Vectores

Unidad 1

Guía de actividades

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Conjuntos

Ejercicio 1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $5 \in A$ *b*) $2 \notin A$ *c*) $\{4, 7\} \subseteq A$ *d*) $\{1, 6, 11\} \subseteq A$ *e*) $\{3, 8\} \nsubseteq A$

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $5 \in \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 10\}$

b) $\{\frac{1}{2}, 4\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 10\}$

c) $\{\frac{1}{2}, 4\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 10\}$

d) $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\}$

e) $\{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\}$

Ejercicio 3. Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$, $B = \{6, 8, 10\}$ y $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ describir por extensión los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B$ *b*) $A \cup C$ *c*) $B \cup C$ *d*) $A \cap B$ *e*) $A \cap C$ *f*) $B \cap C$
g) $(A \cap B) \cup C$ *h*) $A \cap (B \cup C)$ *i*) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ *j*) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 4. Dados los conjuntos $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{\alpha, \beta, \epsilon\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$ y $D = \{\gamma, \epsilon\}$, describir por extensión los siguientes conjuntos.

a) $A \setminus B$ *b*) $B \setminus A$ *c*) $(A \setminus B) \cup B$ *d*) $(B \setminus A) \cup A$ *e*) $C \setminus A$
f) $A \setminus C$ *g*) $B \setminus D$ *h*) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *i*) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
j) A^c, siendo $\mathcal{U} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \theta, \rho\}$ el conjunto universal.
k) A^c, siendo $\mathcal{U} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ el conjunto universal.

Ejercicio 5. Graficar en el plano los siguientes conjuntos.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 8, 1 \leq y \leq 4\}$

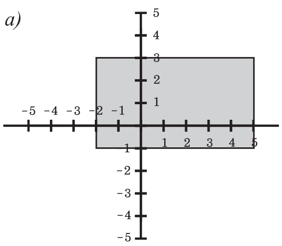
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 8, 1 \leq y < 4\}$

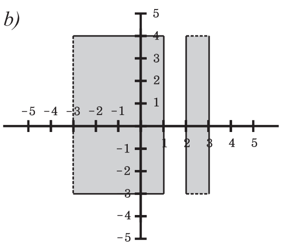
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x \leq 5, 2 \leq y < 3\}$

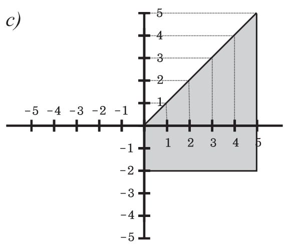
d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x \leq 9, 2 \leq y < 3\}$

e) $A \setminus B$ *f*) $A \setminus C$ *g*) $A \setminus D$ *h*) $C \setminus D$
i) $A \cap C$ *j*) $A \cup C$ *k*) $A \cap D$ *l*) $A \cup D$
m) A^c, siendo $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10\}$

Ejercicio 6. Describir por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

a)


b)


c)


Vectores

Ejercicio 7. Dados los vectores $\vec{v} = (3, 2)$ y $\vec{w} = (-1, 4)$ en $\mathbb{R}^2$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y graficar los puntos $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $-\vec{v}$, $2.\vec{w}$, $\frac{1}{2}.\vec{v}$ y $2\vec{w} - \frac{1}{2}.\vec{v}$.

c) Calcular $3.\vec{v} + 3.\vec{w}$ y $3(\vec{v} + \vec{w})$. ¿Qué le dice esto?

d) Representar en un mismo gráfico los puntos $-2.\vec{v}$, $-\vec{v}$, $\vec{0}$, $\vec{v}$, $2.\vec{v}$. ¿Qué nota? ¿Qué características tienen los puntos de la forma $k.\vec{v}$ con $k \in \mathbb{Z}$ cualquiera? ¿Y los puntos $\lambda.\vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera?

Ejercicio 8. Dados los vectores $\vec{v} = (1, 0, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 0)$ y $\vec{u} = (1, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$:

a) Graficarlos en el espacio.

b) Calcular y graficar los puntos $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{w} - \vec{u}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$.

c) Sabiendo los extremos de los vectores $\vec{0}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{u}$ son vértices de un cubo, escribir las coordenadas de los otros cuatro vértices de dicho cubo.

d) Hallar, si es posible, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $(1, -2, 1) = \alpha.\vec{v} + \beta.\vec{w} + \gamma.\vec{u}$.

