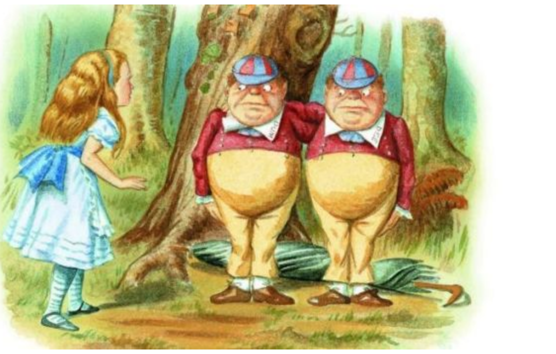
<u>לוגיקה למדעי המחשב</u>

ד"ר גילי שול, סמסטר א'



"נהפוכו," המשיך טידלדי, "לו היה כך, היה **מוכח**; ואם כן, אז ייתכן;
אבל מאחר שלא כך, עורבא פרח! כך אומר ההיגיון."[1]

חלק I

תחשיב הפסוקים

1 א"ב (מקלדת), מחרוזות ושפה

1.1 א"ב (מקלדת)

כל קבוצת סימנים (סופית או אינסופית) תיקרא בשם <u>א"ב</u> או <u>מקלדת</u>. הסימנים במקלדת נקראים <u>אותיות</u>.
נסמן את הא"ב ב־Σ, למשל $\Sigma = \{0,1,2\}$. (מעתה והלאה)

1.2 מחרוזות

מחרוזת היא סדרה **<u>סופית</u>** של אותיות מעל הא"ב הכתובות משמאל לימין.
אם Σ היא מקלדת אזי Σ^* היא זהו סימון לכל המחרוזות מעל Σ.
ε - היא המחרוזת הריקה.
אם $\Sigma = \{0,1\}$ אזי: $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11, 100, ...\}$.
Σ^* אינה מקלדת!

1.3 שירשור מחרוזות

על Σ^* מוגדרת פעולת השירשור: אם $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ אזי $\alpha \cdot \beta$ או $\alpha\beta$ הן שירשור של שתי המחרוזות.
למשל, אם $\alpha = 000$ ו־$\beta = 111$ אזי $\alpha\beta = 000111$.

1.4 שפה

כל תת־קבוצה של Σ^* תיקרא **<u>שפה</u>** במקלדת Σ.
כלומר, אם $L \subseteq \Sigma^*$ אזי L היא שפה במקלדת Σ.
למשל: אם $\{0,1,a\} = \Sigma$, אזי שפה לדוגמא היא: $L = \{\varepsilon, a, a1, 01a\}$.

[1]מתוך "מבעד למראה ומה אליס מצאה שם", תרגום מאת רנה ליטוין, הוצאת הקיבוץ המאוחד עמוד 70.

2 שפה פסוקית

כעת נגדיר מהי מחרוזת שמגדירה <u>פסוק לוגי</u>.
נגדיר את <u>השפה הפסוקית</u>:
המקלדת של השפה הפסוקית:
$\Sigma = \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, (,), p_1, p_2, ...\}$
כאשר:
$\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ - נקראים **קשרים**.
$(,)$ - נקראים **סוגריים**.
P_1, P_2 - נקראים **פסוקים אלמנטריים (או: אטומים)**.
הערה: נהוג לכתוב פסוקים אטומים באותיות גדולות: $P_1, P_2, P, Q, ...$, אך כאן מידי פעם אכתוב אותם באותיות קטנות.

2.1 דרך ראשונה להגדיר את השפה - ברקורסיה

1. כל מחרוזת בת סימן יחיד שהוא אלמטרני הוא פסוק.
2. אם φ פסוק, אזי גם $\neg\varphi$ הוא פסוק.
3. לכל $@ \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ מתקיים, אם φ, ψ פסוקים אזי גם $(\varphi @ \psi)$ פסוק.

<u>קבוצת הפסוקים</u> היא הקבוצה <u>הקטנה ביותר</u> של מחרוזות הכוללת את כל הפסוקים האלמנטריים, ועבור כל מחרוזת φ גם $\neg\varphi$ נמצאת, ועבור כל שתי מחרוזות φ, ψ גם $(\varphi @ \psi)$ נמצאת.

2.2 דרך שניה להגדיר את השפה

נסמן ב־E_0 את קבוצת כל הפסוקים האלמנטריים, ונגדיר באינדוקציה על n את הקבוצה E_n, בהנחה ש־E_{n-1} כבר מוגדרת.
E_n היא קבוצת כל המחרוזות ב־E_{n-1} בתוספת: כל המחרוזות $\neg\varphi$ שבהן $\varphi \in E_{n-1}$ ובתוספת $(\varphi @ \psi)$ כאשר $\varphi, \psi \in E_{n-1}$ ו־ $@ \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$.
מחרוזת תקרא "פסוקית" אםם היא באחת הקבוצות E_n.

$$E_0 = \{P_1, P_2, ...\}$$
$$E_1 = \{P_1, P_2, ..., \neg P_1, \neg P_1, ..., (P_1 @ P_2), ., ., ., \}$$

חשוב לזכור: $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq ...$.

