

Anexo C: Formulación matemática de la compensación térmica y el MOT.

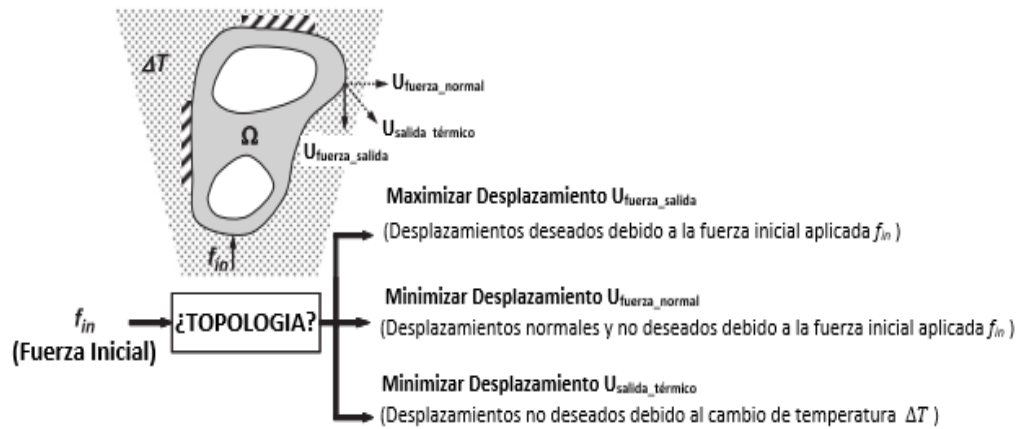
Para la formulación matemática del problema de optimización en los aspectos fundamentales que se abordaron en el proyecto, los cuales consisten en la maximización de la rigidez estructural, la compensación térmica y la disipación de calor por conducción y convección para un molde de inyección, existen trabajos que han desarrollado interesantes e importantes resultados con base al estudio y diseño de mecanismos flexibles considerando una eficiente compensación térmica a través del uso del MOT (Montealegre Rubio et al., 2010a) y son puntos referentes para desarrollar la formulación matemática propia del proyecto de investigación.

En la Fig. **C.1**, se presenta la formulación general (de manera gráfica) de un problema de compensación térmica, el cual es el punto referencial para abordar el problema de optimización de moldes de inyección considerando los comportamientos y resultados esperados. La topología de la estructura debe responder a una fuerza aplicada de manera condicionada de tal modo que se maximice el desplazamiento en dirección de la fuerza de salida y se minimicen los desplazamientos normales a la fuerza de salida y los no deseados en la estructura, así como los desplazamientos no deseados debido al gradiente térmico.

La compensación térmica consiste en obtener los resultados esperados debido al comportamiento de un cuerpo rígido sometido a cargas multi físicas externas. Como se aprecia en la Fig. **C.1**, un cuerpo rígido se encuentra sometido a una fuerza inicial a compresión (condición inicial de frontera o de entrada) y este cuerpo se encuentra empotrado (los desplazamientos y grados de libertad son nulos en las zonas donde existe empotramiento) en algunas partes de su superficie (condiciones de frontera o de entrada), además de ello se encuentra inmerso en una atmosfera o temperatura ΔT , lo que también es una condición inicial de frontera o de entrada en términos de temperatura y sus fenómenos de transferencia como lo son la conducción y convección, lo anterior delimita el

problema multifísico en términos mecánicos y térmicos con el objetivo de maximizar el desplazamiento (condición de frontera de salida) en unas zonas deseadas y minimizarlo en otras no deseadas, tal como puede apreciarse en los objetivos esperados maximizar y minimizar desplazamientos U , productos de la aplicación de una fuerza inducida f_{in} y una temperatura ΔT .

Fig. C.1 Formulación general gráfica de un problema de compensación térmica. Adaptado de (Montealegre Rubio et al., 2010a).



