# לוגיקה למדעי המחשב – שיעור 5:
# המשך שפת היחסים –
# צורה פרנקסית נורמלית, תחשיב והוכחות, גדירות

דוד קסלר 054-4511925

# חזרה קצרה על השיעור הקודם

# הא"ב של שפת היחסים

- סימנים משותפים לכל השפות:
  - משתנים $x,y,z\ldots$ או $v_0,v_1,v_2\ldots$
  - הקשרים שאנו מכירים: $\{\vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow ,\neg\}$
  - סוגרים: (,)
  - כמתים: $\exists,\forall$
  - יחס שוויון
- סימני חתימה ספציפיים לכל שפה:
  - קבועים: $c_0,c_1,c_2\ldots$
  - פונקציות: $f(,), g(), h(,,),\ldots$
  - יחסים: $R_1(,), R_2(),\ldots$

# שפה ומבנה/מודל בשפה היחסים

- השפה מגדירה
  - כמה קבועים יש
  - כמה פונקציות יש ובאיזה ערכיות
  - כמה יחסים יש ובאיזה ערכיות
- מבנה בשפה מגדיר
  - תחום המבנה
  - פירוש לקבועים
  - פירוש לפונקציות
  - פירוש ליחסים

# מושגים שלמדנו

- **שם עצם** בשפת היחסים: קבועים, משתנים, ומעבר אינדוקציה עם פונקציות
- **השמה**: התאמת עצמים למשתנים
- **נוסחה**: נוסחה אטומית $R(x,y)$, ומעבר אינדוקציה עם קשרים וכמתים
- **משתנים חופשיים וקשורים**: מושפעים מהשמה או קשורים לכמת
- **ערך האמת של נוסחה**: איך קובעים בהתאם למודל ולהשמה
- **נוסחאות שקולות לוגית**: $\varphi$ ו- $\psi$ שקולות לוגית, $\varphi \equiv \psi$, אם"ם $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$
- **גרירה לוגית**: נוסחה $\psi$ נגררת לוגית מנוסחה $\varphi$ אם בכל מודל $M$ ובכל השמה $S$ בה מתקיים $M \vDash_S \varphi$ מתקיים $M \vDash_S \psi$

# טאוטולוגיה

- אם נוסחה $\varphi$ נכונה בכל מודל ובכל השמה היא נקראת טאוטולוגיה או אמת לוגית, ונסמן $\vDash \varphi$
- תרגיל (חדש): הוכיחו ש $\vDash \exists x(P(x) \to \forall x P(x))$
- פתרון: יהי $M$ מודל כלשהו ו$S$ השמה כלשהי. נתבונן ביחס $P(x)$. אם עבור כל איבר בתחום הצבה שלו ב$P(x)$ נותנת ערך $T$, אזי $M \vDash_S \forall x P(x)$ ומכאן לכל x מתקיים $M \vDash_S (P(x) \to \forall x P(x))$ ולכן $M \vDash_S \exists x(P(x) \to \forall x P(x))$
אם לא עבור כל איבר בתחום הצבה שלו ב$P(x)$ נותנת ערך $T$, אזי קיים איבר $t$ בתחום עבורו $P(x)$ נותנת ערך $F$. אולם, עבור איבר זה מתקיים $(P(t) \to \forall x P(x))$ ולכן $M \vDash_S \exists x(P(x) \to \forall x P(x))$
מכאן עבור כל מודל והשמה הנוסחה מקבלת ערך $T$

# הצבה

- יהיו $\varphi$ נוסחה ו-t ש"ע
  - הצבה: $\varphi[t/x]$ היא הצבה המחליפה כל מופע <u>חופשי</u> של $x$ ב-$t$
  - הצבה $\varphi[t/x]$ היא הצבה כשרה אם אין לה "תופעות לוואי" – אף משתנה לא הופך לקשור בעקבות ההצבה.
- דוגמה:
  - תהי $\varphi = \forall x(R(x,y) \wedge \exists y R(y,x))$ מהי $\varphi[t/x]$? $\varphi[t/y]$?
    - $x$ קשור ואין לו מופעים חופשיים. $\varphi[t/x] = \varphi$
    - המופע השמאלי של $y$ חופשי.
      $\varphi[t/y] = \forall x(R(x,t) \wedge \exists y R(y,x))$

# המשך יחידה 5 –
# צורה פרנקסית נורמלית

# רענון משתנים

- משפט: אם $\varphi[t/x]$ הצבה כשרה, אזי $\vDash \forall x\varphi \to \varphi[t/x]$
  - אם משהו נכון לכל עצם הוא נכון בפרט אם נציב עצם מסוים
  - דורשים הצבה כשרה כי צריך להיזהר מקשירת משתנים
- משפט: אם $y$ משתנה חדש שלא מופיע ב-$\varphi$ (לא חופשי ולא קשור) אזי $\vDash \forall x\varphi \leftrightarrow \forall y\varphi[y/x]$
  - ההחלפה של $x$ ב-$y$ נקראת "רענון משתנים"
  - שימושי לחיבור פסוקים, וישמש אותנו בהמשך להוצאת כמתים

