Berechnenbarkeit und Komplexität

Übung 2
Abgabe: 07.11.2017

Adrian C. Hinrichs, Matr. Nr. 367129
Georg Dorndorf, Matr. Nr. 366511

# 1	# 2	# 3	Σ
5 /5	4 /4	5 /6	14

J.W.

Aufgabe 1

5 /5

Aufgabenstellung: Sei $M = (Q, \Sigma, x, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$ eine 1-Band-TM, welche nur Bandzellen zwischen einschließlich Positionen $-s(n)$ und $s(n) - 1$ besucht. Zeigen Sie: Wenn M auf einer Eingabe w der Länge n hält, dann hält M auf w nach spätestens $(|Q| - 1) \cdot |\Gamma|^{2s(n)} \cdot 2s(n) + 1$ Schritten.

Lösung: Sei eine Turingmaschiene M wie oben gegeben. Wir können mit sicherheit sagen, dass diese Turingmaschiene nicht Terminiert, wenn eine Konfiguration —alsp die Kombination aus dem beschriebenen Band, dem aktiven Zustandes des Steuerautomaten und der Position des Schreiblesekopfes — zwei mal erreicht wird, da in deterministischer Automat in zwei identischen Situationen *ipso facto* keine unterschiedlichen Entscheidungen treffen kann. ✓

Da alle Banzellen zwischen einschließlich Positionen $-s(n)$ und $s(n) + 1$ besucht werden, ist die Anzahl der besuchten Zellen $2s(n)$[1]. Die Menge der Konfigurationen ist nun gegeben durch:

$$(Q\backslash\{\bar{q}\}) \times (\Gamma^{2s(n)}) \times [-s(n), s(n) - 1]$$

Die möchtigeit dieser Menge ist nun:

$$\begin{aligned}
&|(Q\backslash\{\bar{q}\}) \times (\Gamma^{2s(n)}) \times [-s(n), s(n) - 1]| \\
&= |(Q\backslash\{\bar{q}\}) \times (\Gamma^{2s(n)}) \times [1, 2s(n)]| \\
&= |(Q\backslash\{\bar{q}\}) \times (\Gamma^{2s(n)})| \cdot 2s(n) \\
&= |(Q\backslash\{\bar{q}\})| \cdot |(\Gamma^{2s(n)})| \cdot 2s(n) \\
&= |(Q\backslash\{\bar{q}\})| \cdot |\Gamma|^{2s(n)} \cdot 2s(n) \\
&\overset{\bar{q} \in Q}{=} (|Q| - 1) \cdot |\Gamma|^{2s(n)} \cdot 2s(n) \quad ✓
\end{aligned}$$

Also kann eine Turingmaschine die auf einer Eingabe der länge n hält höchstens $(|Q| - 1) \cdot |\Gamma|^{2s(n)} \cdot 2s(n)$ Schritte gehen, bevor sie den Endzustand erreicht. Sie terminiert also nach spätestens $(|Q|-1) \cdot |\Gamma|^{2s(n)} \cdot 2s(n) + 1$ Schritten.

5/5

QED

[1] Zelle 0 wird auch besucht

Aufgabe 2

4 /4

Aufgabenstellung: Sei $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}\}$ (über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$), wobei w^R das Wort w in umgekehrter Reihenfolge beschreibt. Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 2-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie ein zweites Band die Erkennung eines Wortes in L schneller machen kann.

Lösung: Die 2-Band-Turingmaschine kann L Zeiteffizienter als eine eine 1-Band-Turingmaschine entschieden:

1. Terminiere mit JA, wenn □ gelesen wird, ansonsten führe 2 aus, ohne Kopfpositionen oder Bandbelegungen zu ändern.
2. Wenn auf Band 1 0 oder 1 gelesen wird, schreibe dies auf Band 2, bewege beide Bänder nach rechts, bleibe in diesem Zustand. Wenn auf Band 1 # gelesen wird, Bewege Band 1 nach rechts, Band 2 nach links, ändere beide Bandbelegungen nicht und gehe in zustand . Wenn □ aud Band 1 gelesen wird, terminiere mit NEIN
3. Wenn das Gelesene auf Band 1 identisch zu dem Gelsenen von Band 2 und ungleich B ist, bewege Band 1 nach rechts, Band 2 nach links und bleibe in diesem Zustand. Wenn beide Gelesenen zeichen □ sind, terminiere mit JA. Andernfalls mit NEIN.

Komplexitätsanalyse Falls das n Lange Eingabewort $\mathfrak{w}$ aus L ist, läuft die Turing-Maschiene über die erste Hälfte des Eingabewortes (bis zum Doppelkreuz) und schreibt dabei das gelesene auf das andere Band, danach läuft sie auf Band 1 weiter bis zum Ende der Eingabe und auf Band 2 zurück zur Startposition, jede der n Positionen auf Band 1 wird also genau 1 mal besucht und jede der $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Speicherzellen auf Band 2 wird genau 2 mal besucht. Die Speicherkomplexität ist also offensichtlich im Best-Case in $O(n)$, genau wie die Laufzeitkomplexität. ✓

Falls das Wort kein Doppelkreuz besitzt, Schreibt die Maschine alle n Zeichen des Wortes auf Band 2, bevor Sie mit NEIN terminiert, Laufzeit- und Speicherkomplexität sind also wieder aus $O(n)$.

Falls das Wort zwar ein Doppelkreuz besitzt, aber nicht Symmetrisch ist, Schreibt die Turingmaschiene wieder $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ beim besuch der ersten Worthälfte, und Terminiert mit NEIN nach $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ und nicht spätr als nach

n Schritten, also ist auch hier die Laufzeit- und Speicherkomplexität $O(n)$. ✓

Aufgabe 3

5 /6

Aufgabenstellung: Zeigen Sie, dass jede 1-Band-TM durch eine 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band, d.h., durch eine Turingmaschine, die die Positionen $p < 0$ nie benutzt, simuliert werden

Lösung: Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$ welche $n \in \mathbb{N}$ beliebige Bandzellen besucht. Dann gibt es eine 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band, dass die Turingmaschine M simuliert. Diese TM markiert mit einem Zeichen, dass nicht in Γ ist, die erste Zelle des Bandes. ✓ Wenn diese Zelle besucht und oder beschrieben werden soll verschiebt die TM das bisher auf dem Band vorhandene um eine Stelle nach rechts. Dies kann bei einer TM mit endlichem Alphabet gemacht werden indem die TM sich merkt welches Zeichen auf der aktuellen Position ist und dieses mit dem der vorherigen ersetzt. Dann bewegt sich die TM einen schritt weiter nach rechts und wiederholt den Vorgang. Wenn der Bandinhalt um eine Stelle nach rechts verschoben wurde kann die TM wieder zurück an die zweite Bandzelle gehen und dort normal weiterarbeiten oder noch das Zeichen einfügen und dann weiterarbeiten. Der Kontext der TM wird dabei nicht verletzt, da die Kopfposition relativ zu den anderen Informationen bestehen bleibt. ✓

M muss nicht zwangsläufig halten, könnte also unendliche viele Zellen besuchen.

Das verschieben des gesamten Bandinhalts und das zurückgehen auf die erste Zelle dauert für $m \in \mathbb{N}$ beschriebene Zellen $2m$. Bei einer TM, die insgesamt $p \in \mathbb{N}$ Zellen besucht können im Worst-Case alle zellen links des Bandbegins liegen es ergibt sich also eine Worst-Case Laufzeit der Simulation von $O(n!)$. f

Ihr könnt nur einen Zeitverlust angeben, die absolute Laufzeit ist ja durch das M bestimmt. -1