1		2		3		4		5	
a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**

Nº de alumno:……………………………………………………………..
Apellido y nombre:…………………………………………………..
Carrera:……………………………………………………………………

MATEMATICA 3 - 1º CUATRIMESTRE 2023
2º PARCIAL - 1º FECHA

1) Considere una muestra aleatoria de una distribución continua con densidad

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2} & \text{si } 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

a) Determinar el estimador, por el método de los momentos, del parametro poblacional θ.

b) ¿El estimador hallado en a) es insesgado? , ¿es consistente? .

2) El tiempo de acceso al disco duro en un cierto modelo de computadoras es una variable aleatoria con media 15 milisegundos. Se ha propuesto una modificación técnica con objeto de disminuir este tiempo de acceso. Se prueba el nuevo sistema en 10 computadoras obteniéndose una media muestral $\bar{x} = 14$ ms. y una desviación estándar muestral s = 2.286. Suponga que los datos provienen de una población normal.

a) ¿Hay suficiente evidencia estadística, a favor de la hipótesis de que el nuevo modelo disminuye el tiempo medio de acceso?. Decida con el p-valor.

b) Construya un intervalo de confianza de nivel 95% para la verdadera media del tiempo de acceso al disco

3) Los tiempos de ejecución (en segundos) de 40 trabajos procesados por un centro de cálculo han resultado ser

10 19 90 40 15 11 32 17 4 152 23 13 36 101 2 14 2 23 34 15
27 1 57 17 3 30 50 4 62 48 9 11 20 13 38 54 46 12 5 26

a) Obtener el intervalo de confianza de 90% para la media del tiempo de ejecución de un trabajo.

b) ¿Hay suficiente evidencia estadística, a favor de la hipótesis de que la verdadera media del tiempo de ejecución es mayor que 25 segundos?. Decida con el p-valor.

4) Los rodamientos esféricos que fabrica una maquina deben de tener un diámetro uniforme para ser aptos para su uso. El responsable de la maquina asegura que la varianza es $\sigma^2 = 0{,}025$. Medidos 30 rodamientos se obtuvo una

varianza muestral $s^2 = 0{,}0272$. Suponga que los datos provienen de una población normal.

a) Construya un intervalo de confianza de nivel 99% para la verdadera varianza del diámetro de los rodamientos.

b) ¿Es compatible este resultado de a) con la afirmación del responsable de la máquina? Utilice $\alpha = 0.01$

5) Para evaluar una nueva vacuna para la gripe se seleccionan al azar 100 individuos de un grupo de riesgo y se les suministra la vacuna; de ellos 10 no contraen la gripe.

a) Construir un intervalo de confianza de 95% para la probabilidad de no contraer gripe si se está vacunado.

b) Con la anterior vacuna la probabilidad de no contraer gripe era 0.2. ¿Hay suficiente evidencia estadística, a favor de la hipótesis de que la nueva vacuna es más eficaz que la anterior? Utilice $\alpha = 0.01$

Ejercicio 1

a) Estimador por el método de los momentos del parámetro θ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(\theta - x)}{\theta^2} & \text{si } 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$E(X) = \overline{X}$

Calculo auxiliar:

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} \theta x - x^2 dx = \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{\theta x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\theta} = \frac{1}{\theta^2}\left(\theta^3 - \frac{\theta^3}{3}\right) = \frac{\theta}{3}$$

$$\frac{\theta}{3} = \overline{X}$$

$$\theta = 3\overline{X}$$

$$\widehat{\Theta}_{MM} = 3\overline{X}$$

b) Sesgo:

$$E\left(\widehat{\Theta}_{MM}\right) = E(3\overline{X}) = E\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{3}{n} \cdot n \cdot E(X_i) = \frac{3}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta}{3} = \theta$$

Como $E\left(\widehat{\Theta}_{MM}\right) = \theta$ entonces $\widehat{\Theta}_{MM}$ es un estimador insesgado de θ, es decir $b\left(\widehat{\Theta}_{MM}\right) = 0$

Consistencia:

Aplicando el teorema

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\widehat{\Theta}_{MM}\right) = \lim_{n\to\infty} \theta = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} V\left(\widehat{\Theta}_{MM}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{2n} = 0$$

Se cumple las dos condiciones, entonces $\widehat{\Theta}_{MM}$ es un estimador consistente para el parámetro θ

Calculo auxiliar:

$$V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2$$

$$E(X_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^{\theta} x^2 \cdot \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} \theta x^2 - x^3 dx = \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{\theta x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{\theta^4}{6} = \frac{\theta^2}{6}$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{\theta^2}{6} - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 = \frac{\theta^2}{18}$$

$$V\left(\widehat{\Theta}_{MM}\right) = V(3\overline{X}) = V\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{9}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{9}{n^2} \cdot n \cdot V(X_i) = \frac{9}{n^2} \cdot n \cdot \frac{\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{2n}$$