2.3 דרגה של פסוק

הדרגה $d(\varphi)$ של פסוק היא המספר n הקטן ביותר כך ש־$\varphi \in E_n$. הדרגה נקראת גם <u>"העומק הקשרי"</u>.
למשל: נניח כי יש לנו פסוקים אטומים p, q, אזי: $p, q \in E_0$.
ולכן: $d(P) = d(Q) = 0$.
וכמו־כן: $\neg P, \neg Q, (P @ Q) \in E_1$, ולכן:
$d(\neg P) = d(\neg Q) = d(P @ Q) = 1$.
חשוב לשים לב שכמובן גם $P \in E_1$, אבל בגלל ש־1 הוא לא ה־n הקטן ביותר כך ש־$P \in E_n$ אזי $d(P) \neq 1$.

3 למת ספירת הסוגריים

1. כל פסוק הוא מאוזן סוגריים: מספר הסוגריים השמאליים שווה למספר הסוגריים הימניים.

2. בכל רישא מספר הסוגריים השמאליים גדול/שווה למספר הסוגריים הימניים, ובכל סיפא מספר הסוגריים הימניים גדול/שווה למספר הסוגריים השמאליים.
3. כל קשר דו־מקומי ($\vee, \wedge \rightarrow, \leftrightarrow$) בפסוק רואה משמאלו יותר סוגריים שמאליים ומימינו יותר סוגריים ימניים.

4 משפט הקריאה היחידה

1. כל פסוק שייך לאחד **ואחד בלבד** מהסוגים הבאים:
   (א) פסוקים אלמנטריים (פסוקים אטומיים).
   (ב) פסוקי שלילה: פסוק מהצורה $\neg\varphi$ כאשר φ הוא פסוק.
   (ג) פסוקים מקושרים: פסוקים מהצורה $\varphi = (\psi@\theta)$, כאשר ψ, θ הם פסוקים.
2.
   (א) אם φ הוא פסוק שלילה, אז $\varphi = \neg\psi$ עבור פסוק ψ יחיד. כלומר, אם $\varphi = \neg\psi = \neg\theta$ עבור פסוקים ψ, θ אזי בהכרח $\psi = \theta$.
   (ב) אם φ הוא פסוק מקושר, אז $\varphi = (\psi@\theta)$ עבור קשר דו־מקומי יחיד @ ועבור זוג פסוקים יחיד ψ, θ.
   כלומר, אם $\varphi = (\psi_1@\psi_2) = (\theta_1\#\theta_2)$ עבור פסוקים $\psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2$ וקשרים דו־מקומיים @, #, אזי בהכרח $\psi_1 = \theta_1$, $\psi_2 = \theta_2$ ו־$\# = @$.
   מיקום הקשר במחרוזת $(\psi@\theta)$ הוא בעל האפיון הבא: לאחר מחיקת הסוגירים החיצוניים זה הקשר הדו־מקומי היחיד במחרוזת $\psi@\theta$ שהמחרוזאת משמאלו היא בעלת מספר שווה של סוריים ימניים ושמאליים.

5 כתיבה נטולת סוגריים (כתיבה פולנית)

הרעיון: כל קשר מופיע לפני הפסוקים שהוא קושר.

1. כל פסוק אלמנטרי p_i הוא פסוק.
2. אם φ פסוק אז $\neg\varphi$ פסוק.
3. אם φ, ψ פסוקים ו־@ קשר דו־מקומי, אז גם $@\varphi\psi$ פסוק.

5.1 כמה דוגמאות

כתיבה נטולת סוגריים	כתיבה עם סוגריים
$\rightarrow AB$	$(A \rightarrow B)$
$\rightarrow A \wedge BC$	$(A \rightarrow (B \wedge C))$
$\wedge \rightarrow ABC$	$((A \rightarrow B) \wedge C)$
$\wedge \rightarrow AB \leftrightarrow CD$	$((A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow D))$

6 כתיבה עתירת סוגריים

כמו הכתיבה רק עם תיקון אחד:
ב. אם φ הוא פסוק אז גם $(\neg\varphi)$ הוא פסוק.

7 עץ גזירה (עץ מבנה) של פסוק:

7.1 הגדרה

1. בפסוק שלילה $\neg\varphi$ סימן השלילה בתחלת המחרוזת נקרא <u>הקשר הראשי של הפסוק</u>, והפסוק φ נקרא <u>המרכיב הראשי של הפסוק</u>.
2. בפסוק מקושר $\alpha@\beta$ הקשר @ נקרא <u>הקשר הראשי של הפסוק</u>, והפסוקים החלקיים α, β נקראים <u>המרכיבים הראשיים של הפסוק</u> (ניתן להגדיר רק אחרי משפט הקריאה היחידה.

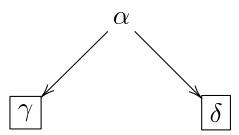
7.2 האלגוריתם

בהינתן מחרוזת α של סימני המקלדת הפסוקית (Σ), אנו רושמים אותה בראש הדף וזהו השורש של עץ המבנה.

1. אם α היא סימן יחיד שהוא P_i, פסוק אלמנטרי, הניתוח הסתיים.
2. אחרת, אם α מתחילה בסימן שלילה, כלומר $\alpha = \neg\beta$ אנחנו רושמים:

וממשיכים ברקורסיה על β. (כלומר בעץ אנחנו רושמים בהתחלה $\neg\beta$ ואז מתחתיו β).
הערה: β היא פסוק $\iff$ $\neg\beta$ היא פסוק.

