Álgebra I
Práctica 6 - Números Complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z^{-1})$ e $\mathrm{Im}(i \cdot z)$

i) $z = 5\,i(1+i)^4$

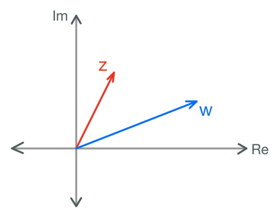
ii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i)^2(\overline{1-3\,i})$

iii) $z = i^{17} + \dfrac{1}{2}\,i(1-i)^3$

iv) $z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{10}$

v) $z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-1}$.

2. Dados los siguientes $z, w \in \mathbb{C}$ en el plano:



representar en un gráfico aproximado los números complejos de cada inciso

i) $z, w, z+w$ y $z-w$

ii) $z, -z, 2z, \dfrac{1}{2}z, iz$ y $\overline{z}$

iii) $z, w, |z|, |z+w|$ y $|\overline{w-z}|$.

3. Hallar todos los números complejos z tales que

i) $z^2 = -36$

ii) $z^2 = i$

iii) $z^2 = 7 + 24i$

iv) $z^2 + 15 - 8i = 0$

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $(2+2\,i)(\sqrt{3} - i)$

ii) $(-1+\sqrt{3}\,i)^5$

iii) $(-1+\sqrt{3}\,i)^{-5}$

iv) $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}$.

5. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) + 5\,\mathrm{Im}(z) \leq 8\}$.

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| \geq 2$ y $\dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \dfrac{2\pi}{3}\}$.

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, \mathrm{Im}(z) > 2$ y $\arg(-i\,z) = \dfrac{\pi}{4}\}$.

iv) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, \arg(z^4) = \arg\big((-1+i)\overline{z}^2\big)\}$.

6. i) Determinar la forma binomial de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}\,i)$.

ii) $(-\sqrt{3}+i)^n \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ es un número real negativo.

iii) $\arg\big((-1+i)^{2n}\big) = \dfrac{\pi}{2}$ y $\arg\big((1-\sqrt{3}i)^{n-1}\big) = \dfrac{2}{3}\pi$.

8. Hallar en cada caso las raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8,\ n = 6$

ii) $z = -4,\ n = 3$

iii) $z = -1 + i,\ n = 7$

iv) $z = (2 - 2i)^{12},\ n = 6$.

9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$.

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación

$$z^n + i\overline{z}^2 = 0$$

tenga exactamente 6 soluciones, y resolver en ese caso.

11. i) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

ii) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

12. i) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum\limits_{k=7}^{60} w^{4k}$.

ii) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\operatorname{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{60} w^k\right)$.

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi i}{6}} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{\frac{-2\pi i}{6}} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$z\,\mathcal{R}\,\omega \iff z\,\overline{\omega} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en el plano complejo la clase de equivalencia de $z = 1 + i$.

15. Se define la siguiente relación $\Re$ en G_{20}:

$$z\ \Re\ \omega \iff z\,\omega^9 \in G_2.$$

i) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.

ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.