אינפי 2 (20475)

פתרון ממ"ן 16 – 2019ב

שאלה 1

סדרת הפונקציות (f_n) מוגדרת בקטע $[0,1]$ על-ידי: $f_1(x)=1$, $f_{n+1}(x)=\sqrt{xf_n(x)}$.

קבעו האם (f_n) מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

נוכיח באינדוקציה ש- $f_n(x)\ge x$, לכל $x\in[0,1]$ ולכל n.

$n=1$: $f_1(x)=1\ge x$ מתקיים.

נניח ש - $f_n(x)\ge x$ אז $f_{n+1}(x)=\sqrt{xf_n(x)}\ge\sqrt{x\cdot x}=x$ לכל $x\in[0,1]$, משל.

נוכיח באינדוקציה שהסדרה $(f_n(x))$ יורדת (לפי n) לכל $x\in[0,1]$.

$f_2(x)=\sqrt{x\cdot f_1(x)}=\sqrt{x}\le 1=f_1(x)$ מתקיים.

נניח ש - $f_n(x)\le f_{n-1}(x)$ אז $f_{n+1}(x)=\sqrt{xf_n(x)}\le\sqrt{xf_{n-1}(x)}=f_n(x)$, משל.

ממה שהוכחנו נובע, לפי משפט 3.16 באינפי 1, כי $(f_n(x))$ מתכנסת לכל $x\in[0,1]$.

נסמן $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=A$ ונעבור לגבול בביטוי הנסיגה:

$A=\lim\limits_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{xf_n(x)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{A}$ $\Leftarrow$ $A=x$ (עבור $A\ne0$ כי $x>0$ $f_n(x)\ge x$

ולכן $A\ge x$ לפי משפט 2.31 באינפי 1). אי לכך, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x$ לכל $x\in[0,1]$.

$f(x)=x$ רציפה ב- $[0,1]$, $f_n(x)$ רציפות ב- $[0,1]$ (כי $f_1(x)=1$ רציפה ואם $f_n(x)$ רציפה אז $f_{n+1}(x)=\sqrt{xf_n(x)}$ רציפה כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות, ולכן באינדוקציה $f_n(x)$ רציפות ב- $[0,1]$ לכל n), הוכחנו קודם כי $(f_n(x))$ סדרה מונוטונית יורדת לפי n לכל $x\in[0,1]$.

אי לכך, על פי משפט דיני 6.5 (ראו את הערה א בעמוד 183) **הסדרה מתכנסת במ"ש ב- [0,1]**.

שאלה 2

תהי $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n^x}$

א. בדוקו האם הסדרה (f_n) מתכנסת במידה שווה בקטע $(-1,1)$.

ב. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

ג. הוכיחו כי הטור מהסעיף הקודם לא מתכנס במידה שווה בתחום התכנסותו.

מאינפ 1 ידוע כי $x^n/n^x\to0$ כאשר $|x|<1$ (זה נובע מיד, למשל, ממשפט 2.48 באינפי 1) ולכן $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ לכל $x\in(-1,1)$. אך אם ניקח $x_n=-1+\frac{1}{n}\in(-1,1)$, נקבל:

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|:x\in(-1,1)\}\ge|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{|(-1+\frac{1}{n})^n|}{n^{-1+\frac{1}{n}}}=\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt[n]{n}}\to\infty$$

(כי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{e}$, $\sqrt[n]{n}\to1$) ולכן על-פי למה 6.3, **הסדרה (f_n) אינה מתכנסת במ"ש ב- $(-1,1)$**.

כדי למצוא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum f_n(x)$, נשים לב ש- $\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^x} \to |x|$,
ומכאן לפי משפט 5.16**, הטור מתכנס עבור $|x| < 1$ ומתבדר עבור $|x| > 1$. עבור $x = 1$ נקבל טור מתבדר $\sum \frac{1}{n}$, עבור $x = -1$ נקבל טור מתבדר $\sum (-1)^n n$ (האיבר הכללי לא שואף ל-0).

אי לכך, **תחום ההתכנסות של הטור הוא קטע (-1,1)**.

כדי לפתור סעיף ג, נוכיח קודם כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I אז גם הסדרה $(f_n(x))$ מתכנסת במ"ש בקטע I. אכן, אם הטור מתכנס במ"ש בקטע I, אז לפי משפט 6.6*, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m \ge n > N$, מתקיים $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$ לכל $x \in I$. ניקח $n = m$ ונקבל כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = |f_n(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in I$, הווה אומר, לפי הגדרה 6.2, שהסדרה $(f_n(x))$ מתכנסת במ"ש (לפונקציה $u(x) = 0$) בקטע I, מש"ל.

