加合理。

习题 3.4.1.

1. 已知三角形三边长为 5、7、8，求三内角的大小。

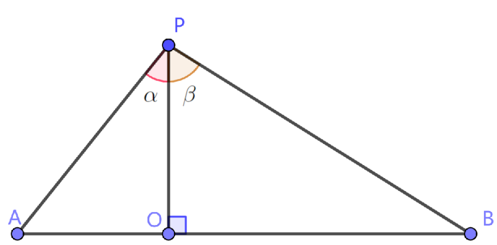
$\triangle ABC$ 中，$|AB| = 6, |BC| = 3, |CA| = 5$，

2. 求 $\angle A$ 的大小。

3. 求 $\angle B, \angle C$ 的大小。

3.5　和差角公式

解决平面形状的问题时，我们常常需要处理角度的和与差。给定两个角度 α、β，我们希望能够给出 $\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$ 的正弦和余弦值。换句话说，我们希望能够打通正弦函数、余弦函数和实数的加减法的关系。



让我们从两个锐角的和出发。如上图，$\alpha = \angle APO$ 和 $\beta = \angle OPB$ 都是锐角，$OP \perp AB$。$\triangle AOB$ 的面积是 $\triangle AOP$、$\triangle BOP$ 面积之和。用相应的面积公式表示：

$$\frac{1}{2}|AP||BP|\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|AP||OP|\sin\alpha + \frac{1}{2}|OP||BP|\sin\beta$$

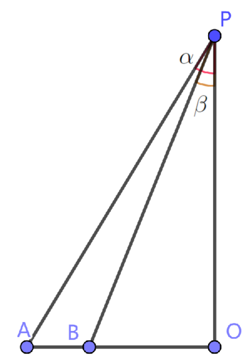
因此:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{|OP|}{|BP|}\sin\alpha+\frac{|OP|}{|AP|}\sin\beta$$

$\triangle AOP$、$\triangle BOP$ 都是直角三角形，所以 $|OP|=|AP|\cos\alpha=|BP|\cos\beta$。代入上式，就得到:

$$\forall\ 0<\alpha,\beta<90^\circ,\ \ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

这就是两锐角之和正弦值的公式，简称**和角正弦公式**。可以验证，当 α、β 是零角或直角的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 90^\circ$。



对于两锐角之差，可以用类似的方式推导。如右图，设 $\alpha=\angle APO>\beta=\angle BPO$, $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle APB$、$\triangle OPB$ 面积之和。比照和角正弦公式的推导，可以得到:

$$\forall\ 0<\beta<\alpha<90^\circ,\ \ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

是为两锐角之差正弦值的公式，简称**差角正弦公式**。可以验证，无论是当 α、β 是零角或直角的时候，还是 $\alpha=\beta$ 的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0\leqslant\beta\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$。

注意到和角、差角正弦公式中都出现了角的余弦，我们可以据此推出和角、差角的余弦公式。首先，假设 α、β、$\alpha-\beta$ 都是锐角。从和角正弦公式出发，可以得到这样的关系:

$$\sin(\alpha)=\sin(\alpha-\beta+\beta)=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

这个等式中只有 $\cos(\alpha-\beta)$ 是未知的。根据差角正弦公式，可以得到:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)&=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\\&=(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos^2\beta-\cos\alpha\sin\beta\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sin\beta\cos(\alpha-\beta) &= \sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\alpha\sin^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\beta(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)\end{aligned}$$

两边约去 $\sin\beta$，就得到：

$$\forall\ 0<\beta<\alpha<90^\circ,\ \cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta.$$

这就是两锐角之差余弦值的公式，简称**差角余弦公式**。

同理，假设 α、β、$\alpha+\beta$ 都是锐角，从差角正弦公式出发，可以得到：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) = \sin(\alpha+\beta-\beta) &= \sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta \\ &= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sin\beta\cos(\alpha+\beta) &= -\sin\alpha + \sin\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= -\sin\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= -\sin\alpha\sin^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

两边约去 $\sin\beta$，就得到：

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

这就是两锐角之和余弦值的公式，简称**和角余弦公式**。

要注意的是，上面的推导中，我们假设 α、β、$\alpha+\beta$ 是锐角。然而，推导中涉及的项，除了 $\cos(\alpha+\beta)$，都不要求 $\alpha+\beta$ 是锐角。另一方面，在和

角余弦公式中，只要确定了 α、β，就能计算 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。所以，$\alpha+\beta$ 是直角或钝角时，我们可以定义 $\cos(\alpha+\beta)$ 为关于 x 的方程：

$$x=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

的唯一解。这样，我们就定义了钝角的余弦值。当然，这样定义钝角余弦值，不好理解。为了好理解，我们仿照正弦，给出互为补角的两角余弦的关系。这样，通过单个锐角的余弦值，就能得到钝角的余弦值了。

在和角余弦公式中，令较大角为直角，代入得到

$$\forall\ 0\leqslant\beta\leqslant 90^\circ,\ \cos(90^\circ+\beta)=-\sin\beta.$$

对锐角 β 来说，$90^\circ-\beta$ 也是锐角，于是：

$$-\cos\beta=-\sin(90^\circ-\beta)=\cos(180^\circ-\beta).$$

这说明 $\cos(180^\circ-\beta)=-\cos\beta$。**互为补角的两角，余弦值互为相反数**。

上一节中，我们让钝角的余弦等于其补角的相反数。现在我们看到，这个选择是合理的。至此，我们可以写出余弦定理的统一形式：

定理 3.5.1. 余弦定理 设三角形 ABC 的内角 A,B,C 对边长度分别为 a,b,c，则

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ \ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ \ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

余弦定理说明，三角形内角的余弦值，决定了它对边边长的平方与另两边边长的平方和的大小关系。锐角的余弦值大于 0，它对边边长的平方小于另两边边长的平方和。钝角的余弦值小于 0，它对边边长的平方大于另两边边长的平方和。直角的余弦值是 0，它对边边长的平方等于另两边边长的平方和。

回到例题 3.3.1第二题。之前我们算出 $\cos C=-\frac{1}{15}$，说明 C 是钝角。于是 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\approx 0.9978$，查表知锐角 $180^\circ-C\approx 86.2^\circ$，即 $\angle C\approx 93.8^\circ$。同理，可以算得 $\angle A\approx 29.9^\circ$，$\angle B\approx 56.3^\circ$。

