- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Elegí la única opción que muestra todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que verifican que los ángulos que forman con los semiejes x^+, y^+, z^+ son iguales y que su norma es 11.

Opciones

A) $\vec{v_1} = \left(\frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}},\right); \vec{v_2} = \left(-\frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}},\right)$

B) $\vec{v_1} = \left(\frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}},\right); \vec{v_2} = \left(-\frac{11}{\sqrt{3}}, -\frac{11}{\sqrt{3}}, -\frac{11}{\sqrt{3}},\right)$

C) $\vec{v_1} = \left(\frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}},\right); \vec{v_2} = \left(\frac{11}{\sqrt{3}}, -\frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}},\right)$

D) $\vec{v_1} = \left(\frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}},\right); \vec{v_2} = \left(\frac{11}{\sqrt{3}}, \frac{11}{\sqrt{3}}, -\frac{11}{\sqrt{3}},\right)$

Respuesta: B)

Resolución

Los vectores en el espacio que forman el mismo ángulo con los semiejes positivos siempre tienen sus tres coordenadas iguales, por lo tanto, si $\vec{v} = (a, a, a)$ y tiene norma 11, puede plantearse que: $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 11$. De aquí pueden obtenerse las dos soluciones para $\vec{v}$.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Hallá la intersección entre el plano Π y la recta L, sabiendo que: Π es ortogonal al eje x y contiene al punto $P = \left(-1; \frac{1}{3}; 2\right)$. L pasa por los puntos $\left(-\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}; 2; -\frac{5}{3}\right)$

Respuesta: $\left(-1; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$

Resolución

Lo primero que podemos hacer es construir el plano y la recta. Del primero tenemos de dato que su normal tendrá la dirección del $ejex$, y pasa por el punto P. Entonces nos queda que $\Pi : x = -1$. Siguiendo, la recta se construye a partir de los dos puntos, recordando que la resta de los mismos nos da el vector director y usando a alguno de los puntos como punto de paso, tenemos que la recta L puede escribirse de forma vectorial como: $\alpha \cdot (1; 2; -3) + \left(-\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$. Luego, la intersección resultará hallar el punto de la recta con coordenada $x = -1$. Este resultará ser $\left(-1; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

El conjunto $\{(1; 5; 0; 0), (1; 2; 0; 3), (0; 3; 0; k)\}$ es linealmente dependiente cuando k toma el valor:

Opciones

A) -1

B) -2

C) -3

D) -4

Respuesta: C)

Resolución

Como $(1; 5; 0; 0) - (1; 2; 0; 3) = (0; 3; 0; -3)$ para que el conjunto sea L.D. tiene que ocurrir que $(0; 3; 0; k) = (0; 3; 0; -3)$, es decir $k = -3$.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

Sea la elipse de focos $(-6; 1)$; $(0; 1)$ y que pasa por $(2; 1)$. El valor de la excentricidad es

Respuesta: $\frac{3}{5}$

Resolución

Teniendo los focos, podemos obtener el centro. En este caso es $(-3; 1)$. Teniendo el centro y los focos, podemos obtener el valor de c, que da 3. Observando que el punto $(2; 1)$ está sobre el eje focal, podemos deducir que $a = 5$. Luego la excentricidad es $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

Dado el sistema $\begin{cases} 2x+y+z & =0 \\ kx-y+z & =k^2 \\ -x+y-kz & =k-2 \end{cases}$ Hallar el valor de k para que el sistema sea compatible indeterminado y $(1;-1;-1)$ sea una de las soluciones.

Opciones

A) -1
B) 1
C) 0
D) -4

Respuesta: 1

Resolución
Para que el sistema tenga infinitas soluciones, el determinante de la matriz asociada debe ser 0. Al calcular el determinante, nos que k^2+3k-4. Los valores de k para que de 0 son -4 y 1. El único de los dos valores que además verifica que $(1;-1;-1)$ es 1

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz asociada es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallen $T(-3;2;6)$

Respuesta: $(-26;8;5)$

Resolución
Teniendo en cuenta que $T(-3;2;6) = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-3;2;6)^t$ basta con realizar la multiplicación.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

Sean $u = 1-i$, $w = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y $z = u^4 \cdot \overline{w}^6$. Indicá la única opción que muestra la forma polar del número complejo z:

Opciones

A) $4\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$
B) $\sqrt{2}\cdot(cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$
C) $2\cdot(cos(\pi) + i\sin(\pi))$
D) $4\cdot(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Respuesta: D

Resolución
Pasando primero al número complejo u a su forma polar, podemos calcular: $u^4 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right)^4$
$u^4 = (\sqrt{2})^4\left(\cos\left(4\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\frac{7\pi}{4}\right)\right)$
$u^4 = 4\left(\cos(7\pi) + i\sin(7\pi)\right)$
$u^4 = 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$

Luego, calculemos $\overline{w}^6$: $\overline{w}^6 = \cos\left(6\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(6\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
$\overline{w}^6 = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = \cos(0) + i\sin(0)$

Finalmente, $z = u^4\cdot\overline{w}^6$
$z = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))\cdot(\cos(0) + i\sin(0))$
$z = 4(\cos(\pi+0) + i\sin(\pi+0)) = 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

Sea $P(x) = \beta + 104x - 18x^2 + x^3$, con $\beta \in \mathbb{Z}$. Hallá el valor de β para que las tres raíces naturales de $P(x)$ sean números pares consecutivos. La respuesta es un número entero.

Respuesta: -192

Resolución
Dado que $P(x)$ es un polinomio mónico de grado 3 y las raíces son números pares consecutivos, tenemos que P es de la forma $P(x) = (x-a)(x-a-2)(x-a-4)$ con a un número par. Desarrollando el producto tenemos $P(x) = -a(a+2)(a+4) + (3a^2+12a+8)x - (3a+6)x^2 + x^3$. Igualando cada coeficiente nos queda un sistema cuya solución es $a=4$. Luego tenemos que $\beta = -4\cdot 6\cdot 8 = -192$
