# לוגיקה למדעי המחשב – שיעור 7: משפט הרברנד ומשפט סקולם, לוגיקות אחרות, חזרה למבחן

דוד קסלר 054-4511925

# חזרה קצרה על השיעור הקודם

# הוכחות בשפה הפסוקית המלאה

- עד עכשיו למדנו את תחשיב הילברט מעל השפה המצומצמת הכוללת את $(\forall, \rightarrow, \neg)$
- כמו בשפת הפסוקים, גם כאן אפשר להגדיר תחשיב עבור השפה המלאה הכוללת את כל הכמתים $(\forall, \exists)$ וכל הקשרים $(\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee)$
- עבור הקשרים הנוספים נוסיף את האקסיומות הנוספות של השפה הפסוקית, למשל $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)$
- עבור הכמת $\exists$ נוסיף את כלל היצירה והאקסיומה:
  - נוסף לכלל ההכללה בכמת לכל : $\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$ נוסיף כלל הכללה כמת קיים: $\frac{\varphi}{\exists x \varphi}$
  - אקסיומת ההצבה בכמת $\exists$: האקסיומה: $\exists x \varphi \rightarrow \varphi[t/x]$, כאשר $t$ קבוע חדש

# הוכחות בשפה הפסוקית המלאה – תרגיל (חדש)

- הוכיחו $\{\forall x\big(Q(x) \to R(x)\big), \exists x\big(P(x) \land Q(x)\big)\} \vdash \exists x\big(P(x) \land R(x)\big)$
  - פתרון:

| | |
|---|---|
| $1. \exists x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ | (הנחה) |
| $2. (P(t) \land Q(t))$ | (הצבה בכמת ∃+MP) |
| $3. \forall x\big(Q(x) \to R(x)\big)$ | (הנחה) |
| $4. (Q(t) \to R(t))$ | (הצבה בכמת ∀+MP) |
| $5. (P(t) \land Q(t)) \to P(t)$ | (אקס' 4 עמ' 178) |
| $6. P(t)$ | (MP2,5) |
| $7. (P(t) \land Q(t)) \to Q(t)$ | (אקס' 4 עמ' 178) |
| $8. Q(t)$ | (MP2,7) |

# הוכחות בשפה הפסוקית המלאה – תרגיל (חדש)

- הוכיחו $\{\forall x\big(Q(x) \to R(x)\big), \exists x\big(P(x) \land Q(x)\big)\} \vdash \exists x\big(P(x) \land R(x)\big)$
  - פתרון:

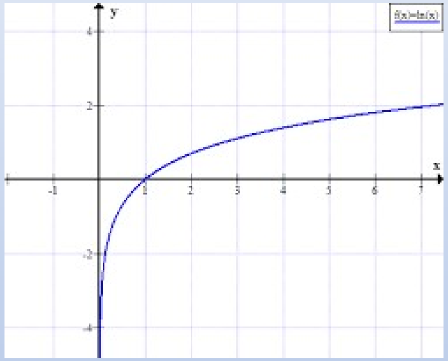
| | |
|---|---|
| (MP8,4) | 9.$R(t)$ |
| (אקס' 5 עמ' 178) | 10.$\big(P(t) \to (R(t) \to \big(P(t) \land R(t)\big))\big)$ |
| (MP6,10) | 11.$(R(t) \to \big(P(t) \land R(t)\big))$ |
| (MP11,9) | 12.$\big(P(t) \land R(t)\big)$ |
| (הכללה כמת קיים) | 13.$\exists x\big(P(x) \land R(x)\big)$ |

# הומומורפיזם ואיזומורפיזם

- נתונה שפה $L$ ושני מודלים $M_1$ ו-$M_2$ . נגדיר פונקציה $H$:
$$H: D^{M_1} \to D^{M_2}$$
- $H$ נקראת הומומורפיזם אם מתקיים:
  - $H(c^{M_1}) = c^{M_2}$
  - $H(f^{M_1}(a_1,a_2)) = f^{M_2}(H(a_1),H(a_2))$
  - $(a_1,a_2) \in R^{M_1} \Rightarrow (H(a_1),H(a_2)) \in R^{M_2}$
- באיזומורפיזם:
  - $(a_1,a_2) \in R^{M_1} \Leftrightarrow (H(a_1),H(a_2)) \in R^{M_2}$
  - $H$ חח"ע (כולל בדרישה הקודמת) ועל

# איזומורפיזם – תרגיל חדש

- נתונה שפה $L =< c,f >$ כאשר $c$ קבוע ו-$f$ פונקציה דו מקומית, ונתונים שני המודלים $M =< R^+,1,\cdot>$ ו-$M' =< R,0,+>$ ונתונה פונקציה $H: R^+ \to R:\ H(x) = \ln(x)$ האם $H$ איזומורפיזם?




