Adrian Willi

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik

FH Zentralschweiz

https://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline/bspline-ex-1.html

↑ super Quelle zu B-Splines

Computer Graphics: Curves - Übung

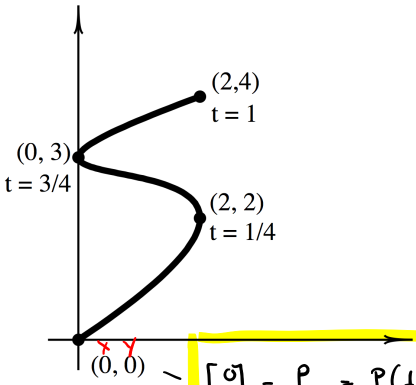
Josef F. Bürgler und Thomas Koller

I.BA_CG, SW 09

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Aufgabe 1: Interpolierende Kurve durch vier Punkte



Bestimmen Sie eine interpolierende Kurve 3. Grades der Form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 t^2 + \mathbf{c}_3 t^3$$

durch die Punkte $\mathbf{P}_0 = [0,0]^T$, $\mathbf{P}_1 = [2,2]^T$, $\mathbf{P}_2 = [0,3]^T$ und $\mathbf{P}_3 = [2,4]^T$ mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

1. Polynome finden
2. LGS lösen nach Koeffizienten
3. Polynom aufschreiben

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P_0 = P(t=0) = c_0$

somit ist $c_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 2: Bézier-Kurve durch vier Punkte

Bestimmen Sie die (kubische) Bézier-Kurve durch die Punkte $\mathbf{P}_0(0,0)$, $\mathbf{P}_1(2,-4)$, $\mathbf{P}_2(5,6)$ und $\mathbf{P}_3(9,0)$ und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 3: Nochmals: Bézier-Kurve durch vier Punkte

Betrachten Sie die vier Punkte aus Aufgabe 2. Welche kubische Bézier-Kurve geht exakt durch diese vier Punkte? Hinweis: Bekanntlich geht eine Bézier-Kurve der Form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{C}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{C}_1 t(1-t)^2 + 3\mathbf{C}_2 t^2(1-t) + \mathbf{C}_3 t^3$$

Aufgabe 1

$P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$

t : 0 , 1/4 , 3/4 , 1

Punkte: (0,0), (2,2), (0,3), (2,4)

von oben wissen wir, dass $c_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Punkte t in $P(t)$ einsetzen:

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = P(t = \frac{1}{4}) = c_0 + \frac{1}{4} c_1 + \frac{1}{16} c_2 + \frac{1}{64} c_3 = \frac{1}{4} c_1 + \frac{1}{16} c_2 + \frac{1}{64} c_3$

wir erhalten folgende zwei Gleichungen

$\frac{1}{4} c_{1,x} + \frac{1}{16} c_{2,x} + \frac{1}{64} c_{3,x} = 2$

$\frac{1}{4} c_{1,y} + \frac{1}{16} c_{2,y} + \frac{1}{64} c_{3,y} = 2$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = P(t = \frac{3}{4}) = c_0 + \frac{3}{4} c_1 + \frac{9}{16} c_2 + \frac{27}{64} c_3 = \frac{3}{4} c_1 + \frac{9}{16} c_2 + \frac{27}{64} c_3$

gibt folgende zwei Gleichungen

$\frac{3}{4} c_{1,x} + \frac{9}{16} c_{2,x} + \frac{27}{64} c_{3,x} = 0$

$\frac{3}{4} c_{1,y} + \frac{9}{16} c_{2,y} + \frac{27}{64} c_{3,y} = 3$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = P(t = 1) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = c_1 + c_2 + c_3$

gibt folgende zwei Gleichungen

$c_{1,x} + c_{2,x} + c_{3,x} = 2$

$c_{1,y} + c_{2,y} + c_{3,y} = 4$

$\rightarrow$ gibt folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{64} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{27}{64} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{27}{64} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,x} \\ c_{1,y} \\ c_{2,x} \\ c_{2,y} \\ c_{3,x} \\ c_{3,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

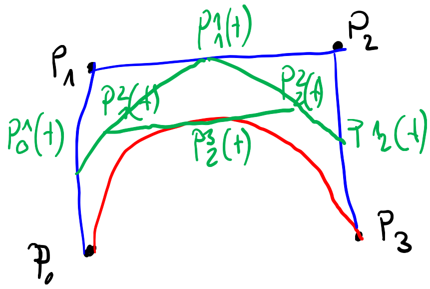
mit Hilfe von Octave berechnen gibt:

$c_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix}$, $c_2 = \begin{bmatrix} -48 \\ -18.667 \end{bmatrix}$, $c_3 = \begin{bmatrix} 32 \\ 10.667 \end{bmatrix}$

$$P(t) = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -48 \\ -18.667 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 32 \\ 10.667 \end{bmatrix} t^3$$

Aufgabe 2

$P_0(0,0)$, $P_1(2,-4)$, $P_2(5,6)$, $P_3(9,0)$

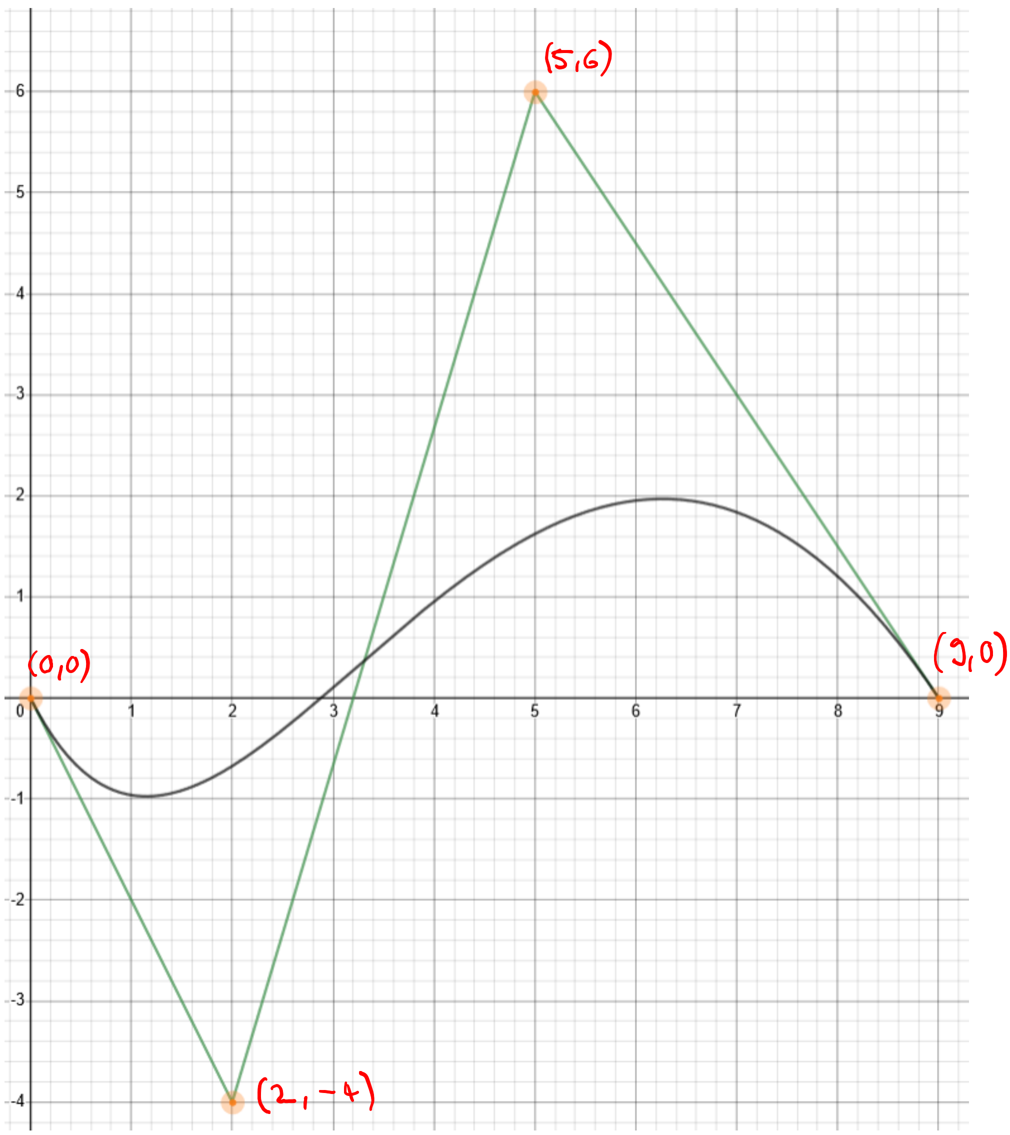


Allg. für kubische Beziers splines:

$$P(t) = (1-t)\,P_1^2(t) + P_2^2(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

