



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΙΚΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του φοιτητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών
της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών

ΣΠΑΘΗ-ΠΑΠΑΔΙΩΤΗ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ ΤΟΥ ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ

Αριθμος Μητρωού: 7729

Θέμα

Προσομοίωση πρόσπτωσης τσουνάμι σε ακτογραμμή

Επιβλέπων

ΜΟΥΣΤΑΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Αριθμός Διπλωματικής Εργασίας:

Πάτρα, Δεκέμβριος 2015

ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Πιστοποιείται ότι η Διπλωματική Εργασία με θέμα

Προσομοίωση πρόσπτωσης τσουνάμι σε ακτογραμμή

Του φοιτητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

ΣΠΑΘΗ-ΠΑΠΑΔΙΩΤΗ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ ΤΟΥ ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ

Αριθμός Μητρώου: 7729

Παρουσιάστηκε δημόσια και εξετάστηκε
στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών στις

...../...../.....

Ο Επιβλέπων
Επίκουρος Καθηγητής
Μουστάκας Κωνσταντίνος

Ο Διευθυντής του Τομέα
Καθηγητής Φακωτάκης Νίκος

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας ήταν η ακριβής προσομοίωση της πρόσπιτωσης ενός τσουνάμι σε ακτογραμμή. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη διατήρηση της ορμής, καθώς η κατανομή της στο χώρο και το χρόνο είναι καθοριστική για τις επιπτώσεις του κύματος στην ακτογραμμή. Για το λόγο αυτό, υιοθετήθηκε μια υβριδική μέθοδος προσομοίωσης, βασισμένη στη μέθοδο SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), εμπλουτισμένη όμως με γεωμετρικούς περιορισμούς και αλληλεπιδράσεις υλικών σωμάτων. Η υλοποίηση βασίζεται στη συνεργασία της μηχανής φυσικής Bullet και της μηχανής SPH, που επεξεργάζονται αλληλοδιάδοχα την δυναμική κατάσταση του ρευστού σε κάθε βήμα της προσομοίωσης. Για την καλύτερη απόδοση της προσομοίωσης αναπτύχθηκε επιπλέον ειδική δομή δεδομένων (LP grid) για την βέλτιστοποίηση της τοπικότητας κατά την αποθήκευση των δεδομένων στη μνήμη και της ταχύτητας πρόσθασης σε αυτά. Τα δεδομένα της προσομοίωσης εξάγονται σε ειδικής μορφής αρχεία κειμένου (VTK) με σκοπό την εκ των υστέρων διαδραστική οπτικοποίηση και επεξεργασία μέσω κατάλληλων προγραμμάτων (όπως του ParaView).

Λέξεις Κλειδιά Προσομοίωση ρευστών, τσουνάμι, SPH, αλληλεπίδραση τσουνάμι-ακτογραμμής, οπτικοποίηση δυνάμεων

Abstract

The objective of this thesis was the accurate simulation of a tsunami hit on a coastline. Emphasis was given to the conservation of momentum during the simulation, as its distribution in space and time is the main factor of the wave's effects on the coastline. Due to this, a hybrid simulation method was adopted, based on the SPH method (Smoothed Particle Hydrodynamics), enriched with geometric constraints and rigid body interactions. The implementation is the result of cooperation between the Bullet physics engine and the custom SPH engine, which successively process the dynamic state of the fluid at every timestep of the simulation. Furthermore, in order to achieve better performance a custom data structure (LP grid) was developed for the optimization of locality in data storage and minimization of access time. Simulation data is exported to text files in VTK format to allow interactive processing and visualization with the aid of specialized programs (like ParaView).

Keywords Fluid simulation, tsunami, SPH, tsunami-coastline interaction, force visualization

Ευχαριστίες

Συντμήσεις – Ακρωνύμια

AABB	Axis-Aligned Bounding Box
BVH	Bounding Volume Hierarchy
CFL	Courant-Friedrichs-Lowy
DBVT	Dynamic Bounding Volume Tree
FPS	Frames Per Second
GPCPU	General Purpose Graphics Processing Unit (computing)
HCP	Hexagonal Close-Packed
LBM	Lattice Boltzmann Method
LOD	Level Of Detail
PBD	Position Based Dynamics
PBF	Position Based Fluids
SIMD	Single Instruction Multiple Data
SIS	Sequential Impulse Solver
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics
SWE	Shallow Water Equations
VTK	Visulization Tool Kit

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά για τα τσουνάμι	1
1.2 Lattice Boltzmann Method	3
1.3 Smoothed Particle Hydrodynamics	4
1.3.1 Θεωρητική θεμελίωση	4
1.3.2 Διανυσματικοί τελεστές σε διακριτοποιημένα πεδία	5
1.3.3 Καταστατική εξίσωση	6
1.3.4 Πυρήνες εξομάλυνσης	7
1.3.5 Ολοκλήρωση και χρονικό βήμα	9
2 Υλοποίηση	11
2.1 Bullet	11
2.2 Ακτογραμμή	12
2.3 Ρευστό	12
2.3.1 Αρχικοποίηση	12
2.3.2 Αναπαράσταση	14
2.3.3 Προσομοίωση	20
3 Αποτελέσματα – Συζήτηση	22
3.1 Προσομοιώσεις	22
3.2 Συμπεράσματα – Μελλοντικές επεκτάσεις	24

1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά για τα τσουνάμι

Τα τσουνάμι (στα ιαπωνικά «κύμα στο λιμάνι») είναι κύματα που δημιουργούνται από την απότομη μετατόπιση μεγάλων υδάτινων μαζών, συνήθως ως αποτέλεσμα γεωλογικών φαινομένων (σεισμοί, εκρήξεις ηφαιστείων, κατολισθήσεις βράχων ή παγετώνων, πτώση μετεωρίτη) σε παρα/υπο-θαλάσσιες τοποθεσίες). Λόγω του τρόπου δημιουργίας τους, τα τσουνάμι είναι εντελώς διαφορετικά από τα συνηθισμένα κύματα που δημιουργούνται από τον άνεμο, οδεύοντας στον ανοιχτό, βαθύ ωκεανό με τεράστια ταχύτητα (750 km/h) και μήκος κύματος (50-400 km), αλλά μικρό ύψος, που κυμαίνεται από μερικά cm έως 1-2 m. Προσεγγίζοντας πιο ρηχές περιοχές, το κύμα αλλάζει χαρακτηριστικά, καθώς η ταχύτητα και το μήκος κύματος μειώνονται (κάτω από 80 km/h και 20 km αντίστοιχα), ενώ το ύψος αυξάνεται. Ωστόσο, μόνο τα πολύ μεγάλα κύματα παρουσιάζουν «σπάσιμο» (wave breaking), δηλαδή κατάρρευση της κορυφής τους, με αποτέλεσμα τα τσουνάμι να μοιάζουν με μεγάλες και απότομες παλίρροιες που προσεγγίζουν ταχέως την ακτή¹. Λόγω της τεράστιας ενέργειας που μεταφέρουν (αυτή της μετατόπισης ολόκληρης της υδάτινης στήλης που προκλήθηκε από το γενεσιούργο συμβάν) τα τσουνάμι είναι καταστροφικά κατά την πρόσπιτωσή τους στις ακτές. Με αυτόν τον τρόπο πήραν και το όνομά τους, καθώς Ιάπωνες ψαράδες που έβγαιναν στα ανοιχτά δεν αντιλαμβάνονταν το τσουνάμι που περνούσε κάτω από τα πλοία τους, αντίκριζαν όμως την ολική καταστροφή που είχε προκαλέσει όταν γύριζαν στο λιμάνι. Τα πρόσφατα τσουνάμι στη νοτιοανατολική Ασία το 2004 και στην Ιαπωνία το 2011 υπήρξαν δύο από τις μεγαλύτερες φυσικές καταστροφές στη σύγχρονη ιστορία, με τεράστιο αριθμό θυμάτων και σοθαρές επιπτώσεις, βραχύχρονες (καταστροφή κτιρίων και τοπικών υποδομών) και μακρόχρονες (καταστροφή και μεγάλη διαρροή ραδιενέργειας στον πυρηνικό αντιδραστήρα της επαρχίας Φουκουσίμα στην Ιαπωνία). Σήμερα, περιοχές υψηλού κίνδυνου διαθέτουν συστήματα προειδοποίησης τα οποία επεξεργαζόμενα γεωλογικά, ωκεανογραφικά και σεισμολογικά δεδομένα σε πραγματικό χρόνο προειδοποιούν για επικείμενα τσουνάμι.

Εξαιτίας των σοθαρών τους επιπτώσεων, τα τσουνάμι έχουν αποτελέσει θέμα εκτενούς μελέτης που αποσκοπεί στην κατανόηση, πρόβλεψη και πρόληψη ζημιών στο μέγιστο δυνατό

¹Σ' αυτό οφείλεται και η συχνή αλλά εσφαλμένη αναφορά των κυμάτων αυτών ως παλιρροιακά κύματα.

βαθμό. Η μελέτη επικεντρώνεται τόσο την ανάλυση δεδομένων σε παρελθόντα περιστατικά [1, 18], όσο και στην μελέτη-προσομοίωση του φαινομένου. Σε αντίθεση με τις μεγάλης κλίμακας μελέτες (σε επίπεδο δεκάδων km), οι οποίες αφορούν τη γένεση/διάδοση των κυμάτων στον ανοιχτό οceans και τα χαρακτηριστικά τους σε μακροσκοπικό επίπεδο [16, 31, 35], οι μικρής κλίμακας προσομοιώσεις απαιτούν τον πλήρη συνυπολογισμό της ρευστομηχανικής συμπεριφοράς του κύματος για την εξαγωγή σωστών αποτελεσμάτων, ο οποίος επιτυγχάνεται είτε με την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το κύμα, είτε με τη χρήση σωματιδιακών μοντέλων [15].

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι προσομοίωσης ρευστών, καθεμία με πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα σε ένα πλήθος παραγόντων, όπως την ευστάθεια, την ακρίβεια, τον υπολογιστικό φόρτο και τον χειρισμό οριακών συνθηκών και διαφορετικών φάσεων στο σύστημα [34]. Οι κυριότερες παραδοσιακές μέθοδοι ανάλυσης/προσομοίωσης στηρίζονται στην αριθμητική επίλυση ειδικών μορφών της εξίσωσης Navier-Stokes (8) που προκύπτουν υπό παραδοχές και διαφορετικού βαθμού απλοποιήσεις. Τέτοιες μορφές είναι οι εξισώσεις ρηχού νερού (SWE – Shallow Water Equations ή εξισώσεις Saint-Venant), οι οποίες προκύπτουν υπό την παραδοχή ότι το οριζόντιο χαρακτηριστικό μήκος της ροής είναι πολύ μεγαλύτερο από το βάθος του ρευστού [2, 5]. Η προσέγγιση Boussinesq βελτιώνει την προηγούμενη ενσωματώνοντας και την συχνοτική διασπορά (frequency dispersion, φαινόμενο κατά το οποίο κύματα με διαφορετικό μήκος κύματος ταξιδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες φάσης) [37], ενώ έχουν προταθεί και άλλες, πιο ακριβείς μέθοδοι [6]. Απότερος σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η κατα το δυνατόν ακριβέστερη καταγραφή της μεταφοράς ορμής/ενέργειας από το νερό στην ακτογραμμή, για την εκτίμηση των επιπτώσεων της πρόσκρουσης του τσουνάμι. Για το λόγο αυτό, επελέγη σωματιδιακή μέθοδος προσομοίωσης, καθώς τέτοιες μέθοδοι ενδείκνυνται για αλληλεπίδραση ρευστού με πολύπλοκες επιφάνειες (ελέυθερες και μη) παρέχοντας παράλληλα άμεση πληροφορία σχετικά με αυτή, σε σχέση με αυτές που βασίζονται στην αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Οι δύο ευρύτερα χρησιμοποιουμενες σωματιδιακές μέθοδοι είναι η Lattice Boltzmann Method (LBM) και η Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH).

1.2 Lattice Boltzmann Method

Η μέθοδος Lattice Boltzmann [8] βασίζεται στην μεσοοσκοπική θεώρηση του ρευστού, όπως αυτή περιγράφεται στην κινητική θεωρία από την εξίσωση Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}},$$

όπου f η συνάρτηση κατανομής των σωματιδίων του ρευστού στον εξαδιάστατο χώρο κατάστασης του συστήματος (θέση και ορμή \mathbf{p}), m η μάζα των σωματιδίων, \mathbf{F} το πεδίο εξωτερικών δυνάμεων που επιδρούν στα σωματίδια, ενώ το δεξί μέλος ισούται με τη μεταβολή της f λόγω συγκρούσεων μεταξύ των σωματιδίων. Κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, ο χώρος κατάστασης του συστήματος και ο χρόνος διακριτοποιούνται και λαμβάνουν χώρα αλληλοδιάδοχα βήματα συγκρούσης (collision) και ροής (streaming):

$$\text{Σύγκρουση: } f_i(\mathbf{x}, t + \delta_t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau_f} (f_i^{\text{eq}} - f_i)$$

$$\text{Ροή: } f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta_t, t + \delta_t) = f_i(\mathbf{x}, t + \delta_t)$$

Με δείκτη i συμβολίζονται οι διακριτοποιημένες κατευθύνσεις της ορμής, με \mathbf{e}_i τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος αυτών, με τ_f ο συντελεστής χαλάρωσης προς την κατάσταση ισορροπίας f_i^{eq} και με δ_t το χρονικό βήμα της προσομοίωσης.

