Numerisches Rechnen

Übung 2
Abgabe: 27.10.2017

Adrian C. Hinrichs, Matr. Nr. 367129
Georg Dorndorf, Matr. Nr. 366511

# 1	# 2	# 3	Σ
6 /6	5 /6	8 /9	19 /21

K. M.

Aufgabe 1

6 /6

Nach VL gilt:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = |f'(x)\frac{x}{f(x)}|.$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \max\{\left|f'(x)\frac{x}{f(x)}\right| \mid j \in [1,n]\}$$

für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1.a

Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \Rightarrow \kappa_{\text{rel}} &= \left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\arctan x}\right| \end{aligned}$$

Um nun zu bestimmen, ob die Funktion gut oder schlecht konditioniert ist, bestimmen wir die Grenzwerte der relativen Koditionszahl:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \kappa_{\text{rel}}(x) &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\arctan x}\right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \infty} \kappa_{\text{rel}}(x) &= \lim_{x\to \infty}\left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\arctan x}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{\arctan x}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\arctan x}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{\arctan x}\right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} \kappa_{\text{rel}}(x) &= \lim_{x\to -\infty}\left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\arctan x}\right| \\ &= \lim_{x\to \infty}\left|\frac{1}{1+(-x)^2} \cdot \frac{-x}{\arctan -x}\right| \\ &\overset{\arctan x = \arctan -x}{=} \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{-x}{\arctan x}\right| \\ &\overset{\arctan x\cdot(1+x^2)>0}{=} \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\arctan x}\right| \\ &= \lim_{x\to\infty} \kappa_{\text{rel}}(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da sowohl $\frac{1}{1+x^2}$ als auch $\frac{x}{\arctan x}$ streng monoton für positive x sind, ist $\kappa_{\text{rel}}(x)$ streng monoton steigend für $x \in \mathbb{R}^+$ und streng monoton fallend für alle x mit $-x \in \mathbb{R}^+$. Daher ist $\kappa_{\text{rel}}(x) \leq 1 \,\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und somit ist $f(x)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ gut Konditioniert.

Aufgabe 1.b

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(x) \text{ für } x \in [-1,1] \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in]-1,1[\backslash\{0\} \\ \Rightarrow \kappa_{\text{rel}}(x) &= \left|\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{\arcsin x}\right| \end{aligned}$$

Erneut führen wir eine Grenzwertbetrachtung durch, um die Kondition zu evaluieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \kappa_{\text{rel}}(x) &= \lim_{x\to 1}\left|\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{\arcsin x}\right| \\ &= \lim_{x\to 1}\left|\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{2}{\pi}\right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} \kappa_{\text{rel}}(x) &= \lim_{x\to -1}\left|\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{\arcsin x}\right| \\ &= \lim_{x\to 1}\left|\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{2}{\pi}\right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \kappa_{\text{rel}}(x) &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{\arcsin x}\right| \\ &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{1-0} \cdot \frac{x}{\arcsin x}\right| \\ &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{\arcsin x}\right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es ist $\kappa_{\text{rel}}(x)$ für positive x streng monoton steigend und für negative x streng monoton fallend. Ergo ist $\kappa_{\text{rel}}(x) \,\forall\, x \in]-1,1[\backslash\{0\}$ und somit ist $f(x)$ auf dem gesamten Definitionsbereich schlecht Konditioniert. Warum?

für $x \approx 0$ gut konditioniert! $\boxed{-1}$

Aufgabe 1.c

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^y = e^{y\log x}\\
\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{y}{x}e^{y\log x} \quad \text{und}\\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \log(x)\cdot e^{y\log x}\\
\Rightarrow \kappa_{\text{rel}} &= \max\{\left|\frac{y\cdot e^{y\log x}}{x}\cdot\frac{x}{e^{y\log x}}\right|,\\
&\quad \left|\log(x)\cdot e^{y\log x}\cdot\frac{y}{e^{y\log x}}\right|,\}\\
&= \max\{|y|,|y\log x|\}\\
&= \begin{cases} |y\log x| & \text{falls } |y| < |y\cdot logx|\\ |y| & \text{sonst}\end{cases}\\
&= \begin{cases} |y\log x| & \text{falls } (y\neq 0\wedge\\ & (0<x<\frac{1}{e}\vee x>e)\\ |y| & \text{sonst}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Funktion ist also gut Konditioniert, falls $y = 0$ oder $x > e^{-1} \wedge x < e$ (✓)

Wann noch?

Aufgabe 2

5 /6

Aufgabe 2.a

1 /2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3\\ -6 & 0.1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
||A||_1 &\overset{Def.}{=} \max_{j\in\{1,2\}} \sum_{i\in\{1,2\}} |A_{i,j}|\\
&= \max\{-5,3.1\} = \cancel{3.1} \; = 7
\end{aligned}
$$

$\max\{|1|+|6|, |3|+|0.1|\}$

und

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{0.1\cdot 1 + 6\cdot -3}\begin{pmatrix} 0.1 & -3\\ 6 & 1\end{pmatrix}\\
||A^{-1}||_1 &= \max_{j\in\{1,2\}} \sum_{i\in\{1,2\}} |A_{i,j}|\\
&= \max\{\frac{6.1}{18.1},\frac{-2}{18.1}\} = \frac{6.1}{18.1}
\end{aligned}
$$

.

