Matemática III – Primer Parcial Módulo I (18/05/2023) – Turno Jueves

Ejercicio 1

A: "La tecla es producida por la maquina A"

B: "La tecla es producida por la maquina B"

$P(A) = 0{,}5 \quad P(B) = 0{,}5 \quad A \cap B = \emptyset \quad A \cup B = S$

D: "La tecla es defectuosa"

$P(D/A) = 0{,}0456 \quad P(D/B) = 0{,}01$

a) $P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) = 0{,}0456 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0{,}0278$

T. de Probabilida Total

b) $P(A/D) = \dfrac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D)} = \dfrac{0{,}0456 \cdot 0{,}5}{0{,}0278} = 0{,}82$

Teorema de Bayes

c) X: "n° de teclas defectuosas en un teclado de 100 piezas"

$X \sim B(n\,,p) \;\; n = 100 \;\; p = P(D) = 0{,}0278$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{100}{0} \cdot 0{,}0278^0 \cdot (1 - 0{,}0278)^{100} = 0{,}9403567$

Ejercicio 2

$P(A) = 0{,}2 \quad P(B) = 0{,}8 \quad P(A/B) = 0{,}5$

$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}40 \rightarrow$ Es imposible este resultado, ya que la intersección no puede tener mayor probabilidad que $P(A)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}6 \rightarrow$ Este resultado tampoco es válido, ya que para calcularlo se utiliza $P(A \cap B)$, que no es posible.

Respuesta: Ninguna de las afirmaciones es válida, porque los datos proporcionados son inconsistentes.

Ejercicio 3

X: "Demanda semanal en (millones de unidades)"

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

a) $E(x) = \int_0^2 x \cdot f(x)\, dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x \cdot (4x - 2x^2)\, dx = \frac{3}{8}\int_0^2 4x^2 - 2x^3\ dx = \frac{3}{8}\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\Big|_0^2\right) =$

$= \frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}\cdot 16 - \frac{16}{2}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{32}{3} - 8\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3} = 1$

b) $C = 5x + 40$

$E(C) = E(5x + 40) \underset{\text{Linealidad}}{=} 5E(x) + 40 = 5 \cdot 1 + 40 = 45$

c) $P(X > 1{,}5) = \int_{1{,}5}^{2} \frac{3}{8}(4x - 2x^2)\, dx = \frac{3}{8}\left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\Big|_{1{,}5}^{2}\right) = \frac{3}{8}\left[\left(8 - \frac{16}{3}\right) - \left(2 \cdot 1{,}5^2 - \frac{2}{3}\cdot 1{,}5^3\right)\right] = \frac{5}{32} = 0{,}15625$

Ejercicio 4

X: "Capacidad del envase en (litros)"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)\quad \mu = 100\quad \sigma = 0{,}4$

a) $P(99 < X < 101) \underset{\text{Estandarizo}}{=} P\left(\frac{99 - 100}{0{,}4} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{Z\sim N(0,1)} < \frac{101 - 100}{0{,}4}\right) = P(-2{,}5 < Z < 2{,}5) =$

$= \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) \underset{\text{App}}{=} 0{,}99379 - 0{,}00621 = 0{,}98758$

Respuesta: 98,76%

b) Y: "n° de unidades defectuosas en el lote de 12 unidades"

$Y \sim B(n, p)\quad n = 12\quad p = 1 - 0{,}98758 = 0{,}01242$

$P(Y > 2) = 1 - P(X \leq 2) \underset{\text{App}}{=} 1 - 0{,}99961 = 0{,}00039$

Ejercicio 5

x_i: "Cantidad de memoria ocupada por la pagina i en (MB)" $i = 1, \dots, 500$

$E(x_i) = \mu = 1{,}3\quad V(x_i) = \sigma^2 = 0{,}3^2\quad x_i$ independientes $n = 500 > 30$

$P(\sum_{i=1}^{n} x_i > 660) = 1 - P(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 660) \underset{\text{Estandarizo}}{=} 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{660 - 500\cdot 1{,}3}{\sqrt{500}\cdot 0{,}3}\right) \underset{\text{TCL}}{\approx} 1 - \Phi(1{,}49) \underset{\text{App}}{=} 0{,}06811$