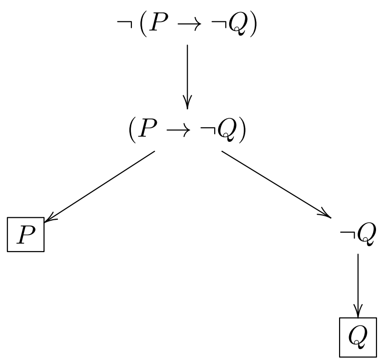
3. אחרת, אם הסימן הראשון של α הוא סוגר שמאלי והסימן האחרון הוא סוגר ימני, נמחק את הסוגריים החיצוניים ונחפש קשר דו־מקומי @ שהקטע משמאלו בעל מספר שווה של סוגריים משני הסוגים. <u>אם אין כזה ־ α אינו פסוק!</u>
אם יש כזה נרשום: $\alpha = \beta$ ו־$\beta = \gamma@\delta$, ונרשום בעץ:



4. אחרת ־ α אינו פסוק.

7.3 דוגמא לעץ

נסתכל על העץ של הפסוק הבא: $\neg(P \rightarrow \neg Q)$.



אם סיימנו את ריצת האלגוריתם ולא שללנו ש־α הוא פסוק אז כל עלי העץ הם הם פסוקים אלמנטריים וכל שאר הקודקודים (כולל α) הם פסוקים.

8 משפט ההגדרה באינדוקציה מבנית (ניסוח לא פורמלי)

ניתן להגדיר פונקציה f מקבוצת הפסוקים לקבוצה A כלשהי באופן הבא:

1. מגדירים את $f(P)$ לכל פסוק אלמנטרי P.
2. מגדירים את $f(\neg\psi)$ בהנחה ש־$f(\psi)$ מוגדרת.
3. לכל קשר דו־מקומי @ מגדירים את $f((\psi@\theta))$ בהנחה ש־$f(\theta), f(\psi)$ מוגדרות.

8.1 משפט ההגדרה באינדוקציה מבנית (ניסוח מדויק)

תהי f_e פונקציה מקבוצת הפסוקים האלמנטריים E_0 לקבוצה A.
תהי $C_\neg : A \to A$ פונקציה ולכל קשר דו־מקומי @, תהי $C_@ : A \times A \to A$ פונקציה.
אז יש פונקציה אחת ויחידה $F : E \to A$ (E היא קבוצת כל הפסוקים), המקיימת:

1. אם φ הוא פסוק אלמטרי אז $f(\varphi) = f_e(\varphi)$.
2. אם φ הוא פסוק שלילה $\varphi = \neg\psi$, אזי $f(\varphi) = C_\neg(f(\varphi))$.
3. אם φ הוא פסוק מקושר $\varphi = (\psi@\theta)$ אזי: $f(\varphi) = C_@(f(\psi), f(\theta))$.

8.2 דוגמא

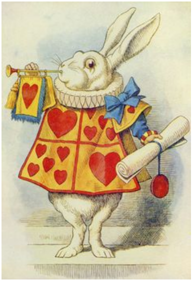
נסמן ב־E את קבוצת כל הפסוקים. נגדיר: $f : E \to \mathbb{N}$ (במקרה שלנו $A = \mathbb{N}$) באופן הבא:

בניסוח לא פורמלי:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0 & \varphi \in E_0 \\ f(\psi) + 1 & \varphi = \neg\psi \\ f(\psi) + f(\theta) & \varphi = (\psi@\theta) \end{cases}$$

בניסוח פורמלי:

$$f_e \equiv 0$$
$$C_\neg(x) \equiv x + 1$$
$$C_@(x + y) \equiv x + y$$



9 פסוק חלקי $\mathrm{sub}(\varphi)$

הגדרה 9.1 בהניתן פסוק φ נרצה להגדיר את קבוצת הפסוקים החלקיים של הפסוק φ. ההגדרה היא הגדרה באינדוקציה מבנית. $A = \mathcal{P}(E)$ - קבוצת כל תתי־הקובוצות של הפסוקים. $f : E \to \mathcal{P}(E) = 2^E$ (במקרה שלנו $f = \mathrm{sub}$).

1. $\mathrm{sub}(\varphi) = \{\varphi\}$.
2. $\mathrm{sub}(\neg\varphi) = \mathrm{sub}(\varphi) \cup \{\varphi\}$.
3. $\mathrm{sub}(\psi@\theta) = \mathrm{sub}(\psi) \cup \mathrm{sub}(\theta) \cup \{(\psi@\theta)\}$.

לכל פסוק φ, $\mathrm{sub}(\varphi)$ היא תת־קבוצה של פסוקים.