הערה : טענה זו והוכחתה ניתן למצוא גם בשאלה 4א באוסף בעיות פתורות ליחידה 6 באתר הקורס.

בסעיף א בדקנו כי (f_n) אינה מתכנסת במ"ש בקטע $(-1,1)$, ולכן מהטענה הנ"ל נסיק כי **הטור $\sum f_n(x)$ לא מתכנס במ"ש בתחום התכנסותו**.

שאלה 3

קבעו לגבי כל אחד מטורי הפונקציות הבאים האם הוא מתכנס במידה שווה.

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{(n-1)x} - e^{nx}\right)$ בקטע $[-1,0]$.

הטור הנתון הוא טור טלסקופי, משמע – $S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \left(e^{(n-1)x} - e^{nx}\right) = e^{-x} - e^{kx}$, ולכן:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{(n-1)x} - e^{nx}\right) = \lim_{k\to\infty} S_k(x) = \lim_{k\to\infty} (e^{-x} - e^{kx}) = \begin{cases} e^{-x} & , \ x \in [-1,0) \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}.$$

איברי הטור הם פונקציות רציפות בקטע $[-1,0]$, ואם הטור היה מתכנס במ"ש בקטע זה, אז היינו מקבלים, על-פי משפט 6.4*, כי $S(x)$ רציפה בקטע, בסתירה למה שקבלנו קודם (הפונקציה $S(x)$ שמצאנו לא רציפה ב- $x = 0$). הגענו לסתירה, ולכן **הטור לא מתכנס במ"ש ב - [-1,0]** .

<u>דרך אחרת לחשב את סכום הטור:</u> לכל $x < 0$ הטור הנתון הוא טור הנדסי מתכנס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{(n-1)x} - e^{nx}\right) = (e^{-x} - 1)\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{x}\right)^n = \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^{x}} = e^{-x}.$$

ב. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(e^x)}{n(\ln n)^2 + x^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

לכל x ולכל $n \ge 2$ מתקיים $\left|\frac{\cos(e^x)}{n(\ln n)^2 + x^2}\right| \le \frac{1}{n(\ln n)^2 + x^2} \le \frac{1}{n(\ln n)^2}$, הטור $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ מתכנס (שאלה 27א ביחידה 5), ולכן לפי מבחן ויירשטראס 6.7, הטור הנתון **מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$**.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}x^n$ בתחום התכנסותו.

הטור הנתון הוא טור חזקות, נחשב את רדיוס ההתכנסות שלו בעזרת משפט 6.10 ונקבל:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{(1+1/n)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\sqrt[n]{2}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\frac{2}{e}$$

ולכן $R=\frac{e}{2}$. נבדוק את התכנסות הטור בקצוות $x=\pm\frac{e}{2}$. בנקודות אלה נקבל:

$$\left|\frac{2^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}x^n\right|=2\cdot\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^n\geq 2$$

כי $(1+1/n)^n\leq e$ (אינפי 1, דוגמה 3.5 ביחידה 3). מכאן שהטור מתבדר בנקודות $x=\pm\frac{e}{2}$ לפי התנאי ההכרחי.

אי לכך, תחום ההתכנסות של הטור הוא $(-e/2\ ,\ e/2)$ **והטור לא מתכנס במ"ש בתחום זה** לפי הערה ג בעמוד 210 של כרך ב.

שאלה 4

פונקציה $f(x)$ מוגדרת על-ידי $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$.
הוכיחו כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|$ מתכנס אז $f(x)$ גזירה לכל x ממשי.

נסמן $u_n(x)=a_n\sin nx$, אז $|u_n(x)|\leq|a_n|\leq n|a_n|$ לכל x ולכל n, ולכן הטור $\sum|u_n(x)|$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה 5.14, מכאן שהטור הנתון $\sum a_n\sin nx$ מתכנס (ואפילו בהחלט) לכל x.
$|u_n'(x)|=|na_n\cos nx|\leq n|a_n|$ לכל x, ולכן לפי מבחן ויירשטראס 6.7, הטור $\sum u_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$. בנוסף, הפונקציות $u_n'(x)$ רציפות לכל x.
בדקנו אפוא כי בכל קטע $[a,b]$ מתקיימים התנאים של משפט 6.9*, ולכן סכום הטור $f(x)$ פונקציה גזירה בכל קטע $[a,b]$, משמע – היא גזירה לכל x ממשי.

