סיכום בתחשיב היחסים

(סיכום של תחשיב היחסים בקורס "לוגיקה למדעי המחשב" מאת ד"ר גילי שול)

חלק I
הגדרות בסיסיות

1 שפת שמות העצם (Terms)

1.1 המקלדת

סדרת שמות של משתנים $v_0, v_1, \ldots$ או $x, y, z, \ldots$.
סימני פיסוק: סוגר ימני "(", סוגר שמאלי ")" ופסיק ",".
שמות של קבועים: סדרה סופית (אולי ריקה) או אינסופית של של סימנים שתיקרא שמות של פונקציות n־מקומיות.

1.2 שמות עצם

בהינתן מקלדת נגדיר את שפת שמות העצם. ההגדרה היא רקורסיבית:

1. אם t היא מחרוזת בת סימן יחיד שהוא משתנה או שם של קבוע, אז היא שם־עצם ונקראת **שם־עצם אלמנטרי**.
העומק המבני שלה הוא 0: $d(t) = 0$.

2. אם F היא סימן פונקציה k־מקומית ואם $t_1, \ldots, t_k$ הם שמות עצם שכבר יש להם עומק מבנית אזי המחרוזת $F(t_1, \ldots, t_k)$ היא שם עצם.
העומק המבני של שם־עצם זה הוא: $d(t) = 1 + \max\{d(t_1), \ldots, d(t_k)\}$.

2 משפט ההגדרה באינדוקציה

נתונה שפת שמות עצם.
אפשר להגדיר את פונקציה H מקבוצת שמות העצם לכל קבוצה אחרת באופן הבא:

1. מגדירים את $H(t)$ לכל שם־עצם אלמנטרי t (קבוע/משתנה).
2. לכל שם של פונקציה n־מקומית F ושמות עצם $t_1, ..., t_n$ מגדירים את $H(F(t_1, .., t_n))$[1] בהנחה שהפונקציה H כבר מוגדרת עבור $t_1, ..., t_n$ ובהסתמך על ערכיה. $H(t_1), ..., H(t_n)$ כבר מוגדרים לפיהם מגדירים את $H(F(t_1, ..., t_n))$.

2.1 דוגמא: H סופרת את מספר הסגוריים במחרוזת

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t = C/V \\ 2 + \sum_{i=1}^{n} & H(t_i) \end{cases}$$

C/V = פירושו קבועו או משתנה. כלומר (במקרה שלנו) ־ אם t הוא קבוע או משתנה.

3 לוקליות ההגדרה באינדוקציה

נניח ש־t שם־עצם ונניח ש־H ו־H' פונקציות במוגדרות באינדוקציה מבנית ונבדלות אולי ביחס לקבועים ולמשתנים שאינם מופיעים ב־t אבל לא ביחס לקבועים ולמשתנים המופיעים ב־t ולא ביחס לכללי המעבר ־ אזי $H'(t) = H(t)$.

<u>איך מגדירים פונקציה H באינדוקציה מבנית?</u>

מגדירים את H על הקבועים ועל המשתנים ולכל שם של פונקציה F מגדירים את הערך של $H(F(t_1, ..., t_n))$ על סמך הערכים של $H(t_1), ..., H(t_n)$.

4 הצבה

נניח ש־t, s הם שמות עצם ו־x הוא שם של משתנה. אז הצבה של s במקום x ב־t מסומנת ב־$\boldsymbol{t}[\boldsymbol{s}/\boldsymbol{x}]$ והיא המחרוזת המתקבלת מהמחרוזת צא ע"י החלפת כל המופעים של האות x במחרוזת s.

טענה 4.1 אם t ו־s שמות עצם ו־x שם של משתנה אז $t[s/x]$ הוא שם־עצם.