Es ist also

$$
\kappa_1(A) = \cancel{3.1}\cdot\frac{6.1}{18.1} \cdot 7
$$

-1

.

Wir berechnen nun $||A||_2$.

$$
\begin{aligned}
||A||_2 &\overset{Def.}{=} \sqrt{\lambda\max(A^TA)}\\
&= \sqrt{\lambda\max(\begin{pmatrix} 1 & -6\\ 3 & 0.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3\\ -6 & 0.1\end{pmatrix})}\\
&= \sqrt{\lambda\max(\begin{pmatrix} 37 & 2.4\\ 2.4 & 9.01\end{pmatrix})}
\end{aligned}
$$

Wir bestimmen das charakteristische Polynom χ_{A^TA} um die Eigentwerte zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
\chi_{A^TA} &= \det(X\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 37 & 2.4\\ 2.4 & 9.01\end{pmatrix}))\\
&= \det(\begin{pmatrix} X-3\cancel{6}7 & -2.4\\ -2.4 & X-9.01\end{pmatrix}))\\
&= (X-37)(X-9.01)-(2.4\cdot 2.4)\\
&= X^2 - 46.01X + 327.61
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also die Eigenwerte

$$
\lambda_{1/2} - \frac{46.01}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{46.01}{2}\right)^2 - 327.61}
$$

. Es ist offensichtlich

$$
\lambda\max(\begin{pmatrix} 37 & 2.4\\ 2.4 & 9.01\end{pmatrix})) = -\frac{45.01}{2} + \sqrt{\left(\frac{45.01}{2}\right)^2 - 318.6}
$$

Also erhalten wir für $||A||_2$

$$
\begin{aligned}
||A||_2 &= \sqrt{-\frac{46.01}{2} + \sqrt{\left(\frac{46.01}{2}\right)^2 - 327.61}}\\
&\approx 37.2043
\end{aligned}
$$

(✓)

Aufgabe 2.b

2 /2

Zu zeigen: $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A)$ für $A \in R^{2\times 2}$
Beweis:

Wir indizieren A wie folgt:

$$
A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2}\\ A_{2,1} & A_{2,2}\end{pmatrix}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_{2,2} & -A_{1,2}\\ -A_{2,1} & A_{1,1}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}}\begin{pmatrix} A_{2,2} & -A_{1,2}\\ -A_{2,1} & A_{1,1}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_1(A) &\overset{Def.}{=} ||A||_1\cdot||A^{-1}||_1\\
&= \max_{j\in\{1,2\}}\sum_{i\in\{1,2\}}|A_{i,j}|\cdot\max_{j\in\{1,2\}}\sum_{i\in\{1,2\}}|A^{-1}_{i,j}|\\
&= \max_{j\in\{1,2\}}(|A_{1,i}|+|A_{2,i}|)\cdot\max_{i\in\{1,2\}}(|A^{-1}_{1,i}|+|A^{-1}_{2,i}|)\\
&= \max_{j\in\{1,2\}}(|A_{1,j}|+|A_{2,j}|)\cdot\max_{i\in\{1,2\}}(|A_{i,1}|+|A_{i,2}|)\\
&\cdot\frac{1}{|\det(A)|}\\
&= \max_{j\in\{1,2\}}(|A^{-1}_{j,1}|+|A^{-1}_{j,2}|)\cdot|\det(A)|\cdot\frac{1}{|\det(A)|}\\
&\cdot\max_{i\in\{1,2\}}(|A_{i,1}|+|A_{i,2}|)\\
&= \max_{i\in\{1,2\}}\sum_{j\in\{1,2\}}|A^{-1}_{i,j}|\cdot\max_{i\in\{1,2\}}\sum_{j\in\{1,2\}}|A_{i,j}|\\
&= ||A||_\infty\cdot||A^{-1}||_\infty\\
&\overset{Def.}{=} \kappa_\infty(A)
\end{aligned}
$$

QED

Aufgabe 2.c

2 /2

Zu zeigen: Für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wobei A invertierbar ist, gilt $\kappa_*(A) = \kappa_*(A^{-1})$.[1]

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\kappa_*(A) &\overset{Def.}{=} ||A||_* \cdot ||A^{-1}||_* \\ &\overset{2}{=} ||A^{-1}||_* \cdot ||A||_* \\ &\overset{Def.}{=} \kappa_*(A^{-1})\end{aligned}$$

✓

Aufgabe 3

/9

Aufgabe 3.a

2 /2

Da ein Taylorpolynom zweiter ordnung gefordert ist, bestimen wir zunächst die ersten beiden Ableitungen der Funktion $g(x)$:

$$\begin{aligned}g(x) &= \sin(8\cdot x) \\ g'(x) &= 8\cdot\cos(8\cdot x) \quad ✓ \\ g^{(2)}(x) &= -64\cdot\sin(8\cdot x) \quad ✓\end{aligned}$$