我们用和角余弦公式定义了钝角的余弦。用同样的思路，我们考虑差角正弦公式：

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

上式对 $0\leqslant\beta\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$ 成立。现在我们把它扩展到 $\alpha<\beta$ 的情况。也就是说，对小于零角的角度 $\alpha-\beta$，我们定义 $\sin(\alpha-\beta)$ 是关于 x 的方程：

$$x=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

的唯一解。令 $\alpha=0$，就得到：

$$\forall 0\leqslant\beta\leqslant 90^\circ,\ \sin(-\beta)=-\sin\beta.$$

我们再把这个关系扩展到钝角。这样，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的正弦值。

最后，考虑差角余弦公式：

$$\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta.$$

比照差角正弦公式，对小于零角的角度 $\alpha-\beta$，我们同样可以定义 $\sin(\alpha-\beta)$ 是关于 x 的方程：

$$x=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$$

的唯一解。令 $\alpha=0$，就得到：

$$\forall 0\leqslant\beta\leqslant 90^\circ,\ \cos(-\beta)=\cos\beta.$$

同样把这个关系扩展到钝角，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的余弦值。

注意到负平角到正平角经历了整个周角，因此，定义了负平角到正平角的正弦和余弦值，实际上就定义了所有角度的正弦和余弦值。至此，我们可以从锐角出发，得到所有角度的正弦、余弦，而且它们的关系与和差角公式相容。

例子 3.5.1.

1. 求 $500°$ 的正弦、余弦值。
2. 求 $-465°$ 的正弦、余弦值。

解答.

1. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin 500° = \sin 140°, \quad \cos 500° = \cos 140°.$$

$140°$ 是正钝角，因此取补角得到锐角：

$$\sin 140° = \sin 40°, \quad \cos 140° = -\cos 40°.$$

查表得到 $\sin 500° = \sin 40° \approx 0.6428$，$\cos 500° = -\cos 40° \approx -0.766$。

2. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin -465° = \sin -105°, \quad \cos -465° = \cos -165°.$$

$140°$ 是负钝角，取相反数变为正角，再取补角得到锐角：

$$\sin -105° = -\sin 105° = -\sin 75°,$$
$$\cos -105° = \cos 105° = -\cos 75°.$$

查表得到 $\sin -465° = -\sin 75° \approx -0.9659$, $\cos -465° = -\cos 75° \approx -0.2588$。

综上所述，可以这样总结任意角的正余弦与锐角正余弦的关系：

求任意角的正弦：
1. 不断加减周角，直到角度落在 $(-180°, 180°]$ 中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果取相反数。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果不变。

求任意角的余弦：
1. 不断加减周角，直到角度落在 $(-180°, 180°]$ 中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果不变。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果取相反数。

习题 3.5.1.

1. 验证：和角、差角公式对负平角到正平角中的角度成立。

2. 证明正弦和余弦的**倍角公式**：

$$\forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ,\ \ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

3. 证明正弦和余弦的**半角公式**：

$$\forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ,\ \ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

4. 证明正弦和余弦的**积化和差公式**：

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

5. 证明正弦和余弦的**和差化积公式**：

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

5. 设平行四边形 $ABCD$ 的相邻两边长为 a, b，两对角线长为 u, v，证明：$u^2+v^2 = 2a^2+2b^2$。

6. 设 $\triangle ABC$ 三边长分别为 a, b, c，证明：

$$\sin A = \frac{\sqrt{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{2bc}.$$

7. 设 $\triangle ABC$ 周长的一半为 p，证明：$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$。

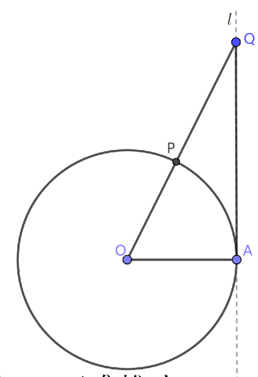
8. $\triangle ABC$ 一边的长度是另一边的 2 倍。设 A 是 $\triangle ABC$ 最大的内角，证明：$\cos A \leqslant 0.25$。

3.6 正切函数和余切函数

历史上，除了正弦函数和余弦函数，数学家们还发明了别的函数来讨论角度。**正切函数**和**余切函数**就是两种常用的函数。

如下图，单位圆的切线 l 与锐角 $\angle AOP$ 的终边交于 Q，定义 $\angle AOP$ 的**正切**（**值**）为 $\tan\angle AOP = |AQ|$，**余切**（**值**）为 $\cot\angle AOP = \frac{1}{|AQ|}$。也就是说，我们用角截切线的长度来度量角的大小。按照定义，**同角的正切值和余切值互为倒数**。

和正弦、余弦一样，我们可以定义正切、余切函数。要注意的是，正切函数对零角和锐角有定义，但对直角没有定义。余切函数对锐角和直角有定义，对零角没有定义。



不难证明：

$$\forall\ 0 < \alpha < 90^\circ,\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

换句话说，可以用锐角的正弦和余弦定义它的正切和余切。不难推出：

$$\forall\ 0 < \alpha < 90^\circ,\ \tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha,\ \cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha.$$

零角的正切是 0，直角的余切是 0。从零角开始，随着角度增大，正切值不断增大。从直角开始随着角度减小，余切值不断减小。$\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$，因此 $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$。

反过来，也可以用锐角的正切和余切定义它的正弦和余弦：

$$\forall\ 0 < \alpha < 90^\circ,\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2\alpha}},\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2\alpha}}$$

对其他角度，我们保持正切、余切和正弦、余弦的关系，定义

$$\forall\ \alpha,\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

这样，除去分母为零的情况，我们定义了任意角的正切和余切。

从正弦和余弦的和差角公式，可以推出正切和余切的和差角公式:

$$
\begin{aligned}
&\forall 0 \leqslant \alpha, \beta < 90^\circ, \\
&\qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
&\qquad\qquad = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\
&\qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \\
&\qquad\qquad = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall 0 < \alpha, \beta \leqslant 90^\circ, \\
&\qquad \cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} \\
&\qquad\qquad = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \\
&\qquad \cot(\alpha-\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \\
&\qquad\qquad = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}
\end{aligned}
$$

以上关系可以简写为:

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}
\end{aligned}
$$

除去分母为零的情况，任意角的正切和余切也满足以上的和差角公式。

三角形中，内角之和为平角。因此，两角之和的正切值是第三个角正切

值的相反数:

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan(180^\circ - (A+B)) = -\tan(A+B)\\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.\end{aligned}$$

于是:

$$\tan C(1 - \tan A \tan B) = -\tan A - \tan B,$$
$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

定理 3.6.1. 正切定理 三角形内角的正切值之和等于它们的乘积。

正切定理和正弦定理、余弦定理不同。它并不涉及三角形的边，是纯粹关于角的定理。使用正切定理无法解决边角关系的问题，但可以比较方便地给出三角形内角的关系。利用正切和余切的倒数关系，可以写出关于余切的类似结论:

定理 3.6.2. 余切定理 三角形 ABC 内角的余切值满足:

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

习题 3.6.1.

