אינפי 2 (20475)

פתרון ממ"ן 15 – 2019ב

שאלה 1

קבעו לגבי כל אחד מהטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos 2n}{\ln(n^n+n^2)}+1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

נסמן $a_n=\frac{\cos 2n}{\ln(n^n+n^2)}$, $b_n=1-\cos\frac{1}{n}$. נסמן גם $c_n=\frac{1}{\ln(n^n+n^2)}$, אז $a_n=c_n\cos 2n$.
(n^n+n^2) סדרה עולה, ולכן גם $\left(\ln\left(n^n+n^2\right)\right)$ סדרה עולה (כי $\ln x$ פונקציה עולה), בנוסף היא חיובית, ולכן $c_n=\frac{1}{\ln(n^n+n^2)}$ יורדת. כמו כן, $0<c_n<\frac{1}{\ln n^n}=\frac{1}{n\ln n}\to 0$, מכאן ש- (c_n) אפסה. ממה שהראינו עתה ומשאלה 33א ביחידה 5 נסיק כי הטור $\sum a_n$ מתכנס לפי מבחן דירכלה.
נוכיח שהוא מתכנס בתנאי. נניח בשלילה שהוא מתכנס בהחלט, אז גם $\sum c_n\cos^2 2n$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה 5.14, כי $|c_n\cos 2n|\ge c_n\cos^2 2n>0$. נרשום $c_n\cos^2 2n=\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}c_n\cos 4n$.
$\sum\frac{1}{2}c_n\cos 4n$ מתכנס לפי מבחן דירכלה כמו הטור $\sum a_n$, ואז, לפי שאלה 11א ביחידה 5, הטור $\sum\left(c_n\cos^2 2n-\frac{1}{2}c_n\cos 4n\right)=\sum\frac{1}{2}c_n=\sum\frac{1}{2\ln(n^n+n^2)}$ מתכנס ומכאן שהטור $\sum\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס (מבחן ההשוואה 5.15, $\frac{1}{2\ln\left(n^n+n^2\right)}\div\frac{1}{n\ln n}\to 1/2$) בסתירה לדוגמה 5.8ב.
הגענו לסתירה, ולכן $\sum a_n$ לא מתכנס בהחלט, ובכך הוכחנו כי הטור $\sum a_n$ מתכנס בתנאי.
נעבור ל- $\sum b_n$. $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, $|\sin x|\le|x|$ לכל x (אינפי 1), לכן $\left|1-\cos\frac{1}{n}\right|=2\sin^2\frac{1}{2n}\le 2\left(\frac{1}{2n}\right)^2=\frac{1}{2n^2}$. הטור $\sum\frac{1}{2n^2}$ מתכנס ולכן הטור $\sum\left|1-\cos\frac{1}{n}\right|$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה 5.14, כלומר הטור $\sum b_n$ מתכנס בהחלט.
הטור הנתון בשאלה הוא $\sum(a_n+b_n)$, ולכן הוא מתכנס לפי משפט 5.9 . אך אם נניח שהוא מתכנס בהחלט , נקבל מהאי-שוויון $|a_n|=|(a_n+b_n)-b_n|\le|a_n+b_n|+|b_n|$ וממבחן ההשוואה 5.14 כי $\sum|a_n|$ מתכנס, בסתירה למה שקיבלנו קודם.
אי לכך, הגענו למסקנה הסופית : **הטור הנתון מתכנס בתנאי**.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ כאשר u_1 מספר ממשי שרירותי ו- $u_{n+1}=\frac{1}{n}e^{-u_n}$ לכל $n\ge 1$.

הביטוי e^{-u_n}/n חיובי לכל n , ולכן $u_n>0$ לכל $n\ge 2$.
אם $u_n\nrightarrow 0$ אז $\sum u_n$ מתבדר לפי התנאי ההכרחי, ואם $u_n\to 0$ אז $\frac{u_{n+1}}{1/n}=e^{-u_n}\to e^0=1$ ולכן הטור $\sum u_{n+1}$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה 5.15, ומכאן ש- $\sum u_n$ מתבדר (לצורך שימוש במבחן ההשוואה היינו צריכים לבדוק ש- $u_n>0$). אי לכך, קבלנו **שהטור הנתון מתבדר**.
שימו לב : אין צורך לבדוק אם $u_n\to 0$, הוכחנו שהטור מתבדר גם אם זה נכון וגם אם זה לא נכון.

שאלה 2

תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת שנייה חסומה בקטע $[0,1]$.

הוכיחו כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ מתכנס אז הוא מתכנס בהחלט.

נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ מתכנס. מהתנאי ההכרחי 5.5 נקבל אז כי $f(1/n) \to 0$. מאידך, f גזירה ב-$[0,1]$ ולכן רציפה מימין ב-0, ומכאן ש- $f(1/n) \to f(0)$. אי לכך, $f(0) = 0$.

נרשום פיתוח מקלורן מסדר 1 של $f(x)$ בנקודה $x = 1/n$ עם שארית בצורת לגראנז׳:

$f(\frac{1}{n}) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{1}{n} + R_1(\frac{1}{n}) = \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(c_n)}{2n^2}$ כאשר $0 < c_n < 1/n$. (*)

נתון כי $f''(x)$ חסומה ב- $[0,1]$, לכן קיים M כך ש- $\left|\frac{f''(c_n)}{2n^2}\right| \le \frac{M}{2n^2}$ לכל n. מכאן נובע, לפי מבחן ההשוואה 5.14, כי התכנסותו של $\frac{M}{2}\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{M}{2n^2}$ גוררת התכנסות בהחלט של $\sum \frac{f''(c_n)}{2n^2}$.

מ-(*) נסיק אז שהטור $\sum\left(f(\frac{1}{n}) - \frac{f''(c_n)}{2n^2}\right) = \sum \frac{f'(0)}{n}$ מתכנס כהפרש של שני טורים מתכנסים (שאלה 11א ביחידה 5). אך הטור $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן הטור $\sum \frac{f'(0)}{n}$ יכול להתכנס רק בתנאי ש- $f'(0) = 0$. מהתנאי הזה ומ-(*) נקבל כי $f(\frac{1}{n}) = \frac{f''(c_n)}{2n^2}$. התכנסות בהחלט של הטור $\sum \frac{f''(c_n)}{2n^2}$ הוכחנו קודם, והראינו אפוא כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ מתכנס בהחלט, מש״ל.

שאלה 3

תהי (a_n) סדרה חיובית המקיימת $\frac{n-1}{n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{n}{n+1}$ לכל $n \ge 1$.

א. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

ב. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

א. לפי הנתון $a_{n+1}/a_n < 1$ לכל n, ולכן $a_{n+1} < a_n$ (כי $a_n > 0$) כלומר (a_n) סדרה יורדת. מהנתון נובע גם ש- $(n+1)a_{n+1} \le na_n$ כלומר (na_n) סדרה יורדת. כמו כן, סדרה זו חסומה מלרע על-ידי 0 ולכן (na_n) מתכנסת לגבול סופי (אינפי 1, משפט 3.16). מכך נובע ש- (a_n) אפסה, כי אחרת $a_n \to b > 0$ ((a_n) מתכנסת לגבול לא שלילי בהיותה סדרה יורדת חיובית) ולכן $na_n \to \infty$ בסתירה למה שקיבלנו קודם.

הראינו אפוא ש- (a_n) סדרה יורדת ואפסה ולכן לפי משפט לייבניץ הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

ב. מהנתון נובע כי $na_{n+1} \ge (n-1)a_n$ כלומר $((n-1)a_n)$ סדרה עולה ולכן על-פי משפטים 3.16+3.17 באינפי 1, $(n-1)a_n \to L$ (סופי או אינסופי), נסמן $b_n = \frac{1}{n-1}$ אז $\sum b_n$ מתבדר ו- $a_n/b_n \to L$ ולכן הטור $\sum a_n$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה 5.15) אם L סופי או שאלה 21ב ביחידה 5 אם $L = \infty$).

שאלה 4

א. הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אז הטור $a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots$ מתכנס.

ב. הראו שאם נוותר על הדרישה $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז ייתכן שהטור $a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots$ מתבדר למרות התכנסותו של $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$.

ג. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתבדר כאשר (a_n) סדרה אפסה של מספרים חיוביים.
הוכיחו כי הטור $a_1-a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+\ldots$ מתכנס בתנאי וחשבו את סכומו.
האם ניתן לשנות את סדר האיברים בטור זה כך שהטור המתקבל יתבדר?

א. נסמן ב- S_k סכום חלקי k-י של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, נסמן ב- T_k סכום חלקי k-י של הטור $a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots$. אז לכל k מתקיים: $T_{2k}=S_k$, $T_{2k+1}=S_k+a_{k+1}$, לכן:

$$\lim_{k\to\infty}T_{2k}=\lim_{k\to\infty}S_k=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

$$\lim_{k\to\infty}T_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}S_k+a_{k+1}=\lim_{k\to\infty}S_k+\lim_{k\to\infty}a_{k+1}=\lim_{k\to\infty}S_k+0=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

אי לכך, על-פי משפט 3.31 באינפי 1, סדרת הסכומים החלקיים (T_k) מתכנסת, כלומר הטור $a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots$ מתכנס.