Fuente: Adaptado de (Montealegre Rubio et al., 2010a). (Rubio, W., Nishiwaki, S., & Nelli Silva, E. C)

En general, la optimización permite maximizar o minimizar una función objetivo (problema de interés) satisfaciendo unas condiciones (técnicas y/o económicas) para obtener la mejor respuesta posible (Ramírez Gil, 2013). En términos matemáticos, un problema de optimización se puede formular de forma canónica (Hafka & Gürdal, 1992), de la siguiente manera como se muestra en la Ec. C.0:

$$\underbrace{\text{minimize}}_x \quad f(x) \quad \text{Ec. (C.0)}$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a:} \quad & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & g_k(x) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Dónde: x es el vector n-dimensional de variables de diseño, el cual define el espacio de diseño; $f(x)$ es la función objetivo; $h_j(x)$ son el número de restricciones de igualdad que obligan la solución a cierto subconjunto del espacio de diseño; y $g_k(x)$ son el número de restricciones de desigualdad que delimitan el problema. Por lo tanto, un diseño es viable si el conjunto de variables de diseño pertenece al subconjunto o región del espacio de diseño establecido por las restricciones.

La formulación matemática en específico del problema de compensación térmica tratado desde el MOT se presenta en las subsecciones siguientes.

C.1 Conceptos de energía considerando compensación térmica

De acuerdo con lo enunciado anteriormente en el apartado de formulación matemática de la compensación térmica y el MOT, para maximizar los desplazamientos deseados y minimizar los desplazamientos no deseados, generados por la expansión térmica de la estructura y preservando la máxima rigidez estructural, la función objetivo es formulada basado en el concepto de energía mutua (Nishiwaki et al., 2001), tal como se muestra en la Ec. C.1.

Considerando un cuerpo de comportamiento elástico lineal que ocupa un dominio Ω que es fijo en el límite Γ_d . Aquí, los siguientes dos casos de carga diferentes son considerados de la siguiente forma: a) el cuerpo elástico este sujeto a límites de tracción t^1 en el límite Γt^1 mientras que en el caso b) el cuerpo elástico es sometido a una tracción límite t^2 en el límite o frontera Γt^2 . Las fuerzas en el cuerpo aplicadas al cuerpo elástico se ignoran para simplificar la formulación. Los campos de desplazamiento en estos casos son respectivamente denotados por u^1 y u^2 . Así se introduce la siguiente forma lineal:

$$L^j(u^k) = \int_{\Gamma t^j} t^j u^k d\Gamma \text{ para } u^k \in V \quad \text{Ec. (C.1)}$$

Ec. (C.1). Ecuación de la energía considerando compensación térmica

Donde j y k indican valores ya sean 1 o 2 y V es el espacio lineal admisible. Asumiendo si es una fuerza a tracción o no, la cual es aplicada al cuerpo rígido, será t^1 o t^2 en un límite determinado por la frontera Γt^j .

C.1.1 Conceptos de flexibilidad media, conocida en inglés “mean compliance” y energía mutua considerando la deformación elástica originadas por tracción

En el primer caso de cargas, caso elástico, el “mean compliance” o conformidad media y la energía mutua pueden ser computados utilizando la ecuación de estado de equilibrio; de modo que, asumiendo un estado lineal elástico continuo sin esfuerzos iniciales y sometido a tracciones superficiales, 1t , la ecuación de equilibrio se expresa de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v)^T c \varepsilon({}^1u^k) d\Omega = \int_{\Gamma_t^j} {}^1t^j v d\Gamma \quad \text{Ec. (C.2)}$$

Donde ε son los esfuerzos linealizados, c es la matriz deformación-esfuerzo del material y T indica la transpuesta. Aquí, v es cualquier admisible función de desplazamiento virtual y u la solución exacta del desplazamiento, ambos elementos son del espacio lineal admisible, donde:

$$V = \{v = v_i e_i | v_i \in H^1(\Omega) \text{ con } v = 0 \text{ sobre } \Gamma_d = 1,2,3\} \quad \text{Ec. (C.3)}$$