1. 证明正切和余切的**倍角公式**:

$$\begin{aligned}\forall\ 0 < \alpha < 45^\circ,\ \ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}\end{aligned}$$

2. 证明正切和余切的**半角公式**:

$$\begin{aligned}\forall\ 0 < \alpha < 180^\circ,\ \ \tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\ \cot\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\end{aligned}$$

定义锐角 α 的**正割值**（$\sec\alpha$）和**余割值**（$\csc\alpha$）:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\ \ \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

3. 证明：锐角的正割等于它的余角的余割，锐角的余割等于它的余角的正割。

4. 证明：$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

5. 证明**万能公式**:

$$\begin{aligned}&\forall 0<\alpha<180^\circ,\ \text{记}\tan\frac{\alpha}{2}=t,\ \text{则}:\\&\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\quad\sec\alpha=\frac{1+t^2}{1-t^2},\\&\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad\cot\alpha=\frac{1-t^2}{2t},\quad\csc\alpha=\frac{1+t^2}{2t}.\end{aligned}$$

3.7 多边形的边角关系

多边形的边和角没有直接对应关系。因此，多边形的边角关系，要通过对角线来间接建立。比如，圆内接凸四边形 $ABCD$ 中，对角之和为平角。根据余弦定理，

$$\begin{aligned}|AC|^2&=|AB|^2+|BC|^2-2|AB||BC|\cos\angle ABC\\&=|AD|^2+|DC|^2-2|AD||DC|\cos\angle CDA\end{aligned}$$

于是，我们得到圆内接凸四边形的内角和四边边长的关系:

$$\begin{aligned}\cos\angle ABC=-\cos\angle CDA=\frac{|AB|^2+|BC|^2-|CD|^2-|DA|^2}{2(|AB||BC|+|CD||DA|)},\\\cos\angle BCD=-\cos\angle DAB=\frac{|BC|^2+|CD|^2-|DA|^2-|AB|^2}{2(|BC||CD|+|DA||AB|)}.\end{aligned}$$

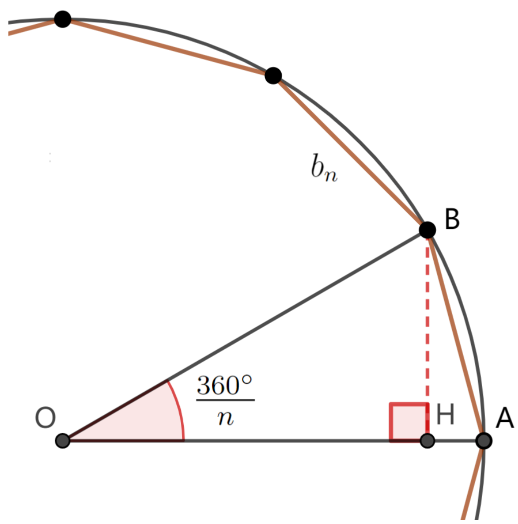
另一个例子是正多边形。设单位圆 O 的内接正 n 边形边长为 b_n，连接圆心 O 和相邻两顶点 A、B，$\triangle OAB$ 是等腰三角形。正 n 边形内角为

$\alpha_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$，因此 $\angle OAB = -\angle OBA = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{(n-2)90^\circ}{n}$，$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$。根据正弦定理，

$$\frac{b_n}{\sin\angle AOB} = \frac{1}{\sin\angle OAB}.$$

因此

$$b_n = \frac{\sin\frac{360^\circ}{n}}{\sin\frac{(n-2)90^\circ}{n}} = \frac{\sin\frac{360^\circ}{n}}{\cos\frac{180^\circ}{n}} = \frac{2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{180^\circ}{n}} = 2\sin\frac{180^\circ}{n}.$$



为了方便，记 $\beta_n = \frac{360^\circ}{n}$，则 $b_n = 2\sin\frac{\beta_n}{2}$。于是，单位圆内接正 n 边形的周长是 $nb_n = 2n\sin\frac{\beta_n}{2}$。

过 B 作 OA 的垂线，垂足为 H，则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|BH|$，即 $\frac{1}{2}\sin\beta_n$。因此单位圆内接正 n 边形的面积是 $\frac{n}{2}\sin\beta_n$。

习题 3.7.1.

1. 求单位圆内接正 12 边形的周长。

2. 设圆内接四边形 $ABCD$ 面积为 S，周长为 $2p$，

2.1. 证明 $S = \frac{1}{2}\sin\angle ABC(|AB||BC| + |CD||DA|)$。

2.2. 证明 $S^2 = (p-|AB|)(p-|BC|)(p-|CD|)(p-|DA|)$。

2.3. 对一般的四边形 $ABCD$，如何用 $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|$ 和 $\frac{\angle ABC + \angle CDA}{2}$ 表示它的面积 S?

第四章　从或许到确定

预测未来，是人类社会的重要活动。合理有效地预测未来，是社会文明进步的标志。中华文明作为农耕文明，很早就懂得预测未来的重要性。历法、史书、节气，都是我们的祖先为了后人更好地预测未来，留下的经验总结。

生产活动中，预测尤其重要。比如，农牧业、渔业、运输业等行业需要预测天气，销售行业需要预测产品的市场需求。科学研究和工程制造中，如果能够提前知道产品在各种各样的情境和场景下的性能，可以节约大量人力物力。社会要发展，就需要更高的预测水平。

4.1　事件和见知

如何判断某件事情将来会不会发生? 我们要依赖已有的知识和经验。日常生活中，我们会说“明天大概要下雨”、“今年冬天肯定很冷”、“我明天大概去不了了”。根据已有条件，有些事情必然发生，有些事情或许会发生，有些事情不可能发生。事情发生与否，取决于某些条件。我们把这样的事情叫作**随机事件**，简称**事件**。在已知条件下，如果某事件必然发生，就说它是**必然事件**；如果某事件必然不发生，就说它是**不可能事件**；如果某事件或许会发生，就说它是**或然事件**。数学中，研究这些事情的理论叫作概率论。

概率论假定，我们关心的随机事件有某些恒定的内在规律，受某些固

有未知因素的影响。概率论通过研究这些内在规律和因素，预测事件是否会发生。

如何描述一个事件？从客观的角度，我们可以把“发生一件事”看成事物状态、形势局面的改变。一件事是否发生，可以用改变后的状态或局面表示。我们也许无法确定未来事物发展成哪个状态、形势走向哪个局面，但我们可以事先确定事物未来所有可能的状态、所有可能出现的局面。