# הוצאת כמתים שמאלה לתחילת הנוסחה

- פסוק בצורה פרנקסית – כל הכמתים בתחילת הנוסחה
- לשם כך נשתמש בנוסחאות הבאות שהן אמיתיות לוגית:
  - $(\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi),\ (\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi)$
  - $(\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi),\ (\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi)$
- ובנוסף, אם $x$ לא חופשי ב-$\psi$:
  - $\big((\forall x\varphi) \vee \psi\big) \leftrightarrow \forall x(\varphi \vee \psi),\ ((\forall x\varphi) \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$
  - $\big((\exists x\varphi) \vee \psi\big) \leftrightarrow \exists x(\varphi \vee \psi),\ ((\exists x\varphi) \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$
  - $\forall x(\psi \to \varphi) \leftrightarrow (\psi \to (\forall x\varphi))$

# מעבר לצורה פרנקסית

- אלגוריתם להפיכת כל פסוק לפסוק בצורה פרנקסית:
  - אם נוסחה אטומית – אין כמתים
  - עבור $\neg\varphi$ כאשר ב-$\varphi$ כל הכמתים בהתחלה, "נפעפע" את השלילה פנימה על פי הנוסחאות $(\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi)$, $(\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi)$
  - עבור $\varphi@\psi$ כאשר ב$\varphi$ וב$\psi$ כל הכמתים בהתחלה
    - אם @ הוא $\rightarrow$ נחליף אותו באמצעות הנוסחה $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$ ונכניס את השלילה
    - אם @ הוא $\leftrightarrow$ נחליף אותו באמצעות הנוסחה $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ ונכניס את השלילה
    - לאחר שמכיל רק $\wedge$ , $\vee$, נרענן את המשתנים כדי שלא יהיה משתנה משותף בשתי הנוסחאות ואז נעביר את הכמתים שמאלה על פי הנוסחאות שהראנו

# מעבר לצורה פרנקסית - דוגמה

- העבירו את הפסוק $\forall x\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \rightarrow (\forall x R(x,y) \wedge \forall x R(y,x))$ לצורה פרנקסית:
  - נחליף את ה$\rightarrow$:

$$\neg\forall x\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \vee (\forall x R(x,y) \wedge \forall x R(y,x))$$

  - נכניס את השלילה:

$$\exists x \neg\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \vee (\forall x R(x,y) \wedge \forall x R(y,x))$$

  - רענון משתנים בצד ימין:

$$\exists x \neg\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \vee (\forall z R(z,y) \wedge \forall x R(y,x))$$

  - כעת ניתן להוציא כמתים בצד ימין (2 שלבים ביחד):

$$\exists x \neg\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \vee \forall x \forall z (R(z,y) \wedge R(y,x))$$

  - המשתנים $x,z$ לא חופשיים מצד שמאל ולכן ניתן להוציא את הכמתים:

$$\forall x \forall z \big[\exists x \neg\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \vee \big(R(z,y) \wedge R(y,x)\big)\big]$$

  - המשתנה $x$ חופשי מימין לחץ ולכן נרענן אותו:

$$\forall x \forall z \big[\exists t \neg\big(R(t,y) \wedge R(y,t)\big) \vee \big(R(z,y) \wedge R(y,x)\big)\big]$$

  - כעת ניתן להוציא אותו:

$$\forall x \forall z \exists t \big[\neg\big(R(t,y) \wedge R(y,t)\big) \vee \big(R(z,y) \wedge R(y,x)\big)\big]$$

# צורה פרנקסית נורמלית

- הגדרה: צורה פרנקסית נורמלית היא נוסחה שבה כל הכמתים בראש הנוסחה, והקטע שלאחר מכן הוא דיסיונקטיבי נורמל, כלומר דיסיונקציה של קוניוקציה של נוסחאות בסיסיות
- נוסחה בסיסית – נוסחה אטומית או שלילתה
- דוגמה:
  - $\forall x \exists y \forall z (R_1\,(x,y) \wedge \neg R_2(F_1\,(y,z)) \vee (\neg R_1(F_2\,(x),z) \wedge \neg R_2(x) \wedge R_3\,(z))$
- על מנת לעבור לצורה פרנקסית נורמלית:
  - נעביר את הפסוק לצורה פרנקסית
  - את הפסוק שנשאר נעביר לצורה נורמלית כמו במשפט הצורה הנורמלית של לוגיקה פסוקית