טענה 4.2 יהיו t, s_1, s_2 שמות עצם ו־x שם של משתנה, ונניח ש־H היא פונקציה שמוגדרת באינדוקציה מבנית שמקיימת $H(S_1) = H(S_2)$ אזי:

$$H(t[s_1/x]) = H(t[s_2/x])$$

5 פירוש שמות עצם

תהי L שפה של שם־עצם.
מבנה/מודל M בשפה מורכב:

1. מקבוצה A לא ריקה הנקראת <u>התחום</u> (או: העולם) של המבנה.
2. מהתאמה שמתאימה לכל שם של קבוע c בשפה עצם בתחום של המבנה שמסומן ב־c^M ולכל סימן F בשפה מתאימה פונקציה F^M עם הערכיות הנדרשת עבור F. כלומר: $F^M : A^n \to A$ כאשר A^n היא הערכיות הנדרשת (n הוא מספר הערכים מתוך A שאנחנו מעבירים לאיבר אחד ב־A באמצעות F).

5.1 סימון

הסימון המקובל הוא:

$$M = \left\langle A; c_1^M, c_2^M, ...; F_1^M, F_2^M, ...\right\rangle$$

[1] חשוב לזכור ש־$F(t_1, .., t_n)$ היא מחרוזת.

6 השמה

בהניתן מבנה/מודל S עם עולם A, השמה במבנה היא התאמה: $S:\{v_o,v_1,....\}\to A$ - המתאימה איבר ב־A לכל שם של משתנה. נסמן את האיבר המותאם ל־x ב־$\boldsymbol{S(x)}$ או ב־$\boldsymbol{x^S}$ ונקרא לו <u>הפירוש של המשתנה בהשמה</u>.

7 פירוש של שם עצם במודל והשמה

נתון מודל M בשפהץ נגדיר באינדוקציה על מבנה שם העצם מהו הפירוש t^S של שם העצם t בהשמה S:

1. אם t הוא שם עצם של קבוע c אז $S(t)=c^M$ (או: $t^S=c^M$).
   אם t הוא שם של משתנה x אז $t^S=S(x)$ (או: $x^S=t^S$).
2. לשמות מורכבים: נניח ש־$t=f(t_1,...,t_n)$ ונניח שהעצמים $S(t_i)$, לכל $1\le i\le n$ מוגדרים, אזי:

$$S(t)=f^M\left(S(t_1),...,S(t_n)\right)$$

סימן חלופי: $t^S=f^M\left(t_1^S,...,t_n^S\right)$

7.1 משפט הלוקליות

יהי M מודל, t שם־עצם ו־S_1,S_2 שתי השמות שמתלכדות על המשתנים המוזכרים ב־t אזי:

$$S_1(t)=S_2(t)$$

בפרט: אם t שם־עצם קבוע (שלא מוזכרים בו משתנים) אז כל ההשמות נותנות ל־t אותו ערך במודל, וזה הפירוש שלו במודל.
אפשר לסמן זאת ב־t^M במקום t^S.

8 מודולריות של הצבה

יהי M מבנה ותהיינה S_1,S_2 הצבות. יהיו t,s_1,s_2 שמות עצם ו־x משתנה.
נניח $S_1(s_1)=S_2(s_2)$ ולכל משתנה y השונה מ־x ומופיע ב־t $S_1(y)=S_2(y)$ אזי:

$$S_1\left(t\left[s_1/x\right]\right)=S_2\left(t\left[s_2/x\right]\right)$$

חלק II
שפת היחסים

המקלדת מתחלת לשניים:

9 חלק ראשון: הסימנים החוץ לוגיים

סימני קבועים: $c_1,c_2,...$.
סימני פונקציות: $F_1,F_{2,},....$.
סימני יחסים: R_1,R_2.

10 חלק שני: הסימנים הלוגיים

1. הקשרים: $\neg,\to,\vee,\wedge,\leftrightarrow$.
2. סימני פיסוק וסוגריים: $(\ )$,.
3. המשתנים: $v_0,v_1,...$ (יש אינסוף כאלה).
4. הכמתים: לכל $\forall$ וקיים $\exists$.

11 משתנה חופשי ומשתנה קשור

הסימן x המופיע בסמוך לכמת Q[2] לא נקרא מופע לא נקרא מופע של של משתנה אלא הוא חלק ממופע של של הכמת.
בכל מופע אחר של x (שאינו צמוד ל־Q) x יהיה קשור לכמת יחיד Q_1x או יהיה חופשי.