Punkte in Formel einsetzen

$$P(t) = (1-t)^2 t \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix} + (1-t)t^2 \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$



nicht durch alle Kontrollpunkte $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ und $\mathbf{C}_3$: lediglich durch den ersten und den letzten, d.h. $\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}_0$ und $\mathbf{C}_3 = \mathbf{P}_3$. Wir wollen nun $\mathbf{C}_1 = (C_{1,x}, C_{1,y})^T$ und $\mathbf{C}_2 = (C_{2,x}, C_{2,y})^T$ so bestimmen, dass gilt:

$$\mathbf{P}(t = 1/4) = \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(t = 3/4) = \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Die einzigen vier Variablen sind also die Komponenten von $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$. Wenn Sie den Ansatz

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{C}_1 t(1-t)^2 + 3\mathbf{C}_2 t^2(1-t) + \mathbf{P}_3 t^3 \tag{1}$$

für $t = 1/4$ und $t = 3/4$ auswerten und verlangen, dass

$$\mathbf{P}(t = 1/4) = \mathbf{P}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(t = 3/4) = \mathbf{P}_2$$

gilt, erhalten Sie vier Gleichungen in den gesuchten Unbekannten $C_{1,x}$, $C_{1,y}$, $C_{2,x}$ und $C_{2,y}$. Beachte: es gibt viele Bézier-Kurven durch $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ welche in $\mathbf{P}_0$ starten und in $\mathbf{P}_3$ enden. Alleine der Fahrplan (wo man zu welcher Zeit t ist) macht die Darstellung eindeutig!

Lösung: Man findet $\mathbf{C}_1 = 1/9(35, -144)^T$ und $\mathbf{C}_2 = 1/9(14, 176)^T$.

Aufgabe 4⋆: Die B-Spline-Funktionen $N_{j,m}(t)$ – (Egal für Prüfung)

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beweises durch Induktion nach m, dass gilt:

$$\sum_{j=i-m+1}^{i} N_{j,m}(t) = 1$$

kann man wohl so sagen ☺

Beachte: diese Aufgabe ist mit einem Stern bezeichnet und daher nicht einfach!

Aufgabe 5: B-Spline Basisfunktionen

Berechnen Sie $N_{0,1}(t), N_{1,1}(t), N_{2,1}(t), N_{0,2}(t), N_{1,2}(t)$ und $N_{0,3}(t)$ für den Knotenvektor $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 3, 6)$.

Aufgabe 6: Quadratische B-Spline Basisfunktionen $N_{j,3}(t)$

Verwendet Sie die Rekursionsformel um $N_{j,3}(t)$ vollständig auszudrücken in t, t_j, t_{j+2} und t_{j+3}. Beachten Sie, dass $N_{j,3}(t)$ nur verschieden von Null ist für $t_i < t < t_{i+3}$. Plotten Sie $N_{j,3}(t)$ im Intervall $[t_j, t_{j+3}]$.

Aufgabe 7: Literaturstudium → Wo finde ich das Buch?

Lesen Sie den Abschnitt 7.14 aus dem Buch von David Salomon, "*Curves and Surfaces for Computer Graphics*" und betrachten Sie insbesondere das Beispiel auf der Seite 303 unten. Zeichnen Sie die Basisfunktionen $N_{03}(t)$, $N_{13}(t)$, $N_{23}(t)$, $N_{33}(t)$ und $N_{43}(t)$ auf (z.B. Maple verwenden). Beantworten Sie dann folgende Fragen mit entsprechenden Begründungen:

Aufgabe 3

Gleichungssystem aufstellen — Constraints beachten!

Es muss gelten:

$P(t=\tfrac{1}{4}) = P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$P(t=\tfrac{3}{4}) = P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$P(t) = 3(1-t)^2 \cdot t \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 P_3$

$$P(\tfrac{1}{4}) = 3\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\left(\tfrac{1}{4}\right)\begin{bmatrix} c_{1,x} \\ c_{1,y} \end{bmatrix} + 3\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\begin{bmatrix} c_{2,x} \\ c_{2,y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{27}{64} c_{1,x} + \tfrac{9}{64} c_{2,x} + \tfrac{9}{64} = 2$$

$$\tfrac{27}{64} c_{1,x} + \tfrac{9}{64} c_{2,x} = 2 - \tfrac{9}{64}$$ 1. Gleichung

$$\tfrac{27}{64} c_{1,y} + \tfrac{9}{64} c_{2,y} = -4$$ 2. Gleichung

$$P(\tfrac{3}{4}) = 3\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\left(\tfrac{3}{4}\right)\begin{bmatrix} c_{1,x} \\ c_{1,y} \end{bmatrix} + 3\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\begin{bmatrix} c_{2,x} \\ c_{2,y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{9}{64} c_{1,x} + \tfrac{27}{64} c_{2,x} + 9\cdot\tfrac{27}{64} = 5$$

$$\tfrac{9}{64} c_{1,x} + \tfrac{27}{64} c_{2,x} = 5 - \tfrac{27}{64}\cdot 9$$ 3. Gleichung