Η μέθοδος διαθέτει αρκετά πλεονεκτήματα τα οποία την καθιστούν ελκυστική σε ορισμένες εφαρμογές. Λόγω της τοπικότητας και κανονικότητας της επεξεργασίας και κίνησης των δεδομένων ταιριάζει ιδιαίτερα σε SIMD αρχιτεκτονικές παράλληλης επεξεργασίας, οι οποίες τα τελευταία χρόνια παρουσιάζουν τεράστια ανάπτυξη (π.χ. GPGPUs) [3, 20]. Επίσης διακρίνεται για την ευκολία με την οποία χειρίζεται ροές με πολλές φάσεις που πιθανόν αλληλεπιδρούν με συγκεκριμένο τρόπο και σε περίπλοκη γεωμετρία (όπως πορώδη μέσα). Αν και έχει γίνει σημαντική δουλειά στη χρήση της μεθόδου για προσομοίωση φαινομένων που άπτονται της παρούσας εργασίας τόσο σε θεωρητικό [38, 39] όσο και σε τεχνικό επίπεδο [17, 19], η LBM διαθέτοντας μεγάλο θεωρητικό υπόβαθρο αποτελεί αντικείμενο ενεργούς έρευνας για διεύρυνση και βελτίωση της εφαρμογής της προς κάθε κατεύθυνση.

1.3 Smoothed Particle Hydrodynamics

Η SPH είναι μια Λαγκρανζιανή² μέθοδος προσομοίωσης ρευστών που εισήχθη τη δεκαετία του 1970 για εφαρμογές στην αστροφυσική [12, 22] και έκτοτε έχει βρει ευρύτατη εφαρμογή σε πολλά πεδία, όπως τη βαλλιστική, αεροδυναμική, ναυπηγική και γραφικά [25]. Θεμέλιο της μεθόδου αποτελεί η αντικατάσταση του ρευστού από ένα σύνολο σωματιδίων, τα οποία φέρουν ιδιότητες του ρευστού και αποτελούν σημεία παρεμβολής για τον υπολογισμό αυτών σε άλλα σημεία του χώρου, λόγω του οποίου διαθέτει αρκετά πλεονεκτήματα:

- Εγγενής διατήρηση πολλών μεγεθών στο σύστημα λόγω της σωματιδιακής του φύσης, όπως μάζα, ορμή και ενέργεια.
- Ακριβής, ισότροπος και αμετάβλητος σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Galilean invariant) χειρισμός της καθαρής μεταφοράς (pure advection)
- Δυνατότητα προσαρμογής της αναλυτικότητας (resolution) και κατά συνέπεια του υπολογιστικού φόρτου δυναμικά συναρτήσει της θέσης, χρόνου ή άλλων παραγόντων.
- Εύκολος χειρισμός ορίων και ειδικών αλληλεπιδράσεων σε εφαρμογές με πολλές φάσεις/υλικά, μέσω των σωματιδιακών αλληλεπιδράσεων.

1.3.1 Θεωρητική θεμελίωση

Έστω η ταυτότητα

$$f(\mathbf{r}) = \int_V f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

όπου $f(\mathbf{r})$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το V , $\delta(\mathbf{r})$ η δέλτα του Dirac και $\mathbf{x} \in V$. Η συνάρτηση δέλτα μπορεί να θεωρηθεί η οριακή περίπτωση ενός πυρήνα εξομάλυνσης $W(\mathbf{r}, h)$ με τις εξής ιδιότητες

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r}, h) = \delta(\mathbf{r}) \quad \text{και} \quad \int_V W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x} = 1 \quad (2)$$

Τότε, για μικρές τιμές του h ισχύει

$$f(\mathbf{r}) \approx \int_V f(\mathbf{x}) W(\mathbf{r} - \mathbf{x}, h) d\mathbf{x} \quad (3)$$

²Σε αντίθεση με την Οϊλεριανή (Eulerian) θεώρηση, όπου η ροή περιγράφεται ως συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, στις Λαγκρανζιανές (Lagrangian) μεθόδους τμήματα του ρευστού (fluid parcels) αποτελούν τα σημεία αναφοράς.

Αφού διακριτοποιήσουμε το πεδίο f σε σωματίδια πυκνότητας ρ_i και μάζας m_i μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και να διαιρέσουμε με ρ το δεξί μέλος της σχέσης 3, το οποίο μετατρέπεται πλέον σε διακριτό άθροισμα. Παρατηρώντας ότι $\rho * d\mathbf{x} = m$, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση που αποτελεί τη βάση προσέγγισης οποιουδήποτε μεγέθους A σύμφωνα με την SPH

$$A(\mathbf{r}) \approx \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} A(\mathbf{r}_i) W(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i, h) \quad (4)$$

Σύμφωνα με αυτή, η τιμή της A σε μια θέση του χώρου \mathbf{r} μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά από το σταθμισμένο άθροισμα των τιμών της στα γειτονικά σωματίδια i . Η συνεισφορά κάθε σωματιδίου καθορίζεται τόσο από το λόγο της μάζας του προς την τοπική πυκνότητα m_i/ρ_i , όσο και από την απόστασή του από το σημείο υπολογισμού της A μέσω του πυρήνα $W(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i, h)$.

1.3.2 Διανυσματικοί τελεστές σε διακριτοποιημένα πεδία

Δεδομένου ότι $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$, από τη σχέση 4 για τη βάθμωση του μεγέθους A προκύπτει

$$\nabla A(\mathbf{r}) \approx \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} A(\mathbf{r}_i) \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i, h) \quad (5)$$

Αντίστοιχα, για την απόκλιση και το στροβιλισμό του διανυσματικού μέγεθους \mathbf{A}

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i, h) \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \times \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i, h) \quad (7)$$

Αξίζει να σημειωθεί η εξάρτηση της προσέγγισης αποκλειστικά από τις τιμές της συνάρτησης $A(\mathbf{r}_i)/\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$ και της βάθμωσης του πυρήνα εξομάλυνσης ∇W , χαρακτηριστικό ιδιαίτερα χρήσιμο υπολογιστικά, καθώς η τελευταία μπορεί να προϋπολογιστεί.

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να τροποποιηθούν για την ικανοποίηση ειδικών συνθηκών της εκάστοτε εφαρμογής. Στην παρούσα περίπτωση απαιτείται η διατήρηση της ορμής στο ρευστό, η οποία μεταφράζεται στην εξασφάλιση αντισυμμετρικών δυνάμεων (δράστης - αντίδρασης) μεταξύ των σωματιδίων του ρευστού. Η εξίσωση Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (8)$$

όπου ρ η πυκνότητα, \mathbf{v} η ταχύτητα, P η πίεση, \mathbf{g} η πυκνότητα εξωτερικών δυνάμεων και μ το δυναμικό ιξώδες του ρευστού, είναι η έκφραση του δεύτερου νόμου του Newton για ρευστά. Σύμφωνα με αυτή, οι εσωτερικές δυνάμεις του ρευστού οφείλονται στη βάθμωση του πεδίου πίεσης και το γινόμενο του δυναμικού ιξώδους με τη λαπλασιανή του πεδίου ταχύτητας. Μπορούμε να καταλήξουμε σε διαφορετικό εκτιμητή για τη βάθμωση της πίεσης ξεκινώντας από την ταυτότητα

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\nabla P}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \Leftrightarrow \nabla P = \rho \left[\frac{P}{\rho^2} \nabla \rho + \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) \right]$$

Αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος τις βαθμώσεις με τους εκτιμητές τους κατά SPH

$$\begin{aligned} \nabla P &\approx \rho \left[\frac{P}{\rho^2} \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} \rho \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) + \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} \frac{P_i}{\rho_i} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \right] \\ &\approx \rho \sum_i m_i \left(\frac{P}{\rho^2} + \frac{P_i}{\rho_i} \right) \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \end{aligned} \quad (9)$$

προκύπτει η σχέση που χρησιμοποιείται ευρύτατα για την εκτίμηση της βάθμωσης της πίεσης και ικανοποιεί παράλληλα τη συνθήκη αντισυμμετρικότητας για τη διατήρηση της ορμής και στροφορμής. Παρόμοια, για τη λαπλασιανή του πεδίου ταχύτητας χρησιμοποιείται συνήθως η προσέγγιση

$$\nabla^2 \mathbf{v} \approx \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \nabla^2 W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, h) \quad (10)$$

η οποία διαθέτει την επιθυμητή για την προσομοίωση των δυνάμεων ιξώδους ιδιότητα του μηδενισμού σε κατάσταση ομοιόμορφης μεταφορικής κίνησης του ρευστού (ίση ταχύτητα στο εύρος του πυρήνα εξομάλυνσης).

1.3.3 Καταστατική εξίσωση

Για τον υπολογισμό της βάθμωσης της πίεσης είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των τιμών της στα σημεία δειγματοληψίας (σωματίδια). Αυτός γίνεται με τη βοήθεια μιας καταστατικής εξίσωσης, η οποία συσχετίζει την πυκνότητα με την πίεση του ρευστού. Επομένως για να εκτιμηθεί η πίεση σε κάποιο σημείο πρέπει πρώτα να εκτιμηθεί η πυκνότητα στο σημείο αυτό από τη σχέση 4:

$$\rho(\mathbf{r}) \approx \sum_i m_i W(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i, h) \quad (11)$$

Οι δύο ευρύτερα χρησιμοποιούμενες καταστατικές εξισώσεις είναι αυτή των ιδανικών αερίων [10, 27]

$$P = k(\rho - \rho_0), \quad (12)$$

που συσχετίζει την πίεση με την απόκλιση από την πυκνότητα αναφοράς ρ_0 με μια σταθερά αναλογίας k , καθώς και η εξισωση Tait [4, 25]

$$P = B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (13)$$

όπου $\gamma = 7$ αδιάστατη σταθερά και B σταθερά αναλογίας που ρυθμίζει την ανοχή στις διακυμάνσεις της πυκνότητας. Η τιμή της B καθορίζεται βάσει της αναλογίας

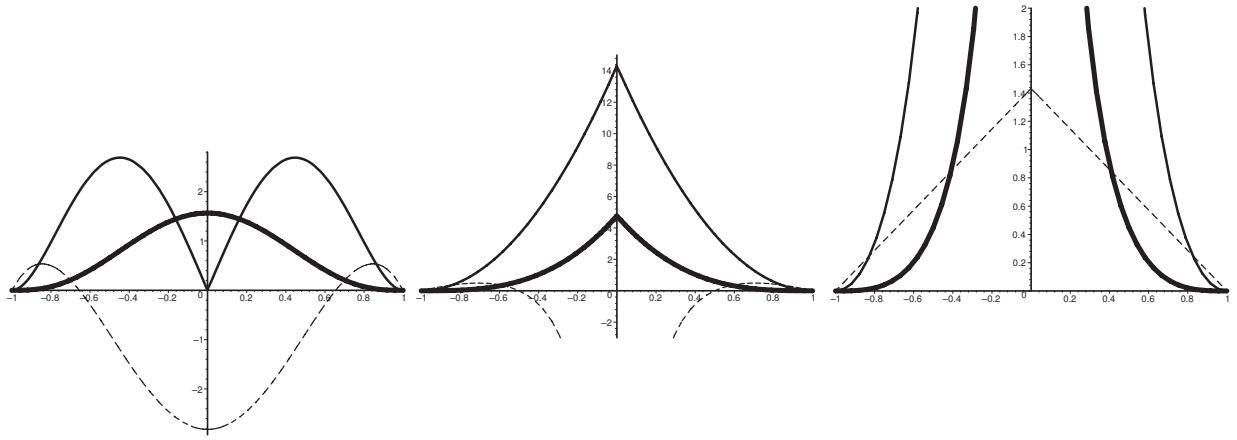
$$\frac{|\Delta\rho|}{\rho_0} \sim \frac{\|\mathbf{v}_f\|^2}{c_s^2}, \quad (14)$$

όπου $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, \mathbf{v}_f η ταχύτητα της ροής και c_s η ταχύτητα του ήχου στο ρευστό. Εάν θέσουμε $\eta = |\Delta\rho|/\rho_0$, τότε ισοδύναμα ισχύει $c_s \sim \mathbf{v}_f/\sqrt{\eta}$. Μπορεί να τεθεί άνω όριο για το η (λ.χ. $\eta = 0.01$ για διακυμάνσεις πυκνότητας της τάξης του 1%), το οποίο επιβάλλεται στην προσομοίωση θέτοντας $B = \rho_0 c_s^2 / \gamma$. Ωστόσο, για λόγους ευστάθειας, η χρήση της εξισωσης Tait απαιτεί πολύ μικρό χρονικό βήμα, λόγω της παρουσίας του c_s^2 στο συντελεστή αναλογίας B .