- נבדוק לפי ההגדרה:
  - נבדוק שמירה על קבועים, פונקציות ויחסים:
    - $H(c^M) = H(1) = \ln(1) = 0 = c^{M'}$
    - $H(x\cdot y) = \ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y) = H(x) + H(y)$
    - $x = y \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow H(x) = H(y)$
  - הפונקציה $H$ מונוטונית עולה ממש ולא חסומה ולכן חד חד ערכית ועל
  - כל התכונות מתקיימות ולכן $H$ איזומורפיזם

# תורה

- תורה: קבוצת פסוקים קונסיסטנטית (שלא ניתן להוכיח בה פסוק ושלילתו)
- תורה שלמה: תורה שבה עבור כל פסוק $\varphi$ ניתן להוכיח את $\varphi$ או את $\neg\varphi$
- בתחשיב הפסוקים לתורה שלמה בדיוק מודל אחד. בתחשיב היחסים לתורה שלמה יש מודל אחד עד כדי איזומורפיזם עבור כל עוצמה

# תת מודל

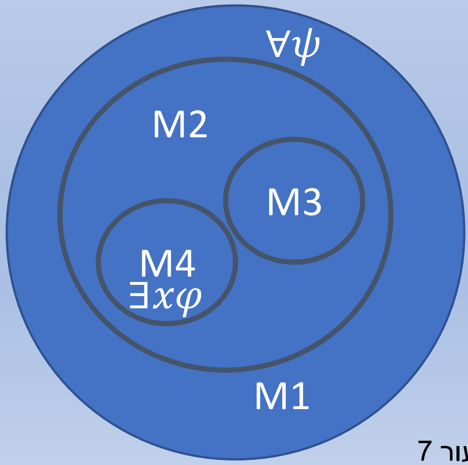
- נתונה שפה $L$ ושני מודלים $M_1$ ו-$M_2$ . $M_2$ הוא תת מודל של $M_1$ אם הוא נותן את אותו הפירוש לקבועים, לפונקציות וליחסים, ומתקיים $D^{M_2} \subseteq D^{M_1}$
- תת מודל מינימלי: נתונה שפה $L$, מודל $M$ ותת מודלים $M_1, M_2 \ldots$.
אם ב-$L$ יש לפחות קבוע אחד אזי ניתן להגדיר תת מודל מינימלי, הכולל את החלק המשותף לכל תתי המודלים האפשריים ל$M$: $\bigcap_i M_i$
- תת המודל המינימלי כולל לפחות את כל שמות העצם ללא המשתנים, כלומר את הקבועים ואת התוצאה של הפעלת הפונקציות על הקבועים

# נוסחאות קיים / נוסחאות לכל

- **נוסחת קיים פרנקסית**: נוסחה מהצורה $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$ כאשר $\varphi$ נוסחה חסרת כמתים
- **נוסחה ישית / נוסחת קיים**: חיבור נוסחאות קיים פרנקסיות ע"י $\vee$ , $\wedge$ , $\exists$
- **נוסחת לכל פרנקסית**: נוסחה מהצורה $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ כאשר $\varphi$ נוסחה חסרת כמתים
- **נוסחת לכל / כוללת**: חיבור נוסחאות לכל פרנקסיות ע"י $\vee$ , $\wedge$ , $\forall$

# נוסחאות קיים, נוסחאות לכל ותתי מודלים

- משפט:
  - שמות עצם, ונוסחאות חסרות כמתים מקבלים את אותו ערך במודל ותת מודל
  - תהי $\varphi$ נוסחת קיים. אם היא נכונה בתת מודל אזי היא נכונה גם בכל תת מודל שמכיל אותו
  - תהי $\psi$ נוסחת לכל. אם היא נכונה בתת מודל אזי היא נכונה גם בכל תת מודל שמוכל בו
- בציור:
  - $\exists\varphi$ תהיה נכונה במודלים 1,2,4
  - $\forall\psi$ תהיה נכונה בכל המודלים



# סקולמיזציה של פסוק

- תהליך החלפת פסוק בפסוק כולל בשפה מועשרת, כך שאם לאחד יש מודל גם לשני יש
- תהליך ההחלפה:
  - נעביר את הפסוק לצורה פרנקסית נורמלית
  - בפסוק $\exists y\varphi$ נחליף את $y$ בקבוע $\varphi\ [c/y]$
  - בפסוק מהצורה $\forall x_1, \dots, \forall x_n \exists y\varphi$ נבחר פונקציה חדשה f שלא בשפה ונחליף את $y$ בשם עצם שתלוי ב- $x_1, \dots, x_n$ שלפניו, כלומר נחליף בפסוק $\forall x_1, \dots, \forall x_n \varphi\ [f(x_1, \dots, x_n)/y]$
  - נחזור על שני השלבים האחרונים לכל כמתי קיים מהחוץ פנימה

# משפט הרברנד

- רלוונטי לשפות עם קבוע אחד לפחות
- מתרכזים בשמות העצם הקבועים שאין בהם משתנים $c, f(c), f\big(g(c)\big), \ldots$
- המודלים של הרברנד – מייצגים את כל המודלים המינימליים בשפה
- סתירה בנוסחת כולל במודל מינימלי $\Leftarrow$ סתירה בכל המודלים
- ראינו את שיטת סקולם שהופכת פסוק $\varphi$ לפסוק כולל $\varphi'$ כך של-$\varphi$ יש מודל אם"ם ל-$\varphi'$ יש מודל
- משפט / אלגוריתם הרברנד מאפשר אם כן ליצור פסוק כולל, לבדוק אם הוא מוביל לסתירה במודל מינימלי וכך להוכיח שהפסוק המקורי מוביל לסתירה.