Ejercicio 9. Dados en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{v} = (1, 2)$, $\vec{w} = (-2, 5)$ y $\vec{u} = (3, -1)$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Graficar $\vec{v}_1 = (-1, 2)$, $\vec{w}_1 = (2, 5)$ y $\vec{u}_1 = (-3, -1)$. ¿Qué efecto geométrico produce el cambiar el signo a la primera coordenada de un vector?

c) Graficar $\vec{v}_2 = (1, -2)$, $\vec{w}_2 = (-2, -5)$ y $\vec{u}_2 = (3, 1)$. ¿Qué efecto geométrico produce el cambiar el signo a la segunda coordenada de un vector?

d) Graficar $-\vec{v}$, $-\vec{w}$ y $-\vec{u}$. ¿Qué efecto geométrico produce el multiplicar a un vector por -1?

Ejercicio 10. Consideren en $\mathbb{R}^2$ el vector $\vec{t} = (4, 2)$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} = (-4, 1)$, $\vec{w} = (-3, 6)$ y $\vec{u} = (-1, 7)$.

a) Grafiquen todos los vectores en el plano.

b) Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} + \vec{t}$, $\vec{w} + \vec{t}$ y $\vec{u} + \vec{t}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} - \vec{t}$, $\vec{w} - \vec{t}$ y $\vec{u} - \vec{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\vec{t}$ a los puntos de $\mathbb{R}^2$? ¿Y restar el vector $\vec{t}$?

c) Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $2\vec{v}$, $2\vec{w}$ y $2\vec{u}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\frac{1}{2}\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{w}$ y $\frac{1}{2}\vec{u}$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

Ejercicio 11. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar (dilatación) y luego se le sumo otro vector fijo (traslación).

a) Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\vec{v} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega al vector $(-6, 12)$. ¿Se puede saber cuál fue la dilatación y cuál la traslación?

b) Si se le aplican las dos operaciones a $\vec{v} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (3, 4)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega a los vectores $\vec{v}_1 = (-6, 12)$ y $\vec{w}_1 = (-5, 13)$ respectivamente. ¿Se puede saber cuál fue la dilatación y cuál la traslación? Hallarlas.

c) ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{w} = (2, -4)$ se llegue a los vectores $\vec{v}_1 = (2, 4)$ y $\vec{v}_2 = (-2, 3)$ respectivamente?

d) Si se le aplican las dos operaciones en $\mathbb{R}^3$ a $\vec{v} = (1, 1, 1)$ se llega a $\vec{v}_1 = (2, 1, 5)$. Mostrar que si λ es el escalar que da la dilatación, al aplicarla las mismas dos operaciones a $\vec{w} = (2, 1, 3)$ se llega a $(\lambda + 2, 1, 2\lambda + 5)$.

Ejercicio 12.

a) Calcular y graficar el punto medio entre (los extremos de) $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (3, 2)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcular y graficar el punto medio entre (los extremos de) $\vec{v} = (1, 7, 3)$ y $\vec{w} = (-1, 3, 0)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 13. Dados los vectores $\mu = (1;2)$ y $\chi = (1;4)$. Calcular las coordenadas del vector $\vec{v} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\mu + \frac{1}{5}\chi)$:

a) De manera exacta.

b) Aproximadas a tres cifras decimales.

Producto escalar

Ejercicio 14. Calcular los siguientes productos escalares de vectores de $\mathbb{R}^2$.

a) $(1,-1)\cdot(2,4)$ *b*) $(1,3)\cdot(-6,2)$ *c*) $(1,2)\cdot(1,2)$ *d*) $(-1,0)\cdot(0,1)$

Ejercicio 15. Dados los vectores $\vec{v} = (1,-2,2)$, $\vec{w} = (2,0,3)$ y $\vec{u} = (-1,-3,2)$ en $\mathbb{R}^3$ calcular las siguientes operaciones.

a) $\vec{v}\cdot\vec{w}$; $\vec{w}\cdot\vec{v}$.

b) $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}$; $(\vec{v}\cdot\vec{u})+(\vec{w}\cdot\vec{u})$.

c) $(3\vec{v})\cdot\vec{w}$; $3(\vec{v}\cdot\vec{w})$.

d) $\vec{v}\cdot\vec{v}$; $\vec{w}\cdot\vec{w}$.

¿Qué conclusiones sacan?

Ejercicio 16. Calcular la norma de los siguientes vectores.

a) $(-3,4)\in\mathbb{R}^2$ *b*) $(-1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ *c*) $(1,-2,-2,-1)\in\mathbb{R}^4$ *d*) $(1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 17. Dados $\vec{v} = (3,-4)$ y $\vec{w} = (1,2)$ en $\mathbb{R}^2$:

a) Calcular
$$||\vec{v}||, \quad ||\vec{w}||, \quad ||\vec{v}+\vec{w}||, \quad ||\vec{v}||+||\vec{w}||, \quad ||2\vec{v}|| \quad \text{y} \quad ||\tfrac{1}{2}\vec{v}||.$$

b) ¿Qué relación hallaron entre $||\vec{v}||$ y $||2\vec{v}||$? ¿Y entre $||\vec{v}||$ y $||\frac{1}{2}\vec{v}||$?

c) ¿Qué relación hallaron entre $||\vec{v}+\vec{w}||$ y $||\vec{v}||+||\vec{w}||$?