1.3.4 Πυρήνες εξομάλυνσης

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η επιλογή του πυρήνα εξομάλυνσης είναι σημαντική, καθώς από αυτήν εξαρτάται άμεσα η ακρίβεια των προσεγγίσεων στο διακριτοποιημένο ρευστό. Ο πυρήνας εξομάλυνσης θα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις 2, να είναι συνεχής και παραγωγίσιμος (για τον υπολογισμό των προσεγγίσεων διαφορικών τελεστών) καθώς και σφαιρικά συμμετρικός, ώστε οι τιμές του να εξαρτώνται αποκλειστικά από την απόσταση από το κέντρο του $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|$ και την ακτίνα εξομάλυνσης h . Συνήθως χρησιμοποιούνται διαφορετικοί πυρήνες για κάθε προσεγγιζόμενο μέγεθος, αναλόγως των ειδικών συνθηκών που απαιτούνται για την προσομοίωση της συμπεριφοράς που αυτό προκαλεί [27]

Στο σχήμα 1 φαίνονται οι τρεις πυρήνες W_{poly6} W_{spiky} και $W_{\text{viscosity}}$ που χρησιμοποιούνται πρακτικά για τον υπολογισμό της πυκνότητας, της βάθμωσης της πίεσης και της λαπλασιανής του πεδίου ταχύτητας αντίστοιχα. Είναι σημαντικό για την ευστάθεια της προσομοίωσης, αλλά και λογικό από φυσικής εποπτείας οι πυρήνες και οι παράγωγοι τους να



Σχήμα 1: Οι τρεις πυρήνες εξομάλυνσης W_{poly6} , W_{spiky} και $W_{\text{viscosity}}$ (από δεξιά προς τα αριστερά).

Με τονισμένη γραμμή απεικονίζεται ο πυρήνας, με λεπτή η βάθμωσή του (στην κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων) και με διακεκομένη η λαπλασιανή του, για ακτίνα εξομάλυνσης $h = 1$. (από Müller et al, 2003) [27]

τείνουν στο μηδέν στα όρια της ακτίνας εξομάλυνσης. Για τον υπολογισμό της πυκνότητας χρησιμοποιείται ο πυρήνας

$$W_{\text{poly6}}(r, h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3 & 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (15)$$

ο οποίος είναι τυπικός κωδωνοειδής πληρώντας τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Παρ' όλ' αυτά δε χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της βάθμωσης της πίεσης, καθότι η μηδενική παράγωγος στο κέντρο οδηγεί σε συσσωμάτωση (clustering) των σωματιδίων λόγω απουσίας απωστικών δυνάμεων μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό, έχει προταθεί [10] ο πυρήνας

$$W_{\text{spiky}}(r, h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - r)^3 & 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (16)$$

$$\nabla W_{\text{spiky}}(r, h) = \frac{-45}{\pi h^6} (h - r)^2 \quad (17)$$

για τον υπολογισμό των δυνάμεων οφειλομένων στη βάθμωση της πίεσης. Ωστόσο οι δυνάμεις ιξώδους είναι ανάλογες της λαπλασιανής του πυρήνα, με αποτέλεσμα οι παραπάνω πυρήνες να είναι ακατάλληλοι για την προσέγγισή τους. Δεδομένου ότι οι δυνάμεις αυτές οφείλονται στην εσωτερική τριβή του ρευστού, έχουν πάντα αποσθεστικά αποτελέσματα

αμιθλύνοντας τις τοπικές διαφορές στην ταχύτητά του. Αντίθετα, οι λαπλασιανές των παραπάνω πυρήνων αλλάζουν αλλάζει πρόσημο παίρνοντας αρνητικές τιμές. Έτσι υιοθετείται ο πυρήνας

$$W_{\text{viscosity}}(r, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1 & 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (18)$$

$$\nabla^2 W_{\text{viscosity}}(r, h) = \frac{45}{\pi h^6} (h - r) \quad (19)$$

ο οποίος έχει παντού θετική λαπλασιανή, της οποίας η γραμμικότητα συμβάλλει περαιτέρω στην ευστάθεια της προσομοίωσης.

1.3.5 Ολοκλήρωση και χρονικό βήμα

Εκτός της επιλογής του πυρήνα, καθοριστική για την ακρίβεια και ευστάθεια της προσομοίωσης είναι η επιλογή του χρονικού βήματος και της μεθόδου ολοκλήρωσης στο χρόνο. Το χρονικό βήμα υπολογίζεται συνήθως με βάση το κριτήριο CFL (Courant-Friedrichs-Lowy) το οποίο στην απλούστερη μορφή του δίνεται από τη σχέση

$$\delta t_{\text{CFL}} = C \frac{\delta x}{v}, \quad (20)$$

όπου C ο αδιάστατος αριθμός Courant (συνήθως $0 < C \leq 1$), δχ είναι κάποιο χαρακτηριστικό μήκος και ν μια σχετική με αυτό χαρακτηριστική ταχύτητα. Στην περίπτωση της SPH μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ακτίνα εξομάλυνσης h ή η ακτίνα των σωματιδίων σαν δχ, ενώ για την ν είτε η ταχύτητα του ήχου στο ρευστό, είτε η ταχύτητα των σωματιδίων για τη μέγιστη ανεκτή μεταβολή πυκνότητας κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, είτε η μέγιστη ταχύτητα των σωματιδίων (αν μπορεί αυτή εκ των προτέρων να εκτιμηθεί με αξιοπιστία και δεν οδηγεί σε μη αποδεκτές μεταβολές πυκνότητας). Μεταβλητό χρονικό βήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό προϋποθέσεις εξαρτώμενες και από την μέθοδο ολοκλήρωσης, με την προσαρμογή να λαμβάνει χώρα σε κάθε βήμα της προσομοίωση με βάση το κριτήριο CFL [13].

Για την αριθμητική ολοκλήρωση στο χρόνο χρησιμοποιούνται πολλές μέθοδοι, μεταξύ των οποίων η predictor-corrector και η Runge-Kutta-Fehlberg. Ίσως η ευρύτερα διαδεδομένη είναι η οικογένεια των Störmer-Verlet και Leapfrog, οι οποίες είναι μέθοδοι δεύτερης τάξης με χαμηλές υπολογιστικές απαιτήσεις και καλή αριθμητική ευστάθεια. Η μέθοδος Leapfrog

οφείλει το όνομά της στον αλληλοδιάδοχο υπολογισμό της θέσης και της ταχύτας ανα μισό χρονικό βήμα

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_{i-1/2} \delta t \\ \mathbf{v}_{i+1/2} &= \mathbf{v}_{i-1/2} + \mathbf{a}_i \delta t\end{aligned}\tag{21}$$

ή ισοδύναμα, σε ακέραια χρονικά βήματα

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \left(\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \frac{\delta t}{2} \right) \delta t \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}}{2} \delta t\end{aligned}\tag{22}$$

Λόγω της εξάρτησης των δυνάμεων (λ.χ. ιξώδους) και από την ταχύτητα στην SPH μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες τεχνικές εκτίμησης για τιμές στο μέλλον, όπως την επιτάχυνση \mathbf{a}_{i+1} [29]. Αυτές προσφέρουν παράλληλα τη δυνατότητα χρήσης μεταβλητού χρονικού βήματος [33], η οποία δεν υπάρχει στην απλή Leapfrog μέθοδο, λόγω της εγγενούς συμμετρίας της [32].

2 Υλοποίηση

Η προσομοίωση αποτελείται από δύο βασικά στοιχεία, την ακτογραμμή (terrain) και το ρευστό (fluid). Το ρευστό είναι το δυναμικό στοιχείο, σε αντίθεση με τη στατική ακτογραμμή. Στο πρόγραμμα προσομοίωσης, που σημειώνεται στη μηχανή φυσικής Bullet, δίνονται οι αρχικές συνθήκες του ρευστού (θέση και ταχύτητα) και εισάγεται η ακτογραμμή με τη μορφή τρισδιάστατου τριγωνικού πλέγματος επιφάνειας (triangle surface mesh). Στη συνέχεια εκτελείται η προσομοίωση και τα δεδομένα εξάγονται σε αρχεία τύπου VTK που μπορούν εισαχθούν σε ένα από τα πολλά προγράμματα οπτικοποίησης που είναι διαθέσιμα ελεύθερα (λ.χ. ParaView).

2.1 Bullet

Η Bullet είναι μια μηχανή φυσικής που προσομοιώνει ανίχνευση και χειρισμό συγκρούσεων καθώς και δυναμική εύκαμπτων και στερεών σωμάτων. Χρησιμοποιείται ευρύτατα στην παραγωγή ηλεκτρονικών παιχνιδιών και οπτικών εφέ σε ταινίες, ενώ διατίθεται ως ελεύθερο λογισμικό ανοιχτού πηγαίου κώδικα, αναπτυσσόμενη συνεχώς και υποστηριζόμενη από μεγάλη και ενεργή κοινότητα χρηστών.

Η Bullet είναι σχεδιασμένη βάσει αντικειμενοστραφούς αρχιτεκτονικής, καθώς οτιδήποτε, ακόμη και ο κόσμος της εξομοίωσης με τις όποιες ιδιότητές του αναπαρίσταται με αντικείμενα, τα οποία δημιουργούνται, τροποποιούνται και καταστρέφονται βάσει των αντίστοιχων μεθόδων της κλάσης τους. Ο κόσμος της προσομοίωσης, που ανήκει στην κλάση `btDiscreteDynamicsWorld` δημιουργείται με βάση τέσσερα ορίσματα, εκ των οπίων δύο (`btCollisionConfiguration` και `btDispatcher`) σχετίζονται με τους αλγορίθμους χειρισμού συγκρούσεων και αφήνονται στις προεπιλεγμένες τους κλάσεις. Το τρίτο όρισμα (`btBroadphaseInterface`) αφορά την οργάνωση των σωμάτων της προσομοίωσης στη μνήμη με σκοπό τον εκ των προτέρων αποκλεισμό συγκρούσεων μεταξύ τους για την ελάφρυνση του υπολογιστικού φόρτου. Στην παρούσα εργασία επιλέγεται η κλάση `btDbvtBroadphase` η οποία ταξινομεί δυναμικά τα σώματα της προσομοίωσης σε δομή δένδρου με βάση τα προσανατολισμένα με τους άξονες συντεταγμένων περιβάλλοντα κουτιά τους (AABBs). Το τελευταίο όρισμα (`btConstraintSolver`) καθορίζει τον τρόπο χειρισμού των γεωμετρικών περιορισμών κατά την προσομοίωση. Εδώ επιλέγεται η χρήση του SIS (Sequential Impulse Solver) για την επίλυση πολλαπλών μηχανικών περιορισμών [7]. Τα

σώματα της προσομοίωσης αρχικοποιούνται όπως περιγράφεται στις παραγράφους παρακάτω και προστίθενται στον κόσμο της προσομοίωσης με τη μέθοδο `addRigidBody`.

Η προσομοίωση του κόσμου διεξάγεται σε διακριτά χρονικά βήματα μέσω της μεθόδου `stepSimulation`, η οποία δέχεται τρία ορίσματα, έστω T , k και t αντίστοιχα. Το πρώτο από αυτά καθορίζει το χρονικό διάστημα που θα προσομοιωθεί συνολικά μέχρι το επόμενο στιγμιότυπο της προσομοίωσης (για συλλογή δεδομένων), το δεύτερο το μέγιστο αριθμό εσωτερικών βημάτων εντός αυτού και το τρίτο τη χρονική διάρκεια του εσωτερικού (αδιαίρετου) βήματος της προσομοίωσης (όπως είναι προφανές, θα πρέπει να ισχύει $T \geq k*t$). Η Bullet παρέχει τη δυνατότητα ορισμού μιας `callback` συνάρτησης, η οποία καλείται μετά από κάθε εσωτερικό βήμα της προσομοίωσης και όπως θα αναλυθεί παρακάτω, εκτελεί τον κώδικα που υλοποιεί τη μηχανή SPH για την προσθήκη των δυνάμεων ρευστού στα σωματίδια.

2.2 Ακτογραμμή

Η ακτογραμμή αναπαρίσταται στο πρόγραμμα σαν ένα στατικό πλέγμα τριγώνων με ιεραρχικούς περιβάλλοντες όγκους (`btBvhTriangleMesh`) της Bullet. Τα δεδομένα του τρισδιάστατου μοντέλου εισάγονται από ένα αρχείο τύπου `obj` στο τριγωνικό πλέγμα αφού κανονικοποιηθούν σε κλίμακα βάσει ενός παράγοντα κλιμάκωσης (scaling factor) και θέση μετακινούμενα στο χώρο προς την αρχή των αξόνων (docking). Γύρω από την ακτογραμμή δημιουργείται και το όριό της (terrain boundary) το οποίο ταυτίζεται με το προσανατολισμένο στους άξονες περιβάλλον κουτί της (AABB). Η κανονικοποιημένη ακτογραμμή και το όριό της εξάγονται σε ένα αρχείο τύπου VTK, το οποίο χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση των δεδομένων. Σε κάθε εσωτερικό βήμα της προσομοίωσης συλλέγονται οι ώσεις που ασκεί το ρευστό στην ακτογραμμή σε ειδικό διάνυσμα, το οποίο χρησιμοποιείται για να εξαχθούν οι σχετικές πληροφορίες σε κάθε στιγμιότυπο.