比如，我们无法确定明天杭州是否下雨，但我们知道，在明天杭州是否下雨这个问题上，只可能出现两个结果：下雨或不下雨。又比如，我们投一个骰子前，无法确定朝上一面的点数，但我们知道，投出的骰子最终只有六个状态：朝上一面是 $1,2,3,4,5$ 或 6 点。这些最终状态、局面是**互斥**的。比如明天杭州不可能既下雨又不下雨，骰子停下之后不可能既是 1 点朝上又是 2 点朝上。

我们把所有可能的最终状态或局面看成一个集合，集合中的每个元素称为事情的**终态**或**结果**。比如，考虑明天杭州是否下雨这个问题时，所有结果构成 $\{$下雨,不下雨$\}$ 这个集合，每次投骰子时，骰子的终态构成 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 这个集合。我们把这个集合叫作**终集**，即终态的全集。我们可以把相关的事件用终集的子集表示。比如，“明天杭州下雨”对应 $\{$下雨$\}$ 这个子集，“骰子点数是偶数”对应 $\{2,4,6\}$ 这个子集。事物发展的终态如果在子集里，就说明事件发生了，否则事件没有发生。

单元集也对应着事件。我们把这些事件叫做**基本事件**。**不是任何其他事件的交集的事件，叫做基本事件**。比如 $\{1\}$ 对应的“骰子点数是 1”就是基本事件。基本事件是各种事件的“基本单元”，它们通过合并形成别的事件。基本事件之间是互斥事件，它们是终集的分划。

终集可以是有限的，也可以是无限的。目前我们只讨论有限的情况。要注意的是，随着问题的条件、环境、思考问题的角度发生变化，终集也会变化。比如，我们考虑明天杭州下雨的问题时，可能要把准备经过杭州的台风“凤凰”也考虑在内。台风“凤凰”也许继续靠近，也许转向。这时，我们

的终集是:

{台风靠近且下雨, 台风靠近且不下雨, 台风转向且下雨, 台风转向且不下雨}

而“明天杭州下雨”对应子集 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}。

对于随机事件，如果我们知道得更多，就能作出更准确的预测。比如，如果我们不知道台风的情况，那么即便我们把终集依照“台风是否继续靠近”划分，我们能把握的也只是 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}、{台风靠近且不下雨, 台风转向且不下雨} 两个事件，与 {下雨}, {不下雨} 并没有不同。如果我们掌握了台风的动向，我们就希望把 {下雨} 分成 {台风靠近且下雨} 和 {台风转向且下雨} 来讨论了。可以说，随着我们对事物、形势的认知增加，我们的终集会越来越“细”。

为了描述认知增加的过程，我们从最“细”的终集出发，定义每个阶段的**知集**，代替不同阶段的终集。知集是最“细”终集的子集构成的集合，满足:

- 空集属于知集;
- 如果集合 A 属于知集，那么 A 的补集也属于知集;
- 如果集合 A 和 B 属于知集，那么它们的交集和并集也属于知集。

知集表示我们每个阶段的认知。我们根据当前的认知来讨论各种事件。比如，在杭州下雨的例子里，可以有两个知集，分别是:

$$S_1 = \big\{\varnothing, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AN}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}\big\}$$

和

$$\begin{aligned} S_2 = \big\{&\varnothing, \{\mathrm{AR}\}, \{\mathrm{AN}\}, \{\mathrm{DR}\}, \{\mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DN}\}, \\ &\{\mathrm{AN}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{DN}, \mathrm{AN}\}, \{\mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DN}\}, \\ &\{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}\big\} \end{aligned}$$

其中 AR, AN, DR, DN 分别表示“台风靠近且下雨”、“台风靠近且不下雨”、“台风转向且下雨”和”台风转向且不下雨“。可以看出，S_1 是 S_2 的子集。S_1 到 S_2 的过程，就是对台风认知加深的过程。

这种描述下，不同的知集就对应不同“粗细”的终集。每个知集都对应自己的基本事件。这时候的基本事件不一定是单元集。比如，$\{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}$ 在 S_1 中是基本事件，在 S_2 中就不是基本事件了。

习题 4.1.1. 写出以下问题的终集和知集。

1. 我国朱鹮从东北省份向南迁徙的路线有三条：西线、中线和东北线。小明想知道黑龙江省的某只朱鹮沿哪条路线南迁。

2. 某航空公司规定：作为补偿，飞机晚点一小时以上，返还全票票价的 40%；如果晚点三小时以上，返还全票票价的 75%。乘客实际购票价低于前述返还价格的，返还乘客实际购票价。航班因晚点取消，且乘客自愿接受转乘下一班机的，公司协助补票，实施“就低返利”政策：按照下一班机实时票价和乘客最初购票价的较低者计算新票价，多则退还差价；并另外补偿新票价的 30%。某乘客购票后，在候机时被告知飞机可能晚点，他试着分析可能得到的晚点补偿。

4.2 概率和分布

预测随机事件时，我们除了关心会发生什么事情，还关心事情有多大可能发生。当我们说“这事百分之百能成”，“他八成还在路上”，“他的话只有三分准头”，我们认为某些事情比另一些事情更可能发生。习惯上，我们用数来描述事情多么有可能发生。在数学中，我们把这个做法称为**事件的概率**。

我们用不大于 1 的非负实数表示事件的概率。约定不可能事件的概率是 0，必然事件的概率是 1，事件的概率越大，越有可能发生。此外，事件的概率应当和事件之间的关系相符。两个互斥事件同时发生的概率应该是

0，至少有一个发生的概率应该是它俩概率的和。

用集合的语言来说，空集的概率应该是 0，终集（全集）的概率应该是 1；两个集合不相交，那么它们的并集的概率等于它们概率的和。

我们习惯用映射 $\mathbb{P}$ 来记录概率，把事件 A 的概率记为 $\mathbb{P}(A)$。比如，“明天八成会下雨”，可以写成 $\mathbb{P}(\{\text{明天下雨}\}) = 0.8$。不至于混淆时，也可以省略表示集合的大括号，写成：$\mathbb{P}(\text{明天下雨}) = 0.8$。

一般来说，两个事件互斥时，对应的集合不相交，它们的概率之和等于它们的并集的概率。比如，两个事件对立，概率之和就是全集的概率，也就是 1:

$$\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^{\complement})=1$$

基本事件两两互斥，并集是终集（全集）。所以，基本事件的概率之和等于 1。

举例来说，投骰子的时候，我们一般认为投出 $1,2,3,4,5,6$ 点的可能性都一样大，即每个基本事件的概率都相等。于是它们各自的概率是六分之一。据此，可以算出任何事件的概率。比如，“投出 5 点或以上”的概率是“投出 5 点”的概率加上“投出 6 点”的概率，也就是三分之一。如果我们知道骰子有问题，比如投出 6 点的可能性是其他任一点数的 2 倍，那么“投出 6 点”的概率是七分之二；投出其他点数，比如“投出 3 点”的概率是七分之一；而“投出 5 点或以上”的概率是七分之三。