# משפט הרברנד

- עבור תורה $T$ אוניברסלית עם קבוע אחד לפחות, $T$ ספיקה אם"ם $T^*$ ספיקה, כאשר $T^*$ הוא קב' כל ההשמות של שמות עצם לתוך משתנים בפסוקים של $T$
- דוגמאות:
  - בשפה עם הקבועים $a,b$ והתורה האוניברסלית $T$ הבאה:
    $T = \{\forall x \forall y R(x,y)\}$ נקבל את
    $$T^* = \{R(a,a), R(a,b), R(b,a), R(b,b)\}$$
  - אם בשפה הייתה גם פונקציה חד מקומית $f$ היינו מקבלים:

$$T^* = \{R(a,a), R(a,b), R(b,a), R(b,b), R(f(a),a), R(a,f(a)), R\big(f(b),f(a)\big), R(f\Big(f\big(f(a)\big)\Big), f\big(f(b)\big), \dots\}$$

# האלגברה של הרברנד

- התחום של הרברנד / מרחב הרברנד: $D_H$ – קבוצת שמות העצם ללא משתנים (הקבועים והפעלת פונקציות עליהם) בשפה עם קבוע אחד לפחות
  - בדוגמאות מהשקף הקודם: ללא הפונקציה: $U = \{a,b\}$
    עם הפונקציה $f$: $U = \{a,b,f(a),f(b),f\big(f(a)\big),f\big(f(b)\big) \ldots\}$
- המודלים של הרברנד: כל המודלים עם תחום הרברנד ופירוש כלשהו ליחסים. כל מודל הרברנד הוא מודל מינימלי
- בסיס הרברנד: בסיס הרברנד של קבוצת פסוקים זו הקבוצה המתקבלת ע"י הצבת אברים ממרחב הרברנד לפסוקים מהקבוצה ($T^*$ מהשקף הקודם)
- בשאלות נתחיל לרשום את בסיס הרברנד, נראה שמגיעים לסתירה ונעצור

# האלגוריתם של הרברנד

- אלגוריתם כריע למחצה, העוצר אם יש סתירה

1. כאשר רוצים לבדוק אם ל-$\varphi$ יש מודל נבחן את $\neg\varphi$
2. נתרגם את הפסוק לפסוק כולל בצורת סקולם (סקולמיזציה)
3. נבנה את מרחב הרברנד - קבוצת שמות העצם חסרי המשתנים בשפה.
4. נבדוק אם יש לו מודל שתחומו הוא מרחב הרבנד וננסה להגיע לסתירה. נבנה את בסיס הרברנד - נתחיל עם הקבועים הבסיסיים, ונתחיל להפעיל עליהם את הפונקציות ולהציב בפסוקים עד שנגיע לסתירה.

# סיום יחידה 8 – המשך תרגול משפט הרברנד ומשפט סקולם

# האלגוריתם של הרברנד – תרגיל 1

- הוכיחו באמצעות משפט הרברנד שהפסוק $\varphi = (\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)))$ הוא אמת לוגית
- פתרון:

1. ניקח את השלילה שלו: $\neg\varphi = \neg(\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)))$
2. נמצא פסוק כולל $\psi$ שספיק רק אם הפסוק $\neg\varphi$ ספיק

א- נהפוך לצורה פרנקסית נורמלית:

$$\neg\varphi = \neg\left(\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))\right)$$
$$\equiv \neg\left(\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) \lor (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))\right)$$
$$\equiv \neg\left(\neg\forall x(\neg P(x) \lor Q(x)) \lor (\neg\forall x P(x) \lor \forall x Q(x))\right)$$

# האלגוריתם של הרברנד – תרגיל 1

• פתרון:

$$\equiv \neg\left(\neg\forall x\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \vee \big(\neg\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\big)\right)$$
$$\equiv \left(\neg\neg\forall x\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \wedge \neg\big(\neg\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\big)\right)$$
$$\equiv \left(\forall x\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \wedge \big(\neg\neg\forall x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x)\big)\right)$$
$$\equiv \left(\forall x\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \wedge \big(\forall x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x)\big)\right)$$
$$\equiv \left(\forall x\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \wedge \big(\forall y P(y) \wedge \neg\forall z Q(z)\big)\right)$$
$$\equiv \left(\forall x\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \wedge \forall y P(y) \wedge \exists z \neg Q(z)\right)$$
$$\equiv \exists z \forall x \forall y\left(\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z)\right)$$

