Adrian Willi

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphik: Projektive Geometrie - Übung 2

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_CG, SW 03 II

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Aufgabe 1: Schnittpunkt zweier Geraden mit homogenen Koordinaten

Bestimmen Sie den Schnittpunkt Q der beiden Geraden

$$g: 2x+3y-5=0 \quad \text{und}$$
$$h: 5x+11y-9=0$$

indem Sie homogene Koordinaten verwenden.

Lösung: $Q(4\ \text{-}1)$.

Aufgabe 2: Punkte und Geraden

Gesucht sind

(a) die Gerade g durch die Punkte $A(5.5\ \text{-}1.0)$ und $B(2.9\ 8.0)$

(b) die Gerade h, welche zu g parallel ist und durch $C(3\ \text{-}6)$ geht.

Verwenden Sie für die Lösung homogene Koordinaten!

Lösung: (a) $9x+2.6y-46.9=0$, (b) $9x+2.6y-11.4=0$.

Aufgabe 3: Spiegelung an einer Geraden

In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ betrachten wir die Spiegelung σ an der Geraden g, welche durch den Vektor $\mathbf{g}=[2,\ -3,\ 2]^T$ gegeben ist. Gesucht sind

Aufgabe 1

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & -9 & 5 & 11 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -27 + 55 \\ -25 + 18 \\ 22 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{28}{7} \\ -\frac{7}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

somit ist $Q(4, -1)$

Aufgabe 2

$A(5.5 \; -1)$
$B(2.9 \; 8)$

a) $\vec{A} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{B} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{array}{ccccc} 2.9 & 8 & 1 & 2.9 & 8 \\ 5.5 & -1 & 1 & 5.5 & -1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 - (-1) \\ 5.5 - 2.9 \\ -2.9 - 44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2.6 \\ -46.9 \end{bmatrix}$$

$g \Rightarrow 9x + 2.6y - 46.9 = 0$

b) da Geraden h und g parallel sind, ist folgendes gesucht

$9x + 2.6y + c_2 = 0$

da wir wissen, dass die Gerade h durch den Punkt $C(3, -6)$ geht können wir diesen einsetzen und nach c_2 auflösen.

$$\Rightarrow 9 \cdot 3 + 2.6 \cdot (-6) + c_2 = 0$$

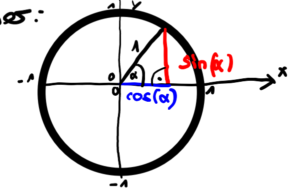
$$27 - 15.6 + c_2 = 0$$

$$11.4 + c_2 = 0$$

$$c_2 = -11.4$$

also ist die Gerade $h: 9x + 2.6y - 11.4 = 0$

Remember:



Aufgabe 3 – Spiegelung an einer Geraden

$g = [2, -3, 2]^T \Rightarrow g:\ 2x - 3y + 2 = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{2x + 2}{3} \Rightarrow m = \dfrac{2}{3}$

Winkel α finden: $\tan(\alpha) = m \iff \alpha = \arctan(m)$

man könnte auch direkt in Kosinus und Sinus umformen

$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \dfrac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \dfrac{5}{13} = \cos(2 \cdot \arctan(\frac{2}{3}))$ und $\sin(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \dfrac{12}{13} = \sin(2 \cdot \arctan(\frac{2}{3}))$

(a)

Punkt auf Gerade finden, einfach ein x wählen und in $y = \frac{2x+2}{3}$ einsetzen

$x = 2 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$ somit ist $P(2,2)$ ein Punkt, der auf der Geraden liegt.

Translation

$P(2,2)$ in den Ursprung translatieren

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spiegelung

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} 5/13 & 12/13 & 0 \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Translation zurück

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma = T^{-1} S T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 5/13 & 12/13 & 0 \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/13 & 12/13 & -\frac{34}{13} \\ 12/13 & -5/13 & -\frac{14}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/13 & 12/13 & -9/13 \\ 12/13 & -5/13 & \frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A' = \begin{bmatrix} 5/13 & 12/13 & -8/13 \\ 12/13 & -5/13 & \frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44/13 \\ 103/13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{13} \\ \frac{103}{13} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 5/13 & 12/13 & -8/13 \\ 12/13 & -5/13 & \frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -65.3 \\ 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.546 \\ -59.431 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.546 \\ -59.431 \end{bmatrix}$$