11.1 דוגמאות

נניח שאנחנו בעולם של המספרים $A=\{1,2,3,4\}$ (ולא ניתן כרגע פרנשות לפונקציות היות והמטרה היא רק להמחיש מהו משתנה חופשי ומשתנה קשור.

$(x>2)$	המשתנה x הוא חופשי כאן.
$\forall x\,(x>2)$	המשתנה x הוא קשור כאן.
$(\exists x\,(\boldsymbol{x}>2))\wedge(x<4)$	ה־x המודגש הינו משתנה קשור (לכמת $\exists$) ואילו ה־x השני חופשי.
$(\forall x\,(x>2))\vee\exists x\,(x>3)$	שני המופעים של ה־x כאן קשורים.

נשים לב כי בנוסחה : $\forall x\,(\exists x\,(\boldsymbol{x}>2))$ - ה־x המודגש שייך לכמת $\exists$ ולא לכמת $\forall$!

11.2 הצבה בנוסחה

יהיו φ נוסחה ו־t שם־עצם.

1. ההצבה $\varphi[t/x]$ מחליפה כל מופע חופשי של המשתנה x במחרוזת t.
2. ההצבה $\varphi[t/x]$ היא הצבה כשרה (חוקית) אסם אף משתנה המופיע ב־t אינו הופך להיות קשור כתוצאה מההצבה.

הגדרה 11.1 נוסחה נקראת בשם **פסוק** (או: נוסחה סגורה) אסם אין בה שום משתנה חופשי. כלומר, כל המופעים של כל המשתנים הם קשורים.

דוגמא להצבה שאינה כשרה:
נסתכל על $\varphi=\exists x\,(x>y)$ - במקרה כאן x משתנה קשור ו־y משתנה חופשי.
ההצבה $\varphi[y/x]$ אומרת שנוסחה למעלה נציב x במקום כל y כל עוד הוא חופשי, אזי מה שנקבל הוא $\varphi=\exists x\,(x>x)$ - וזה אינו חוקי כי קשרנו משתנה שהיה חופשי.

12 לוגיקה עם שוויון

בלוגיקה עם שוויון הסימן $\approx$ נכלל כסימן יחס דו־מקומי בשפה והוא מתפרש כזהות:

$$\approx^M=\left\{\langle a,a\rangle\,\middle|\,a\in A\right\}$$

והרבה פעמים שמשתמשים בלוגיקה עם שוויון הרבה פעמים לא בוחרים את הסימן $\approx$ בשפה.
כלומר, לכל $a,b\in A$:

$$\left(a\approx^M b\right)\iff a=b$$

בלוגיקה ללא שוויון גם אם קיים הסימן $\approx$ במקלדת הוא אינו חייב להתפרש כזהות.

13 ערך האמת של נוסחה במודל ובהשמה

סימון: אם S השמה במודל M, x משתנה ו־a שם עצם בעולם, $S\langle x|a\rangle$ היא התיקון של S השולח את x ל־a ועבור כל משתנה אחר S נשארת אותו הדבר (במילים אחרות, ככה ניתן לבנות השמה).
ניתן גם לסמן זאת ב־$S\binom{x}{a}$.
למשל, בדוגמא שלמעלה: $S\langle x|3\rangle\,\varphi=\exists x\,(x>3)$.
תהי φ נוסחה בשפת היחסים, יהי M מודל בשפה ותהי S השמה.

1. אם $\varphi=R\,(t_1,...,t_n)$ נוסחה אטומית, אזי הנוסחה נכונה/אמיתית בהשמה S **אסם** $R^M\,(t_1,...,t_n)=T$ (או: $\left(t_1^S,...,t_n^S\right)\in R^M$).
2. אם $\varphi=\neg\psi$ אז $S\,(\varphi)=T\iff S\,(\psi)=F$.

[2] Q פירושו כמת כלשהו - או $\forall$ או $\exists$.

3. אם $\varphi=(\psi@\theta)$ אז היא כמו בשפה הפסוקית, למשל $\varphi=(\psi\rightarrow\theta)$ אז $S(\varphi)=T$ אסם $S(\psi)=F$ או $S(\theta)=T$. (@ - קשר דו־מקומי).