La Ec. C.2 puede ser expresada usando una forma bilineal $a(.,.)$ y forma lineal $L(.)$; de modo que, el estado de equilibrio puede ser escrito de la siguiente forma:

$$a({}^1u^k, v) = {}^1L^j(v); \text{ con } \begin{cases} a({}^1u^k, v) = \int_{\Omega} \varepsilon(v)^T c \varepsilon({}^1u^k) d\Omega \\ {}^1L^j(v) = \int_{\Gamma_t^j} {}^1t^j v d\Gamma \end{cases}$$

para ${}^1u^k \in V; \forall v \in V$ Ec. (C.4)

Si los campos de desplazamiento ${}^1u^k \in V$ y ${}^1u^j \in V$ son asumidas como solución para el estado estático de equilibrio, y la expresión generalizada para el equilibrio es:

$$a({}^1u^k, {}^1u^j) = {}^1L^j({}^1u^k) \text{ para } {}^1u^k \in V; {}^1u^j \in V;$$

si $\begin{cases} j = k \rightarrow \text{mean compliance o flexibilidad media} \\ j \neq k \rightarrow \text{Energía mutua} \end{cases}$ Ec. (C.5)

C.1.2 Conceptos de flexibilidad media, conocida en inglés “mean compliance” y energía mutua considerando la deformación elástica originadas por gradiente de temperatura

Para este segundo caso de cargas, caso de carga térmica, la estructura esta solo sometida al gradiente de temperatura. El campo de temperaturas es considerado como uniforme y las cargas de entrada surgen debido a los cambios de temperatura. Actualmente, si el

campo inicial de desplazamientos es cero, los esfuerzos originados por los esfuerzos térmicos, $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$, pueden representarse o ser pensados como esfuerzos iniciales, $\boldsymbol{\tau}^I = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{th}$. De este modo, basados en el principio de desplazamientos virtuales, el estado de equilibrio puede ser expresado usando cualquier función de desplazamiento virtual \mathbf{v} como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^k) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\boldsymbol{\alpha}, \Delta T) d\Omega$$

para $\mathbf{u}^k \in V; \forall \mathbf{v} \in V$ Ec. (C.6)

Donde los esfuerzos térmicos $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ dependen de la matriz de coeficientes de expansión $\boldsymbol{\alpha}$ y el gradiente de temperatura ΔT . Similar al caso de cargas elásticas, la condición de equilibrio puede ser escrita utilizando la forma bilineal como sigue:

$$a(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = {}^2L^j(\mathbf{v}) \text{ con } \begin{cases} a(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^k) d\Omega \\ {}^2L^j(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\boldsymbol{\alpha}, \Delta T) d\Omega \end{cases}$$

para $\mathbf{u}^k \in V; \forall \mathbf{v} \in V$ Ec. (C.7)

Si $\mathbf{u}^k \in \mathbf{v}$ y $\mathbf{u}^j \in \mathbf{v}$ son asumidas como solución exacta de la Ec. (C.7) para el estado estático de equilibrio, y la expresión generalizada para el equilibrio es:

$$a(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^j) = {}^2L^j(\mathbf{u}^k) \text{ para } \mathbf{u}^k \in V; \mathbf{u}^j \in V;$$