(a) die Matrix von σ

(b) die Bildpunkte von $A(8|1)$ und $B(-65.3|0.2)$

Aufgabe 4: Streckung

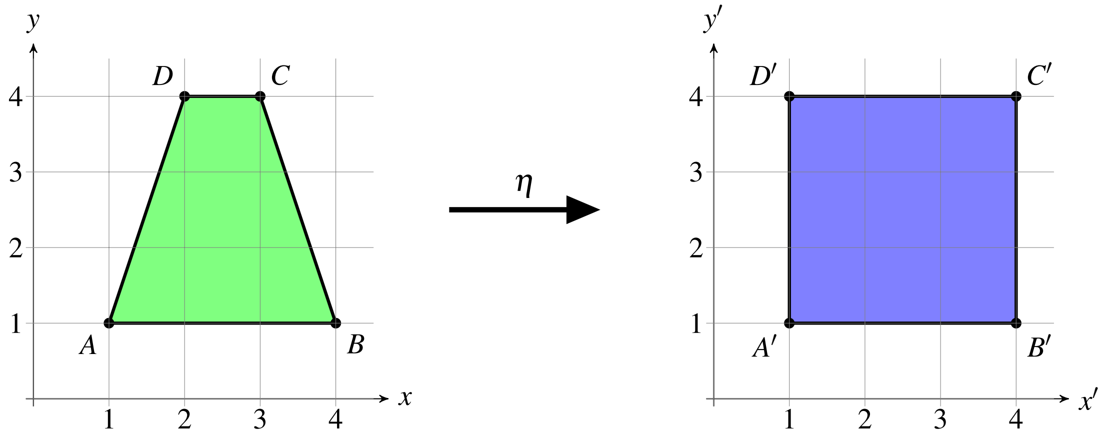
Gegeben ist eine projektive Transformation η durch ihre Matrix

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cc|c} 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Es stellt sich heraus, dass η eine Streckung ist. Bestimmen Sie den Streckungsfaktor s sowie das Zentrum.

Aufgabe 5: Korrektur einer perspektivischen Verzerrung

Gesucht ist eine projektive Transformation η mit der Matrix $\mathbf{H}$, welche die folgende perspektivische Verzerrung korrigiert:



Dabei können Sie die ganzzahligen Koordinaten direkt aus der Abbildung ablesen (z.B. $C(3,4)$ oder $D'(1,4)$ etc.). Weiter können Sie annehmen, dass $h_{33} = 1$.

Viel Spass!

Aufgabe 4

$\rightarrow$ Zentrum finden, da dieses bei der Streckung fest bleibt

$$H = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5x - 1.5 \\ 1.5y + 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1.5x - 1.5 = x \Rightarrow x = 3 \\ 1.5y + 0.5 = y \Rightarrow y = -1 \end{matrix}$$

Zentrum ist $(3, -1)$ Streckungsfaktor s ist $\underline{\underline{1.5}}$

Check: $\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Der Bildpunkt $N(0,0)$ ist $N'(-1.5, 0.5)$ $\rightarrow 1.5 \cdot N'$

Aufgabe 5

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

wir betrachten irgendein Punkt $P(u,v) \Rightarrow r = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$

$$r' = H \cdot r = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}u + h_{12}v + h_{13} \\ h_{21}u + h_{22}v + h_{23} \\ h_{31}u + h_{32}v + h_{33} \end{bmatrix}$$

es gilt also

$$u' = \frac{x_1'}{x_3'} = \frac{h_{11}u + h_{12}v + h_{13}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}} \quad \text{und} \quad v' = \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{h_{21}u + h_{22}v + h_{23}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}}$$

ausmultipliziert

$$u h_{11} + v h_{12} + h_{13} - u u' h_{31} - u' v h_{32} = u' h_{33}$$
$$u h_{21} + v h_{22} + h_{23} - u v' h_{31} - v v' h_{32} = v' h_{33}$$

Nun ist H eine homogene Matrix. Wir wählen $h_{33} = 1$. Dann ergeben sich für die Unbekannten $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{32}$ die Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} u & v & 1 & 0 & 0 & 0 & -u'u & -u'v \\ 0 & 0 & 0 & u & v & 1 & -uv' & -v'v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

dann Punkte einfügen (1 Punktepaar = 2 Gleichungen) und mit Octave lösen

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 9/11 & -5/11 & 5/11 \\ 0 & 1/11 & 8/11 \\ 0 & -2/11 & 1 \end{bmatrix}$$

$A(1,1) = A'(1,1)$

Check: $\begin{bmatrix} 9/11 & -5/11 & 5/11 \\ 0 & 1/11 & 8/11 \\ 0 & -2/11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/11 \\ 9/11 \\ 9/11 \end{bmatrix} = \frac{9}{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{r}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_2/f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2/f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{r}} \Rightarrow \vec{r}' = H\vec{r}$$