终集是有限集合的时候，只要知道了知集中每个基本事件分配到的概率（称为**概率分布**），就可以推出知集里其他事件的概率。

如果某些事件 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 两两互斥，那么它们和另一事件的交集也两两互斥。因此，设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 的并集为 B，则这些交集的概率之和等于它们的并集，也就是 $A\cap B$ 的概率：

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\cap B_1)+\mathbb{P}(A\cap B_2)+\cdots+\mathbb{P}(A\cap B_k)$$

如果并集 B 是全集，那么 $A \cap B = A$，上式变成：

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap B_k)$$

也就是说，如果某个问题中，我们不重复也不遗漏地列举了若干种情况，那么任何事件的概率，都等于该事件分别在这些情况下发生的概率之和。比如说，我们知道明天杭州要么下雨，要么不下雨。因此，事件“明天杭州气温低于 10 摄氏度”的概率等于“明天杭州下雨且气温低于 10 摄氏度”的概率与“明天杭州不下雨且气温低于 10 摄氏度”的概率之和。

两个事件 A, B 有交集时，可以考虑它们各自减去交集剩下的部分，分别记为 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 。$A \setminus B$ 就是属于 A 但不属于 B 的终态的集合，$B \setminus A$ 就是属于 B 但不属于 A 的终态的集合。集合 $A \setminus B$、$B \setminus A$、$A \cap B$ 两两不相交，它们的并集是 $A \cup B$。因此，

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

另一方面，由于 $A \setminus B$ 和 $A \cap B$ 不相交，并集为 A，所以 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$；同理 $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$。带入上面的式子，就得到：

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

这个关系和容斥原理的形式是一样的。

思考 4.2.1.

1. 同一个终集下的不同知集中，同一个事件的概率是否相同?
2. 事件的概率和集合的元素个数有什么关系？为什么有这样的关系?

4.3　二项分布和均匀分布

我们来看两种简单的概率分布。

考虑只有两个终态 a, b 的终集，两个基本事件 $\{a\}, \{b\}$ 概率之和是 1。设其中一个的概率是 p，则另一个的概率是 $1-p$。我们把这样的概率分布叫作**二项分布**。举例来说，如果我们认为明天杭州下雨的概率是 0.7，不下雨的概率就是 $1-0.7=0.3$。我们说，我们认为明天杭州下雨的问题服从二项分布。

又比如：抛一枚硬币，我们认为正面朝上的概率是 0.52，那么反面朝上的概率就是 $1-0.52=0.48$。我们说，我们认为抛这枚硬币的问题服从二项分布。为了好说话，我们会在两个基本事件中选一个我们更关心的，称为**正面事件**，把另一个称作**反面事件**。如果正面事件的概率是 p，就说问题服从系数为 p 的二项分布。

终集为 $\{a, b\}$ 的二项分布，包括四个事件，分别对应 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ 四个子集。设 $\{a\}$ 是正面事件，概率为 p，那么这四个事件的概率分别是 0、p、$1-p$ 和 1。

对于元素更多的终集，情况更加复杂。我们考虑一种简单情形：每个基本事件的概率相等。这样的概率分布称为**等概率分布**或**均匀分布**。比如，投骰子时，如果我们认为每面朝上的概率都相等，就说投骰子服从均匀分布。

假设终集有 n 个终态，那么每个基本事件的概率就是 $\frac{1}{n}$。对于任意事件，我们可以数一下事件包含了几个终态，用终态个数除以所有终态的个数，就是它的概率。我们把这个性质写作：

$$\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

其中 $|A|$ 表示事件 A 作为集合的元素个数，$|S|$ 表示终集 S 的元素个数。比如，服从均匀分布的投骰子问题中，要求“大于 2 点”的概率，我们数一下事件 $\{3, 4, 5, 6\}$，它包含了 4 个终态，所以“大于 2 点”的概率是 $4 \times \frac{1}{6}=\frac{2}{3}$。

习题 4.3.1.

1. 把 1 到 100 分别写在小纸条上放入黑箱里，随意抽取一张，抽到的数是素数的概率是多少？完全平方数的概率是多少？各位数字乘积大于 10

的概率是多少?

2. 有没有以全体自然数为终集的均匀分布？为什么？说说你的理由。

3. 一个正方体的木块表面上涂成蓝色，然后被均匀地切成 1000 个小正方块。从中随机抽出一块，恰有两面是蓝色的概率是多少?

4.4 排列和组合

均匀分布的问题里，事件的概率只和它包含的终态的个数以及所有终态的个数有关。因此，在相关的一些问题里，我们关心如何计出事件包含的终态的个数。

例子 4.4.1. 将编号为 $1, 2, 3$ 的 3 个小球排成一列，最左边的球是 1 的概率是多少?

这里我们假设各种排列是等概率分布的。在这样一个均匀分布的问题里，想要知道事件“最左边的球是 1”的概率，就用“最左边的球是 1”包含的终态个数除以所有终态的个数。那么，怎么计算“最左边的球是 1”包含的终态个数和所有终态的个数呢?

首先考虑所有终态的个数：将编号为 $1, 2, 3$ 的 3 个小球排成一列，有多少种方法?

不妨设三个球从左到右排列。无论排列方式如何，三个球分别占据“左”、“中”、“右”三个位置。从左边开始，把球一个个放到位置上。左边的位置可以放三个球中任何一个，因此有 3 种方法。按任一种方法放好左边的球以后，中间的位置可以放剩余两个球中任何一个，因此有 2 种方法。按任一种方法放好中间的球以后，右边的位置可以放最后一个球，只有 1 种方法。于是一共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种方法。

如果最左边的球是 1，有多少种方法? 这时左边的位置已经放好了 1 号球，因此中间的位置还有两种放法。任一种方法放好中间的球以后，右边的

位置放最后一个球，只有 1 种方法。因此，一共有 $2 \times 1 = 2$ 种方法。

综上所述，“最左边的球是 1”的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是}1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

我们把 n 个互不相同的物品排成一列的方法数目称为 n **排列数**，记作 P_n。比如，编号为 $1,2,3$ 的 3 个小球排成一列的方法数目就叫做“3 排列数”，记作 P_3。

对于一般的自然数 n，n 排列数是 $n-1$ 排列数的 n 倍。这是因为，如果把 n 个互不相同的物品排成一列，第一个位置总可以放 n 个物品中的任何一个，有 n 种方法。按任一种方法放好第一个位置后，剩下的 $n-1$ 个位置摆放剩下的 $n-1$ 个物品的方法数目，恰好就是 $n-1$ 排列数。