שאלה 5

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם קיים $x\in\mathbb{R}$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ מתבדר אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^na_nx^n$ מתכנס רק עבור $x=0$.

מהנתון נובע כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ הוא סופי, ולכן מנוסחת רדיוס התכנסות שבמשפט 6.10 נובע כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}>0$. משמע – קיימת סדרה חלקית של הסדרה $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ המתכנסת לגבול חיובי, כלומר $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\to a>0$.
עבור $c_n=n^na_n$ נקבל $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\right)\geq\lim_{n\to\infty}\left(n_k\cdot\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)=\infty$ ומכך, שוב לפי משפט 6.10, $R=0$ כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^na_nx^n$ מתכנס רק עבור $x=0$, משמע - **הטענה נכונה**.

ב. לכל טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ קיים $x\in\mathbb{R}$ שעבורו הטור מתכנס.

הטענה נכונה: כל טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בנקודה $x=0$ (ראו את עמוד 200 בכרך ב).

שאלה 6

נגדיר: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & , x>0\\ 1 & , x=0\end{cases}$. חשבו את $f^{(2019)}(0)$.

נציב $t=\sqrt{x}$ בטור טיילור של $\sin t$ (המתכנס לכל t), נקבל: $\sin\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

מכאן שלכל $x>0$ מתקיים:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}$$

הנוסחה הזו (המתארת את f כסכום טור חזקות) נכונה גם עבור $x=0$, לפי הגדרת f .

הטור המתקבל הוא טור חזקות שמתכנס לכל x (מדוע? הסבר!), ואם נסמן את סכומו ב- $g(x)$,

אז נקבל, על-פי משפט 6.14, ש- g גזירה אינסוף פעמים ב- $\mathbb{R}$, ומתקיים:

$$g^{(2019)}(0)=2019!\cdot\frac{(-1)^{2019}}{(2\cdot 2019+1)!}=-\frac{2019!}{4039!}\ .$$

אך כמו שראינו קודם, לכל $x\geq 0$ מתקיים $f(x)=g(x)$, ולכן:

$\boxed{\mathbf{f^{(2019)}(0)=-\frac{2019!}{4039!}=-\prod_{k=2020}^{4039}\frac{1}{k}}}$ (מדובר בנגזרת חד-צדדית).

שאלת רשות

תהי $g(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ כך ש- $g(1)=0$.

הוכיחו כי סדרת הפונקציות $\left(x^n g(x)\right)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.

יש כמה דרכים שונות להוכיח את הנדרש. הדרך הפשוטה ביותר היא כדלהלן:

נסמן $f_n(x)=x^n g(x)$. כל האיברים של הסדרה $\left(|f_n(x)|\right)$ הן פונקציות רציפות ב- $[0,1]$. כמו כן, $|f_n(x)|=x^n|g(x)|\geq x^{n+1}|g(x)|=|f_{n+1}(x)|$ לכל $x\in[0,1]$ ולכל $n\in\mathbb{N}$, כלומר לכל $x\in[0,1]$ הסדרה $\left(|f_n(x)|\right)$ יורדת. הפונקציה $g(x)$ חסומה בהיותה פונקציה רציפה בקטע סגור, לכן קיים M כך ש- $|f_n(x)|\leq Mx^n$ לכל $x\in[0,1]$. לכל $x\in[0,1)$ נקבל אפוא מכלל הסנדוויץ' ומכך ש- $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ כי $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$. בנוסף, $f_n(1)=1\cdot g(1)=0$ לכל n . אי לכך, הסדרה $\left(|f_n(x)|\right)$ מתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה $f(x)\equiv 0$.

בדקנו שכל התנאים של משפט דיני מתקיימים (ראו את הערה א בעמוד 183), ולכן הסדרה $\left(|f_n(x)|\right)$ מתכנסת במ״ש ב- $[0,1]$ לפונקציה $f(x)\equiv 0$.

כדי לסיים את הפתרון, מספיק לציין שעבור $f(x)\equiv 0$ מתקיים, לכל n ולכל x , כי $|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)|=\big||f_n(x)|-f(x)\big|$, ולכן במקרה זה התכנסות במ״ש של $\left(|f_n(x)|\right)$ ב- $[0,1]$ שקולה להתכנסות במ״ש של $\left(f_n(x)\right)$ בקטע זה.