Adrian Willi

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphik: Projektive Geometrie - Übung 3

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_CG, SW 05

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

1 Oktant v. 8

Aufgabe 1: Rotation im dreidimensionalen Raum

Der Würfel mit der Seitenlänge $a = 1$ hat eine Ecke im Nullpunkt und befindet sich vollständig im ersten Oktanten ($\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$). Wie lautet die (homogene) Transformationsmatrix, welche diesen Würfel im mathematisch positiven Sinn um 45^o um die y-Achse dreht. Wie lauten dann die neuen Koordinaten der acht Eckpunkte?

Gegenuhrzeigersinn

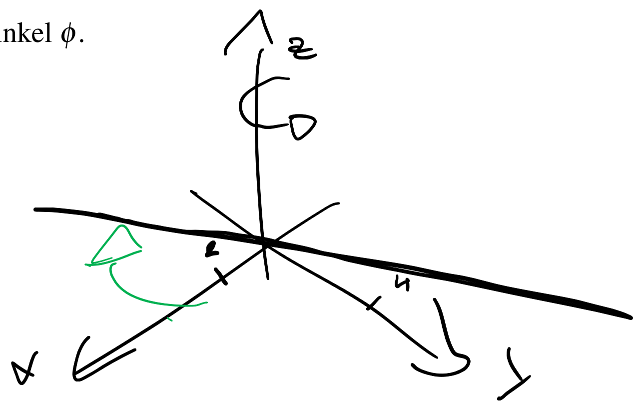
Aufgabe 2: Rotation im dreidimensionalen Raum

Die Gerade g geht durch die Punkte $P(\overset{x}{2},\overset{y}{0},\overset{z}{0})$ und $Q(\overset{x}{0},\overset{y}{4},\overset{z}{0})$. Sie liegt also in der x-y-Ebene. Sei δ die Drehung um die Gerade g mit dem Drehwinkel $\phi = 55^o$. Gesucht ist die Matrix D dieser Drehung

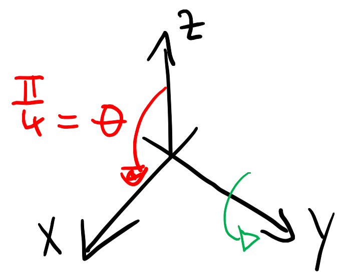
Hinweis: Man erhält die gesuchte Matrix, wenn man ρ wie folgt zusammensetzt:

- Zuerst eine Translation τ, welche g in eine Gerade $g^\star$ durch den Nullpunkt schiebt
- Nach einer geeigneten Rotation R um die z-Achse kommt $g^\star$ auf die x-Achse zu liegen
- Rotation η um die x-Achse mit dem Winkel ϕ.

Dann ist $\delta = \tau^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \eta \circ \rho \circ \tau$.



Aufgabe 1

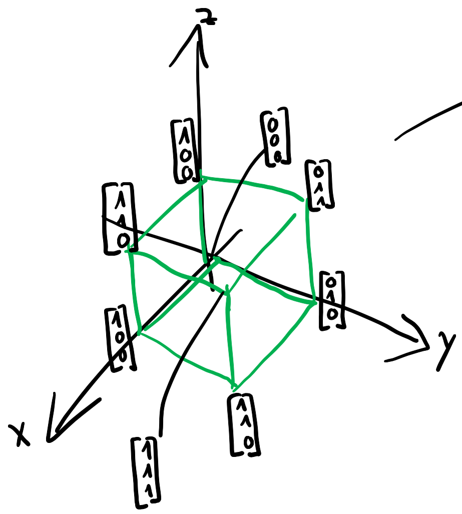


$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und für $\phi = \frac{\pi}{4}$:

$$R_y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

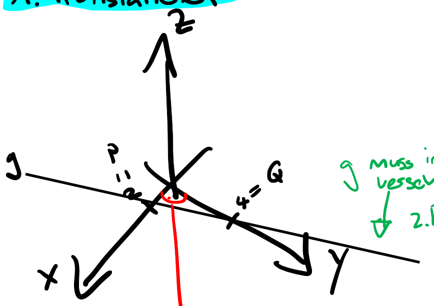
Für die Eckpunkte nur noch mit der Matrix R multiplizieren



dies wären die Koordinaten ;) im 1ten Oktanten

Aufgabe 2

1. Translatieren



g muss in Nullpunkt verschoben werden. Also z.B. $[-2\ 0\ 0]^T$ oder $[0\ -4\ 0]^T$

Translationsmatrix $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M = \frac{4}{-2} = \underline{\underline{-2}} = -\tan\alpha \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ⟶ folgt aus den bekannten Identitäten $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$ und $\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$