因此，用归纳法可以证明，n 排列数就是 n 乘以 $n-1$ 乘以 $n-2\cdots\cdots$ 直到乘以 1 的乘积。比如，5 排列数就是 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$。

如果我们把从 n 乘到 1 的计算看成关于 n 的函数的话，这个函数叫做（n 的）**阶乘**，记作 $n!$。n 排列数就是 n 的阶乘。

如果要求从 n 个互不相同的物品中选 m 个排成一列，那么按同样的思路，摆放的方法数为：

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1).$$

我们把它称为 ***n* 选 *m* 排列数**，记作 P_n^m。显然，P_n^n 就是 P_n。我们可以用阶乘来表示 P_n^m：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例子 4.4.2. 将 3 个红球和 2 个白球组成一列，最左边的球是红球的概率是多少？

我们仍然先计算 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数。这里球只有红白两种颜色的分别。同色的球没有差别。如果我们把球编号，$1,2,3$ 号球

是红球，4, 5 号球是白球，那么，按照编号排列，有 $5! = 120$ 种方法。不过，①②③④⑤和②③①④⑤其实是同一种方法。因为 1, 2, 3 号球都是红球，怎么排列都没有差别。同理，①②③⑤④和①②③④⑤也没有差别。3 个红球的排列方法有 $3! = 6$ 种，2 个白球的排列方法有 $2! = 2$ 种，于是这 $6 \times 2 = 12$ 种方法都对应同一种结果。也就是说，带编号的 12 个排列方法对应一种不带编号的排列方法。因此，实际上只有 $\frac{5!}{3!2!} = 10$ 种排列方法。

我们把不带编号的排列方法称为**组合数**。比如，3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目叫做 $(3, 2)$ 组合数或 5 选 3 组合数（因为也可以看作从 5 个位置里选 3 个放红球），记作 C_5^3 或 $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$。

如果最左边的球是红球，那么剩下的 4 个位置要放 2 个红球、2 个白球。于是，一共有 C_4^2 种方法。计算可知：

$$\mathrm{C}_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6.$$

即一共有 6 种方法。因此最左边的球是红球的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是红球}) = \frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

一般来说，n 选 m 组合数也可以用阶乘计算：

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

不难发现，C_n^m 和 P_n^m 有以下关系：

$$\mathrm{P}_n^m = m! \cdot \mathrm{C}_n^m.$$

容易发现：n 选 m 组合数等于 n 选 $n-m$ 组合数。比如，5 选 3 组合数等于 5 选 2 组合数。用红球和白球的例子，可以理解为：3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目，等于 3 个白球和 2 个红球组成一列的方法数目。

掌握了排列数和组合数，我们就可以计算一些复杂问题里终态的个数。

例题 4.4.1. 4 个红球和 2 个白球排成一列，有多少种方法？

解答. 一共有 6 个球，其中 4 个红球和 2 个白球，因此方法数为 6 选 4 组合数：

$$\mathrm{C}_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6\times5\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}\times2\times1} = \frac{30}{2} = 15.$$

一共有 15 种方法。

例题 4.4.2. 足球联赛有 20 只球队，随机分为两个组，每组 10 只球队相互比赛，最后各组得分最高者进入决赛。求其中甲、乙两队被分在不同组的概率。

解答. 依题设，把 20 只球队分为两组，每组 10 只球队，每一种分法的概率相等。我们分别计算甲、乙两队同组以及甲、乙两队不同组的分法数，不同组分法数与总分法数之比为不同组的概率。

首先计算两队同组的分法数。这时需要在剩余 18 只球队中再选 8 只球队与甲、乙同组，其余为另一组。因此一共有 C_{18}^8 种分法。

再计算两队不同组的分法数。这时需要在剩余 18 只球队中再选 9 只球队与甲队同组，而其余的就和乙队同组。因此一共有 C_{18}^9 种分法。

于是同组概率为：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{甲乙不同组}) &= \frac{\mathrm{C}_{18}^9}{\mathrm{C}_{18}^9+\mathrm{C}_{18}^8} = \frac{\frac{18!}{9!\cdot9!}}{\frac{18!}{9!\cdot9!}+\frac{18!}{8!\cdot10!}}\\ &= \frac{8!\cdot10!}{8!\cdot10!+9!\cdot9!} = \frac{10!}{10!+9\cdot9!} = \frac{10}{10+9}\\ &= \frac{10}{19}.\end{aligned}$$

更简单的思考方法：我们把甲队放在某组，然后剩下同组 9 个位置和另一组 10 个位置。乙队落入各个位置的概率是均等的。把乙队随机放入其中一个位置，那么乙队落入另一组 10 个位置的概率为 $\frac{10}{19}$。这里我们能够凭直觉判断出：乙队落入各个位置的概率是相等的。但在一些更复杂的情况下，我们仍然需要谨慎验证。

例题 4.4.3. 把 10 个相同的球分给甲、乙、丙、丁四人，每人至少有一个球，一共有几种分法?

解答. 考虑这样的实验：把球从左到右排成一排，用 6 块黑色和 3 块白色的挡板将相邻的球隔开。然后把黑色隔板拿走，只剩下白色隔板。把被隔开的球按左中右顺序分给甲、乙、丙、丁四人。不难看出，每种放隔板的方法恰好对应一种分球的办法。

因此，只需要计算有几种放隔板的方法。不考虑球的话，等于求 6 块黑隔板和 3 块白隔板的排列方法，因此方法数为 9 选 3 组合数:

$$\mathrm{C}_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

一共有 84 种方法。

例题 4.4.4. 盒子里有 100 枚螺丝，其中 10 枚是次品，其余是良品。从中抽取 10 枚都是良品的概率是多少?

解答. 要注意良品与良品、次品与次品并不做区分。我们可以把抽取的动作看作盒内外有 100 个位置供次品放置，其中 10 个在盒外（被抽出的）。不作限制的话，次品可以放在任何位置。如果要求抽取的 10 枚都是良品，等于限制次品只能放在另外 90 个位置。因此，所求概率为:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(10\text{枚都是良品}) &= \frac{\mathrm{C}_{90}^{10}}{\mathrm{C}_{100}^{10}} = \frac{\frac{90!}{80!\cdot 10!}}{\frac{100!}{90!\cdot 10!}} \\ &= \frac{90!\cdot 90!}{80!\cdot 100!} = \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93\cdot 92\cdot 91} \\ &\approx 0.3305\end{aligned}$$

10 枚都是良品的概率约为 33.05%。

习题 4.4.1.

1. 5 个红球和 3 个白球排成一列，有多少种方法?

2. 2 个红球、3 个白球和 2 个黄球排成一列，有多少种方法?

3. 4 个男孩和 3 个女孩排成一排，男女相间排列的方法有几种?