4. אם $\varphi=\exists x\psi$ אז $S(\varphi)=T$ אסם <u>קיים</u> איבר a בעולם של M כך ש־$S\langle x|a\rangle\models\psi$ (ψ נכונה בהשמה $S\langle x|a\rangle$). במילים אחרות, מספיק שיש לנו רק איבר אחד כזה - שההשמה שלו נותנת T - ואז כל הפסוק יהיה אמת).

5. אם $\varphi=\forall x\psi$ אז $S(\varphi)=T$ אסם <u>לכל</u> a בעולם של M ψ נכונה בהשמה $S\langle x|a\rangle$. (כלומר, כל $a\in A$ חייב לספק את ψ, אחרת, מספיק שיש רק איבר אחד שלא מספק ואז $S(\varphi)=F$).

כדי לשים לב שבהקשר של הכמתים (סעיפים 4,5) לא משנה איזו הצבה נשים במקום x, אלא יש תלות בכל אברי A (בהתאם לכמת).

<u>סימון:</u>

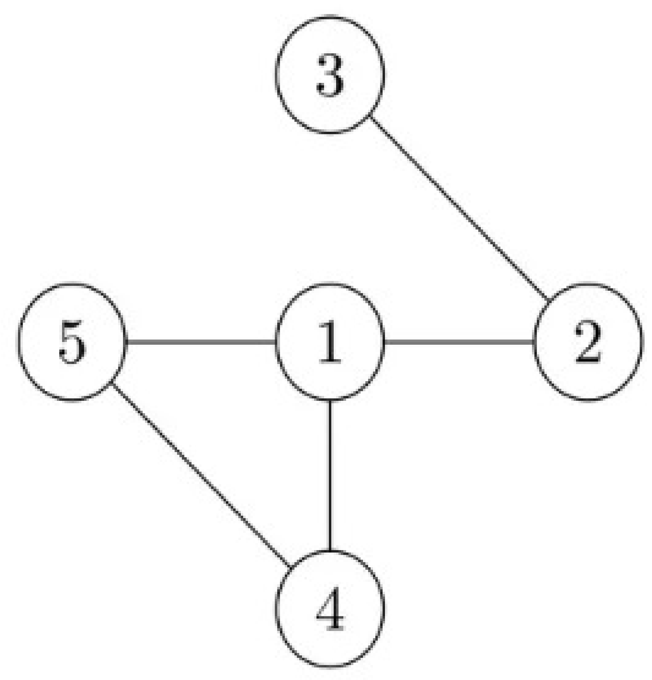
הנוסחה φ נכונה/אמיתית בהשמה S: $S(\varphi)=T$, $S\models\varphi$, $M\models_S\varphi$.

הנוסחה φ אינה נכונה/שקרית בהשמה S: $S(\varphi)=F$, $S\not\models\varphi$, $M\not\models_S\varphi$.

14 דוגמאות

14.1 דוגמת הגרף

נסתכל על הגרף הבא:



נתסכל על המודל הבא:

A - העולם שלנו - הוא קדוקודי הגרף.

c^M - קודקוד מספר 5. (c הוא קבוע).

$N^M(v_1,v_2)$ - יחס דו מקומי המקבל שני קודקדים בגרף ומחזיר אמת אם הם שכנים או לא.

$F_1^M(x)$ - פונקציה המקבלת קודקוד x בגרף ומחזירה את המרחק לקודקוד c^M.

וישנם את היחסים $=,>,<,\leq,\geq$ (במובן הנומרי הרגיל שלהם).

