Adrian Willi

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphik: Projektive Geometrie I - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_CG, SW 03

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

1. Rechnen mit Vektoren

(a) Wie lautet der Einheitsvektor $\vec{n}$, der die zum Vektor $\vec{a} = [1, -4, 3]^T$ entgegengesetzte Richtung hat?

(b) Welchen Winkel schliessen die Vektoren $\vec{a} = [10, -5, 10]^T$ und $\vec{b} = [6, -2, -1]^T$ ein?

(c) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\vec{a} = [-1, 2, 5]^T$ und $\vec{b} = [-4, 8, -4]^T$ zueinander orthogonal sind

(d) Berechnen Sie die Komponente von des Vektors $\vec{b} = [5, 1, 3]^T$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = [2, -2, 1]^T$.

(e) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = [1, 4, -6]^T$, $\vec{b} = [2, -1, 2]^T$ und $\vec{c} = [0, 2, 3]^T$. Berechnen Sie $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c})$.

(f) Wie muss der Parameter λ gewählt werden, damit die drei Vektoren $\vec{a} = [1, \lambda, 4]^T$, $\vec{b} = [-2, 4, 11]^T$ und $\vec{c} = [-3, 5, 1]^T$ komplanar sind?

(g) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a} = [1, -6, -4]^T$, $\vec{b} = [1, -2, -2]^T$ und $\vec{c} = [1, 2, 3]^T$.

(h) Beweisen Sie den Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ indem Sie im Dreieck mit den Ecken A, B, C die drei Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ einführen und dann das Skalarprodukt $\vec{c} \bullet \vec{c}$ berechnen. Tipp: es gilt $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ und weiter für einen beliebigen Vektor $\vec{x}$, $\vec{x} \bullet \vec{x} = |\vec{x}|^2 = x^2$ wobei $x = |\vec{x}|$ die Länge des Vektors $\vec{x}$ ist.

Aufgabe 1

(a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 3^2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{60}{15\sqrt{41}}}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 60 + 10 - 10 = 6$

$|\vec{a}| = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15$

$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{41}$

(c) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} = 4 + 16 - 20 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

(d) $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\, \vec{a}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 10 - 2 + 3 = 11 \qquad = \underline{\underline{\frac{11}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

$|\vec{a}|^2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 9$

(e) $(\vec{a} - \vec{b}) \quad (3\vec{c})$

Regel von Sarrus

$\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 & -8 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 9 - (-8 \cdot 6) \\ -8 \cdot 0 - (-1 \cdot 9) \\ -1 \cdot 6 - 0 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ \lambda & 4 & 5 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ \lambda & 4 \\ 4 & 11 \end{matrix}$

$= 4 - 40 - 33\lambda - (-48 + 55 - 2\lambda)$

$\overset{!}{=} 4 - 40 - 33\lambda + 48 - 55 + 2\lambda$

$= -43 - 31\lambda = 0$

$\underline{\underline{\lambda \overset{!}{=} -\frac{43}{31}}}$

-> damit komplanar muss ein Vektor linear abhängig sein und die det somit 0 sein.

-> hier mit der Determinante gerechnet

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ Z_{12}(6) \\ Z_{13}(4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ Z_2(:4) \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z_{23}(-2) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z_3(:3) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

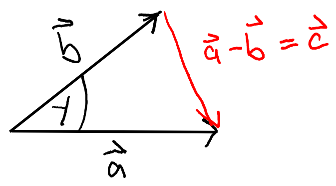
->keine Spalte ohne Pivot, es werden also alle 3 Vektoren benötigt, um den Raum aufzuspannen. Somit sind sie linear unabhängig!