# האלגוריתם של הרברנד – תרגיל 1

א- צורה פרנקסית נורמלית:

$$\exists z \forall x \forall y \left( \left( \neg P(x) \lor Q(x) \right) \land P(y) \land \neg Q(z) \right)$$

ב- סקולמיזציה:

$$\psi = \forall x \forall y \left( \left( \neg P(x) \lor Q(x) \right) \land P(y) \land \neg Q(a) \right)$$

3. מרחב הרברנד: $U = \{a\}$

4. נבנה בסיס הרברנד ע"י הצבת איברים מתוך מרחב הרברנד (רק $a$) במקום המשתנים:

$$H = \{ \left( \neg P(a) \lor Q(a) \right) \land P(a) \land \neg Q(a) \}$$

הגענו לסתירה ולכן $H$ לא ספיק, הפסוק המקורי טאוטולוגיה

# האלגוריתם של הרברנד – תרגיל 2

- נתונות הטענות הבאות:
  1. רק אדם אחד הצליח במבחן
  2. לפחות שני אנשים השתתפו במבחן
  3. לפחות אדם אחד נכשל במבחן
- הצרינו את הטענות והוכיחו באמצעות משפט הרברנד שהטענה השלישית נובעת משתי הטענות הראשונות
- פתרון: נצרין את הטענות, נשלול את השלישית ונראה שהצירוף לא ספיק
- נגדיר את היחסים: $S(x)$ – $x$ הצליח במבחן, $N(x)$ – $x$ השתתף במבחן
  1. $\exists x(S(x) \wedge \forall y(S(y) \rightarrow (x = y)))$
  2. $\exists x \exists y(N(x) \wedge N(y) \wedge \neg(x = y))$
  3. $\exists x \neg S(x)$ ושלילתו: $\neg\exists x \neg S(x)$

# האלגוריתם של הרברנד – תרגיל 2

- נשתמש באלג' הרברנד כדי להראות שקבוצת הפסוקים הבאה לא ספיקה:

$$\{\exists x\left(S(x)\wedge\forall y\big(S(y)\rightarrow(x=y)\big)\right),\exists x\exists y\big(N(x)\wedge N(y)\wedge\neg(x=y)\big),\neg\exists x\neg S(x)\}$$

- נעביר את הפסוקים לצורה פרנקסית נורמלית + סקולמיזציה:

1. $\exists x\left(S(x)\wedge\forall y\big(S(y)\rightarrow(x=y)\big)\right)\equiv\exists x\left(S(x)\wedge\forall y\big(\neg S(y)\vee(x=y)\big)\right)$

$$\equiv\exists x\forall y\left(S(x)\wedge\big(\neg S(y)\vee(x=y)\big)\right)$$

$$\psi_1=\forall y\left(S(a)\wedge\big(\neg S(y)\vee(a=y)\big)\right)$$

2. $\exists x\exists y\big(N(x)\wedge N(y)\wedge\neg(x=y)\big)$

$$\psi_2=N(b)\wedge N(c)\wedge\neg(b=c)$$

3. $\neg\exists x\neg S(x)\equiv\forall x\neg\neg S(x)\equiv\forall xS(x)$

# האלגוריתם של הרברנד – תרגיל 2

- נבנה מרחב ובסיס הרברנד עבור 3 הפסוקים שמצאנו:

$$\{\forall y\left(S(a)\wedge\left(\neg S(y)\vee(a=y)\right)\right), N(b)\wedge N(c)\wedge\neg(b=c), \forall x S(x)\}$$

- מרחב הרברנד: $U=\{a,b,c\}$
- נבנה בסיס הרברנד ע"י הצבת איברים מתוך מרחב הרברנד במקום המשתנים:

$$H=\{S(a),S(b),S(c),N(b),N(c),\neg(b=c),$$
$$S(a)\wedge\left(\neg S(a)\vee(a=a)\right), S(a)\wedge\left(\neg S(b)\vee(a=b)\right),$$
$$S(a)\wedge\left(\neg S(c)\vee(a=c)\right)\}$$

- מ-3 הפסוקים הראשונים $S(a),S(b),S(c)$ ולכן מ-3 האחרונים $a=b=c$ אבל $\neg(b=c)$ סתירה
- הגענו לסתירה ולכן $H$ לא ספיק, ולכן הפסוק השלישי נובע מהשניים הראשונים