Ejercicio 2

X_i: "Tiempo de acceso al discoduro de la computadora i" $i = 1,2, \dots , 10$

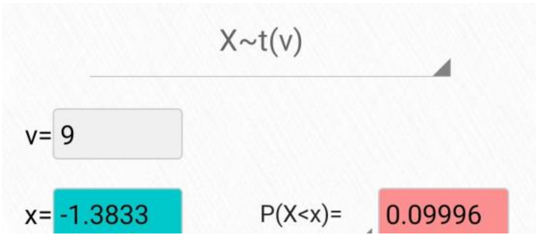
$X_i \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$ $n = 10$ $\bar{x} = 14$ $s = 2.286$ $\mu_0 = 15$ σ^2(desconocido)

a) $H_0{:}\,\mu = 15$ vs $H_1{:}\,\mu < 15$

Con los datos proporcionados estamos en condiciones de usar el estadístico de prueba:

$$T = \frac{\bar{X} - 15}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ bajo } H_0$$

Valor observado del estadístico de prueba:



$$t_0 = \frac{14 - 15}{2.286/\sqrt{10}} = -1.3833$$

$$\upsilon = n - 1 = 10 - 1 = 9$$

Como es un test unilateral por menor:

$$P - \text{valor} = P(T < t_0) = P(T < -1.3833) = 0.09996$$

Regla de decisión:

Rechazo H_0 si $P - \text{valor} < 0.05$

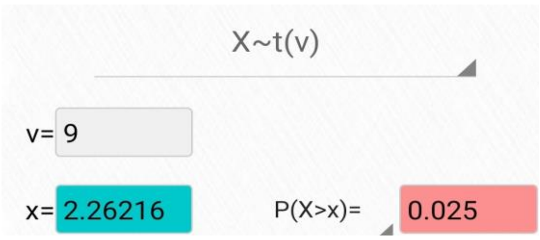
Conclusión:

Como $P - \text{valor} = 0.09996 > 0.05$ No rechazo H_0. No hay evidencia suficiente a favor de la hipótesis de que el nuevo modelo disminuye el tiempo medio de acceso.

b) Con los datos proporcionados estamos en condiciones de usar:

$$IC(\mu) = \left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \text{ de } (1 - \alpha) = 0.95$$

Estadístico pivote:



$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

Calculo del valor critico:

$$(1 - \alpha) = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\upsilon = n - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0.025,9} = 2.26$$

Reemplazando los datos en el intervalo:

$$IC(\mu) = \left(14 - 2.26 \cdot \frac{2.286}{\sqrt{10}}\ ;\ 14 + 2.26 \cdot \frac{2.286}{\sqrt{10}}\right)$$

$IC(\mu) = (12.3647\ ;\ 15.6353)$ de 95% para la verdadera media del tiempo de acceso al disco.

Ejercicio 3

X_i: "Tiempo de ejecucion (en segundos) del i − esimo trabajo procesado" $i = 1, \dots, 40$

X_i(distribucion desconocida) $n = 40 > 30$

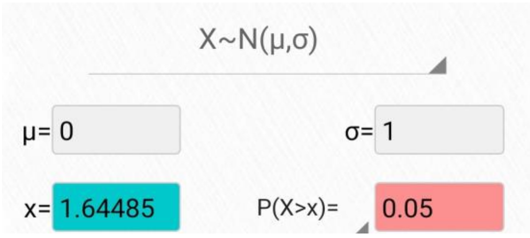
A partir de los resultados de la muestra dada se obtuvo:

$\bar{x} = 29.65 \quad s = 30.3894$

a) Con los datos proporcionados estamos en condiciones de usar:

$$IC(\mu) = \left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \text{ de } (1-\alpha) \approx 0.90$$

Estadístico pivote:



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0;1) \text{ por TCL}$$

Calculo del valor critico:

$$(1-\alpha) \approx 0.90 \rightarrow \alpha \approx 0.1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 0.05$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.64$$

Remplazando los datos en el intervalo:

$$IC(\mu) = \left(29.65 - 1.64 \cdot \frac{30.3894}{\sqrt{40}} \; ; \; 29.65 + 1.64 \cdot \frac{30.3894}{\sqrt{40}}\right)$$

$IC(\mu) = (21.7425 \,; 37.5535)$ de aproximadamente 90% para la media del tiempo de ejecución de un trabajo.

b) $H_0: \mu = 25 \quad vs \quad H_1: \mu > 25$

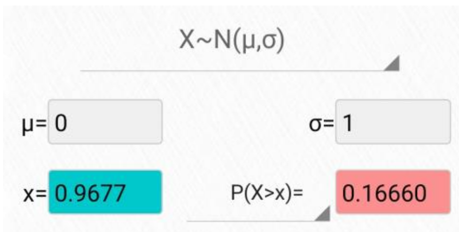
Con los datos proporcionados estamos en condiciones de usar el estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - 25}{S/\sqrt{n}} \approx N(0;1) \text{ bajo } H_0$$

Valor observado del estadístico de prueba:

$$z_0 = \frac{29.65 - 25}{30.3894/\sqrt{40}} = 0.9677$$

Como es un test unilateral por mayor:



$P - valor \approx P(Z > z_0) = P(Z > 0.9677) = 0.1666$

Regla de decisión:

Rechazo H_0 si $P - valor < 0.05$

Conclusión:

Como $P - valor \approx 0.1666 > 0.05$ No rechazo H_0. No suficiente evidencia estadística a favor de la hipótesis de que la verdadera media del tiempo de ejecución es mayor que 25 segundos.