# נירמול דיסיונקטיבי של פסוק - תזכורת

- ממירים כל $\rightarrow$ לפי זהויות (3) ו-(5):

$$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$$
$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi)$$

וממירים כל $\leftrightarrow$ לפי זהות (12):

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$$

- מזיזים את סימני השלילה פנימה עד לפסוקים אלמנטריים (מחיקת כפילויות, הכנסה לסוגריים על פי דה-מורגן, זהויות 6-7)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

- מכניסים כל קוניונקציה שלפני דיסיונקציה עפ"י זהות 9:

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))$$

# נירמול דיסיונקטיבי של פסוק - תזכורת

- המירו את הפסוק $(P \to Q) \land (Q \to P)$ לצורה דיסיונקטיבית נורמלית
- נעבוד לפי השלבים:

$$(P \to Q) \land (Q \to P)$$
$$(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P)$$
$$((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Q) \land P)$$
$$(\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q) \lor (\neg P \land P) \lor (Q \land P)$$
$$(\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land P)$$

# מעבר לצורה פרנקסית נורמלית - דוגמה

- העבירו את הפסוק $((\forall x P(x) \to \exists y Q(y)) \wedge \exists x T(x))$ לצורה פרנקסית נורמלית:
  - נחליף את ה→:
    $$((\neg\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge \exists x T(x))$$
  - נכניס את השלילה:
    $$((\exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge \exists x T(x))$$
  - רענון משתנים:
    $$((\exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge \exists z T(z))$$
  - הוצאת כמתים:
    $$\exists x \exists y \exists z ((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge T(z))$$
  - מעבר לצורה נורמלית (הכנסת קוניונקציה):
    $$\exists x \exists y \exists z ((\neg P(x) \wedge T(z)) \vee (Q(y) \wedge T(z)))$$

# יחידה 6 –
# תחשיב והוכחות בשפת היחסים

# הסתפקות בחלק מהקשרים והכמתים

- כמו בלוגיקה הפסוקית בה ניתן להסתפק ב$\{\neg, \rightarrow\}$, בלוגיקת היחסים ניתן להסתפק בקשרים $\{\neg, \rightarrow\}$, ובכמת $\forall$ (אפשר היה גם בכמת $\exists$)
- ניתן להוכיח באינדוקציה על העומק המבני של הנוסחה. עבור הקשרים מראים באותו אופן שבו זה הוכח בצורה הפסוקית
- עבור הכמת משתמשים בנוסחאות שראינו בהוצאת כמתים:
  - במקרה ש$\varphi = \exists x \psi$ מהנחת האינדוקציה קיימת $\psi' \equiv \psi$ וכן:

$$\exists x \psi \equiv \exists x \psi' \equiv \neg \forall x \neg \psi'$$

# תחשיב בשפת היחסים

- כמו בשפת הפסוקים ניתן להוכיח פסוקים בשפת היחסים באמצעות סדרת יצירה הנבנית על פי חוקים אינדוקטיביים מוגדרים היטב
- נשתמש בתחשיב המצומצם עם $\{\neg, \rightarrow, \forall\}$
- נגדיר את קבוצת ההוכחות באמצעות אינדוקציה מבנית, שתכלול את האקסיומות של תחשיב הפסוקים ואקסיומות נוספות, ואת כלל המעבר $MP$ של תחשיב הפסוקים וכללי מעבר נוספים
- אם קיימת לפסוק או נוסחה סדרת יצירה נאמר שהוא משפט ונסמן $\vdash \varphi$, כלומר שהוא יכיח

# תחשיב בשפת היחסים

- בסיס ההוכחה – האקסיומות
  - אקסיומות תחשיב הפסוקים
  - Ax1: $\left(\alpha \to (\beta \to \alpha)\right)$
  - Ax2: $\left(\left(\alpha \to (\beta \to \gamma)\right) \to \left((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\right)\right)$
  - Ax3: $\left((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)\right)$
  - אקסיומת ההצבה
  - אקסיומת הזזת כמת
  - אקסיומות השוויון
- כללי היסק
  - MP: $\frac{\varphi,(\varphi\to\psi)}{\psi}$
  - כלל ההכללה GR: $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$