# האלגוריתם של הרברנד – תרגיל 3

- נתונות הטענות הבאות:
  1. c גדול מכל מספר טבעי
  2. c אינו מספר טבעי
- הצרינו את הטענות והוכיחו באמצעות משפט הרברנד שהטענה השניה נובעת מהראשונה
- פתרון: נצרין את הטענות, נשלול את השניה ונראה שהצירוף לא ספיק
- נגדיר את היחסים: $N(x)$ – $x$ מספר טבעי, $<$ יחס דו מקומי
  1. $\forall x(N(x) \to x < c)$
  2. $\neg N(c)$, ושלילתו $\neg\neg N(c) \equiv N(c)$
- $N(c)$ כבר נוסחת כולל, נהפוך את (1): $\forall x(\neg N(x) \vee x < c)$
- מרחב הרברנד: $U = \{c\}$. בסיס הרברנד: $H = \{N(c), \neg N(c) \vee c < c\}$ הגענו לסתירה

# יחידה 9 – לוגיקות אחרות

# לוגיקה רב סוגית

- במקום יחסים חד מקומיים לתיאור סוגים שונים בתחום, נגדיר מספר תחומים מסוגים שונים
- לדוגמה: נצרין את הטענה "לכל כלב יש אדם שהוא שייך לו"
  - ○לוגיקה חד סוגית: $H(x)$ – $x$ הוא אדם, $D(x)$ – $x$ הוא כלב, $O(x,y)$ – $x$ שייך ל-$y$.
    הפסוק המתקבל: $\forall x(D(x) \rightarrow \exists y(H(y) \wedge O(x,y)))$
  - ○לוגיקה רב סוגית: מוגדר מראש תחום של כלבים (באותיות קטנות) ותחום של אנשים (באותיות גדולות). נקבל: $\forall x \exists Y O(x,Y)$

# לוגיקה רב סוגית – תרגיל הצרנה 1

- הצרינו את הטענה "אף סטודנט לא יודע לפתור כל שאלה"
  - נסמן ב-$D_1$ את הסטודנטים, $x \in D_1$
  - נסמן ב-$D_2$ את השאלות, $\mathrm{y} \in D_2$
  - יחס $Solve(x,y)$ – $x$ יודע לפתור $y$
  - $\neg\exists x \forall y Solve(x,y)$
- הצרינו את הטענה "קיימת בעיה שאף סטודנט לא יודע לפתור"
  - $\exists y \forall x \neg Solve(x,y)$

# לוגיקה רב סוגית – תרגיל הצרנה 2

- הצרינו את הטענה "לכל אדם מותר להשאיל לכל היותר שני ספרים" בלוגיקה חד סוגית ובלוגיקה רב סוגית
  - לוגיקה חד סוגית: $H(x)$ – $x$ הוא אדם, $B(x)$ – $x$ הוא ספר, $O(x,y)$ – $x$ משאיל את $y$.
    הפסוק המתקבל:
    $$\forall x \forall y \forall z(B(x) \wedge B(y) \wedge B(z) \wedge \forall h\big(H(h) \wedge O(h,x) \wedge O(h,y) \wedge O(h,z)\big) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$$
  - לוגיקה רב סוגית: מוגדר מראש תחום של ספרים (באותיות קטנות) ותחום של אנשים (באותיות גדולות). נקבל:
    $$\forall x \forall y \forall z \forall H\big(O(H,x) \wedge O(H,y) \wedge O(H,z)\big) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z)$$

# לוגיקה רב סוגית – השפה והמודל

- השפה מכילה קבועים, פונקציות ויחסים כמו לוגיקה חד סוגית שעסקנו בה עד עכשיו
- לשם הפשטות נגדיר שפות רק עם פונקציות בעלות משתנה יחיד
- המודל יכיל:
  - מספר סופי $D_1 \dots D_n$ של שמות תחומים
  - מספר סופי של קבועים כאשר ידוע לאיזה תחום כל קבוע שייך
  - מספר סופי של יחסים כאשר בכל יחס יודעים את הערכיות ומאיזה תחום נלקח כל איבר
  - מספר סופי של פונקציות חד מקומיות כאשר יודעים מאיזה תחום הפרמטר ומאיזה תחום הטווח
- הא"ב יכיל את הסימנים הנ"ל + קשרים, כמתים ומשתנים עבור כל אחד מהתחומים

# לוגיקה מסדר שני

- בלוגיקה מסדר שני מסתכלים על שני תחומים:
  - $D$ - תחום כלשהו
  - $P(D)$ - התחום השני הוא קבוצת החזקה של התחום הראשון
- לדוגמה: התחום הוא תחום המספרים הטבעיים (דוגמה לאיברים: 2,3,77), אזי התחום השני הוא התת קבוצות של טבעיים (דוגמה לאיברים: {1,2,3}, $\{x|\ x\ is\ even\}$,$\{x|\ x\ is\ a\ prime\ number\}$)
- לוגיקה מונדית מסדר שני – כל היחסים חד מקומיים
- אפשר להרחיב כל שפת יחסים לסדר שני באמצאות הוספת משתנים $V_0, V_1, \dots, V_n$ המייצגים קבוצות איברים מהתחום, ואת היחסים $T = S$ ו-$t \in S$

