Problem 1.2.1

Apply Gauss Jordan method to solve the equation $x+y+z=9$, $2x-3y+4z=13$, $3x+4y+5z=40$..

In matrix form,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Augmented matrix is given by

$$C = [A : B]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 9 \\ 2 & -3 & 4 & : & 13 \\ 3 & 4 & 5 & : & 40 \end{bmatrix}$$

Applying operations $R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1; R_3 \Rightarrow R_3 - 3R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 9 \\ 0 & -5 & 2 & : & -5 \\ 0 & 1 & 2 & : & 13 \end{bmatrix}$$

$R_2 \Leftrightarrow R_3$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 9 \\ 0 & 1 & 2 & : & 13 \\ 0 & -5 & 2 & : & -5 \end{bmatrix}$$

$R_3 \Rightarrow R_3 + 5R_2$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 9 \\ 0 & 1 & 2 & : & 13 \\ 0 & 0 & 12 & : & 60 \end{bmatrix}$$

$R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -4 \\ 0 & 1 & 2 & : & 13 \\ 0 & 0 & 12 & : & 60 \end{bmatrix}$$

$R_3 \Rightarrow \frac{1}{12}(R_3)$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -4 \\ 0 & 1 & 2 & : & 13 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_3$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -4 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$R_1 \Rightarrow R_1 + R_3$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = 1$$

$$y = 3$$

$$z = 5$$

Problem 1.2.2

Apply Gauss-Jordan method to solve the equation

$$\begin{aligned} 10x + y + z &= 12 \\ 2x + 10y + z &= 13 \\ x + y + 5z &= 7 \end{aligned}$$

$$[A : B] = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & : & 12 \\ 2 & 10 & 1 & : & 13 \\ 1 & 1 & 5 & : & 7 \end{bmatrix}$$

$R_1 \Leftrightarrow R_2$

$$[A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & : & 7 \\ 2 & 10 & 1 & : & 13 \\ 10 & 1 & 1 & : & 12 \end{bmatrix}$$

$R_2 \Rightarrow R_2 - R_1$, $R_3 \Rightarrow R_3 - 10R_1$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & : & 7 \\ 0 & 8 & -9 & : & -1 \\ 0 & -9 & -49 & : & -58 \end{bmatrix}$$

$R_1 \Rightarrow 8R_1 - R_2$, $R_3 \Rightarrow 8R_3 + 9R_2$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 49 & : & 57 \\ 0 & 8 & -9 & : & -1 \\ 0 & 0 & -473 & : & -473 \end{bmatrix}$$

$R_3 \Rightarrow \frac{R_3}{-473}$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 49 & : & 57 \\ 0 & 8 & -9 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \Rightarrow R_1 - 49R_3$, $R_2 \Rightarrow R_1 + 9R_3$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & : & 8 \\ 0 & 8 & 0 & : & 8 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$8x = 8$$
$$8y = 8$$
$$1x = 1$$

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 1$$