10 משפט לוקליות ההגדרה באינדוקציה

תהיינה L_1, L_2 שתי שפות פסוקיות (אולי זרות), ותהי A קבוצה. יהיו:

$$F_1 : L_1 \to A$$
$$F_2 : L_2 \to A$$

שתי פונקציות המוגדרות באינדוקציה מבנית שעבורן הפונקציות $C_\neg : A \to A$ ו־$C_@ : A \to A$ (לכל קשר דו־מקומי @) הן אותן פונקציות (אותם C־ים).
אם $\varphi \in L_1 \cap L_2$ הוא פסוק בשתי השפות (ולכן גם הפסוקים האלמנטריים שב־φ שייכים לשתי השפות) ומתקיים $F_1(Q) = F_2(Q)$ לכל פסוק אלממטרי Q המופיע במחרוזת φ, אזי:

$$F_1(\varphi) = F_2(\varphi)$$

11 למת המחרוזת החלקית

(תת־מחרוזת = מחרוזת חלקית)
יהי φ פסוק ותהי α מחרוזת חלקית של φ שהיא גם פסוק.
אז $\varphi = \alpha$ או ש־α מחרוזת חלקית של מרכיב ראשי של φ.

11.1 משפט התת־מחרוזת

ψ היא פסוק חלקי של φ $\iff$ היא מחרוזת חלקית של φ שהוא גם פסוק.

12 החלפת פסוק חלקי/הצבות

משפט 12.1 משפט החלפת תת־פסוק:

יהיה φ פסוק ויהי θ תת־פסוק של φ ויהיה ψ פסוק נוסף. תהי φ' המחרוזת המתקבלת ע"י החלפת המחרוזת θ במחרוזת ψ.

אזי φ' פסוק.

הגדרה:

1. נאמר כי מחרוזת φ' מתקבלת ממחרוזת φ ע"י הצבה יחידה של ψ במקום Q $\Longleftrightarrow$ φ' היא במחרוזת φ לאחר שאחד המופעים של Q הוחלף במחרוזת ψ.

2. נאמר כי מחרוזת φ' מתקבלת ממחרוזת φ ע"י הצבה מלאה של ψ במקום Q (Q הוא פסוק אלמנטרי) $\Longleftrightarrow$ φ' היא המחרוזת φ לאחר שכל המופעים של Q הוחלפו במחרוזת ψ.
המחרוזת אחרי ההצבה מסומת ב־$\underline{\varphi\left[\psi/Q\right]}$. (חשוב לשים לב - הסימן Q יכול להיות אחד מסימני ψ כך ש־$\varphi\left[\psi/Q\right]$ יכולה עדיין לכלול את הפסוק Q.

3. הכללה: אם $\varphi,\psi_1,...,\psi_n$ פסוקים (לאו דווקא שונים זה מזה) ו־$Q_1,...,Q_n$ פסוקים אלמנטריים שונים זה מזה: $\varphi\left[\psi_1/Q_1,...,\psi_n/Q_n\right]$ היא הפסוק המתקבל מ־φ ע"י סדרת הצבות יחידות במקום כל מופעי $Q_1,...,Q_n$ המקוריים ב־φ.
חשוב לשים לב שהפסוקים $\psi_1,...,\psi_n$ יכולים לכלול את $Q_1,...,Q_n$ ואז $Q_1,...,Q_n$ יכולים להופיע ב־ $\varphi\left[\psi_1/Q_1,...,\psi_n/Q_n\right]$.

אם אומרים "הצבה", מתכוונים ל־**"הצבה מלאה"**.

13 מודולריות ההגדרה באינדוקציה

משפט 13.1 מודולריות ההגדרה באינדוקציה:

1. תהי H פונקצהי המוגדרת באינדוקציה מבנית.
יהיו ψ,θ פסוקים כך ש־$H\left(\theta\right)=H\left(\psi\right)$.
יהי φ פסוק ונניח ש־ψ הוא תת־פסוק של φ.
יהי φ' הפסוק המתקבל מ־φ ע"י החלפת המחרוזת ψ במחרוזת θ.
אזי: $\boldsymbol{H\left(\varphi'\right)=H\left(\varphi\right)}$.

2. תהי H פונקציה המוגדרת באינדוקציה מבנית. יהיו ψ,θ פסוקים כך ש־$H\left(\psi\right)=H\left(\theta\right)$. יהי φ פסוק, אזי לכל פסוק אלמנטרי Q:

$$H\left(\varphi\left[\psi/Q\right]\right)=H\left(\varphi\left[\theta/Q\right]\right)$$

14 סדרת בנייה

הגדרה 14.1 סדרה סופית $\varphi_1,...,\varphi_n$ של מחרוזות זוהי סדרת בניה $\Longleftrightarrow$ כל מחרוזת בסדרה היא:

1. אלמנטרית או שהיא מתקבלת ע"י אחד מהכללים הבאים:
(א) יש $i>j$ כך ש־$\varphi_i=\neg\varphi_j$.
(ב) יש $i>j,k$ כך ש־$\varphi_i=\left(\varphi_j@\varphi_k\right)$.

הסדרה תקרא סדרת בנייה ל־φ_n - שהיא המחרוזת האחרונה בסדרה.

