Numerisches Rechnen

Übung 4
Abgabe: 10.11.2017

Adrian C. Hinrichs, Matr. Nr. 367129
Georg Dorndorf, Matr. Nr. 366511

# 1	# 2	# 3	Σ
7/7	8/9	4/6	19/22

Aufgabe 1

7/7

Gegeben seien

$$S = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ -6 & 21 & -3 \\ 18 & -3 & 37 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

.

Aufgabe 1.a

4/4

Wir berechnen die LR-Zerlegung mit $S = LR$ mithilfe eines In-Place Algorithmus und ohne Pivotisierung.

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ -6 & 21 & -3 \\ 18 & -3 & 37 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ -\frac{1}{2} & 18 & -3 \\ 18 & -3 & 37 \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ -\frac{1}{2} & 18 & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

und,

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ 0 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ mit } S = L \cdot R$$ ✓

Aufgabe 1.b

1/1

Aus der Definition der Determinante und der LR-Zerlegung ergibt sich folgendes: Die $k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Vertauschungsoperationen, die während der LR Zerlegung durchgeführt wurden.

$$det(S) = (-1)^k \prod_{j\in[1,n]} s_{j,j} = 12 \cdot 18 \cdot 8$$
$$= 1728$$ ✓

Aufgabe 1.c

2/2

Wir lösen das lineare Gleichungssystem $Sx = b$ mithilfe der Teilaufgabe 1 und durch Rück-/Vorwärtseinsetzen. Es gilt $LRx = b \Leftrightarrow Ly = b$ für ein $y \in R^3$.

Wir bestimmen y: $Ly = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 19 \end{array}\right)$$

Es ist also

$$y_1 = 6$$
$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + y_2 = 3 \Leftrightarrow y_2 = 6$$
$$\frac{3}{2} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 6 + y_3 = 19 \Leftrightarrow y_3 = 8$$ ✓

.

Wir bestimmen x: $Rx = y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & 18 & 6 \\ 0 & 18 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

Es ist also

$$8x_3 = 8 \Leftrightarrow x_3 = 1$$
$$18x_2 + 6 = 6 \Leftrightarrow x_2 = 0$$
$$12x_1 - 6 \cdot 0 + 18 = 6 \Leftrightarrow x_1 = -1$$

Wir erhalten insgesamt also:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

8/9

Aufgabe 2.a

5/5

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$d_{1,1} = a_{1,1} = 2$$ ✓
$$l_{2,1} = a_{2,1}/d_{1,1}$$

$$= -1/2$$
$$l_{3,1} = a_{3,1}/d_{1,1}$$
$$= 0$$

$$d_{2,2} = a_{2,2} - l_{2,1}^2 d_{1,1}$$
$$= 2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 2$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$l_{3,2} = (a_{3,2} - l_{3,1}d_{1,1}l_{2,1})/d_{2,2}$$
$$= \beta / \frac{3}{2}$$
$$= \frac{2\beta}{3}$$

$$d_{3,3} = \alpha - (l_{3,1}^2 d_{1,1} + l_{3,2}^2 d_{2,2})$$
$$= \alpha - \left(0^2 2 + \left(\frac{2\beta}{3}\right)^2 \frac{3}{2}\right)$$
$$= \alpha - \frac{2\beta^2}{3}$$

Also sind die Matrizen L und D gegeben durch:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2\beta}{3} & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{2\beta^2}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.b

1 /1

A ist positiv definit, genau dann wenn D komponenntenweise positiv ist. Also ist A positiv definit, wenn α und β folgende Relation aufweisen:

$$\Leftrightarrow \alpha - \frac{2\beta^2}{3} > 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha > \frac{2\beta^2}{3}$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha > 2\beta^2 \geq 0$$

Aufgabe 2.c

1 /1

Da die CHOLESKY-Zerlegung $A = LDL^T$ einer LR zerlegung mit $R = DL^T$ entspricht gilt nach VL

$$\det A = \det L \cdot \det\left(DL^T\right)$$
$$= 1 \cdot \det\left(DL^T\right)$$
$$= 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{2\beta^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2\beta}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \beta \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{2\beta^2}{3} \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\alpha - \frac{2\beta^2}{3}\right)$$
$$= 3\alpha - 2\beta^2$$

Aufgabe 2.d

1 /2

Sei ein $A, D,$ und l wie oben und $b \in \mathbb{R}^3$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ definiert. Sei nun im folgenden $\alpha = \beta = 1$.
Wir definieren $DL^T x := y$.

$$\Rightarrow LDT^t x = b \Leftrightarrow Ly = b$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2\beta}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow 1y_1 = 1$$
$$\Rightarrow y_2 = 1 + \frac{y_1}{2}$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow y_3 = 1 - \frac{2}{3}y_2$$
$$= 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$$
$$= 0$$
$$\Longleftrightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per unserer Definition ist $y = DL^T x$

$$\Rightarrow L^T x = D^{-1} y$$

Durch Einsetzen, nicht durch Matrix-mult. -1

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x_3 = 0$$
$$\Rightarrow x_2 = 1 - 1x_3$$
$$= 1$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2$$
$$= 1$$
$$\Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

4 /6

Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $D_Z := \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_i := (\sum_{j \in [1..n]} |a_{ij}|)^{-1}$.

Zu zeigen: $\kappa_\infty(D_Z A) \leq \kappa_\infty(DA)$ für jede reguläre Diagonalmatrix D.

Adrian C. Hinrichs, Matr. Nr. 367129
Georg Dorndorf, Matr. Nr. 366511

Beweis: Angenommen A ist bereits äquibrilliert, gilt $\sum_{j\in[1,n]} |a_{ij}| = 1$ für alle $i \in [1, dim(A)]$. Es folgt, dass $||A||_\infty = 1$ und $\kappa_\infty(A) = ||A^{-1}||_\infty$ gilt.

Sei D eine beliebige Diagonalmatrix. So gilt

$$\begin{aligned}
||DA||_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j\in[1,n]} |d_i| \cdot a_{i,j} \\
&= \max_{1\leq i\leq n} \{|d_i| \sum_{j\in[1,n]} |a_{i,j}|\} \\
&= \max_{1\leq i\leq n} |d_i| \\
&= ||D||_\infty
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\|(DA)^{-1}\right\|_\infty = \left\|A^{-1}D^{-1}\right\|_\infty &= \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\left\|A^{-1}D^{-1}x\right\|_\infty}{\|x\|_\infty} \\
&= \max_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{\left\|A^{-1}y\right\|_\infty}{\|Dy\|_\infty} \\
&\overset{1}{\geq} \max_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{\left\|A^{-1}y\right\|_\infty}{\|D\|_\infty \|y\|_\infty} \\
&= ||D^{-1}||_\infty ||A^{-1}||_\infty
\end{aligned}$$

Es folgt unmittelbar

$$\kappa_\infty(DA) = \|DA\|_\infty \left\|(DA)^{-1}\right\|_\infty \geq \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \kappa_\infty(A)$$

und somit die ursprüngliche Behauptung.

QED

Rückführung auf nicht äquibrillierte Matrix fehlt -2

[1]Seien $A, B \in R^{n\times n}$ dann gilt $||AB|| \leq ||A||||B||$.