Transformaciones lineales

Unidad 6

Fe de erratas

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Errata 1. Pág. 126

> Este es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas x, y, z. Tiene la peculiaridad que, en la segunda ecuación, no aparece la variable x (o, en realidad, el coeficiente a_{21} que acompaña a la variable x en la segunda ecuación es 0) y en la tercera ecuación no aparecen ni la variable x ni la y (los coeficientes a_{31} y a_{32} son 0). Notemos que este sistema puede resolverse por sustitución de manera directa. En efecto, de la última ecuación simplemente podemos despejar $z = -3$ y reemplazar esto en la segunda ecuación para obtener $-y + 5(-3) = -13$, de donde podemos despejar $y = 2$. Finalmente, al reemplazar por $z = -3$ e $y = 2$ en la primera ecuación, obtenemos $2x - 6 - 6 = 4$, de donde $x = 8$. ¿Cómo es la matriz (no ampliada) asociada a un sistema de esta forma? En nuestro ejemplo:

El texto dice $y = 2$ y $x = 8$
Corrección: los valores correctos son $y = -2$ y $x = 2$

Errata 2. Pág. 172

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(2,2,1)$$

Les proponemos verificar que se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 & = x_1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 & = x_2 \\ \alpha_3 & = x_3 \end{cases}$$

La única solución de este sistema es $\alpha_1 = \frac{x_1 - 2x_3}{2}$, $\alpha_2 = \frac{x_2 - 2x_3}{2}$ **y** $\alpha_3 = x_3$**. Por lo tanto,**

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - 2x_3}{2}(1,0,0) + \frac{x_2 - 2x_3}{2}(0,1,0) + x_3(2,2,1).$$

Están mal despejadas α_1 y α_2.
Corrección: al resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene que $\alpha_1 = x_1 - 2x_3$, $\alpha_2 = x_2 - 2x_3$ y $x_3 = \alpha_3$.
Luego: $(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3) \cdot (1,0,0) + (x_2 - 2x_3) \cdot (0,1,0) + x_3 \cdot (2,2,1)$
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3) \cdot T(1,0,0) + (x_2 - 2x_3) \cdot T(0,1,0) + x_3 \cdot T(2,2,1)$
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3) \cdot (1,1,2) + (x_2 - 2x_3) \cdot (-1,2,3) + x_3 \cdot (0,1,2)$
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_1 - 2x_3, 2x_1 - 4x_3) + (-x_2 + 2x_3, 2x_2 - 4x_3, 3x_2 - 6x_3) + (0, x_3, 2x_3)$
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3 - x_2 + 2x_3, x_1 - 2x_3 + 2x_2 - 4x_3 + x_3, 2x_1 - 4x_3 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_3)$
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 - 5x_3, 2x_1 + 3x_2 - 8x_3)$

Errata 3. Pág. 187

Proposición 40 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y sea $F \subset \mathbb{R}^2$ una figura cualquiera. Entonces:

$$\text{Área de } T(F) = (\text{Área de } F)|\det(A_T)|$$

Esta proposición dice que *el módulo del determinante de la matriz asociada a T nos da el factor por el que se modifica el área de una figura al aplicarle T*. Por ejemplo, ¿qué sucede con las rotaciones? Geométricamente, estamos girando una figura; no le alteramos el área. ¿Cuál es el determinante de una matriz de rotación θ? Pues:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1.$$

Por lo tanto, ¡hemos redescubierto que el área antes y después de la rotación no se altera!

Ejemplo 66 Estudiemos cómo se modifica el área del círculo D de radio $r = 3$ centrado en el origen al aplicarle una homotecia T de factor $\frac{1}{2}$. Sabemos que el área de D es $2\pi r = 6\pi$. La Proposición 40 nos dice que, luego de aplicar la homotecia T, el área de $T(D)$ es $6\pi \det(A_T)$. Como $\det(A_T) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, entonces $T(D)$ tiene área $\left(\frac{1}{2}\right)^2 6\pi = \frac{3}{2}\pi$.

Para transformaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ vale la misma propiedad pero, en este caso, el determinante nos dice cómo se modifica *el volumen* de una figura tridimensional.

Corrección:

Sabemos que el área D es: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 32 = 9\pi$. La Proposición 40 nos dice que, luego de aplicar la homotecia T, el área de $T(D)$ es $9\pi \cdot det(A_T)$.

Como $det(A_T) = det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ entonces $T(D)$ tiene área igual a: $9\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 9\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}\pi$