Ejercicio 18. Calcular la distancia entre los puntos $\vec{v} = (2,5)$ y $\vec{w} = (1,3)$

a) de forma exacta.

b) redondeando con tres decimales de exactitud.

c) redondeando con cinco decimales de exactitud.

Ejercicio 19. Calcular la distancia entre los puntos dados.

a) $(1,-3)$ y $(0,0)$ *b*) $(1,-3)$ y $(4,1)$ *c*) $(1,2,3)$ y $(4,1,2)$ *d*) $(4,-2,6)$ y $(3,-4,4)$.

Ejercicio 20. Determinar todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ que verifican.

a) $\vec{v} = (4,k)$ y $||\vec{v}|| = 5$.

b) $\vec{v} = (2,k,-1)$ y $||\vec{v}|| = 2$.

c) $\vec{v} = k.(2,2,1)$ y $||\vec{v}|| = 1$.

d) Los puntos $P = (1,1,1)$, $Q = (k,-k,2)$ de $\mathbb{R}^3$ estén a distancia 2.

Ejercicio 21. Graficar en el plano los siguientes conjuntos.

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| = 1\}$.

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| \leq 1\}$.

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ||(x,y)-(1,1)|| = 1\}$.

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ||(x,y)-(1,1)|| \leq 1\}$.

Ejercicio 22. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores.

a) $(1,0)$ y $(0,1)$ *b*) $(1,2)$ y $(-2,1)$. *c*) $(1,1)$ y $(0,1)$ *d*) $(1,-1,0)$ y $(0,1,1)$.

Ejercicio 23. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ que verifican simultáneamente:

a) la norma del vector $(2,-2,k)$ es igual a 3.

b) el ángulo entre los vectores $(2,1,1)$ y $(1,-1,k)$ es $\dfrac{\pi}{2}$.

Ejercicio 24.

a) Dar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ cuya norma es 2 y el ángulo que forman con el semieje positivo de las x es $\frac{\pi}{6}$.

b) Dar todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que verifican que la norma es 3 y los tres ángulos que forma con los semiejes positivos son iguales.

Ejercicio 25. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no.

a) $(1,-1)$ y $(2,4)$ *b*) $(1,3)$ y $(-6,2)$ *c*) $(1,2)$ y $(1,2)$.

d) $(1,3,5)$ y $(3,0,-2)$ *e*) $(-1,2,1)$ y $(6,1,4)$ *f*) $(2,4,-2),(-3,-6,3)$.

Ejercicio 26. En cada caso, hallar:

a) tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(2,3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados?

b) todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $(2,-2)$ y tienen norma 1.

c) dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1,2,1)$ que no sean paralelos entre sí.

d) tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1,2,1)$ y $(1,-3,0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre si?

Ejercicio 27. Para vectores $\vec{v},\vec{w},\vec{u}$ en $\mathbb{R}^n$, decidir cuales de las siguientes afirmaciones son verdades y cuales falsas.

a) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ entonces $\vec{v}$ es ortogonal a $-\vec{w}$ y a $5\vec{w}$.

b) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ y a $\vec{u}$ entonces $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}+\vec{u}$ y a $3\vec{w}-2\vec{u}$.

c) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ entonces $\vec{v}+\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{w}$.

d) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ y a $\vec{w}-3\vec{u}$ entonces $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

Ejercicio 28.

a) Sean $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que $||\vec{v}|| = 1$, $||\vec{v}+\vec{w}|| = \sqrt{2}$, el ángulo que forma el vector $\vec{v}$, perteneciente al primer cuadrante, con el semieje positivo de las x es $\frac{\pi}{4}$ y el ángulo que forma $\vec{v}+\vec{w}$ con el semieje positivo de las x es $\frac{\pi}{2}$ hallar $\vec{w}$.

b) Sean $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Sabiendo que el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{\pi}{3}$, $||\vec{w}|| = 4$ y $\vec{v}-\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$, calcular $||\vec{v}||$.

Ejercicio 29. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ donde $\vec{v}$ tiene norma 1 y $\vec{w} = (k, k-4, -k)$. Hallar el ó los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}-2\vec{v}$
- El ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{\pi}{3}$