# לוגיקה מסדר שני – תרגילים

- בשפה הכוללת את $0,1,+,-,\cdot,<$ הצרינו את הטענות הבאות:
  - $x$ מספר טבעי
    - $Nat(x) \equiv \forall Y\big(\big(0 \in Y \land \forall y(y \in Y \rightarrow y+1 \in Y)\big) \rightarrow x \in Y\big)$
  - $x$ מספר שלם
    - $Int(x) \equiv Nat(x) \lor Nat(0-x)$
  - $x$ מספר רציונלי
    - $Rat(x) \equiv \exists y(Nat(y) \land Int(x \cdot y))$

# לוגיקה מסדר שני – תרגילים

- בשפה הכוללת את $<$ , $\cdot$ , $-$ , $+$ ,$0,1$ הצרינו את הטענות הבאות:
  - $X$ קטע
    - $Interval(X) \equiv \forall x \forall y \forall z((x < z \land z < y \land x \in X \land y \in X) \to z \in X)$
  - הקבוצה $X$ חסומה מלמטה
    - $B(X) \equiv \exists y \forall x(x \in X \to (y < x \lor y = x))$
  - הקבוצה $X$ היא קבוצת המספרים הזוגיים האי-שליליים
    - $B(X) \equiv 0 \in X \land \forall x(x \in X \to (\neg s(x) \in X \land s\big(s(x)\big) \in X \land Nat(x)))$
- בשפה הכוללת את $\leq$ הצרינו את הטענה: לכל קב' $P$ קיים חסם עליון קטן ביותר
  - $\forall P \exists y((\forall z\, z \in P \to z \leq y) \land (\forall x((\forall z\, z \in P \to z \leq x) \to y \leq x)))$

# לוגיקה מסדר שני – נוסחת האינדוקציה

- נסחו את נוסחת האינדוקציה באמצעות לוגיקה אריתמטית מסדר שני.
  השפה כוללת את הקבוע 0 ואת פונקציית העוקב $s$
- לכל קבוצה הכוללת את 0, אם לכל עצם שנמצא בקבוצה גם העצם הבא אחריו נמצא בה, אז הקבוצה היא בהכרח כל התחום
- $\forall X\big((0 \in X \land \forall y(y \in X \to s(y) \in X)\big) \to \forall x(x \in X))$

# לוגיקה מסדר שני – כימות יחסים ופונקציות

- לוגיקה מסדר שני מאפשרת גם לכמת יחסים ופונקציות, בניגוד ללוגיקה מסדר ראשון
- הצרינו: כל יחס $R$ הוא יחס סימטרי
  - $\forall R \forall x \forall y (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x))$
- הצרינו: קיים יחס $R$ שהוא יחס טרנזיטיבי
  - $\exists R \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$

# לוגיקה מסדר שני – כימות יחסים ופונקציות

- הצרינו: כל הפונקציות הן חח"ע
  - $\forall F\left(\forall x \forall y\left(\neg(x=y) \rightarrow \neg(F(x)=F(y))\right)\right)$
- הצרינו: קיימת פונקציה שהיא על
  - $\exists F \forall x \exists y(F(y)=x)$
- הצרינו: התחום הוא אינסופי
  - $\exists R(\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$
    $\wedge \forall x(\neg R(x,x) \wedge \exists y R(x,y))$

# מבנה המבחן וחזרה

# מבנה המבחן

1. שאלה על סינטקס ואינדוקציה מבנית בתחשיב הפסוקים
2. שתי אפשרויות:
   - מערכת קשרים מלאה
     - אם לא מלאה – אינדוקציה מבנית
     - אם מלאה – איך מגיעים בעזרת הקשרים לאחת מהקבוצות המלאות הידועות
   - שאלות על שלמות ונאותות
     - לשים לב – ברגע שנותנים תחשיב אי אפשר להסתמך על המשפטים של תחשיב הילברט
3. שאלה מגוונת – טאוטולוגיות, מודלים, האם פסוקים אמיתיים במודל או לא, קבוצות של פסוקים. כאן תמיד מדובר בתחשיב הילברט
4. שאלה טכנית עם סקולמיזציה והרברנד
5. שאלה על לוגיקה מסדר שני / לוגיקה רב סוגית או גדירות

# מבחן לדוגמה – שאלה 1

1. השאלה בתחשיב הפסוקים

הגדרה: המשקל של הביטוי $\varphi$ הוא הסכום המתקבל מתוספת 1 כנגד כל הופעה של סוגר שמאלי ב- $\varphi$, ו-(1-) כנגד כל הופעה של סוגר ימני ב-$\varphi$

