1		2	3		4	5		
a	b		a	b		a	b	c

MATEMÁTICA 3 – 1º CUATRIMESTRE 2023
2º PARCIAL -2º FECHA

Apellido y nombre:……………………………………………………………………………………..
Nº de alumno:………………………………………………………………………………………...
Carrera:………………………………………………………………………………………………

1) Se afirma que una nueva dieta reducirá en 4.5 kg. el peso de un individuo, en promedio, en un lapso de dos semanas. Los pesos de 7 mujeres que siguieron la dieta se registraron antes y después de un período de 2 semanas.

Mujer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Peso antes	58.5	60.3	61.7	69.0	64.0	62.6	56.7
Peso después	60.0	54.9	58.1	62.1	58.5	59.9	54.4

a) Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia media en el peso. Suponga que las diferencias de los pesos se distribuyen de forma normal.

b) Pruebe la hipótesis de que la dieta reduce el peso de un individuo en 4.5 kg., en promedio, contra la hipótesis alternativa de que la diferencia media en peso es menor que 4.5 kg. Decida con el p-valor.

2) En cierta universidad se estima que más de 25% de los estudiantes van en bicicleta a la escuela. ¿Ésta parece ser una estimación válida si, en una muestra aleatoria de 90 estudiantes universitarios, se encuentra que 28 van en bicicleta a la escuela?. Utilice un nivel de significancia de 0.05.

3) a) Calcule un intervalo de confianza de 98% para la proporción de artículos defectuosos en un proceso cuando se encuentra que una muestra de tamaño 100 da como resultado 12 defectuosos.

b) ¿Qué tan grande debe ser la muestra si deseamos tener una confianza de 98% de que nuestra proporción muestral esté dentro del 0.05 de la proporción real de defectuosos?

4) Interesa el contenido en litros de los envases de un lubricante específico. Se toma una muestra aleatoria de 10 envases y sus contenidos son: 10.2, 9.7, 10.1, 10.3, 10.1, 9.8, 9.9, 10.4, 10.3, 9.8. Suponiendo que el contenido sigue una distribución normal, pruebe la hipótesis de que $\sigma^2 = 0.03$ contra la alternativa $\sigma^2 \neq 0.03$. Utilice $\alpha = 0.05$ y la relación entre intervalo de confianza y test de hipótesis.

5) Considere la distribución $P(X = x) = \dfrac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^x}{x!}$ $\quad x = 0,1,2,\ldots$

a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

b) Encuentre el estimador de λ por el método de los momentos, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

c) Los estimadores encontrados ¿son insesgados?, ¿son consistentes?. Explique.

Ejercicio 1

X_{1i}: "Peso de la mujer i (kg) antes de la dieta" $i = 1, \dots, 7$

X_{2i}: "Peso de la mujer i (kg) despues de la dieta" $i = 1, \dots, 7$

$E(X_{1i}) = \mu_1 \quad E(X_{2i}) = \mu_2 \quad n = 7 \quad \mu_D = \mu_1 - \mu_2 \quad \sigma_D^2$(desconocido)

$D_i = X_{1i} - X_{2i} \sim N(\mu_D\ ;\ \sigma_D^2)$

a) Estamos en condiciones de usar el intervalo:

$$IC(\mu_D) = \left(\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) \text{ de } (1-\alpha) = 0.95$$

Estadístico Pivote:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

Cálculo de las diferencias:

D_i	-1.5	5.4	3.6	6.9	5.5	2.7	2.3

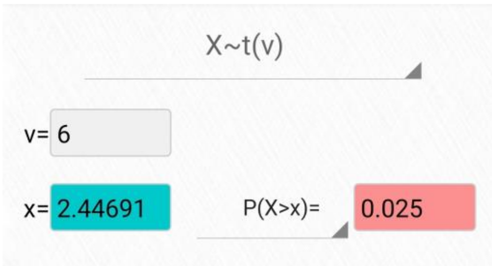
$\bar{D} = 3.5571 \qquad S_D = 2.7760$

valor critico:

$$(1-\alpha) = 0.95 \to \alpha = 0.05 \to \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$n - 1 = 7 - 1 = 6$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.025, 6} = 2.44$$



Reemplazando los datos en el intervalo:

$$IC(\mu_D) = \left(3.5571 - 2.44 \cdot \frac{2.7760}{\sqrt{7}}\ ; 3.5571 + 2.44 \cdot \frac{2.7760}{\sqrt{7}}\right)$$

$IC(\mu_D) = (0.9897\ ; 6.1245)$ de 95% para la diferencia media en el peso.

b) Planteo de las hipótesis:

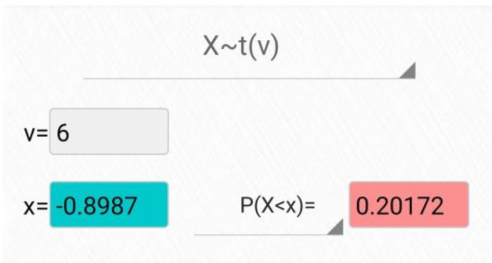
$H_0: \mu_D = 4.5$ vs $H_1: \mu_D < 4.5$

Estadístico de prueba:

$$T = \frac{\bar{D} - 4.5}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ bajo } H_0$$

Valor observado del estadístico de prueba:

$$t_0 = \frac{3.5571 - 4.5}{2.7760/\sqrt{7}} = -0.8987$$



Cálculo del P-valor:

$$P - valor = P(T < t_0) = P(T < -0.8987) = 0.20$$

Conclusión: Como el $P - valor = 0.20 > 0.05$ No rechazo H_0. Es factible que la diferencia de peso medio sea de 4.5 kg.

Ejercicio 2

X: "Numero de estudiantes que van en bicicleta a la escula entre n"

$X \sim B(n\,;p) \quad n = 90 > 30 \quad \hat{p} = \frac{28}{90} = 0.3111 \quad p_0 = 0.25$

$n\hat{p} = 28 > 10 \quad n(1-\hat{p}) = 62 > 10 \quad \alpha \approx 0.05$

Planteo de las hipótesis:

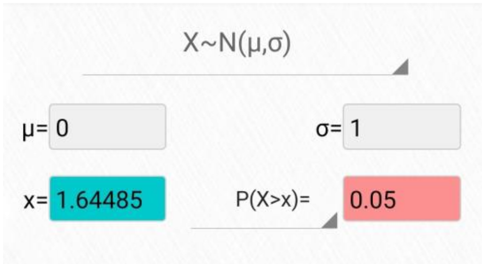
$H_0: p = 0.25 \text{ vs } H_1: p > 0.25$

Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\hat{P} - 0.25}{\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{n}}} \approx N(0;1) \text{ por TCL bajo } H_0$$

Valor observado del estadístico de prueba:

$$z_0 = \frac{0.3111 - 0.25}{\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{90}}} = 1.3389$$



Valor critico:

$z_\alpha = z_{0.05} = 1.64$

Regla de decisión:

Rechazo H_0 si $Z > z_\alpha$

Conclusión: Como $z_0 = 1.3389 < z_\alpha = 1.64$ No rechazo H_0 con $\alpha \approx 0.05$. Entonces la estimación que más del 25% de los alumnos van en bicicleta a la escuela, no parece ser valida.

Ejercicio 3

X: "Numero de articulos defectuosos entre n"

$X \sim B(n; p) \quad n = 100 > 30 \quad \hat{p} = \frac{12}{100} = 0.12$

$n\hat{p} = 12 > 10$

$n(1 - \hat{p}) = 88 > 10$

a) Estamos en condiciones de usar el intervalo:

$$IC(p) = \left(\widehat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}} \ ; \widehat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}} \right) \text{ de } (1-\alpha) \approx 0.98$$

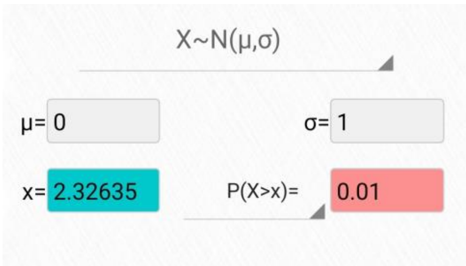
Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}} \approx N(0,1) \text{ Por TCL}$$

Valor critico:

$(1 - \alpha) \approx 0.98 \rightarrow \alpha \approx 0.02 \rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 0.01$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.01} = 2.33$



Reemplazando los datos en el intervalo:

$$IC(p) = \left(0.12 - 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{100}} \ ; 0.12 + 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{100}} \right)$$

$\mathbf{IC(p) = (0.044\ ; 0.1957)}$ **de aproximadamente 98% para la proporción de artículos defectuosos.**

b) Se pide n tal que:

$\varepsilon \leq 0.05$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}} \leq 0.05 \quad \text{depejando} \rightarrow \quad n \geq \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\widehat{P}(1-\widehat{P})}}{0.05} \right)^2$$

Remplazando los datos:

$$n \geq \left(\frac{2.33 \cdot \sqrt{0.12(1-0.12)}}{0.05} \right)^2$$

$n \geq 229.31$

Respuesta: Como mínimo hay que tomar una muestra de tamaño 230.