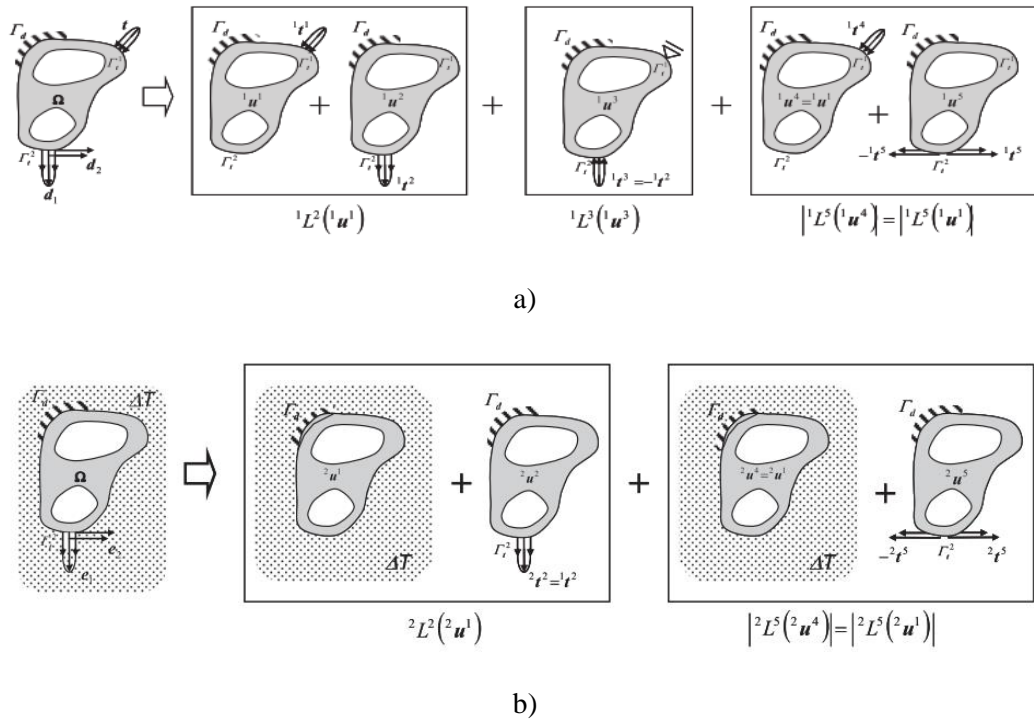
si $\begin{cases} j = k \rightarrow \text{mean compliance o flexibilidad media} \\ j \neq k \rightarrow \text{Energía mutua} \end{cases}$ Ec. (C.8)

C.2 Formulación del MOT aplicado a un problema de compensación térmica

Esencialmente para diseñar una estructura considerando el objetivo de compensación térmica, Montealegre et al, desarrollaron en su trabajos iniciales un diseño de mecanismos flexibles que se encuentran bajo la acción de cargas y temperaturas determinadas considerando los efectos y resultados en materia de compensación térmica (Montealegre Rubio et al., 2010a), en donde, para el diseño de este tipo de estructuras, es necesario satisfacer dos requerimientos a saber: los requerimientos mecánicos y los requerimientos cinemáticos. Los primeros buscan lograr un acuerdo en términos de la rigidez del

mecanismo, es decir, que el mecanismo tenga la suficiente rigidez cuando una fuerza \mathbf{f} es aplicada. Los segundos, buscan lograr un suficiente y deseado desplazamiento en determinada dirección (campos de desplazamiento \mathbf{d}), la dirección deseada es especificada por una fuerza de tracción aplicada en dirección idéntica a la del campo desplazamiento deseado, tal como puede observarse en la Fig.C.2 a y b.

Fig. C.2 a) Fuerzas y cargas b) Casos de cargas térmicas (Montealegre Rubio et al., 2010a).



Fuente: Tomado de (Montealegre Rubio et al., 2010a).(Rubio, W., Nishiwaki, S., & Nelli Silva, E. C)

C.3 Formulación matemática para el modelo del material

Se presenta en la Ec. C.9, la formulación matemática para el modelo del material del cuerpo rígido.

$$[E(x)] = [\rho(x_i)^p][E^0] \quad \text{Ec. (C.9)}$$

Ec. (C.9). Formulación matemática del modelo del material

Donde $[E(x)]$ y $[E^0]$ son la matriz elástica de tensores de materiales mezclados (caso aleaciones) y materiales básicos del cual está compuesto el cuerpo rígido. El término de

$[\rho(x_i)]$ es una pseudo-densidad la cual obedece a una función del material en cada parte del dominio de diseño (si existe o no material), se asume que los valores pueden oscilar entre 0 y 1 (donde 0 representa matemáticamente la no existencia de material y 1 la existencia de material), p es un factor de penalización que busca suavizar los resultados matemáticamente óptimos en función de hacerlos factibles desde el punto de vista ingenieril.