# אקסיומת ההצבה

- האקסיומה: $\forall x\varphi \rightarrow \varphi[t/x]$, ובתנאי שזו הצבה כשרה, כלומר $t$ הוא שם עצם שאף משתנה בו לא הופך לקשור ע"י כמת של הנוסחה $\varphi$
- לדוגמה: עבור הפסוק $\exists y(x < y)$ $\varphi =$ ו-$t = a$ נקבל את האקסיומה
$$(\forall x\exists y(x < y) \rightarrow \exists y(a < y))$$
- דוגמה נוספת: עבור הפסוק $\varphi = R(x,y)$ אם נציב $t = a$ נקבל $\forall xR(x,y) \rightarrow R(a,y)$ אפשר גם להציב $t = x$ ולקבל
$$\forall xR(x,y) \rightarrow R(x,y)$$
- דוגמה הממחישה למה דורשים שההצבה תהיה כשרה:
אם נציב עבור אותו פסוק $t = y$, נקבל משפט שהוא אינו נכון:
$$(\forall x\exists y(x < y) \rightarrow \exists y(y < y))$$

# אקסיומת הזזת הכמת

- האקסיומה: $(\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta))$ כאשר $\alpha$ ו-$\beta$ נוסחאות, ובתנאי שמשתנה $x$ הוא לא משתנה חופשי בנוסחה $\alpha$
- לדוגמה: $(\forall x\big(R(y) \to Q(x)\big) \to \big(R(y) \to \forall xQ(x)\big))$
- דוגמה הממחישה למה דורשים ש$x$ הוא לא משתנה חופשי בנוסחה $\alpha$:
$\forall x\big((x = 0) \to (x = 0)\big) \to \big((x = 0) \to \forall x(x = 0)\big)$
הצד השמאלי נכון, אבל הצד הימני לא – הצבה של $x = 0$ מוכיחה שכל $x = 0$

# אקסיומות השוויון (בשפה עם שוויון)

- אקסיומות השקילות:
  - $\forall x(x = x)$
  - $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$
  - $\forall x \forall y \forall z\big((x = y \land y = z) \to (x = z)\big)$
- אקסיומות ההחלפה:
  - לכל פונקציה $F$ $n$ מקומית:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\Big(\big((x_1 = y_1) \land \cdots \land (x_n = y_n)\big) \to (F(x_1, \ldots, x_n) = F(y_1, \ldots, y_n))\Big)$$

  - לכל יחס $R$ $n$ מקומי:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\Big(\big((x_1 = y_1) \land \cdots \land (x_n = y_n)\big) \to (R(x_1, \ldots, x_n) = R(y_1, \ldots, y_n))\Big)$$

# הוכחות בתחשיב היחסים

- כל סדרה שאיבריה הם אקסיומות או התקבלו באמצעות כללי היסק היא סדרת הוכחה בתחשיב
- אם פסוק או נוסחה $\varphi$ מתקבלים מסדרת הוכחה (האיבר האחרון בסדרת ההוכחה) אז $\varphi$ נקרא משפט ונסמן $\vdash \varphi$, $\varphi$ יכיח
- אם $K$ קבוצת פסוקים ניתן גם להוכיח מתוך קבוצת הנחות, ואז נסמן $K \vdash \varphi$

# הוכחות בתחשיב היחסים – משפטים והגדרות

- משפט הנאותות לתחשיב היחסים: אם $K \vdash \varphi$ אזי בכל מודל ובכל השמה שבה פסוקי $K$ נכונים, נכונה גם הנוסחה $\varphi$
- ניתן להשתמש בטאוטולוגיות של תחשיב הפסוקים
- קבוצה לא עקבית: קבוצה המוכיחה פסוק ושלילתו
- משפט הדדוקציה: $K \vdash (\psi \to \varphi) \Leftrightarrow K \cup \{\psi\} \vdash \varphi$
- הוכחה בדרך השלילה: אם רוצים להוכיח $K \vdash \varphi$ מספיק להראות ש-$K \cup \{\neg\varphi\}$ מוביל לסתירה, כלומר $K \cup \{\neg\varphi\} \vdash \alpha$ וגם $K \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\alpha$ עבור נוסחה $\alpha$ כלשהי
- רענון משתנה קשור: אם $K \vdash \forall x\varphi$ והמשתנה $y$ לא ב-$\varphi$ אזי $K \vdash \forall y\varphi\,[y/x]$

# הוכחות בתחשיב היחסים – תרגיל 1

- הוכיחו בצורה פורמלית $\vdash (\forall wF\,[w/v] \to \forall vF)$ כאשר $w$ משתנה שלא מופיע בנוסחה $F$

| | |
|---|---|
| (אקס' ההצבה) | 1. $(\forall wF\,[w/v] \to F[w/v][v/w])$ |
| (מיידי) | 2. $(\forall wF\,[w/v] \to F)$ |
| (GR) | 3. $\forall v(\forall wF\,[w/v] \to F)$ |
| (אקס' הזזת הכמת) | 4. $(\forall v(\forall wF\,[w/v] \to F) \to (\forall wF\,[w/v] \to \forall vF))$ |
| (MP3,4) | 5. $(\forall wF\,[w/v] \to \forall vF)$ |