Ejercicio 4

X_i: "Contenido (en litos) del envase i" $i = 1, \dots, 10$

$X_i \sim N(\mu\,;\ \sigma^2)$ $n = 10$

De la muestra de 10 envases se obtuvo:

$s^2 = 0.0604$

Planteo de las hipótesis:

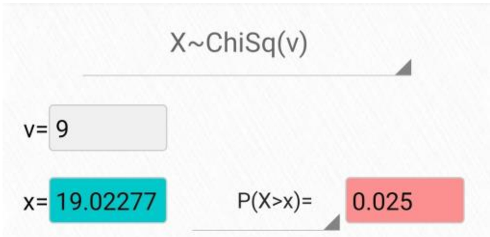
$H_0: \sigma^2 = 0.03$ vs $H_1: \sigma^2 \neq 0.03$

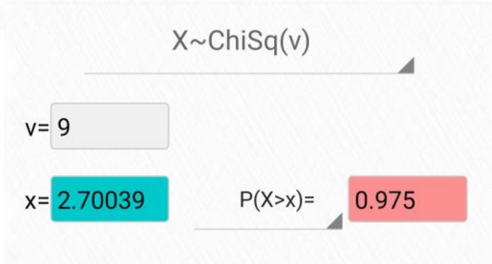
Regla de decisión:

Rechazo H_0 si $0.03 \notin IC(\sigma^2)$

$$IC(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\ n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\ n-1}} \right) \text{ de } (1-\alpha) = 0.95$$

Valores críticos:





$$(1-\alpha) = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = 0.975$$

$(n-1) = 10 - 1 = 9$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\ n-1} = \chi^2_{0.025,\ 9} = 19.022$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\ n-1} = \chi^2_{0.975,\ 9} = 2.7$$

Reemplazando los datos en el intervalo:

$$IC(\sigma^2) = \left(\frac{(10-1) \cdot 0.0604}{19.022} ; \frac{(n-1) \cdot 0.0604}{2.7} \right)$$

$IC(\sigma^2) = (0.0285\,; 0.2014)$

Conclusión: No rechazo H_0 ya que $0.03 \in (0.0285\,; 0.2014)$. Entonces es factible que la varianza sea de 0.03 con $\alpha = 0.05$

Ejercicio 5

$$P(X = x) = \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^{x}}{x!} \quad X_i \sim P(3\lambda) \;\; E(X_i) = 3\lambda \quad V(X_i) = 3\lambda \quad R_x = \{0,1,2,\dots,n\}$$

a) Estimador de Máxima Verosimilitud del parámetro λ:

$$L(x_1,\dots,x_n;\lambda) = P(X = x_1)\cdot P(X = x_1)\cdots P(X = x_n) = \left(\frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^{x_1}}{x_1!}\right)\cdots\left(\frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^{x_n}}{x_n!}\right) = \frac{e^{-3n\lambda}\cdot(3\lambda)^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\ln[L(x_1,x_2,\dots,x_n;\lambda)] = -\,3n\lambda + \sum x_i \cdot \ln(3\lambda) - \ln\left(\prod x_i!\right)$$

$$\frac{d[\ln L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda)]}{d\lambda} = -3n + \frac{\sum x_i}{3\lambda}\cdot 3 = -3n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \to \lambda = \frac{\sum x_i}{3n} = \frac{\overline{X}}{3}$$

Entonces:

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{\overline{X}}{3}$$

b) Estimador por el método de los momentos del parámetro λ:

$$E(X_i) = \overline{X}$$

$$3\lambda = \overline{X}$$

$$\lambda = \frac{\overline{X}}{3}$$

Entonces:

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{\overline{X}}{3}$$

c) Sesgo:

$$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{\overline{X}}{3}\right) = E\left(\frac{\sum X_i}{3n}\right) = \frac{1}{3n}\cdot\sum E(X_i) = \frac{1}{3n}\cdot n3\lambda = \lambda \to b(\hat{\lambda}) = 0$$

Como $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ los estimadores encontrados son insesgados.

Consistencia:

Aplicando el Teorema

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} \lambda = \lambda$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{3n} = 0$$

Se cumple las dos condiciones, entonces $\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{3}$ es un estimador consistente para el parámetro λ

Calculo auxiliar:

$$V(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{\overline{X}}{3}\right) = V\left(\frac{\sum X_i}{3n}\right) = \frac{1}{9n^2}\cdot\sum V(X_i) = \frac{1}{9n^2}\cdot n3\lambda = \frac{\lambda}{3n}$$