Álgebra I
Práctica 7 - Polinomios

Generalidades.

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,
ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,
iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.

2. Calcular el coeficiente de X^{20} de los siguientes polinomios

i) $(X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$,
ii) $(X - 3\,i)^{133}$ en $\mathbb{C}[X]$,
iii) $(X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$ en $\mathbb{Q}[X]$,
iv) $f = X^{10}(X^5 + 4)^7$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$,
ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$,
iii) $(X + 1)f^2 = X^6 + Xf$,
iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \mathrm{gr}(f) \cdot X^2 f$.

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$, $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,
ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$, $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,
iii) $f = X^n - 1$, $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$,
iv) $f = X^3 - (1 + i)X^2 + 1$, $g = iX + 2$ en $\mathbb{C}[X]$.

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,
ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,
iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.

i) Probar que $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.
ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.
iii) Probar que si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(h)$.

7. Hallar el resto de la división de f por g para

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,
ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$, $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$,
iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,
iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$. (Sug: ver Ej. 4)iii)).

8. Sea K un cuerpo. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in K$.

i) Probar que $X - a \mid X^n - a^n$ en $K[X]$.

ii) Probar que si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$ en $K[X]$.

iii) Probar que si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$ en $K[X]$.

Calcular los cocientes en cada caso.

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1,$

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X,$

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1, \quad g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1.$

¿Cambia algo si se consideran los polinomios en $\mathbb{R}[X]$ o $\mathbb{C}[X]$?

Evaluación y raíces.

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $X^6 + X^3 - 2$.

13. Sea $\omega = e^{\frac{2\pi}{7} i}$. Probar que $\omega + \omega^2 + \omega^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$.

14. i) Probar que si $\omega = e^{\frac{2\pi}{5} i} \in G_5$, entonces

$$X^2 + X - 1 = \left[X - (\omega + \omega^{-1})\right]\left[X - (\omega^2 + \omega^{-2})\right].$$

ii) Calcular, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

15. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2.$

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene sólo raíces simples en $\mathbb{C}$.

18. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en $\mathbb{C}$.

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

20. Sea $f = X^{68} - 17X^4 - 16 \in \mathbb{C}[X]$. Determinar la forma binomial de cada raíz *múltiple* de f en $\mathbb{C}$ y la multiplicidad de cada una de ellas.

21. i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

22. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

23. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

24. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{C}[X]$ definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f_n'), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

25. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ definida por

$$f_1 = X^3 + 2X \quad \text{y} \quad f_{n+1} = X f_n^2 + X^2 f_n', \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que:

i) $\mathrm{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$.

ii) 0 es raíz de multiplicidad n de f_n.

26. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ raíz de multiplicidad 3 de $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que el resto de dividir a f' por $(X-\alpha)^3$ es $a(X-\alpha)^2$, con $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

27. i) Hallar todas las raíces racionales de

(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$,

(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$,

ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.

Factorización.

28. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 + 6X - 2$, ii) $X^2 + X - 6$, iii) $X^2 - 2X + 10$.

29. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

i) $X^2 + (1 + 2\,i)\,X + 2\,i$, ii) $X^8 - 1$, iii) $X^6 - (2-2i)^{12}$.

30. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 9$, ii) $X^4 + 3$, iii) $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$.

31. Factorizar los polinomios

i) $X^4 - 1$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

ii) $X^4 + 3$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $X^4 + X^3 + X^2$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iv) $X^7 - X$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

v) $X^3 + X^2 + 1$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$,

vi) $3X^2 + 210X + 5$ en $(\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})[X]$.

32. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

33. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$

i) $X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz.

ii) $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ sabiendo que $1 + 2\,i$ es raíz.

iii) $X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple.

iv) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

v) $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$ sabiendo que tiene alguna raíz en común con $X^3 + 1$.

vi) $f = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 2X - 10$, sabiendo que tiene alguna raíz en común con el polinomio $g = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 6$.

34. Hallar todos los $a \in \mathbb{Q}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

35. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

es una raíz sexta de la unidad que no es una raíz cúbica de la unidad.

Para cada valor de $a \in \mathbb{Q}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

36. i) En cada caso, hallar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que:

(a) $X^2(X^2+1) \mid (f : f')$.

(b) $(f : f') = X^5 - 5X^4 + \frac{25}{4}X^3$ y $f(1) = 3$.

(c) $X + 2 \mid f$, $(f : (X - \sqrt{2})^2) = X - \sqrt{2}$ y f mónico.

ii) Determinar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónicos de grado 5 que satisfacen simultáneamente que $(f : f')$ tiene grado 2, $1 + 2\,i$ es raíz de f y $f(1) = \frac{1}{2}$.

37. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ las raíces de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$. Determinar

i) $a + b + c$, ii) $ab + ac + bc$, iii) abc.

38. i) Hallar todas las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio $f = X^4 - (i+4)X^3 + (8+4i)X^2 - (2i+24)X + 12$ sabiendo que tiene al menos una raíz real.

ii) Hallar todas las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio $f = X^6 - 3X^4 - (2 + 8\,i)X^3 + 24\,iX + 16\,i$, sabiendo que tiene al menos una raíz entera.

39. Sea p un número primo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?

40. i) Hallar todos los polinomios de grado 2 irreducibles en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

ii) Decidir cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$:

(a) $f = X^4 + X + 1$, (b) $f = X^4 + X^2 + 1$, (c) $f = X^4 + X^3 + 1$.