# הוכחות בתחשיב היחסים – תרגיל 2

- הוכיחו בצורה פורמלית $\vdash (\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\neg\beta \to \forall x\neg\alpha))$

1. נשתמש במשפט הדדוקציה. נוכיח: $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash (\forall x\neg\beta \to \forall x\neg\alpha)$
2. נשתמש שוב במשפט הדדוקציה. נוכיח: $\{\forall x(\alpha \to \beta), \forall x\neg\beta\} \vdash \forall x\neg\alpha$

| | |
|---|---|
| (הנחה) | 1. $\forall x(\alpha \to \beta)$ |
| (אקס' הצבה) | 2. $(\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta))$ |
| (MP1,2) | 3. $(\alpha \to \beta)$ |
| (טאוטולוגיה) | 4. $\big((\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)\big)$ |
| (MP3,4) | 5. $(\neg\beta \to \neg\alpha)$ |
| (נתון) | 6. $\forall x\neg\beta$ |
| (אקס' הצבה) | 7. $(\forall x\neg\beta \to \neg\beta)$ |
| (MP6,7) | 8. $\neg\beta$ |
| (MP5,8) | 9. $\neg\alpha$ |
| (GR9) | 10. $\forall x\neg\alpha$ |

# הוכחות בתחשיב היחסים – תרגיל 3

- הוכיחו בצורה פורמלית $\vdash (\forall x(\alpha \to \beta) \to (\neg\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta))$

1. נשתמש במשפט הדדוקציה: $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash (\neg\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta)$
2. שוב משפט הדדוקציה: $\{\forall x(\alpha \to \beta), \neg\forall x\neg\alpha\} \vdash \neg\forall x\neg\beta$
3. נשתמש בהוכחה בדרך השלילה: יש להוכיח $\{\forall x(\alpha \to \beta), \neg\forall x\neg\alpha, \forall x\neg\beta\} \vdash \gamma, \neg\gamma$
   נבחר $\gamma = \forall x\neg\alpha$
4. $\neg\gamma = \neg\forall x\neg\alpha$ כבר מופיע בהנחות
5. בתרגיל הקודם הוכחנו $\{\forall x(\alpha \to \beta), \forall x\neg\beta\} \vdash \forall x\neg\alpha = \gamma$

# הוכחות בתחשיב היחסים – תרגיל 4

- הוכיחו בצורה פורמלית $\vdash (\neg(\forall x\alpha \to \beta) \to \forall x\neg(\alpha \to \beta))$

1. נשתמש במשפט הדדוקציה: $\neg(\forall x\alpha \to \beta) \vdash \forall x\neg(\alpha \to \beta)$
2. נשתמש בהוכחה בדרך השלילה: יש להוכיח $\{\neg(\forall x\alpha \to \beta), \neg\forall x\neg(\alpha \to \beta)\} \vdash \gamma, \neg\gamma$
   נבחר $\gamma = (\forall x\alpha \to \beta)$
3. $\neg\gamma = \neg(\forall x\alpha \to \beta)$ כבר מופיע בהנחות
4. על מנת להוכיח את $\gamma$ נשתמש שוב בדדוקציה:
   $\{\neg(\forall x\alpha \to \beta), \neg\forall x\neg(\alpha \to \beta), \forall x\alpha\} \vdash \beta$
5. נשתמש שוב בהוכחה בדרך השלילה:
   $\{\neg(\forall x\alpha \to \beta), \neg\forall x\neg(\alpha \to \beta), \forall x\alpha, \neg\beta\} \vdash \delta, \neg\delta$
6. נבחר $\delta = \forall x\neg(\alpha \to \beta)$. $\neg\delta$ נתון. נוכיח את $\delta$

# הוכחות בתחשיב היחסים – המשך תרגיל 4

- נשאר להוכיח $\{\neg(\forall x\alpha \rightarrow \beta), \neg\forall x\neg(\alpha \rightarrow \beta), \forall x\alpha, \neg\beta\} \vdash \forall x\neg(\alpha \rightarrow \beta)$

| | |
|---|---|
| (הנחה) | 1. $\forall x\alpha$ |
| (אקס' הצבה) | 2. $(\forall x\alpha \rightarrow \alpha)$ |
| (MP1,2) | 3. $\alpha$ |
| (טאוטולוגיה) | 4. $(\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)))$ |
| (MP3,4) | 5. $(\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$ |
| (הנחה) | 6. $\neg\beta$ |
| (MP5,6) | 7. $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ |
| (GR7) | 8. $\forall x\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ |

# משפט הקומפקטיות

- תהי $K$ קבוצה אינסופית של פסוקים. אם לכל קבוצה חלקית סופית שלה יש מודל, אזי יש מודל שכל פסוקי $K$ נכונים בו
- תרגיל: הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצת פסוקים $\Sigma$ קיימת תת קבוצה סופית $\Sigma \supseteq \Gamma$ כך ש-$\Sigma$ ספיקה אם"ם $\Gamma$ ספיקה
  - כיוון 1: נניח $\Sigma$ ספיקה. מכאן, יש מודל שכל פסוקי $\Sigma$ נכונים בו, ובפרט, מודל זה מספק כל תת קבוצה סופית $\Gamma$ החלקית ל-$\Sigma$
  - כיוון 2: נניח $\Sigma$ לא ספיקה. נניח בשלילה שלכל קבוצה חלקית סופית שלה יש מודל. מכאן, עפ"י משפט הקומפקטיות היא ספיקה וזו סתירה. מכאן, קיימת קבוצה חלקית סופית שלה שאין לה מודל, כלומר לא ספיקה. נבחר קבוצה זו.

# הוכחות בשפת היחסים המלאה

- עד עכשיו למדנו את תחשיב הילברט מעל השפה המצומצמת הכוללת את $(\forall, \rightarrow, \neg)$
- כמו בשפת הפסוקים, גם כאן אפשר להגדיר תחשיב עבור השפה המלאה הכוללת את כל הכמתים $(\forall, \exists)$ וכל הקשרים $(\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee)$
- עבור הקשרים הנוספים נוסיף את האקסיומות הנוספות של השפה הפסוקית, למשל $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)$
- עבור הכמת $\exists$ נוסיף את כלל היצירה והאקסיומה:
  - נוסף לכלל ההכללה בכמת לכל : $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$ נוסיף כלל הכללה כמת קיים: $\frac{\varphi}{\exists x\varphi}$
  - אקסיומת ההצבה בכמת $\exists$: האקסיומה: $\exists x\varphi \rightarrow \varphi[t/x]$, כאשר $t$ קבוע חדש

# הוכחות בשפת היחסים המלאה – תרגיל 1

- הוכיחו: $\psi(x) \vdash \exists x\psi(x)$
  - פתרון: מתקבל ישירות מכלל ההכללה הישי:

| | |
|---|---|
| 1. $\psi(x)$ | (הנחה) |
| 2. $\exists x\psi(x)$ | (כלל הכללה ישי) |

- הוכיחו: $\exists x\psi(x) \vdash \psi(t)$
  - פתרון: מתקבל ישירות מאקסיומת ההצבה הישית:

| | |
|---|---|
| 1. $\exists x\psi(x) \to \psi(t)$ | (אקס' ההצבה) |
| 2. $\exists x\psi(x)$ | (הנחה) |
| 3. $\psi(t)$ | (MP1,2) |

# הוכחות בשפת היחסים המלאה – תרגיל 2

- הוכיחו: $\{\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$

| | |
|---|---|
| (הנחה) | 1. $\exists x P(x)$ |
| (אקס' הצבה ישי) | 2. $\exists x P(x) \to P(t)$ |
| (MP1,2) | 3. $P(t)$ |
| (הנחה) | 4. $\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$ |
| (אקס' הצבה לכל) | 5. $\forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \to \forall y (P(t) \to Q(y))$ |
| (MP4,5) | 6. $\forall y (P(t) \to Q(y))$ |
| (אקס' הצבה לכל) | 7. $\forall y (P(t) \to Q(y)) \to (P(t) \to Q(c))$ |
| (MP6,7) | 8. $(P(t) \to Q(c))$ |
| (MP2,5) | 9. $Q(c)$ |
| (GR) | 10. $\forall c Q(c) \equiv \forall y Q(y)$ |

# גדירות

# גדירות קב' מודלים $K$ בשפה $L$

- קבוצת מודלים $K$ גדירה בשפה $L$ אם קיימת קבוצת נוסחאות $\Sigma$ כך שמתקיים $K = \{M | M \vDash \Sigma\}$
- ניתן להגדיר קבוצת נוסחאות כך שכל הנוסחאות נכונות בכל מודל בקבוצה, ועבור כל מודל שאינו בקבוצה קיימת השמה שבה לפחות אחת מהנוסחאות לא נכונה
- דוגמה: עבור השפה L=<> (שפה ללא קבועים, פונ' ויחסים פרט לשיוויון) נגדיר את קב' כל המודלים שבתחום שלהם יש רק איבר בודד: $K = \{M | M \vDash \forall x \forall y\ x = y\}$ כלומר, $K$ מוגדרת ע"י הנוסחה $\forall x \forall y\ x = y$

# גדירות קב' מודלים - תרגילים

תהי L שפה עם שיוויון בלבד.