—

כעת נסתכל על הפסוקים הבאים:

$\varphi=\left(F_1^M(x)=2\right)$	זוהי נוסחה שבשביל לתת לה ערך אמת נצטרך השמה, לכן $S\langle x\|2\rangle(\varphi)=T$, וכמו־כן: $S\langle x\|c^M\rangle(\varphi)=F$.
$\exists x\left(N^M(x,c)\right)$	כלומר, קיים קודקוד x בגרף שקודקוד 5 הוא שכן שלו, ואכן יש יותר מאחד כזה, אבל מספיק שיש רק אחד כדי שהפסוק יהיה אמיתי, ולכן ערכו של הפסוק הוא T.
$\forall x\left(N^M(x,c)\right)$	אותו דבר כמו מקודם, רק שהפעם המשמעות היא ש<u>כל</u> קודקוד בגרף הוא שכן של 5, והיות וזה לא נכון, ערך הפסוק הוא F.
$\forall x\exists y\left(N^M(x,y)\right)$	ואכן נוסחה זאת נכונה כי לכל קודקוד בגרף יש קודקוד שכן.
$\psi=\left(\exists x\left(N^M(x,c)\right)\wedge\left(F_1^M(x)=0\right)\right)$	נשים לב כי החלק השמאלי של ψ הוא אמת כמו שראינו בפסוק השני, אבל לעומת זאת ה־x בחלק השני הוא חופשי - ולכן הוא תלוי בהשמה. לכן: $S\langle x\|c^M\rangle(\psi)=T$ ואילו $S\langle x\|3\rangle=F$. נשים לב כי ההשמה אינה משפיעה על ערך האמת של החלק השמאלי של ψ אלא רק על החלק הימני. כמו־כן היינו גם יכולים לכתוב $S\langle x\|5\rangle(\psi)=T$.

משפט 14.1 תהי φ נוסחה בשפת היחסים ו־M מודל.

1. כל שתי השמות המתלכדות על המשתנים החופשיים של φ נותנות ל־φ את אותו ערך אמת.

2. בפרט, אם φ פסוק אז כל ההשמות ב־M נותנות ל־φ את אותו ערך אמת.

15 מודולריות ההצבה בנוסחאות

תהי φ נוסחה ויהי t שם־עצם ויהי x משתנה.
נניח שההצבה $\varphi\left[t/x\right]$ כשרה.
תהיינה S, S_1 שתי השמות המקיימות:
$S\left(x\right) = S_1\left(t\right)$ וגם ־ לכל משתנה y שהוא חופשי ב־φ ושונה מ־x מתקיים: $S\left(y\right) = S_1\left(y\right)$, אזי:

$$S\left(\varphi\right) = S_1\left(\varphi\left[t/x\right]\right)$$

הגדרה 15.1 נוסחה φ נכונה במודל M אסם היא נכונה בכל השמה S במודל.

הגדרה 15.2 נניח כי $x_1, ..., x_r$ הם כל המשתנים החופשיים ב־φ, <u>הסגור הכולל</u> של φ הוא הפסוק $\forall x_1 \cdots \forall x_r \varphi$.

משפט 15.3 יהיו φ נוסחה, x משתנה ו־M מודל, אז: φ נכונה במודל M אסם $\forall x \varphi$ נכונה ב־M.

משפט 15.4 הנוסחה φנכונה ב־מודל M אסם הסגור הכולל $\forall x_1 \cdots \forall x_r$ נכון ב־M.

הגדרה 15.5 נוסחה φ היא <u>אמיתית לוגית</u> אסם היא נכונה בכל מודל ובכל השמה. בפרט, פסוק הוא אמיתי לוגית אם הוא אמיתי בכל מודל.

הגדרה 15.6 הנוסחאות φ, ψ שקולות לוגית $\varphi \equiv \psi$ אסם בכל מודל M ובכל השמה S. $S \models \psi \iff S \models \varphi$.

משפט 15.7 נניח כי $\varphi \equiv \psi, \varphi_1 \equiv \psi_1$, אזי:

1. $\neg\varphi \equiv \neg\psi$.
2. $\left(\varphi @ \varphi_1\right) \equiv \left(\psi @ \psi_1\right)$ לכל קשר דו־מקומי @.
3. $\forall x \varphi \equiv \forall x \psi$.
4. $\exists x \varphi \equiv \exists x \psi$.

הגדרה 15.8 נוסחה המתקבלת מהצבה בטאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים נקראת <u>טאוטולוגיה של שפת היחסים</u> והיא אמיתית לוגית.

למשל: $\alpha = \forall x R\left(x, y\right)$, $\varphi = \left(P \vee \neg P\right)$, אזי:
$\varphi' = \varphi\left[\alpha/P\right]$ היא אמיתית לוגית.