4. 袋子里有 5 个白球，7 个红球。从中随机抽出两个球，一白一红的概率是多少? 都是白色（红色）的概率是多少?

5. 一共有 100 个灯泡，其中有 10 个次品。从中随机抽取 10 个检验，发现有 2 个次品的概率是多少?

6. 设有两个正整数 $m < n$，证明：$m!$ 整除 $n!$。

第五章　多元映射

我们已经学习过映射。映射表示事物之间的对应关系。映射涉及两个集合：出发集和到达集。至今为止，我们接触的映射，都是把出发集里的一个元素对应到到达集里的一个元素。除了这种对应方式，现实生活中还有别的对应方式。

5.1　映射与多元映射

例子 5.1.1.

1. 某公司希望清点各个门店过去一年各个月份的销售额。

门店	月份	销售额
大连 01	1	￥121902.54
上海 03	4	￥204361.08
武汉 01	2	￥194720.10
⋮	⋮	⋮

2. 某次全市联考的名册。

学校	班级	姓名	准考证号
立德中学	初三（1）班	张三	$A00281$
师大附中	初三（6）班	李四	$A00916$
第六中学	初三（3）班	王五	$F00045$
⋮	⋮	⋮	⋮

第一个例子里，我们可以建立这样的对应关系：

$$\begin{aligned} f: \text{门店} \times \text{月份} &\to \mathbb{R}^+ \\ f(\text{大连01，1}) &= 121902.54, \\ f(\text{上海03，4}) &= 204361.08, \\ f(\text{武汉01，2}) &= 194720.10, \\ \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}$$

第二个例子里，我们可以建立这样的对应关系：

$$\begin{aligned} f: \quad \text{学校} \quad \times \quad \text{班级} \quad \times \quad \text{姓名} &\to \text{准考证号} \\ f(\text{立德中学，初三（1）班，张三}) &= A00281, \\ f(\text{师大附中，初三（6）班，李四}) &= A00916, \\ f(\text{第六中学，初三（3）班，王五}) &= F00045, \\ \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}$$

从多个出发集中各取一个元素，与到达集里的一个元素对应。这样的对应关系叫做**多元映射**。它把多个元素对应到一个元素。为了区别，我们把一个元素对应到一个元素的对应关系叫做**一元映射**。事实上，多元映射也可以看作一种特殊的一元映射，但在这个阶段我们不讨论这个问题，姑且认为它们是有区别的。以下提到“映射”，如果不特别指出，一般指一元映射。

多元映射也和映射一样，有自变量和应变量。多元映射的自变量是多个集合中的元素按顺序组成的，称为**有序元组**。比如，第一个例子中，自变

量 (大连01, 1) 就是由门店集合的元素“大连 01”和月份集合的元素“1”构成的有序二元组。第二个例子中，自变量 (师大附中, 初三（6）班, 李四) 就是由校名集合的元素“师大附中”、班级集合的元素“初三（6）班”和姓名集合的元素“李四”构成的有序三元组。

再来看一个数学中的例子：

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ (x,\ y)&\mapsto x^2+y^2 \end{aligned}$$

这个映射把实数 x,y 映射为 x^2+y^2。比如，我们令 $x=3$，$y=1$，就得到：$f(x,y)=3^2+1^2=10$。

出发集和到达集都是数集的映射，叫做函数。多元映射也如此。出发集和到达集都是数集的多元映射，叫做**多元函数**。以上的 f 就是二元函数。

再来看以下关于命题的多元映射：

$$\begin{aligned} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ &\to\{\text{真},\ \text{假}\}\\ (n,\quad m)&\mapsto \text{若}\, n>1\text{，则}\, n^2<m^3<2n^2+1. \end{aligned}$$

对任何自然数 n,m，f 将它们映射到命题 $P(n,m)$：“若 $n>1$，则 $n^2<m^3<2n^2+1$”。对某些 (n,m)，命题 $P(n,m)$ 为真命题，对另一些 (n,m)，命题 $P(n,m)$ 为假命题。这样含有两个变量的命题 $P(n,m)$ 称为**二元命题**。

习题 5.1.1.

1. 将加减乘除表示为多元函数。

2. 将正弦、余弦函数的和差角公式表示为多元函数。

3. 考虑将三角形顶点对应到它的重心的多元映射。如何在直角坐标系中把这个映射表示为多元函数？

5.2　通过映射理解多元映射

多元映射比映射更复杂，涉及到更多的集合，因此，我们希望通过映射来理解多元映射。

给定一个二元映射 $f: S_1 \times S_2 \to S_3$，如果只考虑 S_1 中的一个元素 a，那么

$$g_2 : t \mapsto f(a,t)$$

就是一个映射。同理，如果只考虑 S_2 中的一个元素 b，那么

$$g_1 : t \mapsto f(t,b)$$

也是一个映射。这两个映射都是根据 f 定义的。很多时候，为了研究二元映射 f，我们会先研究 g_1 和 g_2，它们比原来的二元映射更简单，只涉及一个自变量，更方便研究。

比如，要研究关于实数 x,y 的二元函数 $f:(x,y) \mapsto \frac{xy}{x+y}$，我们可以先让 x 等于某个定值 a，研究函数 $g_1 : t \mapsto f(a,t) = \frac{at}{a+t}$。可以把 g_1 的表达式改写为

$$g_1(t) = a - \frac{a^2}{a+t}.$$

$a = 0$ 的时候，$g_1(t) = 0$ 总成立。$a > 0$ 的时候，$g_1(0) = 0$，当 t 从 0 开始不断变大，正数 $a+t$ 越来越大，于是正数 $\frac{a^2}{a+t}$ 越来越小。$g_1(t)$ 随着 t 不断变大，逐渐从 0 变大，往 a 靠拢。可以看到，随着我们对不同的 a 对应的函数 g_1 做出分析，我们对二元函数 f 的了解就不断增加。

除了让自变量中的某个元素等于定值，我们还可以施加其它条件，把多元映射转化为映射。比如，对以上的二元函数 f，我们可以让 x 和 y 的和等于定值 a，研究函数

$$g : t \mapsto f(t, a-t) = \frac{t(a-t)}{a} = -\frac{t^2}{a} + t$$

g 是一个二次函数，最高次项是 $-\frac{1}{a}$。$a>0$ 时，最高次项系数小于 0，函数图像关于 $x=\frac{a}{2}$ 对称，最高点是 $(\frac{a}{2},\frac{a}{4})$；$a<0$ 时，最高次项系数大于 0，函数图像关于 $x=\frac{a}{2}$ 对称，最低点是 $(\frac{a}{2},\frac{a}{4})$。

习题 5.2.1.