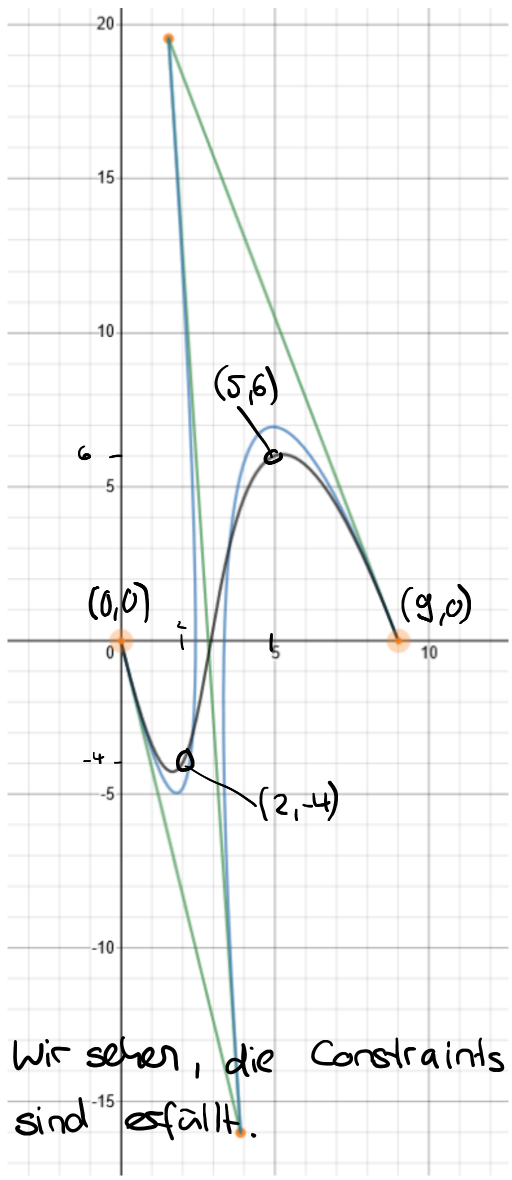
$$\tfrac{9}{64} c_{1,y} + \tfrac{27}{64} c_{2,y} = 6$$ 4. Gleichung

$$\begin{bmatrix} \tfrac{27}{64} & 0 & \tfrac{9}{64} & 0 \\ 0 & \tfrac{27}{64} & 0 & \tfrac{9}{64} \\ \tfrac{9}{64} & 0 & \tfrac{27}{64} & 0 \\ 0 & \tfrac{9}{64} & 0 & \tfrac{27}{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,x} \\ c_{1,y} \\ c_{2,x} \\ c_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \tfrac{9}{64} \\ -4 \\ 5 - \tfrac{243}{64} \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ mit Octave lösen gibt:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 3.8889 \\ -16 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1.5556 \\ 19.5556 \end{bmatrix}$$

Plot



Wir sehen, die Constraints sind erfüllt.

Aufgabe 4 *   Beweisen mit Induktionsbeweis

$$\sum_{j=i-m+1}^{i} N_{j,m}(t) = 1 \implies \sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k}(t) = 1$$

// etwas umgeschrieben/abbenannt, da angenehmer für mich

(für $m = 1$ zeigen, dass Formel stimmt)

① Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k}(t) = 1$$

, da nur ein Summand 1 ist. siehe Aufgabe 5!
→ Splines bilden eine Zerlegung der Eins

② Induktionsanfang

$$\sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k}(t) = \sum_{i=-k}^{n-1} \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

③ Induktionsschritt

$$\Rightarrow \sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k}(t) = \sum_{i=-k+1}^{n-1} \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=-k}^{n-2} \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

$$= \sum_{i=-k+1}^{n-1} \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=-k+1}^{n-1} \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t)$$

$$= \sum_{i=-k+1}^{n-1} \frac{t - t_i + t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t)$$

$$= \sum_{i=-k+1}^{n-1} \underbrace{\frac{t_{i+k} - \cancel{t_i}}{\cancel{t_{i+k}} - t_i}}_{\hat{=}\,1} N_{i,k-1}(t) = \sum_{i=-k+1}^{n-1} N_{i,k-1}(t) = \underline{\underline{1}}$$

