Berechnenbarkeit und Komplexität

Übung 3
Abgabe: 14.11.2017

Adrian C. Hinrichs, Matr. Nr. 367129
Georg Dorndorf, Matr. Nr. 366511

# 1	# 2	# 3	Σ
1 /5	5 /5	5 /5	11

J.W.

Aufgabe 1 1 /5

Zu zeigen: $L_{\text{self}} = \{\langle M\rangle | M \text{ akzeptiert nicht } \langle M\rangle\}$

Beweis: Wir beweisen die Unentscheidbarkeit indem wir die Sprache auf die Form der Diagonalsprache bringen welche nach VL nicht entscheidbar ist.

Sei die Matrix A wie folgt gegeben:

$$(A_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \langle M_i\rangle \in L_{\text{self}} \\ 0, & \text{, sonst} \end{cases}$$

"j" taucht auf der rechten Seite ja gar nicht mehr auf...

Dann ist die Diagonalsprache D, die L_{self} entscheidet gegeben durch

Eine Sprache kann keine andere entscheiden...

$$D = \{i \in \mathbb{N} | A_{i,i} = 1\}$$

Warum nur Indizes in D?

Wir nehmen an, dass D entscheidbar ist um einen Widerspruch herbeizuführen. Dann gibt es eine TM M_i, die D entscheidet. Nun treten aber folgende zwei Widersprüche auf:

$$w_i \in D \overset{M_i \text{entsch.} D}{\Rightarrow} M_i \text{ akzeptiert } w_i \overset{Def. D}{\Rightarrow} w_i \notin D \quad ↯$$

Hier ist jetzt $w_i \in \mathbb{N}$ sodass M_i akz. nicht $\langle M_i\rangle$...

und

$$w_i \notin D \overset{M_i \text{entsch.} D}{\Rightarrow} M_i \text{ akzeptiert nicht } w_i \overset{Def. D}{\Rightarrow} w_i \in D \quad ↯$$

Also ist L_{self} nicht entscheidbar.

QED

Kann euren Ansatz nicht nachvollziehen... Ich denke ihr habt Indizes von TMen mit deren Kodierung verwechselt. Noch 1/5

Aufgabe 2 5 /5

Zu zeigen: Die Menge $\mathbb{N}^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: Zeige zunächst per vollständiger Induktion, dass die Menge $\mathbb{N}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist.

(IA) $n = 1$: $\mathbb{N}^1$ ist abzählbar (trivialfall) ✓

$n = 2$: $\mathbb{N}^2$ mit dem Cantorschen Diagonalverfahren existiert eine bijektive Abbildung $C_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$ ist also abzählbar unendlich. ✓

(IV) Gelte die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} |\mathbb{N}^{n+1}| &= |\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}| \\ &\overset{(IV)}{=} |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \\ &= |\mathbb{N}^2| \\ &\overset{\text{Cantor}}{=} |\mathbb{N}| \end{aligned}$$ ✓

□

Also ist

$$\begin{aligned} |\mathbb{N}^*| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n\right| &= \left|\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\right|, \text{ da } |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}| \,\forall n \in \mathbb{N} \\ &= \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times n\right| \\ &= |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \\ &\overset{\text{Cantor}}{=} |\mathbb{N}| \end{aligned}$$ ✓

Also ist N^* abzählbar unenedlich.

QED

Aufgabe 3 5 /5

Aufgabe 3.a 3 /3

Sei die gegebene Turingmaschine M gegeben durch $M = (Q_M, \Sigma, \Gamma, \square, q_{M0}, \bar{q}_M, \delta_M,)$. Unsere neue Turingmaschine M_w^* ist nun für jedes Wort $w \in \Sigma^* = \{0,1\}^*$ gegeben durch:

$$M_w^* = (Q, \Sigma, \Gamma, \square, q_0, q_M, \delta)$$

mit

$$Q = \{q_0, \dots, q_{|w|}\} \cup \{q_{|w|}, \dots, q_{2|w|}\} \dot\cup Q_M$$
$$\delta : (Q \setminus \{\bar{q}_M\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{R, L, N\}$$

Gegeben durch:

$$\delta((q,\sigma)) = \delta_M((q,\sigma)) \text{ wenn } q \in Q_M \backslash \{\bar{q}_M\},$$
$$\delta((q_i,\sigma)) = (q_{i+1}, w_{i+1}, R) \text{ wenn } q \notin Q_M \text{ und } i < |w|,$$
$$\delta((q_i,\sigma)) = (q_{i+1}, \sigma, L) \text{ wenn } q \notin Q_M \text{ und } |w| \leq i < 2|w|,$$
$$\delta((q_i,\sigma)) = (q_{M0}, \sigma, N) \text{ wenn } q \notin Q_M \text{ und } i = 2|w|.$$

Für das Zurücklaufen an den Anfang von w reicht ein Zustand aus, aber ok.

Wobei w_j mit $0 < j \leq |w|$ das $j$te Zeichen des Wortes w ist.

3/3

Aufgabe 3.b

2 /2

Seien ein Wort w, und zwei Turing Maschinen M und M_w^* wie in Augabenteil a gegeben.

Eine Mehrband-Turingmaschine N, welche für eine Eingabe $\langle M\rangle w$ die Gödelnummer von M_w^* berechnet könnte wie folgt Arbeiten:

1. Übernehme die Eingabe von Band 1 auf Band 2, lösche dabei Band 1. Füge nach $\langle M\rangle$ exakt eine leere Zelle als Trennzeichen ein.
2. Laufe auf Band 2 zum Beginn von w (hinter dem zweiten vorkommen von drei aufeinander folgenden Einsen)
3. Schreibe auf Band 1 drei Einsen
4. Gib die Übergänge zwischen den in Aufgabenteil als q_0 bis $q_{|w|}$ bezeichneten Zustände durch wiederholtes Traversieren von w auf Band 1 aus. Kodiere dabei den Übergang von q_0 als 0 und die Zustände q_i als 0^{i+2} für $i > 0$.
5. Gib die Übergänge zwischen den in Aufgabenteil als $q_{|w|}$ bis $q_{2|w|}$ bezeichneten Zustände durch wiederholtes Traversieren von w auf Band 1 aus. Kodiere dabei den Zustand q_i als 0^{i+2}. Beende jeden Übergang durch zwei Einsen.
6. Laufe auf Band 2 zum Beginn von $\langle M\rangle$.
7. Lösche die führenden drei Einsen auf Band 1.
8. Übertrage die Übergänge von M auf Band 2 zu Band 1, lösche dabei jeden schon verarbeiteten Übergang von Band 2. Schreibe für jeden, ausser den durch 00 kodierten, Übergang von $\langle M\rangle$ genau $2|w|$ nullen mehr. Beende jeden Übergang durch zwei Einsen.
9. Schreibe drei Einsen und terminiere.

Wobei ein Ausgegebener Übergang $\delta((q_i, w)) = (q_j, v, m)$ die Form $\langle q_i\rangle 1\langle w\rangle 1\langle q_j\rangle 1\langle v\rangle 1\langle m\rangle$ hat. Hierbei bezeichnet $\langle\cdot\rangle$ die Kodierung von $\cdot$, wenn nicht anders angegben wie in der Vorlesung.

Sehr schön