(h) – Beweis Kosinussatz $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma$

Zwei Definitionen des Skalarproduktes

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{|\vec{a} - \vec{b}|^2}_{*} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

$*$ $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2}$

$$(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\overset{!}{=} |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

$$\Rightarrow \quad -2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\gamma \qquad (2)$$

2. Skalar- und Vektorprodukt

Gegeben sei eine Gerade $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\,\vec{d}$, $t \in \mathbb{R}$ und eine Ebene gegeben durch einen Punkt $\vec{y}_0$ und den Normalenvektor $\vec{n}$.

Was sind die Bedingungen dafür, dass

(a) die Gerade senkrecht auf der Ebene steht, Skalarprodukt $= 0$: $\vec{d} \bullet \vec{n} = 0$

(b) die Gerade parallel zur Ebene verläuft, Kreuzprodukt $= 0$: $\vec{d} \times \vec{n} = \vec{0}$

(c) die Gerade in der Ebene liegt? $\vec{d} \bullet \vec{n} = 0$ und $\vec{n} \bullet (\vec{x}_0 - \vec{y}_0)$

Lösung: (a) $\vec{d} \times \vec{n} = \vec{0}$, (b) $\vec{d} \bullet \vec{n} = 0$, (c) $\vec{d} \bullet \vec{n} = 0$ und $\vec{n} \bullet (\vec{x}_0 - \vec{y}_0)$.

3. Translation im 2D

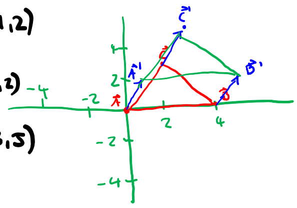
Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde um den Vektor $(1,2)^T$ translatiert. Was sind die neuen Koordinaten der drei Eckpunkte? Ist es möglich diese Transformation mit Hilfe einer 2×2-Matrix zu beschreiben? Zeichnen Sie die Situation auf!

Lösung: $A'(1,2)$, $B'(5,2)$, $C'(3,5)$.

$\vec{A} = \binom{0}{0} + \binom{1}{2} = \binom{1}{2} = \vec{A}' = (1,2)$

$\vec{B} = \binom{4}{0} + \binom{1}{2} = \binom{5}{2} = \vec{B}' = (5,2)$

$\vec{C} = \binom{2}{3} + \binom{1}{2} = \binom{3}{5} = \vec{C}' = (3,5)$



4. Translation im 3D

Das Dreieck $A(0,0,0)$, $B(4,0,2)$, $C(2,3,1)$ werde um den Vektor $(1,2,3)^T$ translatiert. Was sind die neuen Koordinaten der drei Eckpunkte?

Lösung: $A'(1,2,3)$, $B'(5,2,5)$, $C'(3,5,4)$.

$\vec{A} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \vec{A}' = (1,2,3)$

$\vec{B} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix} = \vec{B}' = (5,2,5)$

$\vec{C} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = \vec{C}' = (3,5,4)$

5. Skalierung im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde in x-Richtung mit dem Faktor $s_x = 2$ und in y-Richtung mit dem Faktor $s_y = 1$ skaliert. Bestimmen Sie die Skalierungsmatrix und berechnen Sie die skalierten Eckpunkte. Verwenden Sie Matrix-Vektor-Multiplikationen! Skizzieren Sie die Situation zur Kontrolle.

Lösung: Die Skalierungsmatrix lautet

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit wir beispielsweise aus dem Punkt C wegen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

der Punkt $C'(4,3)$. Analog erhält man $A'(0,0)$ und $B'(8,0)$.

Aufgabe 5

es gilt $x' = s_x x$
$y' = s_y y$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Somit ist die Skalierungsmatrix $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A' = (0,0)$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = B' = (8,0)$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = C' = (4,3)$

6. Rotation im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde um den Ursprung gedreht und zwar mit dem Winkel $\phi = 135^o$. Bestimmen Sie die Rotations- oder Drehmatrix. Bestimmen Sie die Eckpunkte des rotierten Dreiecks mit Hilfe von Matrix-Vektor-Multiplikationen! Skizzieren Sie die Situation zur Kontrolle.

