

נספח: דף נוסחאות למבחן בלוגיקה

רשימת שקלויות בסיסיות

1. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
2. $\varphi \equiv \neg\psi$ אז $\neg\varphi \equiv \psi$
3. $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
4. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \rightarrow \psi)$
5. $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\varphi \wedge \psi)$ $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi)$
6. $(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
7. $(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
8. $(\varphi \vee (\psi \wedge \theta)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta))$
9. $(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))$
10. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\psi \rightarrow \varphi)$
11. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
12. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

אקסיומות התחשיב בשפה הפסוקית L_{\rightarrow} :

1. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$
3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

האקסיומות הנוספות בשפה הפסוקית המלאה L

4. $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha) \quad ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta)$
5. $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$
6. $(\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)) \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta))$
7. $(\neg\alpha \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \beta))$
8. $((\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \quad ((\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$
9. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)))$

כלל הניתוק

$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

האקסיומות הנוספות בשפת היחסים

אקסיומת ההצבה - $\forall x \varphi \rightarrow \varphi[t/x]$ בתנאי ש- t היא הצבה כשרה

אקסיומת הזזת הכמת - $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi)$

כללי הגזירה **כלל הניתוק**
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

כלל ההכללה
$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$$

דדוקציה טבעית

כלל ההכללה היישי

$$\frac{\varphi a}{\exists x \varphi x}$$

כלל ההצבה היישי

$$\frac{\exists x \varphi x}{\varphi a}$$

כלל ההכללה הכוללת

$$\frac{\varphi x}{\forall y \varphi y}$$

כאשר x מציין משתנה כלשהו ו- y מציין משתנה שאין לו מופע חופשי בהנחה הקודמת ל- $\forall y \varphi y$

כלל ההצבה הכוללת (Universal Instantiation)

$$\frac{\forall y \varphi y}{\varphi a}$$

כאשר y מציין משתנה, כלשהו ו- a מציין קבוע.

הערה: כמו כן מותר להשתמש בכל האקסיומות של שפת הפסוקים המלאה (כמובן כשהפסוקים הם פסוקים משפת היחסים)

אמיתות לוגיות

$$(\forall x\varphi) \leftrightarrow (\neg \exists x \neg \varphi) \quad (\neg \forall x\varphi) \leftrightarrow (\exists x \neg \varphi)$$

$$(\exists x\varphi) \leftrightarrow (\neg \forall x \neg \varphi) \quad (\neg \exists x\varphi) \leftrightarrow (\forall x \neg \varphi)$$

כאשר x אינו מופיע חופשי ב- ψ הרי הנוסחאות הבאות הן אמיתיות לוגית:

$$[(\forall x\varphi) \vee \psi] \leftrightarrow \forall x(\varphi \vee \psi) \quad [(\forall x\varphi) \wedge \psi] \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$$

$$[(\exists x\varphi) \vee \psi] \leftrightarrow \exists x(\varphi \vee \psi) \quad [(\exists x\varphi) \wedge \psi] \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow [\psi \rightarrow (\exists x\varphi)] \quad \forall x(\psi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow [\psi \rightarrow (\forall x\varphi)]$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow [(\forall x\varphi) \rightarrow \psi] \quad \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow [(\exists x\varphi) \rightarrow \psi]$$