- הגדירו את קבוצת המודלים עם שני אברים לפחות בתחום:
  - $K = \{M | M \vDash \varphi\}$ כאשר $\varphi = \exists x \exists y \neg (x = y)$
- הגדירו את קבוצת המודלים עם שני אברים לכל היותר:
  - $K = \{M | M \vDash \psi\}$ כאשר $\psi = \forall x \forall y \forall z (x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)$
- הגדירו את קבוצת המודלים עם שני אברים בדיוק בתחום:
  - $K = \{M | M \vDash \{\varphi, \psi\}\}$

# גדירות קב' מודלים - תרגילים

תהי L שפה עם שיוויון בלבד.

- הגדירו את קבוצת המודלים $K_{\geq n}$ עם $n$ איברים לפחות בתחום:
  - $K_{\geq n} = \{M | M \vDash \varphi_n\}$ כאשר

$$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \cdots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)$$

- הגדירו את קבוצת המודלים $K_{\leq n}$ עם $n$ איברים לכל היותר:
  - $K_{\leq n} = \{M | M \vDash \psi\}$ כאשר

$$\psi_n = \forall x_1 \ldots \forall x_{n+1} (x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \vee \cdots \vee (x_n = x_{n+1})$$

- הגדירו את קבוצת המודלים $K_n$ עם $n$ איברים בדיוק:
  - $K_n = \{M | M \vDash \{\varphi_n, \psi_n\}\}$

# גדירות קב' מודלים - תרגילים

תהי L שפה עם שיוויון בלבד.

- הגדירו את קבוצת המודלים $K_\infty$ עם אינסוף איברים בתחום:
  - $K_\infty = \{M | M \models \{\varphi_i | i \in N\}\}$
- הגדירו את קבוצת המודלים $K_{\neg\infty}$ עם מספר סופי של איברים בתחום:
  - זאת קבוצה לא גדירה. הוכחה: נניח בשלילה שהקבוצה גדירה ע"י קבוצת הפסוקים $\Phi$. נרחיב את $\Phi$ ל- $\Phi' = \Phi \cup \{\varphi_i | i \in N\}$ . כל תת קב' סופית של $\Phi'$ תכלל פסוקים מ- $\Phi$ ומ- $\{\varphi_i | i \in N\}$ כאשר ה $i$ המקסימלי קטן מ $M$ טבעי כלשהו. מודל סופי בעל $M$ אברים לפחות יספק אותה, ולכן לכל קבוצה סופית יש מודל, ולפי משפט הקומפקטיות ל $\Phi'$ יש מודל. אולם, $\{\varphi_i | i \in N\}$ מגדיר רק מודלים אינסופיים, ו $\Phi$ רק מודלים סופיים וזו סתירה.

# גדירות קבוצת אובייקטים או יחסים במודל

- נתונה שפה $L$ ונתון מודל $M$ של השפה $L$ (פירוש לפונקציות, לקבועים וליחסים). המטרה – להגדיר יחס או קבוצת אובייקטים מהתחום בעזרת נוסחאות.
- דוגמה: תהי $L =< c_0,c_1,s,f,g >$ כאשר $c_0,c_1$ קבועים, $s$ פונקציה חד מקומית, ו- $f,g$ פונקציות דו מקומיות. $M =< N,0,1,s, + , * >$ כאשר s היא פונקציית העוקב. הגדר את קבוצת הזוגיים:
  - $\varphi(x) = \exists y f(y,y) = x$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 1

- תהי $L =< c,s >$ כאשר $c$ קבוע ו-$s$ פונקציה חד מקומית. נתון המודל $M =< N,0,s >$ כאשר s היא פונקציית העוקב.
  - הגדירו את המספר 0:
    - $\varphi(x) = x = 0$
  - הגדירו את המספר 1:
    - $\varphi(x) = x = s(0)$
  - הגדירו את המספר 372:
    - $\varphi(x) = x = sss \dots sss(0)$
  - הגדירו את הקבוצה {1,3}:
    - $\varphi(x) = (x = s\,(0) \vee x = sss(0))$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 2

- תהי $L =< f >$ כאשר $f$ פונקציה דו מקומית. נתון המודל $M =< N, +>$ הגדירו את המספר 0:
  - $\varphi(x) = x + x = x$
- תהי $L =< R >$ כאשר $R$ יחס דו מקומי. נתון המודל $M =< N, <>$ הגדירו את המספר 0:
  - $\varphi(x) = \neg\exists y\ y < x$
- באותה שפה, עבור $M =< Z, <>$ , האם 0 גדיר?
  - לא

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 3

- תהי $L =< c_0,c_1,s,f,g >$ כאשר $c_0,c_1$ קבועים, $s$ פונקציה חד מקומית, ו- $f,g$ פונקציות דו מקומיות. $M =< N,0,1,s, + , * >$ כאשר s היא פונקציית העוקב.
  - הגדירו את קבוצת הראשוניים:
    - $\varphi(x) = \forall y \forall z\big(\big(x = g(y,z)\big) \rightarrow \big((y = x) \vee (z = x)\big)\big) \wedge \neg(x = 0) \wedge \neg(x = 1)$
  - הגדירו את היחס <:
    - $\varphi(x,y) = \exists z(x + z = y \wedge \neg(z = 0))$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 4