Ejercicio 4

X_i: "Diametro del rodamiento i" $i = 1,2,\ldots,30$

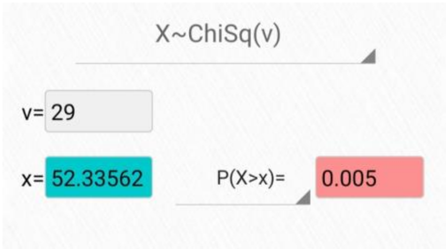
$X_i \sim N(\mu;\sigma^2)$ $n = 30$ $s^2 = 0.0272$

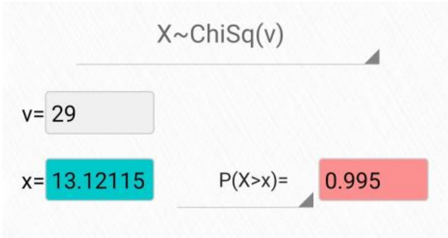
a) Se pide un:

$$IC(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}}\ ;\ \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}}\right) \text{ de } (1-\alpha) = 0.99$$

Estadístico pivote:

$$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_k$$





Valor critico:

$$(1-\alpha) = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.005 = 0.995$$

$$n - 1 = 30 - 1 = 29$$

$$\chi^2_{0.005\,,29} = 52.3356$$

$$\chi^2_{0.995\,,29} = 13.1211$$

Remplazando los datos en el intervalo:

$$IC(\sigma^2) = \left(\frac{(30-1)\cdot 0.0272}{52.3356}\ ;\ \frac{(30-1)\cdot 0.0272}{13.1211}\right)$$

$IC(\sigma^2) = (0.015\,;0.06)$ de 99% para la verdadera varianza del diámetro de los rodamientos.

b) El resultado es compatible con la afirmación del responsable de la maquina ya que:

$\sigma^2 = 0.025 \in (0.015\,;0.06)$

Ejercicio 5

X: "n° de individuos que no contraen gripe entre n"

$X \sim B(n; p) \quad n = 100 > 30 \quad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{10}{100} = 0.10$

$n\hat{p} = 10$

$n(1 - \hat{p}) = 90$

a) Se pide un:

$$IC(p) = \left(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \; ; \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right) \text{ de } (1-\alpha) \approx 0.95$$

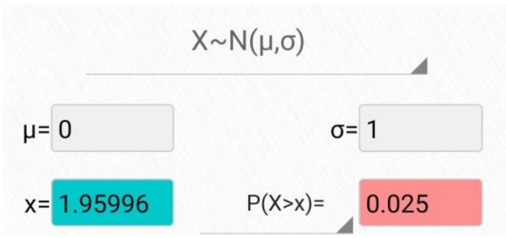
Estadístico pivote:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \approx N(0{,}1) \text{ Por TCL}$$

Cálculo del valor critico:

$(1 - \alpha) \approx 0.95 \to \alpha \approx 0.05 \to \frac{\alpha}{2} \approx 0.025$

$z_{0.025} = 1.96$



Remplazando los datos en el intervalo:

$$IC(p) = \left(0.10 - 1.96 \sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{100}} \; ; 0.10 + 1.96 \sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{100}} \right)$$

$IC(p) = (0.0412 \; ; 0.1588)$ de aproximadamente 95% para la probabilidad de no contraer gripe si se está vacunado.

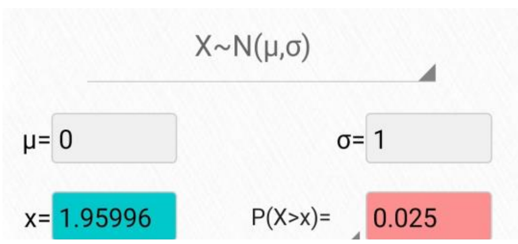
b) $H_0 : p = 0.2 \text{ vs } H_1 : p > 0.2$

Estamos en condiciones de usar el estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\hat{P} - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{n}}} \approx N(0; 1) \text{ por TCL bajo } H_0$$

Valor observado:

$$z_0 = \frac{0.10 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}}} = -2.5$$



Regla de decisión: Rechazo H_0 si $Z > z_\alpha$

$\alpha = 0.01 \quad z_\alpha = z_{0.01} = 2.32$

Conclusión: Como $z_0 = -2.5 < z_{0.01} = 2.32$ No rechazo H_0 con $\alpha = 0.01$. No hay suficiente evidencia estadística a favor de la hipótesis de que la nueva vacuna es más eficaz que la anterior.