ב. ניקח $a_n=1$, $b_n=-1$ לכל n. הטור $\sum(a_n+b_n)$ מתכנס כי $a_n+b_n=0$ לכל n אלא הטור $1+(-1)+1+(-1)+\ldots$ מתבדר כי סדרת האיברים שלו לא שואפת ל- 0 (התנאי ההכרחי).

ג. נסמן $b_n=-a_n$, אז לפי סעיף א נקבל שהטור מתכנס, ומפתרון סעיף א נובע שסכומו 0.
נוכיח כי הטור לא מתכנס בהחלט. נסמן ב- Q_k סכום חלקי k-י של טור הערכים המוחלטים, אז $Q_{2k}=2\sum_{n=1}^{k}a_n$. הטור $\sum a_n$ מתבדר ולכן גם הסדרה (Q_{2k}) מתבדרת ואז גם (Q_k) מתבדרת.
הוכחנו אפוא שהטור מתכנס בתנאי, ולכן לפי משפט 5.27 ניתן לשנות את סדר האיברים שלו כך שהטור המתקבל יתבדר.
<u>דרך נוספת</u> (ופשוטה יותר) לבדוק שהטור לא מתכנס בהחלט היא שימוש ישיר ומיידי במשפט 5.24א: טור האיברים החיוביים של הטור הנתון בסעיף זה הוא $\sum a_n$ והוא מתבדר לפי הנתון.

שאלה 5

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתבדר, $a_n>0$ לכל n.
נסמן ב- (S_n) את סדרת הסכומים החלקיים של הטור, כלומר $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ מתבדר.

נסמן $b_n=a_n/S_n$. ניקח $m>n$, אז:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}b_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{a_k}{S_k}\right|=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{a_k}{S_k}\geq\sum_{k=n+1}^{m}\frac{a_k}{S_m}=\frac{1}{S_m}\sum_{k=n+1}^{m}a_k=\frac{1}{S_m}\left(S_m-S_n\right)=1-\frac{S_n}{S_m}$$

(השתמשנו בכך ש- $a_n>0$ לכל n ולכן $S_k\leq S_m$ לכל $k\leq m$).

הטור $\sum a_n$ חיובי ומתבדר ולכן (S_n) לא חסומה (למה 5.13). מכך נובע שלכל n קיים $m>n$ כך ש- $S_m>2S_n$ ולכן $1-\frac{S_n}{S_m}>\frac{1}{2}$.

קיבלנו: קיים $\varepsilon = 1/2$ כך שלכל N קיימים $n = N+1 > N$ ו- $m > n$ הבנוי בהתאם לפסקה הקודמת שעבורם $\left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| > \varepsilon$. אי לכך, הטור $\sum b_n = \sum \frac{a_n}{S_n}$ מתבדר על-פי מבחן קושי 5.4.

שאלת רשות

תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של כל השורשים החיוביים של המשוואה $\tan x = x$.
בדקו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ מתכנס.

נסמן $I_n = \left(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n + \frac{\pi}{2}\right)$, $n = 0,1,\ldots$. לכל $\pi n \neq x \in I_n$ מתקיים $(\tan x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$
ולכן הפונקציה $f(x) = \tan x - x$ עולה (ממש) ב- I_n (אינפי 1).
כמו כן, $\lim_{x\to(\pi n - \frac{\pi}{2})^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to(\pi n + \frac{\pi}{2})^-} f(x) = \infty$ ולכן ממשפט ערך הביניים של קושי נסיק כי ב- I_n קיימת נקודה בה f מתאפסת (הבהירו את זה לעצמכם!).
משתי העובדות האלה נובע כי בכל קטע I_n קיימת נקודה יחידה x_n שעבורה $\tan x_n = x_n$.
כמובן, $x_0 = 0$, והסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת השורשים של המשוואה $\tan x = x$, עליה מדובר בשאלה.
$x_n \in I_n$ ולכן $x_n > \pi n - \frac{\pi}{2}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אי לכך, $\frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{\pi^2 (n - \frac{1}{2})^2}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (n - \frac{1}{2})^2}$ מתכנס (מבחן ההשוואה 5.15, הטור להשוואה $\sum \frac{1}{n^2}$), ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה 5.14.