2.3 Ρευστό

2.3.1 Αρχικοποίηση

Σύμφωνα με τη μέθοδο SPH όπως περιγράφηκε έως τώρα, το ρευστό διακριτοποιείται σε σωματίδια τα οποία χρησιμοποιούνται σαν σημεία παρεμβολής σε σταθμισμένα αθροίσματα

για την εκτίμηση των ιδιοτήτων του ρευστού στο χώρο. Λόγω των σημαντικών αποκλίσεων που μπορούν να προκύψουν εξαιτίας της έλλειψης γειτονικών σωματιδίων, η μέθοδος ενδείκνυται κυρίως για την προσομοίωση συμπιεστών ρευστών (αερίων), των οποίων η πυκνότητα δεν είναι σταθερή. Σε ασυμπίεστα ρευστά (υγρά) αντίθετα, όπου τα όρια είναι σαφή, καθίσταται προβληματικός ο υπολογισμός ποσοτητών κοντά σε αυτά λόγω μικρού αριθμού και ανομοιογενώς κατανεμημένων στο χώρο γειτονικών σωματιδίων. Για το λόγο αυτό στην παρούσα προσομοίωση υιοθετήθηκε μια διαφορετική προσέγγιση, όπου τα σωματίδια διαθέτουν υλική υπόσταση στερεών σφαιρών, η οποία μέσω επίλυσης γεωμετρικών περιορισμών σε κάθε βήμα της προσομοίωσης (Position-Based Dynamics – PBD [28]) εξασφαλίζει την ασυμπιεστότητα του ρευστού [23]. Οι γεωμετρικοί περιορισμοί επιλύονται από την Bullet, αποκλείοντας τη δημιουργία εκφυλισμένων περιπτώσεων όσον αφορά τις θέσεις των σωματιδίων, καθώς αυτά εμποδίζονται από το να πλησιάσουν περισσότερο από την απόσταση που υπαγορεύει η ονομαστική πυκνότητα του ρευστού. Επιπλέον, με τη μέθοδο αυτή διευκολύνεται ο χειρισμός των οριακών συνθηκών, χωρίς να απαιτούνται επιπρόσθετες τεχνικές για την αναπλήρωση γειτονικών σωματιδίων, όπως εικονικά σωματίδια (ghost particles – σωματίδια που δημιουργούνται δυναμικά και είναι συμμετρικά με τα σωματίδια του ρευστού ώς προς το σύνορο) [9], συνοριακά σωματίδια (boundary particles – το όριο (boundary) αποτελείται από σωματίδια με μικρό διάκενο μεταξύ τους, τα οποία ασκούν δυνάμεις στα σωματίδια του ρευστού) [24] ή συνάρτηση διόρθωσης ελλιπών εκτιμήσεων πυκνότητας κοντά στα όρια του ρευστού [11]. Για την αρχικοποίηση του ρευστού δίνεται η θέση του στο χώρο, η αρχική ταχύτητα και το επιθυμητό πλήθος σωματιδίων στα οποία πρόκειται να διακριτοποιηθεί. Τα σωματίδια προγραμματιστικά είναι δομές particle που εμπλουτίζουν αντικείμενα στερεών σωμάτων btRigidBdy της Bullet με πληροφορίες σχετιζόμενες με το ρευστό, όπως πυκνότητα και πίεση. Η μάζα του ρευστού ισοκατανέμεται στα σωματίδια, τα οποία όντας σφαιρικού σχήματος τοποθετούνται σε τρισδιάστατο εξαγωνικό πλέγμα HCP (Hexagonal Close-Packed), το οποίο επιτυγχάνει τη συνεκτικότερη δυνατή διευθέτηση ίσομεγεθών σφαιρών με κλάσμα κάλυψης χώρου ίσο με $\pi/(3\sqrt{2})$. Η ακτίνα των σωματιδίων υπολογίζεται από το κλάσμα αυτό και τον όγκο του ρευστού, ενώ η ακτίνα εξομάλυνσης ή τέτοια ώστε κάθε σωματίδιο να διαθέτει περίπου 50 γειτονικά σωματίδια με τα οποία αλληλεπιδρά, αριθμός

Για την αρχικοποίηση του ρευστού δίνεται η θέση του στο χώρο, η αρχική ταχύτητα και το επιθυμητό πλήθος σωματιδίων στα οποία πρόκειται να διακριτοποιηθεί. Τα σωματίδια προγραμματιστικά είναι δομές particle που εμπλουτίζουν αντικείμενα στερεών σωμάτων btRigidBdy της Bullet με πληροφορίες σχετιζόμενες με το ρευστό, όπως πυκνότητα και πίεση. Η μάζα του ρευστού ισοκατανέμεται στα σωματίδια, τα οποία όντας σφαιρικού σχήματος τοποθετούνται σε τρισδιάστατο εξαγωνικό πλέγμα HCP (Hexagonal Close-Packed), το οποίο επιτυγχάνει τη συνεκτικότερη δυνατή διευθέτηση ίσομεγεθών σφαιρών με κλάσμα κάλυψης χώρου ίσο με $\pi/(3\sqrt{2})$. Η ακτίνα των σωματιδίων υπολογίζεται από το κλάσμα αυτό και τον όγκο του ρευστού, ενώ η ακτίνα εξομάλυνσης ή τέτοια ώστε κάθε σωματίδιο να διαθέτει περίπου 50 γειτονικά σωματίδια με τα οποία αλληλεπιδρά, αριθμός

που προκύπτει εμπειρικά σύμφωνα με τη βιβλιογραφία.

Μετά την αρχικοποίηση εξάγονται παράμετροι της προσομοίωσης σχετικά με το ρευστό:

Χρονικό βήμα Το χρονικό βήμα καθορίζεται όπως έχει ήδη αναφερθεί από το κριτήριο ευστάθειας CFL, με το χαρακτηριστικό μήκος να αποτελεί η ακτίνα των σωματιδίων και χαρακτηριστική ταχύτητα τη μέγιστη ταχύτητα των σωματιδίων με βάση την αρχική μηχανική ενέργεια του ρευστού.

Πλήθος γειτόνων Στην αρχική κατάσταση όπου τα σωματίδια είναι διευθετημένα στο πλέγμα HCP, γίνεται ανίχνευση γειτόνων ώστε να μετρηθεί ο πραγματικός μέγιστος αριθμός γειτόνων ένός σωματιδίου (ο οποίος δεν είναι σχεδόν ποτέ ακριθώς 50 λόγω διακριτοποίησης).

Καταστατική εξίσωση Καθώς το πρόβλημα της ασυμπιεστότητας λύνεται άμεσα μέσω της επίλυσης γεωμετρικών περιορισμών μεταξύ των σωματιδίων, ως καταστατική εξίσωση χρησιμοποιείται η γραμμική των ιδανικών αερίων (σχέση 12). Αυτή επιτρέπει μεγαλύτερο χρονικό βήμα και ανοχή όσον αφορά την ευστάθεια στις διακυμάνσεις της υπολογιζόμενης πυκνότητας. Σε περίπτωση υπολογισμού πολύ χαμηλής πυκνότητας μικρότερης από κάποιο κατώφλι (λ.χ. 0.9 της ονομαστικής) αυτή συμβατικά αντικαθίσταται από την ονομαστική, θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν αρκετά γειτονικά σωματίδια για αξιόπιστη εκτίμηση.

Συντελεστής πυκνότητας Λόγω της εξάρτησης των πυρήνων εξομάλυνσης από την ακτίνα εξομάλυνσης, αλλά και της μάζας των σωματιδίων από τη διακριτοποίηση, το σταθμισμένο άθροισμα της εκτίμησης της πυκνότητας δεν ισούται με την πραγματική πυκνότητα του ρευστού, αλλά σχετίζεται αναλογικά με έναν συντελεστή, ο οποίος εξάγεται κατά το στάδιο αυτό. Ο συντελεστής αυτός χρησιμοποιείται για την αναλογική αντιστοίχιση της αδιάστατης πυκνότητας με την πραγματική και υπολογίζεται με βάση τη μέγιστη πυκνότητα των σωματιδίων κατά την ανίχνευση γειτόνων στην αρχική κατάσταση όπως αναφέρεται παραπάνω.

2.3.2 Αναπαράσταση

Στις προσομοιώσεις SPH χρησιμοποιούνται διάφορες δομές δεδομένων με σκοπό τη βελτιστοποίηση της πρόσθασης και ενημέρωσης σε γειτονικά σωματίδια. Σε αυτές περιλαμ-

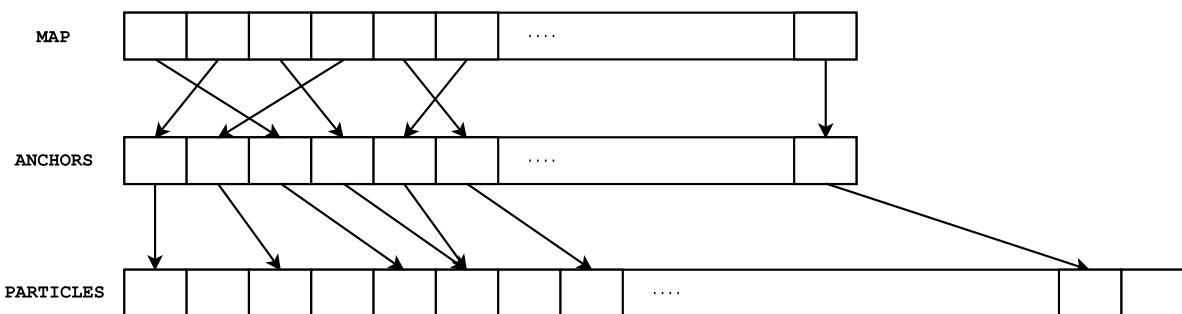
βάνονται οι συνδεδεμένες λίστες [26, 30], δομές δένδρων όπως το octree [21], απλά grid [36], καθώς και εξειδικευμένες δομές για GPUs, όπως kd-δένδρα [40] και z-indexing [14]. Για την καλύτερη απόδοση της παρούσας προσομοίωσης αναπτύχθηκε εξειδικευμένη δομή δεδομένων, στο εξής LP grid. Ο χώρος της προσομοίωσης διαιρείται σε ένα κυβικό πλέγμα προσανατολισμένο με το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, με το βήμα του πλέγματος (μήκος πλευράς των κύβων) να ισούται με την ακτίνα εξομάλυνσης της προσομοίωσης. Με τον τρόπο αυτό όλοι οι γείτονες ενός σωματιδίου βρίσκονται στα 26 κελιά που περιβάλλουν το κελι οποίο ανήκει. Η διάταξη των κελιών στη μνήμη έχει στόχο την διατήρηση της τοπικότητας (locality preserving, εξ ου και η ονομασία), ώστε κελιά που βρίσκονται κοντά στον τρισδιάστατο χώρο να βρίσκονται κοντά και στη μνήμη (η οποία είναι μονοδιάστατη και γραμμική). Έτσι, με την αντιγραφή ενός τμήματος κυρίας μνήμης (RAM) στην κρυφή μνήμη (cache) αυξάνεται η πιθανότητα τα δεδομένα γειτονικών σωματιδίων να μεταφέρονται συντονισμένα στην κρυφή μνήμη, με αποτέλεσμα την αύξηση του λόγου hit/miss και συνακόλουθα της ταχύτητας του προγράμματος.

Οργάνωση Στη δομή `lp_grid` αποθηκεύονται διάφορες παράμετροι της προσομοίωσης όπως η αρχή του (`origin`), το βήμα του (`step` που ισούται με την ακτίνα εξομάλυνσης `smoothing_radius`), το πλήθος των κελιών κατά μήκος κάθε άξονα (`x`, `y`, `z`), όπως και το πλήθος κελιών και σωματιδίων (`cell_count`, `particle_count`). Επίσης, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2, η δομή περιλαμβάνει τρία διανύσματα δεικτών:

MAP Στο διάνυσμα αυτό αποθηκεύονται δείκτες προς θέσεις εντός του `anchors`. Σκοπός του `map` είναι η διευθυνσιοδότηση σύμφωνα με τη βέλτιστη για τη διατήρηση της τοπικότητας διάταξή των κελιών (αντιστοίχιση τρισδιάστατου χώρου σε μονοδιάστατο). Διαθέτει `cell_count+1` θέσεις, με το επιπλέον στοιχείο να αντιστοιχεί σε ένα εικονικό κελί που περιέχει σωματίδια εκτός ορίων του πλέγματος.