14.1 דוגמא לסדרת בנייה

ניקח את הפסוק $\neg\left(P_1\wedge\left(P_2\rightarrow P_3\right)\right)$
שתי סדרות בנייה אפשריות שלו הן:

- $$P_1,P_2,P_3,\left(P_2\rightarrow P_3\right),$$
$$\left(P_1\wedge\left(P_2\rightarrow P_3\right)\right),\neg\left(P_1\wedge\left(P_2\rightarrow P_3\right)\right)$$

- $$P_3,P_2,\left(P_2\rightarrow P_3\right),P_1,\left(P_1\wedge\left(P_2\rightarrow P_3\right)\right)$$
$$,\neg\left(P_1\wedge\left(P_2\rightarrow P_3\right)\right)$$

משפט 14.2 רישא של סדרת בנייה היא סדרת בנייה.

משפט 14.3 כל מחרוזת שיש לה סדרת בנייה היא פסוק.

משפט 14.4 לכל פסוק φ יש סדרת בנייה שכל מחרוזותיה הן פסוקים חלקיים של φ.

משפט 14.5 גל פסוק חלקי של φ מופיע בכל סדרת בנייה של φ.

15 מודלים של שפה

הגדרה 15.1 - מבנה לשפה או **מודל לשפה** הוא פונקציה M מקבוצת הפסוקים האלמנטריים בשפה לקבוצה $\{T,F\}$ הנקראים ערכי אמת.
לכל פסוק אלמנטרי Q: אם $M(Q)=T$ נאמר שהפסוק האלמנטרי Q אמיתי במודל M.
נאמר גם ש-M מספק את הפסוק Q, או ש-M הוא מודל של Q (כל שלושת הצורות אומרות את אותו הדבר).

סימון:
$M\models Q$ אומר $M(Q)=T$.
$M\not\models Q$ אומר $M(Q)=F$.

15.1 ערך האמת של פסוקים מורכבים (לא אלמנטריים)

בהינתן מודל M, מגדירים את ערך האמת של כל פסוק באינדוקציה מבנית..
נשתמש באותו שם M לפונקציה על הפסוקים האלמנטריים ועל כל הפסוקים.

$$f=M=\begin{cases} f_e & =M \\ C_{\neg} & \\ C_{@} & \end{cases}$$

א. אם φ פסוק אלמנטרי אז $M(\varphi)$ מוגדר.
ב. אם $\varphi=\neg\psi$ אזי:

$$M(\varphi)=\begin{cases} T & M(\psi)=F \\ F & M(\psi)=T \end{cases}$$

$$C_{\neg}:\{T,F\}\to\{T,F\}$$
$$C_{\neg}(T)=F$$
$$C_{\neg}(F)=T$$

ג. אם $\varphi=(\psi\wedge\theta)$:

$$M(\varphi)=M((\psi\wedge\theta))=\begin{cases} T & M(\psi)=T\wedge M(\theta)=T \\ F & Else \end{cases}$$

$$C_{\wedge}:\{T,F\}\times\{T,F\}\to\{T,F\}$$
$$C_{\wedge}(T,T)=T$$
$$C_{\wedge}(x,y)=F\ (\text{At any other case})$$

ד. אם $\varphi=(\psi\vee\theta)$:

$$M(\varphi)=M((\psi\vee\theta))=\begin{cases} F & M(\psi)=F\wedge M(\theta)=F \\ T & Else \end{cases}$$

ה. אם $\varphi=(\psi\to\theta)$:

$$M(\varphi)=\begin{cases} F & M(\psi)=F\wedge M(\theta)=T \\ T & Else \end{cases}$$

ו. $\varphi=(\psi\leftrightarrow\theta)$

$$M(\varphi)=\begin{cases} T & M(\psi)=M(\theta) \\ F & M(\psi)\neq M(\theta) \end{cases}$$

במילים אחרות:
כאשר $M(\varphi)=T$ נאמר <u>שהפסוק φ אמיתי במודל M</u>. אפשר לומר במקום <u>ש-M הוא מודל של φ</u>.
סימון:

$$M(\varphi)=T\Leftarrow M\models(\varphi)$$
$$M(\varphi)=F\Leftarrow M\not\models(\varphi)$$

הגדרה 15.2 יהיו K קבוצה של פסוקים ו-M מבנה. נאמר ש-<u>M **הוא מודל של** K</u> ונסמן $M\models K$ אם כל פסוקי K נכונים ב-M.
אם K סופית, כלומר: $K=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ אזי:

$$M\models\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\iff M\models K$$

הערה 15.3 אם Γ היא קבוצת פסוקים ו-δ היא פסוק, אזי המשמעות של $\boldsymbol{\Gamma\models\delta}$ היא: שכל מודל שמספק את Γ מספק גם את δ. באותו אופן בדיוק לגבי שתי קבוצות של פסוקים - Γ,Π: $\boldsymbol{\Gamma\models\Pi}$ פירושו שכל מודל שמספק את קבוצת הפסוקים Γ מספק את קבוצת הפסוקים Π (במקומות מסוימים במקום $\models$ מסמנים $\Rightarrow$).
$\models\varphi$ - פירושו ש-φ טאוטולוגיה.

15.2 מספר המודלים של שפה

בשפה עם n פסוקים אלמנטריים יש 2^n מודלים (מבנים).