Folgt aus Induktionsvoraussetzung

Aufgabe 5

$N_{0,1}(t), N_{1,1}(t), N_{2,1}(t), N_{0,2}(t), N_{1,2}(t)$ und $N_{0,3}(t)$

$t = (t_0, t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 3, 6)$

Konstante Basis-Funktionen

$$N_{0,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \le t < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 2 \le t < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{2,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 3 \le t < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Lineare Basis-Funktionen

$$N_{0,2}(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} N_{1,1}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \le t < 2 \\ 3-t, & 2 \le t < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\frac{t-0}{2-0} = \frac{t}{2}$ wenn $0 \le t < 2$ wegen $N_{0,1}(t)$!

$\frac{3-t}{3-2} = 3-t$ wenn $2 \le t < 3$

$$N_{1,2}(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} N_{2,1}(t) = \begin{cases} t-2, & 2 \le t < 3 \\ \frac{6-t}{3}, & 3 \le t < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\frac{t-2}{3-2} = t-2$ wenn $2 \le t < 3$

$\frac{6-t}{6-3} = \frac{6-t}{3}$ wenn $3 \le t < 6$

Quadratische Basis-Funktion

$$N_{0,3}(t) = \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} N_{0,2}(t) + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_1} N_{1,2}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{6}, & 0 \le t < 2 \\ -\frac{7}{12}t^2 + 3t - 3, & 2 \le t < 3 \\ \frac{(6-t)^2}{12}, & 3 \le t < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\frac{t-0}{3-0} = \frac{t}{3} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t^2}{6}$ wenn $0 \le t < 2$

$\frac{6-t}{6-2} = \frac{6-t}{4} \cdot \frac{6-t}{3} = \frac{(6-t)^2}{12}$ – wenn $3 \le t < 6$

wenn $2 \le t < 3$: $\frac{t}{3}(3-t) + \left(\frac{6-t}{4}\right)(t-2) = t - \frac{t^2}{3} + 2t - \frac{t^2}{4} - 3 = \frac{-7}{12}t^2 + 3t - 3$

von $N_{0,2}(t)$ von $N_{1,2}(t)$

Aufgabe 6

$N_{j,3}(t)$

$$N_{j,2}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j} N_{j,1}(t) + \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_{j+1}} N_{j+1,1}(t) \quad \begin{cases} \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j} \\ \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_{j+1}} \\ 0 \end{cases}$$

$$N_{j+1,2}(t) = \frac{t-t_{j+1}}{t_{j+2}-t_{j+1}} N_{j+1,1}(t) + \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_{j+2}} N_{j+2,1}(t) \quad \begin{cases} \frac{t-t_{j+1}}{t_{j+2}-t_{j+1}} \\ \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_{j+2}} \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{(t_{j+3}-t)^2}{(t_{j+3}-t_{j+1})(t_{j+3}-t_{j+2})}$$

$$N_{j,3}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+2}-t_j} N_{j,2}(t) + \frac{t_{j+3}-t}{t_{j+3}-t_{j+1}} N_{j+1,2}(t)$$

$$\left(\frac{t-t_j}{t_{j+2}-t_j}\right) \cdot \left(\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\right) = \frac{(t-t_j)^2}{(t_{j+2}-t_j)(t_{j+1}-t_j)}$$

$$\begin{cases} \frac{(t-t_j)^2}{(t_{j+2}-t_j)(t_{j+1}-t_j)} & t_j \le t < t_{j+1} \\ \frac{(t-t_j)(t_{j+2}-t)}{(t_{j+2}-t_j)(t_{j+2}-t_{j+1})} + \frac{(t-t_{j+1})(t_{j+3}-t)}{(t_{j+3}-t_{j+1})(t_{j+2}-t_{j+1})} & t_{j+1} \le t < t_{j+2} \\ \frac{(t_{j+3}-t)^2}{(t_{j+3}-t_{j+1})(t_{j+3}-t_{j+2})} & t_{j+2} \le t < t_{j+3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Wie sieht die NURBS-Kurve für $w_2 = 0$ aus?
2. Was bewirkt die Veränderung des Gewichtes w_2?

Viel Spass!