א- הוכיחו באינדוקציה מבנית כי המשקל של כל פסוק הוא 0

ב- הוכיחו כי המשקל של כל רישא של פסוק הוא אי-שלילי

ג- האם כל ביטוי שמשקלו 0 הוא פסוק? אם כן הוכיחו, אם לא תנו דוגמה נגדית

# מבחן לדוגמה – שאלה 1

- בסיס: עבור פסוק אלמנטרי $P$ אין סוגריים ולכן המשקל 0. הרישא היחידה היא $P$ והיא במשקל 0
- נניח שנכון עבור הפסוקים $\varphi$ ו$\psi$
  - עבור הפסוק $\neg\varphi$ – לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ל$\varphi$ . מכאן, מתקיים גם עבור $\neg\varphi$ – הסוגריים לא השתנו ולכן במשקל 0, ואם מוסיפים לרישא $\neg$ עדיין משקל אי שלילי
  - עבור $(\varphi@\psi)$:
    - לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ל- $\varphi$ ו$\psi$ במשקל 0. הוספנו סוגר אחד מכל סוג ולכן מתקיים (אם נסמן את המשקל ב$w$):
      $$w\big((\varphi@\psi)\big) = w(\varphi) + \mathrm{w}(\psi) + 1 - 1 = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$$
    - בכל רישא של $\varphi$) – מהנחת האינדוקציה ברישא של $\varphi$ המשקל אי שלילי, משקל הרישא של $\varphi$) הוא כמו הרישא של $\varphi$+1 ולכן אי שלילי. באופן דומה לרישא של $(\varphi@\psi$ מתקבל 1 ועוד 0 ועוד אי שלילי)
- סעיף ג' כמובן שלא מתקיים, למשל )( אינו פסוק לפי משפט הקריאה היחידה

# מבחן לדוגמה – שאלה 2

2. נתונות שתי קבוצות של קשרים. עבור כל קבוצה קיבעו האם היא מלאה או לא והוכיחו
   - א- הקבוצה $\{F, \rightarrow\}$ כאשר $F$ הינו קשר "0 מקומיי" המחזיר תמיד $F$
   - ב- הקבוצה $\{\wedge, \vee, \circledast\}$ כאשר $\circledast$ הינו קשר דו מקומי המחזיר $T$ שני הפסוקים הם בעלי אותו ערך (שניהם $T$ או שניהם $F$)

- פתרון:
  - א- הקבוצה מלאה. "נסמלץ" את $\neg$ : לפסוק $\alpha \rightarrow F$ אותה טבלת אמת כמו $\neg\alpha$. במבחן ניתן להוסיף טבלת אמת. מכאן, יש לנו את הקשרים $\{\neg, \rightarrow\}$ ומוכח בספר שקבוצה זו הינה קבוצה מלאה
  - ב- מוכיחים באינדוקציה מבנית שעבור $M_T$ נקבל תמיד ערך $T$

# מבחן לדוגמה – שאלה 2

- הוכח/י שהקבוצה $\{\wedge , \vee , *\}$ לא מלאה
- נוכיח באינדוקציה מבנית שלא ניתן לבטא שום טבלת אמת שבה במודל $M_T$ מתקבל ערך $F$
- בסיס: עבור פסוק אלמנטרי $P$, $P$ מקבל ערך $T$ ב$M_T$
- נניח שנכון עבור הפסוקים $\varphi$ ו $\psi$
  - עבור $(\varphi \vee \psi)$: על פי הנחת האינדוקציה $\varphi$ ו-$\psi$ מקבלים ערך $T$ ב$M_T$ ולכן גם $(\varphi \vee \psi)$ (על פי טבלת האמת של $\vee$)
  - עבור $(\varphi \wedge \psi)$: על פי הנחת האינדוקציה $\varphi$ ו-$\psi$ מקבלים ערך $T$ ב$M_T$ ולכן גם $(\varphi \wedge \psi)$ (על פי טבלת האמת של $\wedge$)
  - עבור $(\varphi * \psi)$: על פי הנחת האינדוקציה $\varphi$ ו-$\psi$ מקבלים ערך $T$ ב$M_T$ ולכן גם $(\varphi * \psi)$ (על פי טבלת האמת של $*$)

# מבחן לדוגמה – שאלה 3

3. הסעיף הראשון בתחשיב היחסים והשני בתחשיב הפסוקים

א- הוכח או הפרך $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x \neg Q(x)\} \vdash \forall x \neg P(x)$

- פתרון:

א- נוכיח:

| | |
|---|---|
| (אקס' הצבה) | 1. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(c) \to Q(c))$ |
| (הנחה) | 2. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ |
| (MP1,2) | 3. $P(c) \to Q(c)$ |
| (אקס' 3) | 4. $(P(c) \to Q(c)) \to (\neg Q(c) \to \neg P(c))$ |
| (MP3,4) | 5. $\neg Q(c) \to \neg P(c)$ |
| (הנחה) | 6. $\forall x \neg Q(x)$ |
| (אקס' הצבה) | 7. $\forall x \neg Q(x) \to \neg Q(\mathrm{c})$ |
| (MP6,7) | 8. $\neg Q(\mathrm{c})$ |
| (MP5,8) | 9. $\neg P(c)$ |
| (GR) | 10. $\forall x \neg P(x)$ |