1. 给定关于实数 x,y 的二元函数 $f:(x,y)\mapsto\frac{x^2+y^2}{xy}$。当 x 为定值 a 时，研究对应函数的性质。

2. 给定关于实数 x,y 的二元函数 $f:(x,y)\mapsto\frac{x^2-y^2}{xy}$。当 $x+y$ 为定值 a 时，研究对应函数的性质。

3. 给定源于实数 x,y,z 的三元函数 $f:(x,y,z)\mapsto xy+yz+zx-x^2$，研究这个函数的性质。

5.3 “有求必允”与“一路全真”

对二元命题，我们也可以采取同样的方法，分析它的性质。我们可以先让其中一个变量等于某个定值，这样二元命题就变成了含有一个变量的命题。比如，要研究关于正整数 n,m 的二元命题:

$P(n,m)$: $m+n$ 整除 m^2-n^2。

我们可以让 n 等于定值 3，研究关于变量 m 的命题 $Q(m)=P(3,m)$。如果 $Q(m)$ 对所有正整数 m 为真，那么我们可以说:

存在正整数 n，使得对所有自然数 m，$P(n,m)$ 为真。

显然，如果 n 取某个定值的时候，考虑关于变量 m 的命题 $Q(m)=P(n,m)$。如果对所有正整数 m，$Q(m)$ 都是真命题，那么以上这句话也成立。

上面的命题可以简记为:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+,\ \text{使得}\ \forall m \in \mathbb{N},\ \text{都有}\ P(n,m).$$

其中 $\exists$ 符号是有命题的标记方法，表示“存在（某个事物）”、“有（这样的）对象”的意思，读作“存在……（使得）”。

我们用表格来表示这个结论（图 6.1）。

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3	真	真	真	真	真	真	真	真	真	真
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

图 5.1: $P(n,m)$ 对 $n=3$ 一路为真

可以看到，“存在正整数 n，使得对所有正整数 m，$P(n,m)$ 为真（假）”，说明表格中有一行的值全是真（假）。同理，“存在正整数 m，使得对所有正整数 n，$P(n,m)$ 为真（假）”，说明表格中有一列的值全是真（假）。我们把这种性质称为“**一路全真（假）**”。

很多时候，二元命题并没有这么整齐的性质。比如这个关于正整数 n,m 的命题 $P(n,m)$: $n < m^2 \leqslant 3n+1$。正整数 n 是定值的时候，考虑 $P_1 : m \mapsto P(n,m)$，$P_1(m)$ 只对一部分自然数为真。但我们可以说，

$$\text{对任意正整数}\ n,\ \text{总有正整数}\ m,\ \text{使得}\ P(n,m)\ \text{为真。}$$

比如，$n=10$ 的时候，让 $m=5$，则 $n < m^2 \leqslant 3n+1$；$n=100$ 的时候，让 $m=16$，则 $n < m^2 \leqslant 3n+1$。一般来说，对给定的正整数 n，让 m 等于大于 $\sqrt{n}$ 的最小整数，就能使 $P_1(m)$ 为真。

这个命题可以简记为:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+,\ \exists m \in \mathbb{Z}^+,\ 使得P(n, m).$$

其中 $\exists$ 表示“总有”，我们约定在 $\forall$ 之后，它包含了“总”、“都”的含义，表示相关的有命题对 $\forall$ 指代的所有对象都成立。

用表格来表示这个结论（图 6.2）:

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	假	真	假	假	假	假	假	假	假	假
2	假	真	假	假	假	假	假	假	假	假
3	假	真	真	假	假	假	假	假	假	假
4	假	假	真	假	假	假	假	假	假	假
5	假	假	真	真	假	假	假	假	假	假
6	假	假	真	真	假	假	假	假	假	假
7	假	假	真	真	假	假	假	假	假	假
8	假	假	真	真	真	假	假	假	假	假
9	假	假	假	真	真	假	假	假	假	假
10	假	假	假	真	真	假	假	假	假	假

图 5.2: $P(n, m)$ 对 n 有求必允

可以看到，“对任意正整数 n，总有正整数 m，使得 $P(n, m)$ 为真”，说明表格里每一行都至少有一个值为真，我们称这种性质为对 n “**有求必允**”。反过来，“对任意自然数 n，总有自然是 m，使得 $P(n, m)$ 为假”，说明表格里每一行都至少有一个值为假，我们称这种性质为对 n “**有求必拒**”。

二元命题“有求必允”时，我们可以把 n 对应到一个使得 $P(n, m)$ 为真的 m。这样定义的映射，称为二元命题的**求允映射**。同理，二元命题“有求必拒”时，我们可以把 n 对应到一个使得 $P(n, m)$ 为假的 m。这样定义的映射，称为二元命题的**求拒映射**。

例子. 考虑关于正整数的二元命题 $P(n, m)$: $m > n$。对每个 n，取 $m = n+1$，就有 $m > n$ 为真。因此，我们可以构造求允映射:

$$f : n \mapsto n + 1$$

对任意 n，总存在 $m = f(n)$，使得 $P(n, m)$ 为真。另一方面，对每个 n，取

$m = n$，就有 $m > n$ 为假，因此，我们又可以构造求拒映射：

$$g : n \mapsto n$$

对任意 n，总存在 $m = g(n)$，使得 $P(n, m)$ 为假。

从上面可以看出，二元命题可以既“有求必允”又“有求必拒”。此外，求允映射、求拒映射不一定是唯一的。比如，以上例子中，我们也可以构造 $n \mapsto n + 3$ 或 $n \mapsto n + 100$，它们都能“有求必允”。

二元命题存在求允映射，说明它对于某个变量“有求必允”，否则，就说明它对该变量的某个取值无法“应允”，只能“拒绝”，也就是说它对这个取值“一路全假”。比如，要么二元命题 $P(n, m)$ 对 n 有求必允，要么对某个 n 的值“一路全假”。也就是说，“有求必允”的否定是“一路全假”。同理，“有求必拒”的否定是“一路全真”。

习题 5.3.1.

1. 用集合的语言解释：“有求必允”的否定是“一路全假”。用图表的方式画一个例子来说明它。

2. 考虑关于正整数 n, m 的二元命题 $P(n, m)$：n^2 整除 $m + 1$。这个命题是否关于 n 有求必允？是否关于 m 有求必允？是否关于某个 m 一路全假？是否关于某个 m 一路全真？

3. 考虑关于有理数 n, m 的二元命题 $P(n, m)$：$n^2 = m$。这个命题是否关于 n 有求必允？是否关于 m 有求必允？

4. 考虑关于实数的 x, y 的二元命题 $P(x, y)$：只要实数 r 的绝对值小于 x，r^2 就小于 y。这个命题是否关于 x 有求必允？是否关于 y 有求必允？