15.3 לוקליות ערך האמת

ערך האמת של פסוק תלוי רק בפסוקים האלמנטריים המופיעים בו. ליתר דיוק: אם L_1, L_2 הן שתי שפות פסוקיות (אולי זהות) ואם φ הוא פסוק בשתי השפות (ומכאן שהפסוקים האלמנטריים ב־φ שייכים לשתי השפות), ואם M_1 מודל של L_1 ו־M_2 הוא מודל של L_2, כך שלכל פסוק אלמנטרי Q המופיע ב־φ: $M_1(Q) = M_2(Q)$, אזי: $\boldsymbol{M_1(\varphi) = M_2(\varphi)}$.

16 טבלאות אמת

יהי φפסוק ו־$Q_1, ..., Q_n$ כל הפסוקים האלמנטריים ב־φ.
תהי $\varphi_1, ..., \varphi_k$ סדרת בנייה של φכך ש־n הפסוקים הראשונים בסדרה הם $Q_1, ..., Q_n$.
יוצרים טבלה בת k טורים.
בראש הטור ה־i רושמים את הפסוק φ_i, כך שבראש n הטורים השמאליים יופיעו הפסוקים האלמנטריים $Q_1, ..., Q_n$.
לטבלה יהיו 2^n שורות.
בשלב הראשון ממלאים את השורות של n הטורים הראשונים (כלומר, בהתחלה ממלאים רק את הטורים של הפסוקים האלמנטריים).
זה מייצג את כל המודלים האפשריים בנוגע ל־φ.
בשלב השני מחשבים טור אחר טור את האמת של פסוקי φ_i.
למשל, נסתכל על הפסוק: $(\alpha \to (\neg\beta \vee \alpha))$ונבנה לו טבלת אמת.
ניקח את סדרת הבנייה הבאה: $\alpha, \beta, \neg\beta, (\neg\beta \vee \alpha), (\alpha \to (\neg\beta \vee \alpha))$
נשים אותה בטבלה ונמלא בשתי העמודות השמאליות את כל המודלים האפשריים:

α	β	$\neg\beta$	$(\neg\beta \vee \alpha)$	$(\alpha \to (\neg\beta \vee \alpha))$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

כעת, מה שעלינו לעשות זה למלא את שאר הטורים בהתאם ל־n (במקרה שלנו $n = 2$) הטורים השמאליים:

α	β	$\neg\beta$	$(\neg\beta \vee \alpha)$	$(\alpha \to (\neg\beta \vee \alpha))$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

17 משפט ההצבה

1. יהי φפסוק ויהי φ' המתקבל מ־φ ע"י החלפת פסוק חלקי (תת־פסוק) ψ בפסוק אחר ψ'.
אזי, כל מודל M שמקיים $M(\psi) = M(\psi')$ מקיים גם $M(\varphi) = M(\varphi')$.
2. יהיו φ, ψ, ψ' פסוקים ויהי Q פסוק אלמנטרי. בכל מודל המקיים $M(\psi) = M(\psi')$ מתקיים גם:

$$M(\varphi[\psi/Q]) = M(\varphi[\psi'/Q])$$

18 טאוטולוגיה וסתירה

הגדרה 18.1 פסוק נקרא **טאוטולוגיה** (או: פסוק אמיתי לוגית) אםם הוא אמיתי בכל מודל.

הגדרה 18.2 פסוק יקרא **סתירה** (או פסוק שקרי לוגית) אם הוא שקרי בכל מודל.

18.1 דוגמאות לטאוטולוגיות

$$(P \vee \neg P), (\neg\neg P \leftrightarrow P), (P \vee (P \to Q))$$

19 פסוקים שקולים לוגית

הגדרה 19.1 פסוקים φ, ψ בשפה פסוקית נתונה נקראים **שקולים לוגית** אםם הם נכונים בדיוק באותם מודלים. נסמן זאת $\boxed{\varphi \equiv \psi}$.
בניסוח אחר: פסוקים הם שקולים שקולים לוגית אםם רכי האמת שלהם זהים בכל שורה בטבלת האמת הכוללת את שניהם.

אם ב־φוב־ψ יש אותם פסוקים אלמנטריים אז: $\varphi \equiv \psi$ אםם $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ הוא טאוטולוגיה.

19.1 נביעה לוגית

הגדרה 19.2 פסוק ψ**נובע לוגית** מפסוק φ (או: הפסוק φ גורר לוגית את הפסוק ψ) אםם בכל מודל שבו φ נכון גם הפסוק ψ נכון.

כלומר: אם $M \models \varphi$ אזי $M \models \psi$.
סימון: $\varphi \Rightarrow \psi$ וגם $\varphi \models \psi$.
ואז בסימונים האלה: $\varphi \Rightarrow \psi$ אםם $\models (\varphi \to \psi)$.

הגדרה 19.3 פסוק ψ נובע לוגית מקבוצת פסוקים K או: הקבוצה K גוררת לוגית את הפסוק ψ, אם ψ נכון בכל מודל שבו <u>כל</u> פסוקי K נכונים.
אם הקבוצה K סופית , כלומר, $K = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ אזי $K \Rightarrow \psi$ **אםם** $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \Rightarrow \psi$ ולכן $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \Rightarrow \psi$ **אםם** $\models ((\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i) \to \psi)$.

19.2 איך בודקים שקילות לוגית?

1. בונים טבלת אמת שכוללת את הפסוקים האלמנטריים של שניהם ובודקים שהם נכונים בדיוק באותן שורות (העמודה האחרונה זהה).
2. מניחים שפסוק אחד אמיתי במודל ומוכיחים שהפסוק השני אמיתי (ולהפך).