# מבחן לדוגמה – שאלה 3

3. הסעיף הראשון בתחשיב היחסים והשני בתחשיב הפסוקים

- ב- תהי $\Sigma$ קבוצת פסוקים כך שכל שני פסוקים בקבוצה מורכבים מפסוקים אלמנטריים שונים, ובנוסף, כל שני תתי פסוקים בתוך כל פסוק מורכבים מפסוקים אלמנטריים שונים. הוכיחו כי $\Sigma$ קונסיסטנטית

• פתרון:

- ב- נוכיח באינדוקציה שכל פסוק בקב' ספיק. צריך להוכיח תכונה חזקה יותר: שכל פסוק ספיק אבל לא טאוטולוגיה. אם אלמנטרי – ספיק ולא טאוטולוגיה. אם מהצורה $\varphi = \neg\psi$ אזי $\psi$ לא טאוטולוגיה ולכן $\varphi$ ספיק, ו-$\psi$ ספיק ולכן $\varphi$ לא טאוטולוגיה. אם מהצורה $\varphi = \psi @ \theta$ אפשר לראות מטבלת האמת של כל קשר שכאשר הפסוקים המרכיבים ספיקים ולא טאוטולוגיות גם $\varphi$ ספיק אבל לא טאוטולוגיה. ניתן לקחת כל ערך אמת של כל פסוק כי אין פסוקים משותפים וליצור מודל משותף על פי משפט לוקליות ערך האמת.
עבור קב' הפסוקים – ניקח מודל בו כל פסוק אלמנטרי מקבל את הערך במודל המספק את הפסוק בו הוא נמצא. מודל זה יספק את הקבוצה על פי משפט לוקליות ערך האמת

# מבחן לדוגמה – שאלה 4

4. נתונים המשפטים הבאים:
   1. מורים הם או נלהבים או לא מצליחים
   2. לא כל המורים הם לא מצליחים
   3. יש מורים נלהבים

   והיחסים:
   - $M(x)$– $x$ מורה
   - $N(x)$– $x$ נלהב
   - $L(x)$– $x$ לא מצליח

   א- הצרינו את הטענות בעזרת היחסים

   ב- הוכיחו בעזרת משפט הרברנד שהטענה השלישית נובעת משתי הראשונות

- $\forall x\left(M(x) \rightarrow \left(N(x) \vee L(x)\right)\right)$
- $\neg\forall x\left(M(x) \rightarrow L(x)\right)$
- $\exists x(M(x) \wedge N(x))$

# מבחן לדוגמה – שאלה 4

4. נעבור לצורה פרנקסית נורמלית:

- $\forall x\left(M(x) \rightarrow \left(N(x) \vee L(x)\right)\right) \equiv \forall x\left(\neg M(x) \vee N(x) \vee L(x)\right)$
- $\neg\forall x\left(M(x) \rightarrow L(x)\right) \equiv \neg\forall x\left(\neg M(x) \vee L(x)\right) \equiv \exists x\neg\left(\neg M(x) \vee L(x)\right)$

$$\equiv \exists x\left(M(x) \wedge \neg L(x)\right)$$

ולאחר סקולמיזציה: $M(c) \wedge \neg L(c)$

נשלול את הטענה השלישית ונעביר גם אותה לצורה פרנקסית נורמלית:

- $\neg\exists x(M(x) \wedge N(x)) \equiv \forall x\neg(M(x) \wedge N(x)) \equiv \forall x\ (\neg M(x) \vee \neg N(x))$

נבנה מרחב הרברנד: $U = \{c\}$

נבנה בסיס הרברנד: $B = \{\neg M(c) \vee \neg N(c), M(c) \wedge \neg L(c), \neg M(c) \vee N(c) \vee L(c)\}$

הגענו לסתירה (להסביר) ולכן הטענה השלישית נובעת משתי הראשונות

# מבחן לדוגמה – שאלה 5

5. נתונה השפה $L =< f,g,r >$ כאשר f,g פונקציות חד מקומיות ו-r יחס דו מקומי, ונתון המודל $M =< R,f(x) = x + x,g(x) = x \cdot x, <>$. הגדירו את הקטעים (0,1),(-1,0),(-2,-1)

- פתרון:
  - נגדיר את הקטע (0,1):
    - $\varphi(x) = g(x) < x$
  - נגדיר את הקטע (-1,0):
    - $\psi(x) = (f(x) < x) \wedge (\varphi(g(x)))$
  - נגדיר את הקטע (-2,0):
    - $\theta(x) = \exists y(\psi(y) \wedge f(y) = x)$
  - נגדיר את הקטע (-2,-1):
    - $\tau(x) = \theta(x) \wedge \neg\psi(x)$

תודה רבה ☺