משפט 15.9 אם $\varphi\left[t/x\right]$ היא הצבה כשרה אזי $\left(\forall x \varphi \to \varphi\left[t/x\right]\right)$ היא אמיתית לוגית.

16 רענון משתנים

אם y משתנה שאינו מופיע ב־φ (לא חופשי ולא קשור) כאשר φ היא נוסחה אז:

$$\forall x \varphi \equiv \forall y \varphi\left[y/x\right]$$

זה נקרא **<u>רענון משתנים</u>**.

17 שקילויות עם כמתים

17.1 שלילה

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x\varphi &\equiv \exists x\neg\varphi \\
\neg\exists\varphi &\equiv \forall x\neg\varphi \\
\forall x\varphi &\equiv \neg\exists x\neg\varphi \\
\exists x\varphi &\equiv \neg\forall x\neg\varphi
\end{aligned}
$$

נניח ש־x אינו מופיע חופשי ב־ψ:

$$
\begin{aligned}
(\forall x\varphi \vee \psi) &\equiv \forall x\,(\varphi \vee \psi) \\
(\forall x\varphi \wedge \psi) &\equiv \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \\
(\exists x\varphi \vee \psi) &\equiv \exists x\,(\varphi \vee \psi) \\
(\exists x\varphi \wedge \psi) &\equiv \exists x\,(\varphi \wedge \psi)
\end{aligned}
$$

17.2 חץ

$$
\begin{aligned}
(\psi \to \forall x\varphi) &\equiv \forall x\,(\psi \to \varphi) \\
(\forall x\varphi \to \psi) &\equiv \exists x\,(\varphi \to \psi)
\end{aligned}
$$

18 צורה פרנקסית וצורה פרנקסית נורמלית

הגדרה 18.1 צורה פרנקסית היא צורת כתיבה עבור נוסחאות שבהן (כלומר, נוסחה נקראת נוסחה בצורה פרנקסית אם...) כל הכמתים מופיעים בראש הנוסחה ולאחרים נוסחת חסרת כמתים.
הנוסחה נקראת בצורה פרנקסית נורמלית אם החלק חסר הכמתים הוא בצורה דיסיונקטיבית נורמלית DNF.

משפט 18.2 כל נוסחה שקולה לנוסחה בצורה פרנקסית.

משפט 18.3 כל נוסחה שקולה לנוסחה פרנקסית נרומלית.

כאשר אנחנו רוצים לעשות את זה ניתן להעזר בריענון משתנים (כפי שריאנו מקודם) וכך זה יוכיח לנו שהוצאות הכמת היא חוקית (בהתאם לשקילויות שלמעלה).
למשל:
ניקח את $(\forall x\varphi \vee \forall y\varphi)$ אזי נצטרך לבצע ריענון משתנים כדי שהוצאת הכמתים (שנוכל לעשות אותה ע"פ השקילויות שלמעלה) לא תפגע בנוסחה (ניתן לעשות את זה שלב־שלב, אבל כאן נעשה את בבת אחת לשים הקיצור).
אזי קודם כל נבע את הריענון משתנים:
$(\forall x\varphi \vee \forall y\varphi) \equiv (\forall x\varphi\,[z/y] \vee \forall y\varphi\,[w/x])$ ־ וככה, ע"י ההצבה (האמת היא שכאן אין ממש צורך לעשות רענון משתנים) אנחנו מבטיחים שאם נוציא את הכמתים ההוצאה תהיה כשרה, ולכן:
$\equiv \forall x\forall y\,(\varphi\,[z/y] \vee \varphi\,[w/x])$
דוגמא פשוטה עם רענון משתנים:
$(\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$ ־ נשים לב שכאן אנחנו לא רוצים להוציא את ה־$\forall x$ השמאלי ושהוא ישפיע על ה־x־ים של ψ ולכן נעשה ריענון משתנה:
$(\forall x\varphi \vee \forall y\psi\,[y/x])$ ־ וכעת נוכל להוציא את הכמתים מבלי לפגוע בכשירות הנוסחה:
$\forall x\forall y\,(\varphi \vee \psi\,[y/x])$.