C.4 Formulación del método de optimización topológica

Para diseñar el mecanismo flexible, las funciones objetivo están formuladas en las expresiones C.10 a C.12 y se condensan en la función multiobjetivo la cual se presenta en la expresión o Ec. C.13.

$$\underbrace{\max}_{x_i} \quad {}^1L^2 ({}^1\mathbf{u}^1) = \int_{\tau_t^2} \quad {}^1\mathbf{t}^2 \quad {}^1\mathbf{u}^1 d\Gamma = \int_{\Omega} \quad \varepsilon ({}^1\mathbf{u}^1)^T \mathbf{C} \varepsilon ({}^1\mathbf{u}^2)^T d\Omega \quad \text{Ec. (C.10)}$$

Función objetivo 1 para el método de optimización topológica en un problema de compensación térmica

$$\underbrace{\min}_{x_i} \quad {}^1L^3 ({}^1\mathbf{u}^3) = \int_{\tau_t^2} \quad {}^1\mathbf{t}^3 \quad {}^1\mathbf{u}^3 d\tau = \int_{\Omega} \quad \varepsilon ({}^1\mathbf{u}^3)^T \mathbf{C} \varepsilon ({}^1\mathbf{u}^3)^T d\Omega \quad \text{Ec. (C.11)}$$

Función objetivo 2 para el método de optimización topológica en un problema de compensación térmica

$$\underbrace{\min}_{x_i} ({}^1L^2 ({}^2\mathbf{u}^1))^2 = \left(\int_{\Omega} \quad \varepsilon ({}^2\mathbf{u}^1)^T \mathbf{C} \varepsilon^{th}(\alpha, \Delta T) d\Omega \right)^2 = \left(\int_{\Omega} \quad \varepsilon ({}^2\mathbf{u}^1)^T \mathbf{C} \varepsilon ({}^2\mathbf{u}^2) d\Omega \right)^2 \quad \text{Ec. (C.12).}$$

Función objetivo 3 para el método de optimización topológica en un problema de compensación térmica

Como se explicó en el apartado de formulación matemática de la compensación térmica y el MOT, en todo problema de optimización topológica, existe una función objetivo sujeto a unas restricciones y condiciones de frontera de un problema de ingeniería, para el estudio abordado en específico en el problema de diseño de un mecanismo flexible (Montealegre Rubio et al., 2010a), se presenta a continuación la función multi objetivo en la Ec. C.13 derivada de las expresiones C.10, C.11 y C.12 presentadas anteriormente.

$$\begin{aligned} \max_{x_i} Fobj = & W \log \left[\frac{1}{\xi_L} ((1 - w_1)(\|L^2(\mathbf{u}^1)\|) \right. \\ & - (1 - W) \log \left[\frac{1}{\xi_s} \right. \\ & \log \log \left[w_1 (e^{-\xi \|L^2(\mathbf{u}^1)\|^2} + e^{-\xi_s \|L^2(\mathbf{u}^3)\|} \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^2 w_2 (e^{-\xi_s \|L^5(\mathbf{u}^1)\|^2}) \right] \right] \end{aligned}$$

Ec. (C.13).

Función multi-objetivo para el método de optimización topológica en un problema de compensación térmica.

