Formale Systeme Automaten und Prozesse

Abgabe: 10.05.2017

Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129

Aufgabe 5

Aufgabe 5.a

Ausgehend von der Annahme, dass die Laufzeit jeder elementaren Vergleichsoperation $\{>, <, \leq, \geq, =\} \in \Theta(1)$ liegt, ist die Rekursionsgleichung $T(n, m)$ der laufzeit des Algorithmus:

$$T(n,m) = \begin{cases} 2, \text{ falls } n = 0 \\ T(n-1,m) + 2, \text{ falls } n > 0 \\ T(n+1,m) + 3, \text{ falls } n < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5.b

$$T(n,m) = \begin{cases} 1, \text{ falls } n <= m \\ T(n-m,m) + 1, \text{ falls } n > m \end{cases}$$

Aufgabe 6

Aufgabe 6.a

Sei eine funktion f mit $f(n) = 27n^{\sqrt{3}}$ gegeben. Es fällt auf, dass (mindestens) ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(n) \in O(n^{\log_8 64 - \varepsilon}) = O(n^{2-\varepsilon})$ gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon = 0.1$ — nun gilt $\sqrt{3} \approx 1.73205 < 1.9 = 2 - \varepsilon$.
Ergo gilt für jedes $c \geq 27$, dass $27n^{\sqrt{3}}$ asymptotisch schneller wächst als $c \cdot n^{1.9} = c \cdot n^{\log_8 64 - \varepsilon}$, da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(n)}{c \cdot n^{\log_8 64-\varepsilon}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{27 \cdot n^{\sqrt{3}}}{c \cdot n^{1.9}} && \text{(I)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{27}{c \cdot n^{1.9-\sqrt{3}}} && \text{(II)} \\ &= 0 \forall c > 27, \text{ da } n^{1.9-\sqrt{3}} > 1 \forall n > 1 && \text{(III)} \end{aligned}$$

□

Mit dem Master-Theorem folgt, dass $T(n) \in \Theta(n^{\log_8 64})$

QED

Aufgabe 6.b

Aufgabe 6.c

Aufgabe 7

Aufgabe 7.a

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{IV}$$

Beweis:

$$(IA): n = 1 \tag{V}$$

$$\sum_{i}^{n} \frac{1}{i(i+1} = \frac{1}{1+1} \tag{VI}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1} \qquad \square \tag{VII}$$

$$(IV): \text{Dies gelte für ein beliebieges, aber festes } n \in \mathbb{N} \tag{VIII}$$

$$(IS): n = n + 1 \tag{IX}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} \tag{X}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n+1(n+1+1)} \tag{XI}$$

$$\overset{(IV)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1(n+2)} \tag{XII}$$

$$= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{XIII}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \tag{XIV}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+1)} \tag{XV}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \tag{XVI}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \tag{XVII}$$

Mithilfe von vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ ist die obige Aussage bewiesen.

QED

Aufgabe 7.b