20 מודולריות השקילות

1. יהי φ פסוק ויהי φ' הפסוק המתקבל מ־φ ע"י החלפת פסוק חלקי ψ (פסוק חלקי של φ) בפסוק אחר ψ', כך ש־$\psi \equiv \psi'$, אזי: $\varphi \equiv \varphi'$.
2. יהיו φ, ψ, ψ' פסוקים ויהי Q פסוק אלמנטרי. אם $\psi \equiv \psi'$ אזי:

$$\varphi[\psi'/Q] \equiv \varphi[\psi/Q]$$

משפט 20.1 תהי L שפה פסוקית.
כל פסוק φ שקול לוגית לפסוק φ' שמופיעים בו אותם הפסוקים האלנטריים כמו ב־φ והקשרים היחידים בו הם: $\{\neg, \to\}$.

21 צורה נורמלית

נשים לב כי מתקיים: $((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$.

21.1 קוניונקציה ודיסיונקציה

קוניונקציה = הקשר "וגם" = גימום.
דיסיונקציה = הקשר "או" = איווי.
קוניונקציה מרובה: $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. (אנחנו מרשים לעצמו לכתוב כך בגלל השקילות שלמעלה).

הגדרה 21.1 פסוק בסיסי הוא פסוק אלמנטרי או שלילה של פסוק אלמנטרי.

קוניונקציה פשוטה היא גימום פשוט, כלומר, היא גימום מרובה של פסוקים בסיסיים: $P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_4 \wedge \neg P_5$ (למשל).
פסוק דיסיונקטיבי נורמלי (DNF) ־ הוא דיסיונקציה מרובה של קוניונקציות פשוטות. למשל: $(P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$.
חשוב לזכור שגם P_1 הוא פסוק בצורת DNF.
נתבונן בשפה L_n עם הפסוקים האלמנטריים $P_1, .., P_n$. בשפה זו יש 2^n מודלים.
לכל פסוק אלמנטרי P_i, $M(P_i)$ הוא T/F.
נקרא לקונ' פשוטה בשם "קוניונקציה פשוטה מלאה" אם היא מזכירה כל אחד מ־n הפסוקים האלמנטריים לחיוב או לשלילה בדיוק פעם אחת.
למשל, עבור $n=3$: $\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$.
סימון מקובל לקונ' פשוטה מלאה הוא: $C = \varepsilon_1 P_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n P_n$
כאשר כל ε_i הוא סימן שלילה או שום דבר.

טענה 21.2 בשפה שכל פסוקיה האלמנטריים הם $P_1, ..., P_n$ הקונ' הפשוטה המלאה C נכונה רק במודל אחד.

טענה 21.3 אם נתונים המודלים $M_1, ..., M_k$ בשפה L_n אז הפסוק בצורת DNF $C_{M_1} \vee C_{M_2} \vee \cdots \vee C_{M_k}$ נכון בכל אחד מהמודלים $M_1, .., M_k$ ולא נכון ב־$2^n - k$ המודלים האחרים.

משפט 21.4 כל פסוק שקול לוגית לפסוק בצורת DNF.

הגדרה 21.5 דיסיונקציה פשוטה היא דיס' מרובה של פסוקים בסיסיים. פסוק בצורת CNF היא קונ' מרובה של דיסיונקציות פשוטות.

חלק II
תורת ההוכחה

22 אקסיומות התחשיב (של הילברט)

1. $[\varphi \to (\psi \to \varphi)]$.
2. $\{[\varphi \to (\psi \to \theta)] \to [(\varphi \to \psi)]\}$.
3. $[(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)]$.

כאשר φ, ψ, θ ־ הם פסוקים כלשהם (כל פסוק הוא חוקי).
שלוש האקסיומות הן טאוטולוגיות.

23 כלל הגזירה ־ מודוס פוננס

נתונים לנו שני פסוקים: φ, ψ, אזי:

$$\frac{\varphi, (\varphi \to \psi)}{\psi}$$

כלומר אם נתון לנו ש־φ ו־$(\varphi \to \psi)$ (או שכבר הוכחנו אותם) אזי נוכל להפעיל את כלל הגזירה ולקבל את ψ.
הכלל הזה נקרא ־ כלל הניתוק.

24 הוכחה

הגדרה 24.1 תהי K קבוצת פסוקים.
סדרת הוכחה מתוך K היא סדרת פסוקים $\varphi_1, ..., \varphi_n$ כך שכך פסוק בסדרה הוא מאחד הסוגים הבאים:

1. אקסיומה לוגית (שלושת האקסויומות שתאורו מקודם, במקרה שלנו).
2. פסוק מתוך K.
3. מתקבל משני פסוקים קודמים בסדרה באמצעות כלל הניתוק.

סימון: $K \vdash \varphi$ משמעו שניתן להוכיח את φ מ־K. $\vdash \varphi$ מציין שניתן להוכיח את φ מהקבוצה הריקה, כלומר, מהאקסיומות בלבד (וכלל הניתוק).
ול־φ אנחנו נקרא **משפט בתחשיב**.