Sujeto a las restricciones o condiciones del problema en particular, como se muestra a continuación:

$$\max_{x_i} Fobj$$

Sujeto a $\int_{\Omega} x_i d\Omega \leq \Omega_s$ (restricción de volumen para el mecanismo flexible)

$$\mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2; \quad \mathbf{t}^4 = -\mathbf{t}^1; \quad \mathbf{t}^2 = \mathbf{t}^2; \quad \mathbf{u}^4 = \mathbf{u}^1$$

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1); \quad a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^2) = L^2(\mathbf{u}^2)$$

Para $\mathbf{u}^1 \in V^a$ y $\mathbf{u}^2 \in V^a$

$$a(\mathbf{u}^3, \mathbf{u}^3) = L^3(\mathbf{u}^3) \text{ para } \mathbf{u}^3 \in V^b$$

$$a(\mathbf{u}^4, \mathbf{u}^4) = L^4(\mathbf{u}^4); \quad |\alpha(\mathbf{u}^5, \mathbf{u}^5)|$$

Para $\mathbf{u}^4 \in V^a$ y $\mathbf{u}^5 \in V^a$

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1); \quad a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^2) = L^2(\mathbf{u}^2)$$

Para $\mathbf{u}^1 \in V^a$ y $\mathbf{u}^2 \in V^a$

$$a(\mathbf{u}^4, \mathbf{u}^4) = L^4(\mathbf{u}^4); \quad |\alpha(\mathbf{u}^5, \mathbf{u}^5)| \quad L^5(\mathbf{u}^5)$$

Para $\mathbf{u}^4 \in V^a$ y $\mathbf{u}^5 \in V^a$

$$V^a = \left\{ \left\{ \mathbf{u} | \mathbf{u} \in H(\Omega); \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \in H(\Omega), \quad i, j = 1, 2, 3; u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_d \text{ y } \Gamma_t^1, \right. \right. \\ \left. \left. i = 1, 2, 3 \right\} \right\}$$

$$V^b = \left\{ \left\{ \mathbf{u} | \mathbf{u} \in H(\Omega); \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \in H(\Omega), \quad i, j = 1, 2, 3; u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_d \text{ y } \Gamma_t^1, \quad i = 1, 2, 3 \right\} \right\}$$

De acuerdo con el problema de optimización presentado anteriormente se plantea como punto inicial y referencial para abordar el problema de diseño de moldes para inyección mediante el método de optimización topológica, con la misma estructura, función de desempeño u objetivo, sujeto a restricciones y/o condiciones determinadas por el problema de ingeniería en específico.

C.4.1 Implementación numérica y modelo en términos de elementos finitos

Para el análisis de elementos finitos el dominio de diseño Ω es aproximado como un ensamble de elementos finitos discretos, cada elemento finito e con volumen Ω_e . De este modo, usando la ya conocida relación para evaluar esfuerzos en el elemento ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}$), la expresión generalizada para el equilibrio (expresiones o Ec. 4.5 y 4.8) pueden ser aproximadas de la siguiente forma:

$${}^i L^j ({}^i \mathbf{U}^k) \cong {}^i \mathbf{U}^{kT} \mathbf{K} {}^i \mathbf{U}^j \text{ para } i = 1, 2 \quad \text{Ec. (C.14)}$$

Donde \mathbf{K} es la típica expresión de matriz de rigidez. La notación del campo de desplazamientos es \mathbf{U}^k (o \mathbf{U}^j) en vez de \mathbf{u}^k (o \mathbf{u}^j), debido a que esto representa los desplazamientos sobre todo el dominio discretizado, en forma de vector.

De este modo, los términos de energía mutua y la flexibilidad media o “mean compliance”. Para los dos casos de carga ($i = 1, 2$), pueden ser escritos en la siguiente forma de matriz:

$${}^1 L^2 ({}^1 \mathbf{U}^1) = {}^1 \mathbf{U}^{1T} \mathbf{K}_1 {}^1 \mathbf{U}^2; \quad {}^1 L^3 ({}^1 \mathbf{U}^3) = {}^1 \mathbf{U}^{3T} \mathbf{K}_2 {}^1 \mathbf{U}^3; \\ {}^1 L^5 ({}^1 \mathbf{U}^1) = {}^1 \mathbf{U}^{1T} \mathbf{K}_1 {}^1 \mathbf{U}^5; \quad {}^1 L^2 ({}^2 \mathbf{U}^1) = {}^2 \mathbf{U}^{1T} \mathbf{K}_1 {}^1 \mathbf{U}^2; \\ {}^2 L^5 ({}^2 \mathbf{U}^1) = {}^2 \mathbf{U}^{1T} \mathbf{K}_1 {}^2 \mathbf{U}^5 \quad \text{Ec. (C.15)}$$