ANCHORS Κάθε δείκτης του διάνυσματος αυτού σηματοδοτεί την αρχή του εκάστοτε κελιού (το πρώτο σωματίδιο) στο διάνυσμα `particles`. Τα κελιά αντιπροσωπεύονται διατεταγμένα προς διατήρηση τοπικότητας στο `anchors` και τα σωματίδια κάθε κελιού αποθηκεύονται σε διαδοχικές θέσεις του `particles`. Συνεπώς για τα στοιχεία του διάνυσματος αυτού ισχύει $a[i-1] \leq a[i]$ (στην περίπτωση που $a[i-1] = a[i]$, το κελί που αντιστοιχεί στο $a[i-1]$ δεν περιέχει κανένα σωματίδιο). Το διάνυσμα διαθέτει και αυτό `cell_count+1` θέσεις.

PARTICLES Το διάνυσμα αυτό διαθέτει `particle_count+1` θέσεις και περιέχει τα σωματίδια της προσομοίωσης, ενώ κάθε πραγματικό κελί i στην προσομοίωση αντιπροσωπεύεται από το ζεύγος δεικτών $a[i], a[i+1]$. Η επιπλέον θέση στο τέλος του διανύσματος χρησιμοποιείται για έγκυρο δείκτη τέλους του τελευταίου (εικονικού) κελιού (τα σωματίδια του οποίου αποθηκεύονται στις τελευταίες θέσεις του `particles`), καθώς και για έγκυρη αρχικοποίηση (κατά τη διάρκεια της οποίας, όπως θα φανεί παρακάτω, υπάρχει δείκτης προς τη θέση αυτή).



Σχήμα 2: Τα τρία διανύσματα διευθυνσιοδότησης και αποθήκευσης του `lp_grid`, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται γρήγορη πρόσθαση και αποτελεσματική για τη διατήρηση της τοπικότητας διάταξη των σωματιδίων στη μνήμη.

Η πρόσθαση στα κελιά του πλέγματος γίνεται με καθοδήγηση μέσω δεικτών (pointer cascading). Έστω οτι ζητούνται τα περιεχόμενα του κελιού στη διεύθυνση (i, j, k) του πλέγματος. Η τρισδιάστατη διεύθυνση μετατρέπεται σε μονοδιάστατη (έναν αριθμητικό δείκτη) μέσω μιας συνάρτησης `linearize`, η οποία αρκεί να υπολογίζει διαφορετικό αποτέλεσμα για κάθε έγκυρη τρισδιάστατη διεύθυνση εισόδου και να έχει πεδίο τιμών εντός του διαστήματος $[0, cell_count]$, προκειμένου η έξοδος να αποτελεί έγκυρη διεύθυνση για το διάνυσμα `map`. Τότε η αρχή του κελίου είναι ο δείκτης $a[c] = *map[linearize(i, j, k)]$ και το τέλος $a[c+1]$, με αποτέλεσμα τα σωματίδια του κελιού να βρίσκονται με έναν απλό βρόχο επανάληψης ανάμεσα στους δύο δείκτες, συμπεριλαμβανομένου του αρχικού, αλλά όχι του τελικού (δείκτης στο πρώτο σωματίδιο του επόμενου κελιού).

Αρχικοποίηση Η δημιουργία του `lp_grid` γίνεται σε τέσσερα στάδια:

1. Καθορίζεται η αρχή του πλέγματος, το βήμα, το πλήθος κελιών και σωματιδίων του και δεσμεύεται βάσει αυτών χώρος στη μνήμη.

2. Τα κελιά του πλέγματος ταξινομούνται στο χώρο (spatial sort) κατά μήκος μιας καμπύλης πλήρωσης χώρου (space-filling curve, όπως η διάταξη Z και η καμπύλη Hilbert), με σύχο τη διατήρηση της τοπικότητας στην τελική γραμμική διάταξη κατά το μέγιστο δυνατό βαθμό. Στη συνέχεια αρχικοποιείται το διάνυσμα `map`, ώστε στη θέση `map[linearize(i, j, k)]` να υπάρχει δείκτης στην αντίστοιχη θέση του `anchors` σύμφωνα με τη χωρική ταξινόμηση των κελιών.
3. Κατασκευάζεται το διάνυσμα `cell_pc` στις θέσεις του οποίου αποθηκεύεται το πλήθος των σωματιδίων σε κάθε κελί. Κατά τη διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται η συνάρτηση `particle_anchor`, η οποία παίρνει ως όρισμα το `lp_grid` και ένα σωματίδιο και επιστρέφει ένα δείκτη στον `anchor` του κελιού που περιέχει το σωματίδιο. Στη συνέχεια σύμφωνα με το `cell_pc` αρχικοποιούνται οι δείκτες στο διάνυσμα `anchors`.
4. Τα σωματίδια αποθηκεύονται στο διάνυσμα `particles`, στη θέση που δείχνει ο `anchor` του κελιού που ανήκουν, ενώ μετά από κάθε προσθήκη ο `anchor` αυξάνεται κατά 1 (δείχνει στην επόμενη θέση του `particles`). Στο τέλος της διαδικασίας κάθε `anchor` δείχνει στην αρχή του επόμενου κελιού (και ο τελευταίος στην τελευταία επιπλέον θέση του `particles`). Ο πρώτος `anchor` επαναφέρεται στην αρχή του `particles` και κάθε επόμενος εκεί που δείχνει ο προηγούμενός του.

Ακολουθεί ψευδοκώδικας για τη συνάρτηση `make_lp_grid` που δημιουργεί ένα `lp_grid`³:

```
lp_grid make_lp_grid(domain dom, fluid fl)
|   lp_grid lpg;
|   allocate_lp_grid (&lpg, dom, fl);
|   point cc[lpg.cell_count] = spatial_sort(collect_cell_centers(lpg));
|
|   // MAP initialization according to spatial sort.
|   for int i = 0 below lpg.cell_count:
|       lpg.map[linearize(cc[i].x, cc[i].y, cc[i].z)] = lpg.anchors + i;
|   lpg.map[lpg.cell_count] = lpg.anchors + lpg.cell_count;
|
|   // Store the particle count for each cell.
```

³Ονόματα μεταβλητών που λήγουν σε ρ υποδηλώνουν ότι η μεταβλητή αποτελεί δείκτη

```

|     ptrdiff cell_pc[lpg.cell_count+1] = {0};
|     for particle p in fl.particles:
|     |     cell_pc[particle_anchor(lpg, p) - lpg.anchors]++;
|     for int anchor_offset = 0; int i = 0 upto lpg.cell_count:
|     |     lpg.anchors[i] = lpg.particles + anchor_offset;
|     |     anchor_offset += cell_pc[i];
|
|
|     // Populate particle array and reset anchors
|     for particle p in fl.particles:
|     |     anchor* ap = particle_anchor(lpg, p);
|     |     **ap = p;
|     |     (*ap)++;
|     for int i = lpg.cell_count above 0:
|     |     lpg.anchors[ai] = lpg.anchors[ai-1];
|     lpg.anchors[0] = lpg.particles;
|
|
|     return lpg;

```

Ενημέρωση Μετά από κάθε βήμα της προσομοίωσης τα σωματίδια έχοντας μετακινηθεί ενδέχεται να βρίσκονται σε διαφορετικό κελί του πλέγματος, το οποίο πρέπει πλέον να ενημερωθεί. Τα σωματίδια ελέγχονται με τη σειρά και σε περίπτωση σφάλματος, γίνεται κυκλική μετακίνηση κατά μία θέση (shift) δεξιά/αριστερά στο τμήμα του διανύσματος particles μεταξύ της τρέχουσας και ορθής θέσης του σωματιδίου και αντίστοιχη μετακίνηση (± 1) των anchors του τμήματος αυτού. Στη χειρότερη περίπτωση η διαδικασία αυτή έχει απαγορευτική ασυμπτωτική συμπεριφορά ($O(n^2)$) σε συνήθεις όμως περιπτώσεις απαιτεί πολύ λιγότερο χρόνο, διότι:

- Κατά κανόνα μικρό πλήθος σωματιδίων αλλάζουν κελί σε κάθε βήμα, δεδομένου ότι τα κελιά είναι αρκετά μεγάλα σε σχέση με το μέγεθος και την ταχύτητα των σωματιδίων.
- Η διατήρηση της τοπικότητας εξασφαλίζει ότι τα κελιά άφιξης και προορισμού του σωματιδίου (τα οποία αναμένεται να είναι γειτονικά σε λογικό χρονικό βήμα) βρίσκονται κοντά στη γραμμική αναπαράσταση, με αποτέλεσμα η διαδικασία ενημέρωσης να αφορά μικρό τμήμα των διανυσμάτων particles και anchors.

Στη συνέχεια παρατίθεται ψευδοκώδικας για τη συνάρτηση update_lp_grid⁴:

```
void update_lp_grid (lp_grid lpg)
| anchor ta;
| particle tmp_storage;
| for anchor* iap = lpg.anchors below lpg.anchors + lpg.cell_count:
| | for anchor ia = *iap below *(iap + 1):
| | | anchor* tap = particle_anchor(lpg, *ia);
| | | if iap != tap:
| | | | tmp_storage = *ia;
| | | | if iap < tap:
| | | | | ta = *tap - 1;
| | | | | for anchor* ap = iap + 1 upto tap: (*ap)--;
| | | | | for anchor a = ia below ta: *a = *(a + 1);
| | | | | *ta = tmp_storage;
| | | | | ia--;
| | | | else:
| | | | | ta = *(tap + 1);
| | | | | for anchor* ap = iap above tap: (*ap)++;
| | | | | for anchor a = ia above ta: *a = *(a - 1);
| | | | | *ta = tmp_storage;
|
| return;
```

Όπως φαίνεται παραπάνω, στο βρόχο επανάληψης ελέγχεται κάθε σωματίδιο για το αν βρίσκεται αποθηκευμένο στο τμήμα του particles που αντιστοιχεί στο κελί στο οποίο βρίσκεται βάσει της θέσης του στο χώρο. Αν βρίσκεται αριστερότερα, μετακινείται στην πρώτη θέση του ορθού κελιού αποθήκευσης μέσω αριστερής κυκλικής ολίσθησης ανάμεσα στις δύο θέσεις, ενώ στην αντίθετη περίπτωση μετακινείται στην τελευταία του θέση μέσω δεξιάς κυκλικής ολίσθησης μεταξύ αυτών των θέσεων. Στη συνέχεια ενημερώνονται κατάλληλα οι anchors που δείχνουν στο τμήμα όπου λαμβάνει χώρα η ολίσθηση. Τέλος, στην περίπτωση αριστερής ολίσθησης στην τρέχουσα θέση του βρόχου ελέγχουν βρίσκεται μη

⁴Μεταβλητές των οποίων το όνομα ξεκινά με i αφορούν την τρέχουσα/αρχική θέση του σωματιδίου (initial) πριν την ενημέρωση, ενώ με t την τελική/ορθή (terminal)

ελεγμένο σωματίδιο και για το λόγο αυτό η μεταβλητή ελέγχου του βρόχου ία μειώνεται κατά ένα (ο έλεγχος γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά στο διάνυσμα particles).

2.3.3 Προσομοίωση

Για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων του ρευστού είναι απαραίτητος ο υπολογισμός πολλών σταθμισμένων αθροισμάτων που εξαρτώνται από τις ιδιότητες αλλά και την απόσταση μεταξύ σωματιδίων. Για να εξασφαλιστεί η διατήρηση της ορμής, οι αμοιβαίες συνεισφορές στα αθροίσματα αυτά συμμετρικοποιούνται (1.3.2), με αποτέλεσμα να λαμβάνουν τη μορφή αλληλεπίδρασης. Συνεπώς ο υπολογιστικός φόρτος μειώνεται στο μισό εάν κάθε αλληλεπίδραση ληφθεί υπόψη μία φορά για κάθε ζεύγος σωματιδίων, εξετάζοντας μόνο τα μισά κελιά γύρω από το τρεχον κελί κατά τη σάρωση του πλέγματος (αυτά που έχουν ελεγχθεί νωρίτερα, προκειμένουν να αυξηθεί η πιθανότητα τα σωματίδια τους να βρίσκονται ήδη στην κρυφή μνήμη).

Η προσομοίωση πραγματοποιείται σε σταθερό εσωτερικό χρονικό βήμα και ανά συγκεκριμένο αριθμό βημάτων εξάγεται και ένα στιγμιότυπο (frame), το οποίο περιέχει πληροφορίες για τα σωματίδια, το ρευστό και την ακτογραμμή. Τα αρχεία VTK που αναπαριστούν το στιγμιότυπο ονομάζονται σύμφωνα με τον αύξοντα αριθμό αυτού, ώστε τελικά να σχηματίζουν μια χρονοσειρά (file- ή time-series). Οι συγκρούσεις και οι περιορισμοί ανάμεσα στα υλικά σώματα επιλύονται από την Bullet, ενώ οι εσωτερικές δυνάμεις του ρευστού υπολογίζονται μέσω κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης που καλείται μετά από κάθε εσωτερικό βήμα στον κύριο βρόχο της προσομοίωσης (tick callback). Συνοπτικά εντός αυτής εκτελούνται τα εξής βήματα:

1. Καταγραφή και αποθήκευση των ώσεων (impulses) του ρευστού προς την ακτογραμμή.
2. Ενημέρωση του πλέγματος αποθήκευσης των σωματιδίων.
3. Καθαρισμός δεδομένων των σωματιδίων που πρόκειται να επανυπολογιστούν.
4. Ανιχνευση αλληλεπιδράσεων με σάρωση όλου του πλέγματος.
5. Υπολογισμός πυκνότητας στις θέσεις των σωματιδίων μέσω προοδευτικής άθροισης των αμοιβαίων συνεισφορών των αλληλεπιδρώντων ζευγών.