$\pi/16$

Das Taylerpolynom um den Punkt $x = \frac{\pi}{8}$ entwickelt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}p_0(\tilde{x}) &= g(\frac{\pi}{8}) \\ &= \sin(8\cdot\frac{\pi}{8}) \\ &= \sin\pi \qquad = 1 \; ? \\ p_1(\tilde{x}) &= p_0(\tilde{x}) + g'(\frac{\pi}{8})(\tilde{x}-x) \\ &= 1 + 8\cdot\cos(8\cdot\frac{\pi}{8})(\tilde{x}-x) \\ &= 1 + 8\cdot\cos\pi \qquad = 1 ? (✓) \\ p_2(\tilde{x}) &= p_1(\tilde{x}) + \frac{g^{(2)}(\frac{\pi}{8})(\tilde{x}-x)^2}{2} \\ &= p_1(\tilde{x}) + \frac{g^{(2)}(\frac{\pi}{8})(\tilde{x}-\frac{\pi}{8})^2}{2} \\ &= 1 + \frac{-64\sin(\frac{\pi}{8})(\tilde{x}-\frac{\pi}{8})^2}{2} \\ &= 1 + \frac{-64\cdot 1\cdot(\tilde{x}-\frac{\pi}{8})^2}{2} \\ &= 1 - 32\cdot(\tilde{x}-\frac{\pi}{8})^2 \quad 🐘 \\ &= 1 - 32\cdot(\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\frac{\pi}{8} + \left(\frac{\pi}{8}\right)^2) \\ &= -32\tilde{x}^2 - 8\tilde{x} + \frac{\pi^2}{64} + 1 \qquad (✓)\end{aligned}$$

Zur vermeidung von Fehlern durch Gleitkommarechnungen wird in der folgenden Teilaufgabe für $p_2(\tilde{x})$ die durch 🐘 gekenzeichnete Gleichung verwendet werden.

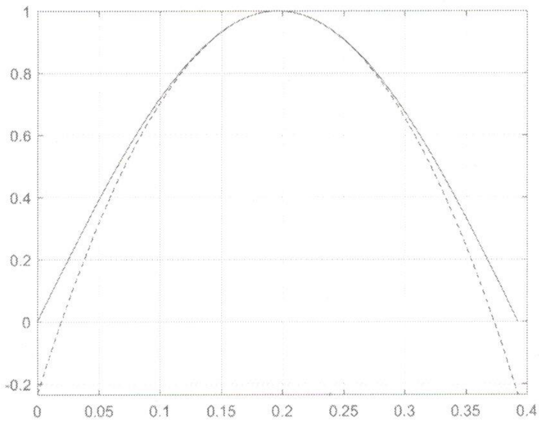

Abbildung 1: Plot zu Aufgabe 3.b

✓

Aufgabe 3.b

3 /3

```
g  = @(x) sin(x.*8);
p1 = @(x) 1;
p2 = @(x) 1 - 32.*(x-pi./16).^2;

fplot(g,[0 1.*pi./8],'b')
hold on
fplot(p1,[0 1.*pi./8],':k')
fplot(p2,[0 1.*pi./8],'--k')
hold off
grid on
```

Aufgabe 3.c

0 /1

Es ist gegeben $g(x) = sin(8x)$. Wir bestimmen κ_{rel}

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &\overset{Def.}{=} \left|f'(x)\frac{x}{f(x)}\right| \\ &= \left|8\cdot\cos(8x)\cdot\frac{x}{sin(8x)}\right|\end{aligned}$$

$\boxed{-1}$

Aufgabe 3.d

3 /3

```
%intervall
i = [pi./32 3.*pi./32]
% g
g=@(x) sin(8 .* x)
% g approx
g_approx=@(x) sin(8 .* (x+0.05))
%kappa_rel
k=@(x) abs(8.* cos(8.*x).* (x/sin(8.*x)))
%relativer ausgabefehler
rel_err =@(x) abs(g_approx(x)-g(x)) ./ g(x)
hold on;

fplot(k,i,':k')
fplot(rel_err,i,'--k')

legend("\kappa_{rel}(x)","relativer Ausgabefehler
    ↪ ")
hold off;
```

[1] Wir beschränken uns auf den Beweis für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da in der VL $\kappa_*(A)$ nur für solche definiert ist.

[2] Kommutativgesetz

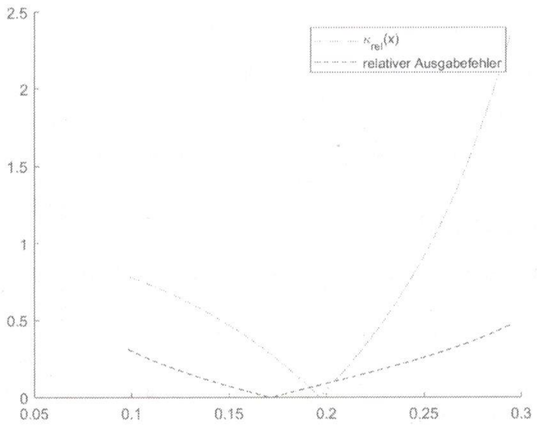

Abbildung 2: Plot zu Aufgabe 3.d