Donde \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 son las matrices de rigidez de la estructura para cada condición de contorno esencial: energía mutua y flexibilidad media o “mean compliance” casos de carga (ver

Fig.C.2). Estas matrices y los vectores de desplazamiento dependen del vector de pseudodensidad x_i , de acuerdo con el modelo del material (que fue expresada en la Ec. C.10). De la teoría de elementos finitos, las matrices de rigidez están dadas por la expresión o Ec. C.16:

$$K_c(x_i) = \sum_{e=1}^N k_c^e(x_i^e) = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} B_c^T E(x_i^e) B_c d\Omega_e \quad \text{para } c = 1 \text{ o } 2 \quad \text{Ec. (C.16)}$$

Donde N es el número de elementos finitos utilizado en la discretización, B es la matriz de esfuerzo desplazamiento y E es la matriz de propiedades de estado plano de esfuerzos que depende de la pseudodensidad x_i^e del elemento e (ver Ec. C.9). Por otro lado, el equilibrio es logrado siguiendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned} K_1^{-1} U^1 &= F_1; K_1^{-1} U^2 = F_2; K_2^{-1} U^3 = -F_2; K_1^{-1} U^5 = F_3; \\ K_1^{-2} U^1 &= F_{\Delta T}; K_1^{-2} U^2 = F_4; K_1^{-2} U^5 = F_5 \end{aligned} \quad \text{Ec. (C.17)}$$

Donde F_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) son los vectores que representan la aplicación de una fuerza externa F_i en determinado punto de la estructura, de acuerdo con los conceptos de flexibilidad media o “mean compliance” y energía mutua; y $F_{\Delta T}$ es el vector de fuerzas térmicas. Todas las ecuaciones de equilibrio dependen del vector de pseudodensidad x_i . Igualmente, de la teoría de elementos finitos este vector de fuerzas térmicas es expresado en la Ec.C.18:

$$F_{\Delta T}(x_i) = \sum_{e=1}^N F_{\Delta T}(x_i^e) = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} B^T E(x_i^e) \alpha \Delta T d\Omega_e \quad \text{Ec. (C.18)}$$

Finalmente, considerando el dominio discretizado usando la formulación de elementos finitos, se obtiene el problema de optimización en forma discreta que está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{x_i^e} Fobj &= W \log \left[\frac{1}{\xi_L} ((1 - w_1) ({}^1L^2 ({}^1u^1)) \right] \\ &\quad - (1 - W) \log \left[\frac{1}{\xi_s} \right. \\ &\quad \left. \log \log \left[w_1 (e^{-\xi^{-1}L^2 ({}^2u^1)})^2 + e^{-\xi_s^{-1}L^2 ({}^1u^3)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^2 w_2 (e^{-\xi_s^{-i}L^5 ({}^i u^1)})^2 \right] \right] \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\sum_{e=1}^N x_i^e V^e - V^* \leq 0$$

$$0 < x_{i \min}^e < x_i^e \leq 1$$

$$[K_1] \{^1U^1\} = \{F_1\}; [K_1]\{^1U^2\} = \{F_2\}; [K_2]\{^1U^3\} = \{-F_2\}; [K_1]\{^1U^5\} = \{F_3\};$$

$$[K_1]\{^2U^1\} = \{F_{\Delta T}\} \quad \text{Ec. (C.19)}$$

Donde V^* es la restricción de volumen del material, V^e y x_i^e representan los volúmenes y la variable de diseño del elemento finito, respectivamente. Un límite inferior $x_{i \min}^e$ es especificado para la variable de diseño x_i^e para evitar problemas numéricos como la singularidad de la matriz de rigidez.