6. Υπολογισμός πίεσης στις ίδιες θέσεις μέσω της καταστατικής εξίσωσης του ρευστού, συναρτήσει της πυκνότητας.
7. Υπολογισμός και εφαρμογή των ώσεων που υπολογίζονται ως το γινόμενο των δυνάμεων πίεσης/ιξώδους και του χρονικού βήματος. Οι δυνάμεις είναι αντισυμμετρικές σε κάθε ζεύγος αλληλεπίδρασης, και οι μεν πίεσης είναι ανάλογες της διαφοράς πίεσης μεταξύ των δύο σημείων, οι δε ιξώδους της διαφοράς ταχυτήτων.

Για την ανακατασκευή της επιφάνειας του ρευστού υπολογίζεται σε διατεταγμένα σημεία το χρωματικό πεδίο (color field), ένα βαθμωτό πεδίο που ισοδυναμεί με την αδιάστατη πυκνότητα του ρευστού σε κάθε σημείο του χώρου (δηλαδή υπό την παραδοχή ότι κάθε σωματίδιο έχει μάζα ίση με 1). Τα κελιά του πλέγματος υποδιαιρούνται σε κυβικά υποκελιά, στις γωνίες των οποίων υπολογίζονται οι τιμές του χρωματικού πεδίου, από τις οποίες στη συνέχεια οπτικοποιείται η επιφάνεια του ρευστού ως ισοεπιφάνεια του πεδίου. Παρόμοια, για τη συνολική απεικόνιση των ώσεων του ρευστού προς την ακτογραμμή, κατασκευάζεται το αθροιστικό πεδίο ώσεων. Τα δείγματα του πεδίου αυτού υπολογίζονται στα ίδια σημεία με το χρωματικό πεδίο προσθέτοντας το μέτρο κάθε καταγραφόμενης ώσης στο κοντινότερο σημείο δειγματοληψίας μετά από κάθε βήμα της προσομοίωσης.

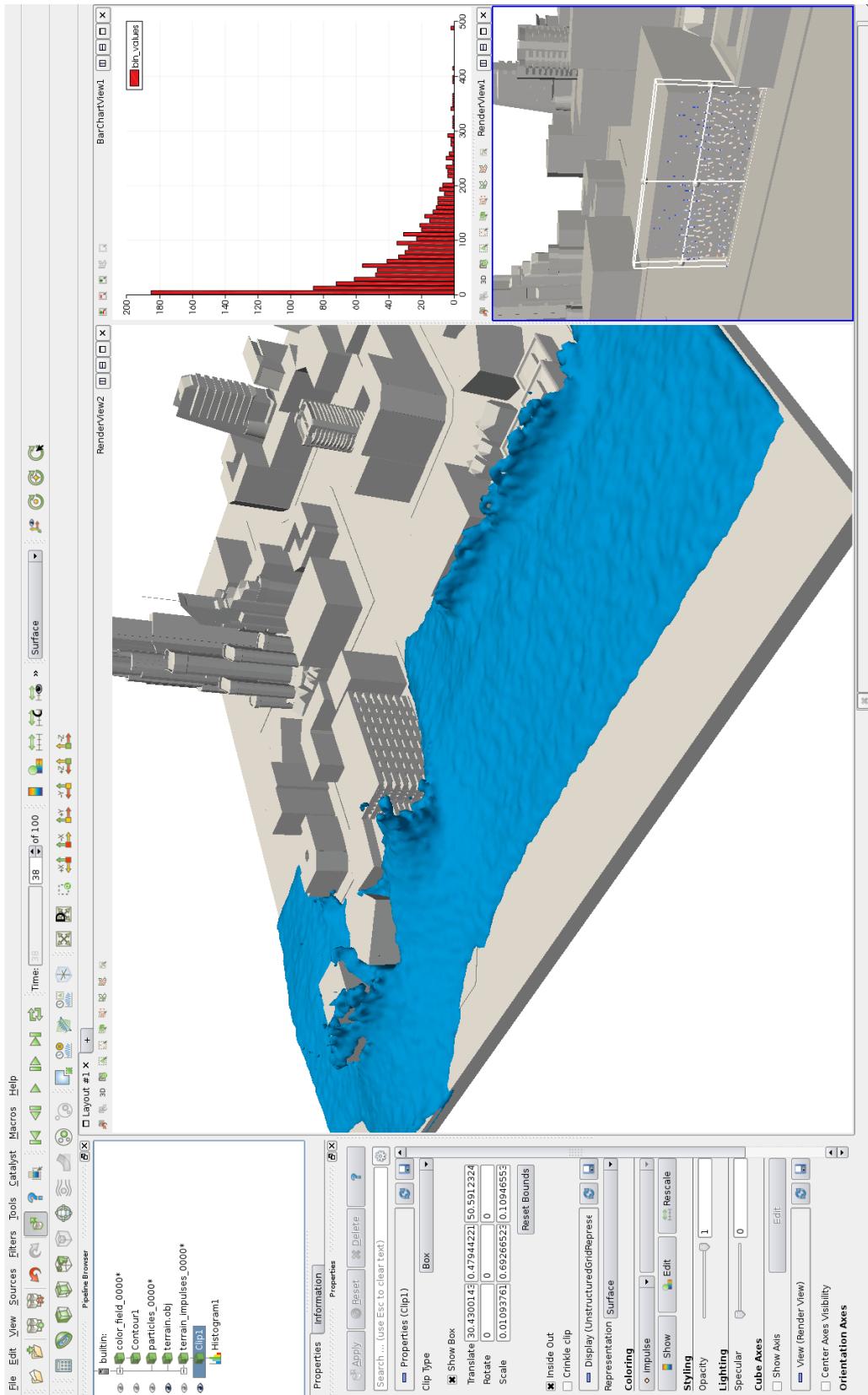
3 Αποτελέσματα – Συζήτηση

3.1 Προσομοιώσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα διαφόρων προσομοιώσεων. Τα αποτελέσματα εξάγονται από το πρόγραμμα προσομοίωσης με τη μορφή αρχείων κειμένου VTK, τα οποία στη συνέχεια μπορούν να οπτικοποιηθούν και να διερευνηθούν διαδραστικά μέσω διαφόρων ειδικών προγραμμάτων. Στην παρούσα εργασία, ως πρόγραμμα οπτικοποίησης χρησιμοποιήθηκε το ParaView, που αναπτύσσεται και διανέμεται ως ελεύθερο λογισμικό από το Los Alamos National Laboratory, το Sandia National Laboratory και την εταιρεία Kitware. Το ParaView τρέχει σε όλα τα ευρέως χρησιμοποιούμενα λειτουργικά συστήματα (Unix/Linux, MS Windows, Mac OS X), διαθέτει αρχιτεκτονική client - server για την οπτικοποίηση δεδομένων που βρίσκονται σε δίκτυο, υποστηρίζει αρχιτεκτονικές κατανεμημένης επεξεργασίας ενώ δημιουργεί LOD (Level of Detail) οπτικοποιήσεις για την διατήρηση διαδραστικού αριθμού FPS ακόμα και για μεγάλου όγκου δεδομένα.

Στην εικόνα 3 φαίνεται σε στιγμιότυπο οθόνης το περιβάλλον του ParaView κατά την οπτικοποίηση μιας προσομοίωσης 85k σωματιδίων. Στην αριστερή στήλη διακρίνεται το δένδρο με τις χρονοσειρές δεδομένων, στο κορυφαίο επίπεδο του οποίου υπάρχουν το χρωματικό πεδίο (color_field), τα σωματίδια της προσομοίωσης (particles), οι ώσεις του ρευστού προς την ακτογραμμή (terrain_impulses) και το μοντέλο της ακτογραμμής (terrain.obj). Το ίδιο σύνολο δεδομένων μπορεί να οπτικοποιηθεί ταυτόχρονα με πολλούς τρόπους, σε διάφορα RenderViews. Στο RenderView2 έχει επιλεγεί η απεικόνιση του μοντέλου της ακτογραμμής σε γενική άποψη καθώς και της ισοεπιφάνειας του χρωματικού πεδίου, η οποία δεδομένου ότι το χρωματικό πεδίο αντιπροσωπεύει την αδιάστατη πυκνότητα του ρευστού αποτελεί μια αποδεκτή προσεγγιστική ανακατασκευή της επιφάνειάς του. Στο RenderView1 έχει επιλεγεί η εστιασμένη απεικόνιση τμήματος της ακτογραμμής σε συνδυασμό με τις εντός του κουτιού επιλογής (clip) ώσεις προς αυτήν, οι οποίες είναι χρωματικά διαφορετικές αναλόγως του μεγέθους τους και αναπαρίστανται σε ιστόγραμμα (BarChartView1), όπου είναι εύκολο να παρατηρηθεί η κατανομή της ορμής στα σωματίδια.

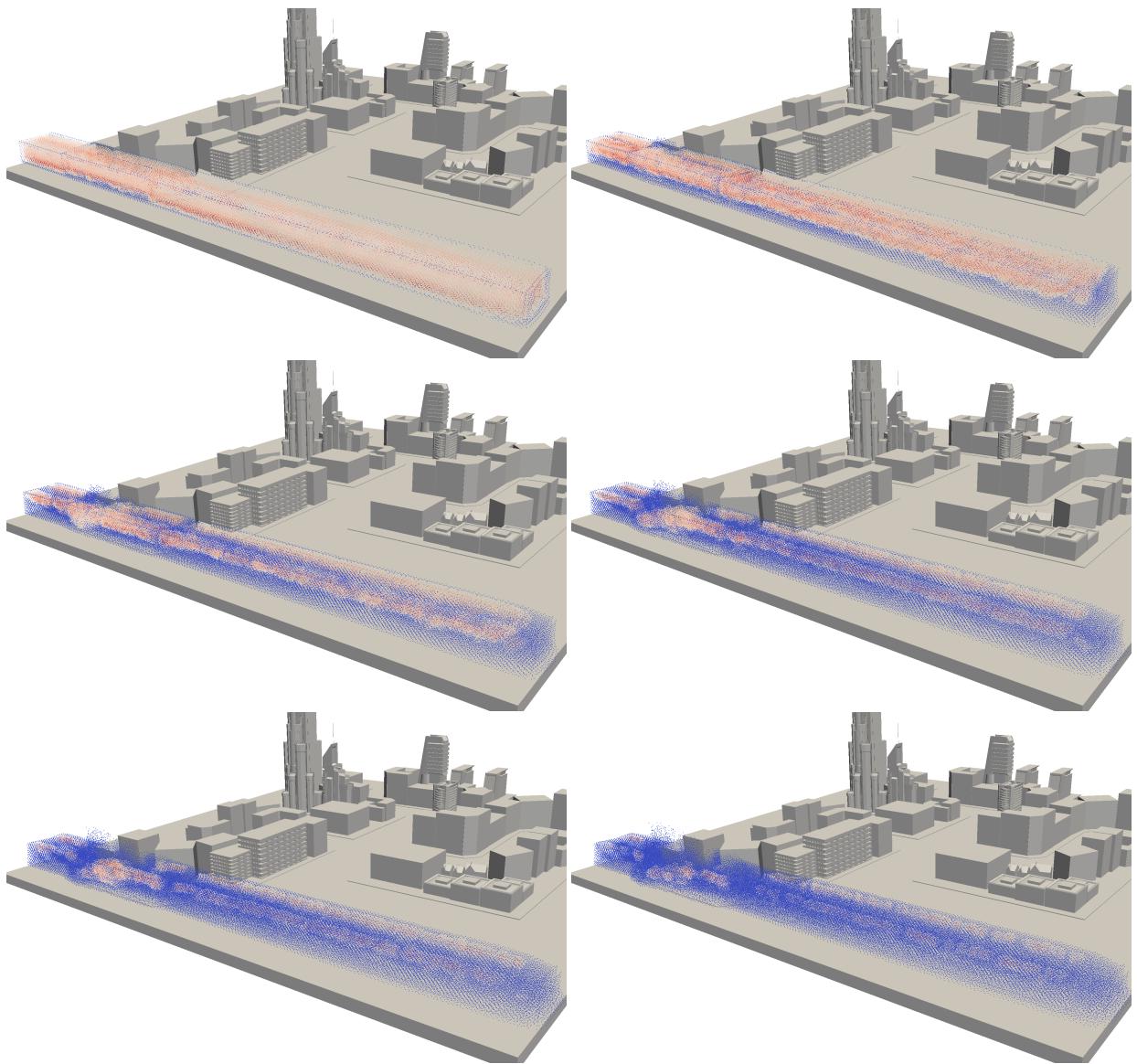
Όσον αφορά τις δυνάμεις που ασκούνται εντός του ρευστού, στις εικόνες 4 και 5 απεικονίζονται σε διαδοχικά στιγμιότυπα τα σωματίδια της ίδιας προσομοίωσης, χρωματικά κωδικοποιημένα με βάση τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά λόγω πίεσης και ιξώδους αντίστοι-