2. z-Achse drehen bis x auf y-Achse. Zwischenwinkel ist gerade M = -2

$$R_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Rotation η um die x-Achse mit dem Winkel $\phi = 55°$ -> Rotation um Achse durch den Ursprung

$$Q_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(55°) & -\sin(55°) & 0 \\ 0 & \sin(55°) & \cos(55°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Alles zusammen in der gesuchten Matrix D

$$D = T^{-1} R^{-1} Q\, R\, T$$

$=$ Berechnung sollte klar sein, wie immer

Aufgabe 3: Transformation im dreidimensionalen Raum

Die $3D$-Transformation σ ist gegeben durch die Matrix

$$\mathbf{M} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -28 \\ 4 & 7 & 4 & 14 \\ -8 & 4 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Bildpunkte $A^\star$ und $B^\star$ von $A(2|3|\text{-}5)$ und $B(6.2|\text{-}4.8|\text{-}1.7)$ und bestätigen Sie, dass der Abstand erhalten bleibt, d.h. $\overline{A^\star B^\star} = \overline{AB}$.

(b) Es stellt sich heraus, dass σ eine Spiegelung ist. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene ε, an welcher gespiegelt wird. $M \cdot r = r \Rightarrow (M - I) \cdot r = 0$

Hinweis: Die Punkte in ε sind dadurch gekennzeichnet, dass sie bei der Transformation fest bleiben.

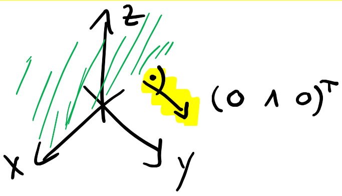
Aufgabe 4: Transformation im dreidimensionalen Raum

Die Punkte $A(0,0,0)$, $B(6,6,3)$, $C(0,9,9)$, $D(\text{-}6,3,6)$, $E(3,\text{-}6,6)$, $F(9,0,9)$, $G(3,3,15)$ und $H(\text{-}3,\text{-}3,12)$ sind die Ecken eines Würfels. Sei π die Parallel-Projektion auf die x-z-Ebene entlang des Vektors $(1,1,0)$.

Gesucht

(a) die Matrix der Projektion und

(b) das Abbild des Würfels in der x-z-Ebene.



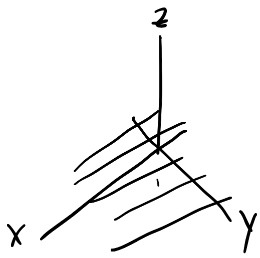
Aufgabe 5: Transformation im dreidimensionalen Raum

Die Punkte $A(0,0,0)$, $B(6,6,3)$, $C(0,9,9)$, $D(\text{-}6,3,6)$, $E(3,\text{-}6,6)$, $F(9,0,9)$, $G(3,3,15)$ und $H(\text{-}3,\text{-}3,12)$ sind die Ecken eines Würfels. Sei π die perspektivische Projektion auf die x-y-Ebene mit Zentrum $Z(2,4,\text{-}3)$. Gesucht sind

zuerst translatieren (a) die Matrix der Projektion und

(b) das Abbild des Würfels in der x-y-Ebene.

ε: 0x + 0y 1 3z - 3 = 0



Aufgabe 6: Perspektivische Projektion

Wir betrachten die perspektivische Projektion auf die Bildebene $\varepsilon: z = \text{-}5$ mit dem Zentrum im Nullpunkt. Das Sichtvolumen wird so festgelegt: Nach vorne durch $\varepsilon: z = \text{-}5$ und nach hinten durch $\varepsilon: z = \text{-}10$. Seitlich durch das rechteckige Fenster mit den Ecken $P(\text{-}3,\text{-}2,\text{-}5)$ und $Q(3,3,\text{-}5)$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{T}$, welche die Transformation auf das kanonische Sichtvolumen erzeugt.

(b) Berechnen Sie die Bildpunkte von $A(\text{-}4.5,4.2,\text{-}8)$ und $B(1.6,\text{-}2.4,\text{-}5.5)$ und entscheiden Sie dann, ob A und B innerhalb oder ausserhalb des Sichtvolumens liegen.

Viel Spass!

Aufgabe 3

a)

$$M\,A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -28 \\ 4 & 7 & 4 & 14 \\ -8 & 4 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 26 \\ 23 \\ -37 \\ 1 \end{bmatrix} = A^*\left(\tfrac{26}{9},\ \tfrac{23}{9},\ -\tfrac{37}{9}\right)$$

$$M\,B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -28 \\ 4 & 7 & 4 & 14 \\ -8 & 4 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6.2 \\ -4.8 \\ -1.7 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -27.4 \\ -1.6 \\ -98.5 \\ 1 \end{bmatrix} = B^*\left(-\tfrac{27.4}{9},\ -\tfrac{1.6}{9},\ -\tfrac{98.5}{9}\right)$$

Abstand $AB = \sqrt{(6.2-2)^2 + (-4.8-3)^2 + (-1.7+5)^2} = \sqrt{17.64 + 60.84 + 10.89} = 9.45$

Abstand $A^*B^* = \sqrt{\left(-\frac{27.4}{9} - \frac{26}{9}\right)^2 + \left(\frac{-1.6}{9} - \frac{23}{9}\right)^2 + \left(-\frac{98.5}{9} + \frac{37}{9}\right)^2} = \sqrt{35.2044 + 7.4711 + 46.6944} = 9.45$

$=$ ✓

b)

Wir suchen die Fixpunkte der Transformation

d.h. $M \cdot r = r$

warum geht das?