Lösung: Die Rotationsmatrix für $\phi = 135^o$ ist

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Somit wird der Punkt $C(2,3)$ wegen

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fehler ?

in den Punkt $C'(-5/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Analog erhält man $A'(0,0)$ und $B'(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

7. Nochmals Rotation im 2D

Wie lautet die Drehmatrix, um das in der vorigen Aufgabe rotierte Dreieck wieder zurück zu drehen? Wie hängen die beiden letzten Drehmatrizen zusammen?

Lösung: Jede Rotationsmatrix ist orthogonal, d.h. die einzelnen Spalten (Zeilen) haben die Länge 1 und sie stehen paarweise senkrecht aufeinander:

$$\begin{aligned} \text{Länge der 1. Spalte} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \text{Länge der 2. Spalte} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \text{Skalarprodukt} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Man kann einfach zeigen, dass die Inverse $\mathbf{R}^{-1}$ einer orthogonalen Matrix $\mathbf{R}$ nichts anderes als die transponierte $\mathbf{R}^T$ der Matrix ist, d.h.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, dass dadurch die Punkte A', B' und C' wieder auf ihre Ursprungspositionen A, B, C zurück gedreht werden.

8. Spiegelung an der x-Achse

Spiegeln Sie das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ an der x-Achse. Wie muss eine entsprechende Matrix aussehen, die das bewirkt? Wie sieht die Matrix für die Spiegelung an der y-Achse aus? Wie für eine Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Ursprung?

Aufgabe 6

Es gilt: $x = r\cos(\delta)$, $y = r\sin(\delta)$ $\Rightarrow$

$$x' = r\cos(\delta+\phi) \overset{!}{=} r\left[\cos(\delta)\cos(\phi) - \sin(\delta)\sin(\phi)\right] \overset{!}{=} x\cos(\phi) - y\sin(\phi)$$

$$y' = r\sin(\delta+\phi) \overset{!}{=} r\left[\sin(\delta)\cos(\phi) + \cos(\delta)\sin(\phi)\right] \overset{!}{=} y\cos(\phi) + x\sin(\phi)$$

Rotationsmatrix $\rightarrow$ $R = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\phi = 135$ $\quad R = \begin{bmatrix} \cos(135) & -\sin(135) \\ \sin(135 & \cos(135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A' = (0,0)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = B' = \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = C' = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Aufgabe 7

Die beiden Spaltenvektoren haben die Länge 1 und stehen senkrecht (Skalarprodukt = 0) zueinander, somit gilt $R^{-1} = R^T$

$$R^{-1} = R^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ check: Multiplikation mit der Matrix R^{-1} gibt wieder die Koordinaten A, B und C ☺

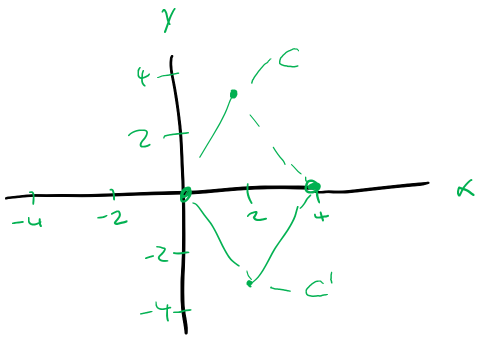
Aufgabe 8

Spiegelmatrix x-Achse $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A' = (0,0)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



Spiegelmatrix y-Achse $= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

$$x' = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha$$
$$y' = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$m = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$

$\alpha = \arctan(m)$

Lösung: Die Spiegelungsmatrix lautet:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Multiplikation mit dieser Matrix bewirkt, dass die x-Koordinate bleibt wie sie ist und die y-Koordinate das Vorzeichen wechselt und dies ist genau der Effekt einer Spiegelung an der x-Achse.

Auf diese Weise ändern sich A und B nicht und C geht über in $C'(2,-3)$. Zeichnen Sie die Situation auf!