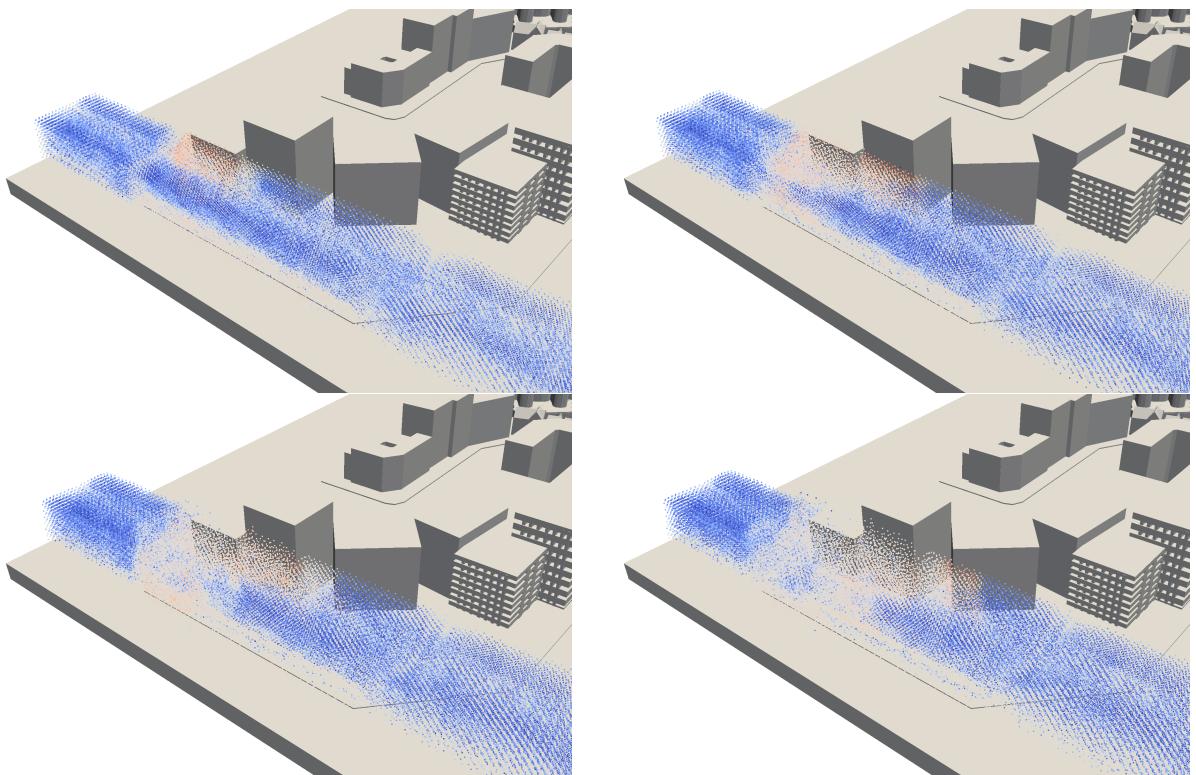
Σχήμα 3: Οπτικοποίηση προσωμοίωσης τουνάρι 85k σωματιδίων στο ParaView, συγκρότηση οθόνης. Αριστερά φαίνεται το τεραχικό δενδρο των δεδομένων που οπτικοποιούνται, σημειώνεται η ανακατασκευή της επιφάνειας του ρευστού σε συνδυασμό με το μοντέλο της ακτογραμμής, ενώ δεξιά οι ώστες που ασκεί το ρευστό στο επιλεγμένο τμήμα του μοντέλου καθώς και γραφική απεικόνιση αυτών σε ιστόγραμμα.

χα. Το τσουνάμι αναπαρίσταται σαν ένας όγκος νερού που εισβάλλει στην ακτογραμμή με μια σταθερή ταχύτητα. Η προσέγγιση αυτή βρίσκεται αρκετά κοντά στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι τα τσουνάμι εκδηλώνονται ως μερικές επαναλαμβανόμενες, ορμητικές παλλίροιες της θάλασσας, με μεγάλους όγκους νερού να ρέουν προς την ενδοχώρα. Στην εικόνα 4 παρατηρείται η διάδοση της ώστης του εδάφους στα αρχικά στάδια της προσομοίωσης μέσω δυνάμεων πίεσης στη σχετικά άθικτη ακόμα υδάτινη στήλη (θερμότητα χρώματος ανάλογη του μέτρου της δύναμης). Παρόμοια χρωματισμένες στην εικόνα 5 διακρίνονται οι δυνάμεις ιξώδους, που οφείλονται στη διαφορά ταχύτητας μεταξύ γειτονικών σωματιδίων και ως εκ τούτου είναι ισχυρές κατά την πρόσκρουση του ρευστού σε εμπόδια, όπου τμήματά του αλλάζουν ταχύτητα σε σχέση με τα κοντινά τους. Στην εικόνα 6 τα σωματίδια κωδικοποιούνται χρωματικά σύμφωνα με το πλήθος γειτονικών σωματιδίων εντός της ακτίνας εξομάλυνσης της προσομοίωσης. Όπως φαίνεται, λόγω της φύσης της προσομοίωσης (ροή σε ανοιχτό χώρο με πολύπλοκα όρια) το ρευστό διαθέτει υψηλό λόγο επιφάνειας προς όγκο, με αποτέλεσμα μεγάλο του μέρος να υποφέρει από υποδειγματοληψία. Για το λόγο αυτό υιοθετήθηκαν (όπως αναλύθηκε και στην παράγραφο 2.3.1) γεωμετρικοί περιορισμοί μεταξύ των σωματιδίων για την αναπλήρωση της χαμένης πληροφορίας.

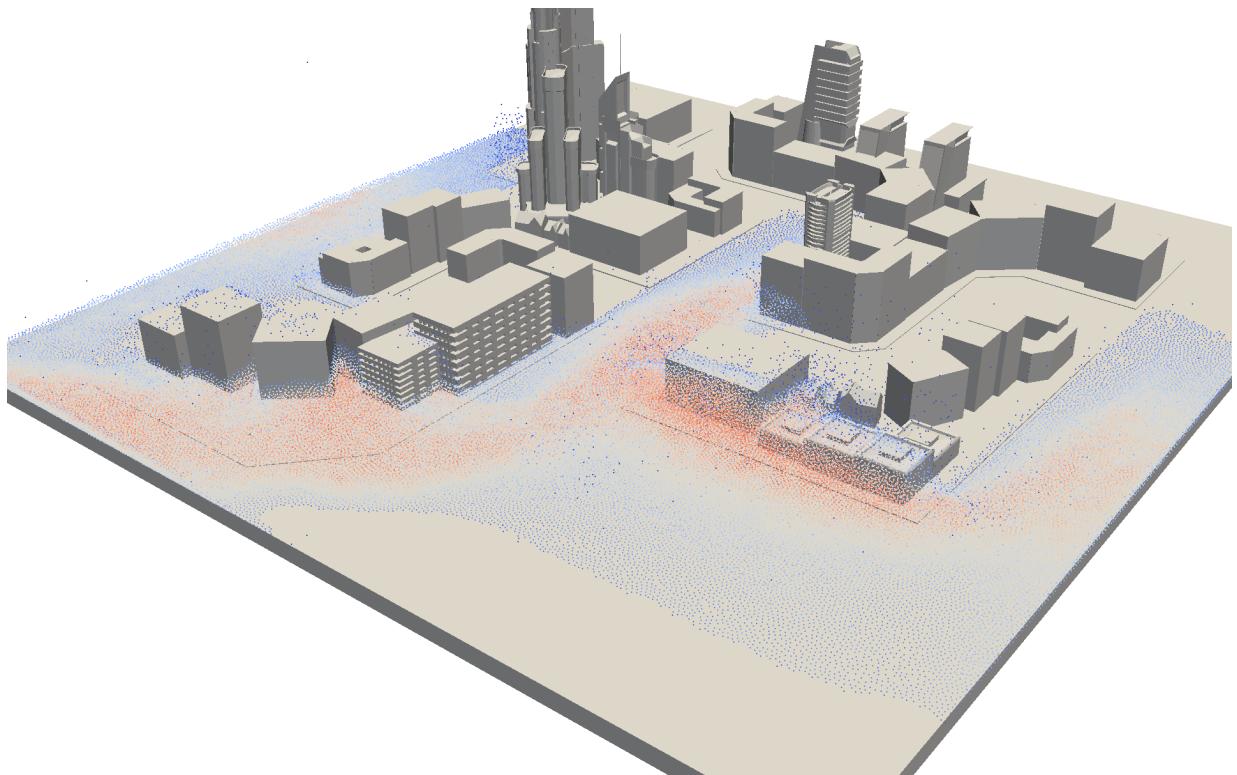
3.2 Συμπεράσματα – Μελλοντικές επεκτάσεις



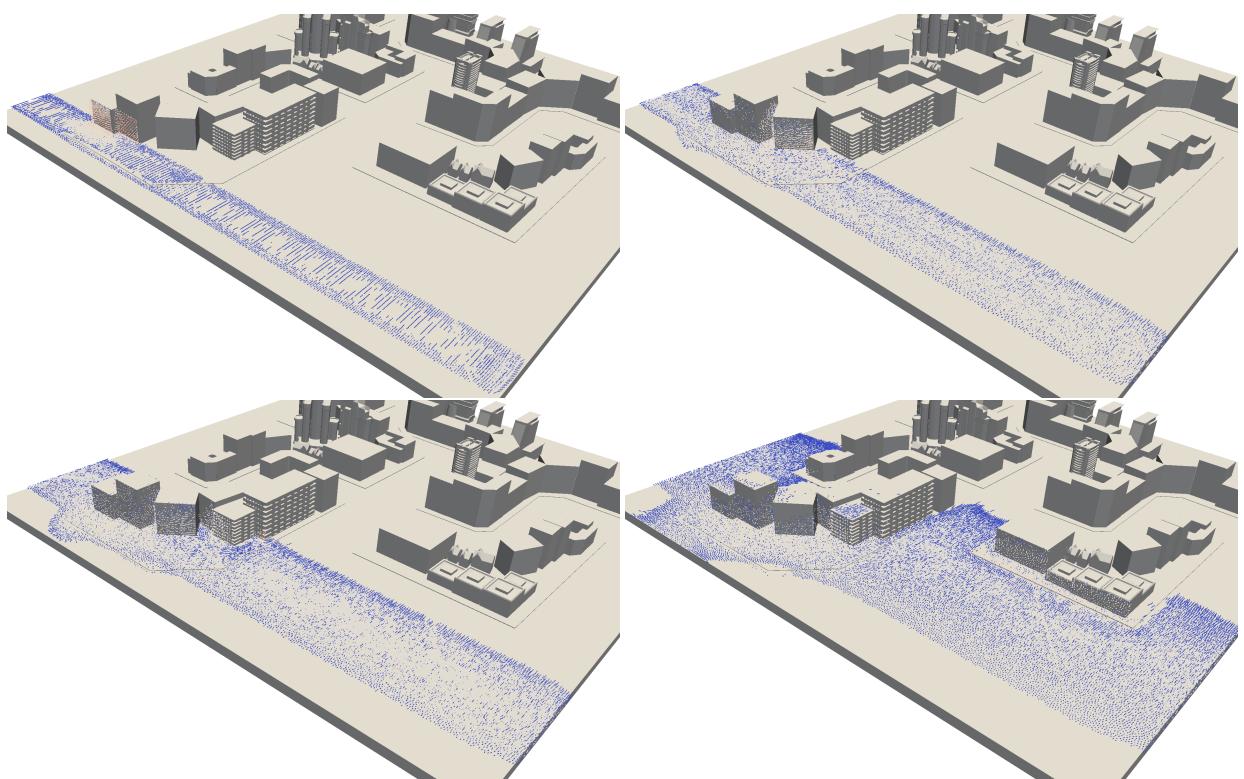
Σχήμα 4: Διαδοχικά στιγμιότυπα προσομοίωσης όπου αποτυπώνεται η διάδοση της ώσης του εδάφους στη υπερκείμενη σήλη νερού με τη μορφή δυνάμεων πίεσης. Τα σωματίδια της προσομοίωσης αναπαρίστανται με σημεία χρωματισμένα σύμφωνα με το μέτρο των δυνάμεων πίεσης που ασκούνται στο καθένα (Θερμότητα χρώματος ανάλογη του μέτρου της δύναμης).