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -28 \\ 4 & 7 & 4 & 14 \\ -8 & 4 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

oder $(M - I)\,r = 0$ ← können dann Gaussches Eliminationsverfahren verwenden

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{14}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{28}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{9} \end{bmatrix}}_{M} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{9}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{9} \end{bmatrix}}_{I}$$

← jetzt Gauss

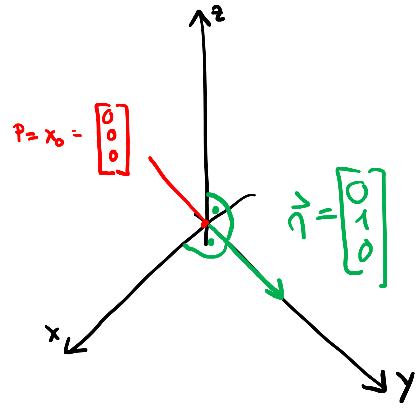
$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{14}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ z_{12}(:2) \\ z_{13}(-1) \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ jetzt können wir die Ebenengleichung ε einfach ablesen

$$\varepsilon:\ -\frac{8}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z - \frac{28}{9} = 0$$

Aufgabe 4

a) $\vec{v} = [1\ 1\ 0]^T$



$\Rightarrow$ Ebene ε wird beschrieben durch

$$n \cdot (x - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y = 0$$

somit gilt für $ax + by + cz + d = 0$:

$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad d = 0$

Wir müssen zudem $\vec{v}$ normiesen: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

nun kennen wir $\vec{v}$ und $\vec{n}$ (beide normiert) und können folgendes anwenden

$$\cos(\varphi) = n \cdot v \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\varphi)$$

nun alles einsetzen

$$H = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Punkte einsetzen und ausrechnen

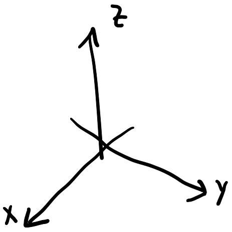
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & -6 & 3 & 9 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 9 & 3 & -6 & 0 & 3 & -3 \\ 9 & 3 & 9 & 6 & 6 & 9 & 15 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 & -9 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 9 & 6 & 6 & 9 & 15 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P^*}$$

Aufgabe 5

a)

x-y-Ebene mit Zentrum $Z(2,4,-3)$

zuerst in den Ursprung translatieren: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



In der x-y-Ebene ist $z=0$. Die Transformation verschiebt dies aber nun um 3, also ist $z = 3$ und somit $d = -3$

$\varepsilon: 0x + 0y + 1z - 3 = 0$

Für die perspektivische Projektion gilt: $H = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ a & b & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Alles zusammen:

$$\Pi = T^{-1} H T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \Pi$$

b) Punkte einsetzen und ausrechnen

→ wie gehabt, Würfel ist stark verzerrt, da Projektionszentrum nahe ist

Aufgabe 6

Sichtvolumen: Nach vorne durch $\varepsilon: z=-5$ und nach hinten durch $\varepsilon: z=-10$.
Seitlich durch das rechteckige Fenster mit den Ecken $P(\underset{x_L}{-3},\underset{y_u}{-2},\underset{-N}{-5})$ und $Q(\underset{x_R}{3},\underset{y_o}{3},\underset{-N}{-5})$

$F=10$, $N=5$

a)

In die Matrix T einsetzen:

$$T_{Persp}=\begin{bmatrix} \frac{2N}{x_R-x_L} & 0 & \frac{x_R+x_L}{x_R-x_L} & 0 \\ 0 & \frac{2N}{y_o-y_u} & \frac{y_o+y_u}{y_o-y_u} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & -\frac{2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

Bildpunkte berechnen:

$A(-4.5, 4.2, -8)$

$$TA=\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4.5 \\ 4.2 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7.5 \\ 6.8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}=8\cdot\begin{bmatrix} -\frac{15}{16} \\ \frac{17}{20} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A liegt im Sichtvolumen

$B(1.6, -2.4, -5.5)$

$$TB=\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.6 \\ -2.4 \\ -5.5 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.67 \\ -5.9 \\ -3.5 \\ 5.5 \end{bmatrix}=5.5\cdot\begin{bmatrix} 0.485 \\ -1.07 \\ -0.636 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y ist grösser als ∓1 und somit liegt B ausserhalb des Sichtvolumen