- תהי $L =< c,R,s,f,g >$ כאשר $c$ קבוע, $R$ יחס דו מקומי, $s$ פונקציה חד מקומית, ו- $f,g$ פונקציות דו מקומיות.
  $M =< N,0, < ,s, + , \cdot >$ כאשר s היא פונקציית העוקב.
  - הגדירו את היחס $x \leq y$:
    - $\varphi(x,y) = ((x < y) \vee (x = y))$
  - הגדירו את היחס $z = x - y$:
    - $\varphi(x,y,z) = \left(\left((x < y) \wedge (z = 0)\right) \vee (z + y = x)\right)$
  - הגדירו $x$ הוא מספר דו סיפרתי:
    - $\varphi(x) = (9 < x) \wedge (x < 100)$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 4 המשך

- תהי $L =< c,R,s,f,g >$ כאשר $c$ קבוע, $R$ יחס דו מקומי, $s$ פונקציה חד מקומית, ו- $f,g$ פונקציות דו מקומיות.
  $M =< N,0,<,s,+,\cdot >$ כאשר s היא פונקציית העוקב.
  - הגדירו את היחס $z = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$:
    - $\varphi(x,y,z) = ((y \cdot z \leq x) \wedge (x < y \cdot s(z)))$
  - הגדירו את היחס $z = \mathrm{rm}(\mathrm{x},\mathrm{y})$:
    - $\varphi(x,y,z) = ((z < y) \wedge \exists t(y \cdot t + z = x))$
  - הגדירו את היחס z היא הספרה האחרונה במספר x:
    - $\varphi(z,x) = z = rm(x,10)$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 5

- נתונים המבנים $M=<+,0,1>$ ו-$N<+>$ בתחום $N$.
  - הגדירו בM ובN את 0:
    - $\varphi_{0M}(x) = x = 0$
    - $\varphi_{0N}(x) = \forall y(y + x = y)$
  - הגדירו בM ובN את 1:
    - $\varphi_{1M}(x) = x = 1$
    - $\varphi_{1N}(x) = \forall y \forall z((y + z = x) \to ((\varphi_{0N}(y) = 0 \vee \varphi_{0N}(z) = 0) \wedge \neg(y = z)))$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 5 המשך

- נתונים המבנים $M = < +,0,1 >$ ו-$< + >$ $N$ בתחום $N$.
  - הגדירו בM ובN את $n$ עבור $n$ מספר טבעי:
    - $\varphi_{nM}(x) = x = 1 + 1 + \cdots + 1$
    - $\varphi_{nN}(x) = \forall y(\varphi_{1N}(y) \rightarrow x = y + y + \cdots + y)$
  - הגדירו בM ובN את היחס $<$:
    - $\varphi_{<M}(x,y) = \exists z(\neg(z = 0) \wedge (x + z = y))$
    - $\varphi_{<N}(x,y) = \exists z(\neg\varphi_{0N}(z) \wedge (x + z = y))$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 6

- תהי L השפה בתחשיב היחסים בעלת הקבועים והיחסים הבאים במבנה $R$:
  $L =< 0,1, + , \cdot , =>$
  - הגדירו את הקטע $[0,\infty)$ ב-$R$
    - $\varphi(x) = \exists y(y \cdot y = x)$
  - הגדירו את היחס $\leq$ ב-$R$
    - $\psi(x,y) = \exists z(\varphi(z) \land x + z = y)$
  - הגדירו את היחס $x = \frac{y}{z}$
    - $\theta(x,y,z) = \neg(z = 0) \land (x \cdot z = y)$

# גדירות קבוצת אובייקטים – תרגיל 7

- תהי L השפה בתחשיב היחסים בעלת הקבועים והיחסים הבאים בתחום $R$:
  $L =< +, \cdot, =>$
  - הגדירו את המספרים הבאים בשפה: -1,3,$\frac{1}{2}$
    - נגדיר את 1: $\varphi_1(x) = \forall y(y \cdot x = y)$
    - נגדיר את 3: $\varphi_3(x) = \forall y(\varphi_1(y) \to x = y + y + y)$
    - נגדיר את -1: $\varphi_{-1}(x) = \forall y(\varphi_1(y) \to ((x \cdot x = y \cdot y) \wedge \neg(x = y)))$
    - נגדיר את $\frac{1}{2}$: $\varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \forall y(\varphi_1(y) \to x + x = y)$

תודה רבה ☺