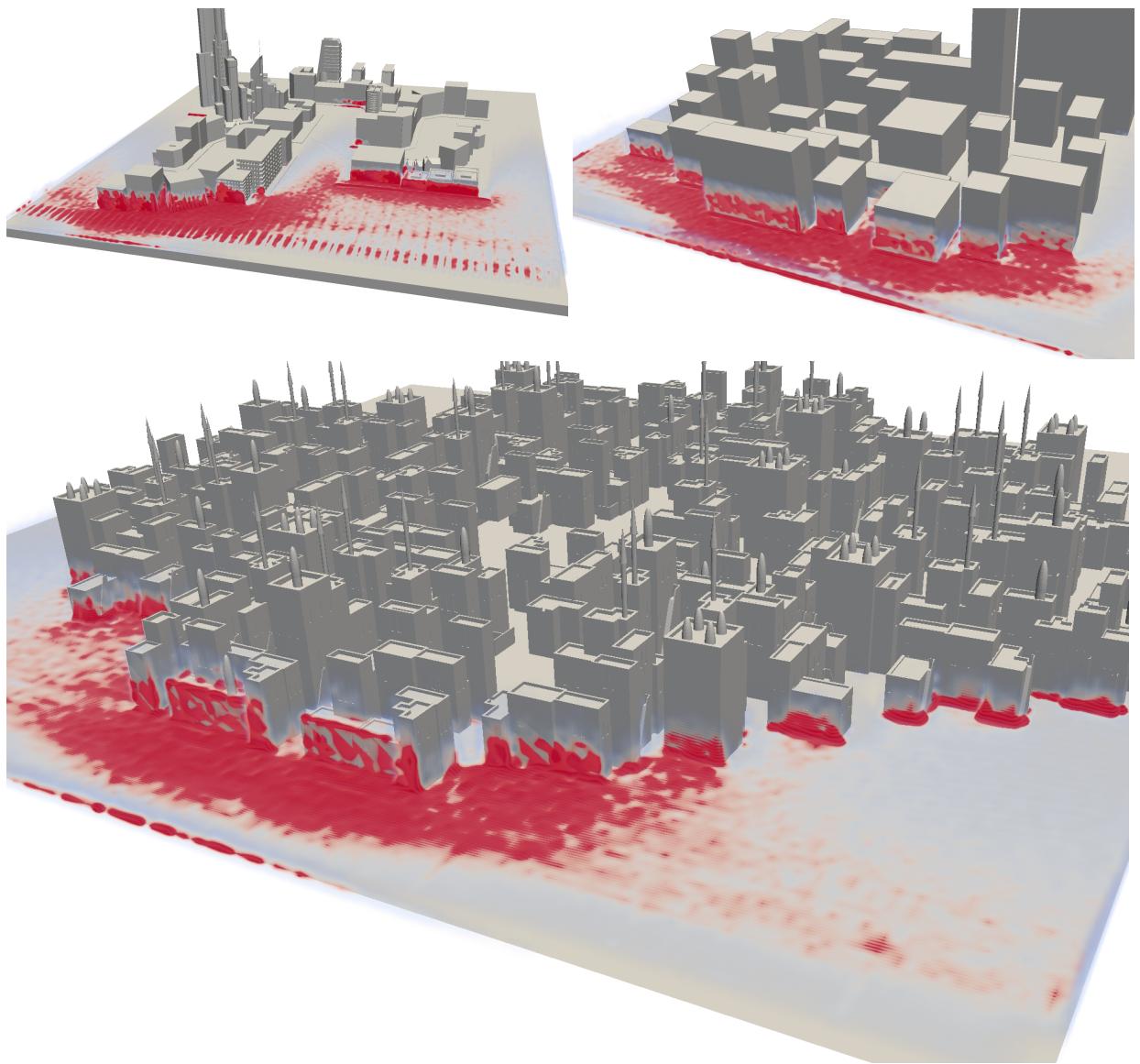
Σχήμα 5: Διαδοχικά στιγμιότυπα προσομοίωσης όπου αποτυπώνεται χρωματικά στα σωματίδια το μέτρο της δύναμης που τους ασκείται λόγω ιξώδους του ρευστού. Η δύναμη του ιξώδους είναι ανάλογη της διαφοράς ταχύτητας μεταξύ γειτονικών σωματιδίων, και λόγω αυτού έχουν σημαντικό μέγεθος στις προσκρούσεις με εμπόδια, δεδομένης της απότομης αλλαγής ταχύτητας τμήματος του ρευστού (θερμότητα χρώματος ανάλογη του μέτρου της δύναμης).



Σχήμα 6: Στιγμιότυπο προσομοίωσης όπου φαίνεται χρωματικά κωδικοποιημένος ο αριθμός των δειγμάτων (γειτονικών σωματιδίων) που διατίθενται για την εκτίμηση των ιδιοτήτων του ρευστού (διακύμανση από σκούρο μπλε μέχρι έντονο κόκκινο, 0 έως 52 δείγματα αντίστοιχα στην παρούσα περίπτωση). Λόγω της φύσης της προσομοίωσης (ροή σε ανοιχτό χώρο) είναι φανερή η έλλειψη ικανοποιητικού αριθμού δειγμάτων σε μεγάλο τμήμα του ρευστού, που οδήγησε και στην υιοθέτηση στοιχείων από PBD (παράγραφος 2.3.1, [23, 28]).



Σχήμα 7: Διάφορα στιγμιότυπα προσομοίωσης όπου αποτυπώνεται χρωματικά στην ακτογραμμή το μέτρο της ώσης που ασκείται από τα σωματίδια του ρευστού κατά την εξέλιξη του τσουνάμι (θερμότητα χρώματος ανάλογη του μέτρου της ώσης).



Σχήμα 8: Heatmap των ώσεων του ρευστού προς την ακτογραμμή καθ' όλη την εξέλιξη του κύματος, σε τρία διαφορετικά μοντέλα πόλης. Επιβεβαιώνεται οτι το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του κύματος απορροφάται από από τα πρώτα εμπόδια που αυτό συναντά, φαινόμενο που έχει δειχθεί τόσο σε καταγραφές πραγματικών περιστατικών, όσο και στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- [1] ABE, K. Size of great earthquakes of 1837–1974 inferred from tsunami data. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 84, B4 (1979), 1561–1568.
- [2] AUDUSSE, E., BOUCHUT, F., BRISTEAU, M.-O., KLEIN, R., AND PERTHAME, B. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing* 25, 6 (2004), 2050–2065.
- [3] BAILEY, P., MYRE, J., WALSH, S. D., LILJA, D. J., AND SAAR, M. O. Accelerating lattice boltzmann fluid flow simulations using graphics processors. In *Parallel Processing, 2009. ICPP'09. International Conference on* (2009), IEEE, pp. 550–557.
- [4] BECKER, M., AND TESCHNER, M. Weakly compressible SPH for free surface flows. In *Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation* (Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007), SCA '07, Eurographics Association, pp. 209–217.
- [5] BRODTKORB, A. R., SÆTRA, M. L., AND ALTINAKAR, M. Efficient shallow water simulations on gpus: Implementation, visualization, verification, and validation. *Computers & Fluids* 55 (2012), 1–12.
- [6] CAMASSA, R., AND HOLM, D. D. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Physical Review Letters* 71, 11 (1993), 1661.
- [7] CATTO, E. Iterative dynamics with temporal coherence. In *Game developer conference* (2005), vol. 2, p. 5.
- [8] CHEN, S., AND DOOLEN, G. D. Lattice boltzmann method for fluid flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 30, 1 (1998), 329–364.
- [9] COLAGROSSI, A., AND LANDRINI, M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics* 191, 2 (2003), 448 – 475.
- [10] DESBRUN, M., AND GASCUEL, M.-P. *Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies*. Springer, 1996.

- [11] FELDMAN, J., AND BONET, J. Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 72, 3 (2007), 295–324. cited By 58.
- [12] GINGOLD, R. A., AND MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society* 181, 3 (1977), 375–389.
- [13] GOMEZ-GESTEIRA, M., ROGERS, B. D., DALRYMPLE, R. A., AND CRESPO, A. J. State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows. *Journal of Hydraulic Research* 48, S1 (2010), 6–27.
- [14] GOSWAMI, P., SCHLEGEL, P., SOLENTHALER, B., AND PAJAROLA, R. Interactive SPH simulation and rendering on the GPU. In *Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation* (Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2010), SCA ’10, Eurographics Association, pp. 55–64.
- [15] GOTO, C., OGAWA, Y., SHUTO, N., AND IMAMURA, F. *IUGG/IOC time project: Numerical method of tsunami simulation with the leap-frog scheme*. Unesco, 1997.
- [16] GRILLI, S., IOUALALEN, M., ASAVANANT, J., SHI, F., KIRBY, J., AND WATTS, P. Source constraints and model simulation of the December 26, 2004, Indian Ocean tsunami. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* 133, 6 (2007), 414–428.
- [17] JANSSEN, C. F., GRILLI, S. T., KRAFCZYK, M., ET AL. Efficient simulations of long wave propagation and runup using a LBM approach on GPGPU hardware. In *The Twenty-second International Offshore and Polar Engineering Conference* (2012), International Society of Offshore and Polar Engineers.
- [18] KANAMORI, H. Mechanism of tsunami earthquakes. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 6, 5 (1972), 346 – 359.
- [19] KRAFCZYK, M., AND TÖLKE, J. Towards real-time prediction of tsunami impact effects on nearshore infrastructure. In *DFG-Round Table Programme "Near and Onshore Tsunami Effects"* (2007).

- [20] KUZNIK, F., OBERRECHT, C., RUSAOUEN, G., AND ROUX, J.-J. LBM based flow simulation using GPU computing processor. *Computers & Mathematics with Applications* 59, 7 (2010), 2380 – 2392.
- [21] LOSASSO, F., GIBOU, F., AND FEDKIW, R. Simulating water and smoke with an octree data structure. *ACM Trans. Graph.* 23, 3 (Aug. 2004), 457–462.
- [22] LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The astronomical journal* 82 (1977), 1013–1024.
- [23] MACKLIN, M., AND MÜLLER, M. Position based fluids. *ACM Trans. Graph.* 32, 4 (July 2013), 104:1–104:12.
- [24] MONAGHAN, J., AND KAJTAR, J. SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries. *Computer Physics Communications* 180, 10 (2009), 1811 – 1820.
- [25] MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on progress in physics* 68, 8 (2005), 1703.
- [26] MONAGHAN, J. J., AND LATTANZIO, J. C. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and astrophysics* 149 (1985), 135–143.
- [27] MÜLLER, M., CHARYPAR, D., AND GROSS, M. Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation* (2003), Eurographics Association, pp. 154–159.
- [28] MÜLLER, M., HEIDELBERGER, B., HENNIX, M., AND RATCLIFF, J. Position based dynamics. *Journal of Visual Communication and Image Representation* 18, 2 (2007), 109 – 118.
- [29] RAWIRASWATTANA, K. *The Dynamics of Discs and Stars in Multiple Systems*. PhD thesis, University of Sheffield, 2012.
- [30] SHAO, S., AND LO, E. Y. Incompressible SPH method for simulating newtonian and non-newtonian flows with a free surface. *Advances in Water Resources* 26, 7 (2003), 787 – 800.
- [31] SHUTO, N. Numerical simulation of tsunamis — its present and near future. *Natural Hazards* 4, 2-3 (1991), 171–191.

- [32] SKEEL, R. D. Variable step size destabilizes the Störmer/leapfrog/Verlet method. *BIT Numerical Mathematics* 33, 1 (1993), 172–175.
- [33] SPRINGEL, V., YOSHIDA, N., AND WHITE, S. D. GADGET: a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations. *New Astronomy* 6, 2 (2001), 79–117.
- [34] TAN, J., AND YANG, X. Physically-based fluid animation: A survey. *Science in China Series F: Information Sciences* 52, 5 (2009), 723–740.
- [35] TITOV, V., RABINOVICH, A. B., MOFJELD, H. O., THOMSON, R. E., AND GONZÁLEZ, F. I. The global reach of the 26 December 2004 Sumatra tsunami. *Science* 309, 5743 (2005), 2045–2048.
- [36] WANG, W., JIANG, Z., QIU, H., AND LI, W. Real-time simulation of fluid scenes by smoothed particle hydrodynamics and marching cubes. *Mathematical Problems in Engineering* 2012 (2012).
- [37] WATTS, P., GRILLI, S., KIRBY, J., FRYER, G., AND TAPPIN, D. Landslide tsunami case studies using a boussinesq model and a fully nonlinear tsunami generation model. *Natural Hazards And Earth System Science* 3, 5 (2003), 391–402.
- [38] ZHOU, J. A lattice boltzmann model for the shallow water equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 191, 32 (2002), 3527–3539.
- [39] ZHOU, J. G. *Lattice Boltzmann methods for shallow water flows*, vol. 4. Springer, 2004.
- [40] ZHOU, K., HOU, Q., WANG, R., AND GUO, B. Real-time kd-tree construction on graphics hardware. *ACM Trans. Graph.* 27, 5 (Dec. 2008), 126:1–126:11.