24.1 דוגמא לסדרת הוכחה

נניח ו־$K = \{(P \vee Q), ((P \vee Q) \to P)\}$
אזי:

נתון	$(P \vee Q)$
נתון	$((P \vee Q) \to P)$
כלל הגזירה	P

בשורה האחרונה הפעלנו את כלל הגזירה על שתי השורות הראשונות, ולכן: $K \vdash P$.
(כמובן שגם היה ניתן להשתמש באקסיומות במידת הצורך ו־φ, ψ, θ יכלו להיות כל פסוק מ־K (היינו גם יכולים לשים פסוקים שהם לא ב־K, למשל: $\varphi = (P \to \neg Q)$ אבל אז לא היינו יכולים להתייחס אל הפסוק הזה כנתון).

25 התכונות היסודיות של הוכחות

1. אם $\varphi_1, ..., \varphi_n$ היא סדרת הוכחה מתוך K, אזי לכל $i \leq n$: הסדרה $\varphi_1, ..., \varphi_i$ היא סדרת הוכחה מתוך K ולכן כל המחרוזות בסדרה הן משפטים של K.
2. אם $\varphi_1, ..., \varphi_n$ היא סדרת הוכחה מתוך K ו־$\psi_1, ..., \psi_m$ היא סדרת הוכחה מתוך K, אזי $\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi_1, ..., \psi_m$ היא סדרת הוכחה מתוך K.
3. אם $K \vdash \varphi$ ו־$K \subseteq K'$ אזי $K' \vdash \varphi$.
4. אם $K \vdash \varphi$ ואם $K \cup \{\varphi\} \vdash \psi$אזי $K \vdash \psi$ (וזה נכון גם אם φ הייתה קבוצת פסוקים).

למה 25.1 אם φ אקסיומה לוגית או $\varphi \in K$ אזי $K \vdash \varphi$.

למה 25.2 אם $K \vdash \psi$ וגם $K \vdash (\psi \to \varphi)$ אזי $K \vdash \varphi$.

26 משפט הדדוקציה

אם $K \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ אזי $K \vdash (\psi \to \varphi)$.

27 קבוצת פסוקים לא עקבית

הגדרה 27.1 קבוצת פסוקים נקראת **לא עקבית** (או: לא קונסיסטנטית) אםם יש לפחות פסוק אחד φ כך ש־$K \vdash \varphi$ וגם $K \vdash \neg\varphi$.

קבוצת פסוקים שאינה כזאת נקראת **עקבית** (או: קונסיסטנטית).

משפט 27.2 אם $K \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית אזי $K \vdash \varphi$.

למה 27.3 תהי K קבוצת פסוקים אינסופית[2]: אם כל קבוצה חלקית סופית של K היא עקבית, אזי גם K עקבית.
באופן שקול: אם Kאינה עקביתאזי יש תת־קבוצה חלקית סופית של K שאינה עקבית.

28 משפט ההוכחה בדרך השלילה

1. לכל פסוק φ מתקיים:

$$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$$

2. קבוצה לא עקבית מוכיחה כל פסוק.

29 משפט התחשיב הנאות

משפט 29.1 לכל קבוצת פסוקים K ופסוק : אם $K \vdash \varphi$ אזי $K \vDash \varphi$.

בפרט המשפטים הניתנים להוכחה בתחשיב כאשר $K = \varnothing$ הם טאוטולוגיות.

מסקנה 29.2 אם לקבוצת פסוקים יש מודל מספק אזי היא עקבית.

[2]אם הקבוצה סופית, אזי למשפט אין משמעות.

30 תורה ותורה שלמה

הגדרה 30.1 קבוצת פסוקים נקראת **תורה** אםם היא עקבית.

הגדרה 30.2 תודה נקראת **תורה שלמה** אםם כל פסוק φ ניתן להוכחה או ש־$\neg\varphi$ ניתן להוכחה.

כלומר: K נקראת תורה אם אין פסוק φ כך ש־$K \vdash \varphi$ וגם $K \vdash \neg\varphi$.
תורה K נקראת שלמה אם בנוסף לכל פסוק φ: $K \vdash \varphi$ או $K \vdash \neg\varphi$.

משפט 30.3 קבוצת פסוקים K שהיא תורה שלמה היא בעלת מודל (מספק) אחד ויחיד.

31 משפט הקומפקטיות

31.1 נוסח ראשון

תהי K קבוצת פסוקים.
אם **כל** קבוצה חלקית סופית היא בעלת מודל מספק (לפחות אחד) - אזי יש מודל מספק ל־K.

31.2 נוסח שני

תהי K קבוצת פסוקים. אם $K \models \psi$ (ψ נובע לוגית מ־K), אז יש קבוצה חלקית סופית $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ כך ש־ψנובע לוגית מ־$\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \psi$.

משפט 31.1 ניתן להרחיב כל תורה לתורה שלמה. כלומר, לכל תורה K יש תורה $\overline{K}$ שהיא שלמה ומכילה את K.

32 משפט השלמות

32.1 נוסח ראשון

לכל תורה עקבית יש מודל.

32.2 נוסח שני

אם $K \vDash \varphi$ אזי $K \vdash \varphi$.
בפרט, כל הטאוטולוגיות ניתנות להוכחה בתחשיב (מהקבוצה הריקה).