Álgebra I
Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

i) $3 \in A$ iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$ vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ x) $\emptyset \subseteq A$

ii) $\{3\} \subseteq A$ v) $\{1, 2\} \in A$ viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$ xi) $A \in A$

iii) $\{3\} \in A$ vi) $\{1, 2\} \subseteq A$ ix) $\emptyset \in A$ xii) $A \subseteq A$

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos.

i) $A = \{1, 2, 3\}, \ B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

ii) $A = \{1, 2, 3\}, \ B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\}, \ B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$

iv) $A = \{\emptyset\}, \ B = \emptyset$

4. Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

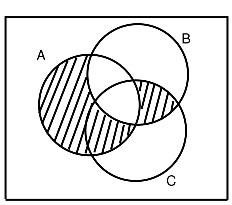
5. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

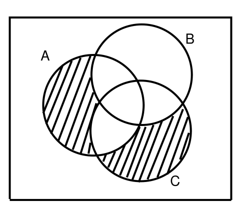
i) $(A \cup B^c) \cap C$ ii) $A \triangle (B \cup C)$ iii) $A \cup (B \triangle C)$

7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

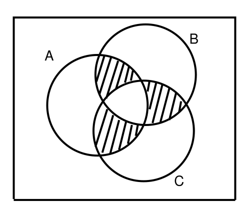
i)



ii)



iii)



8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

i) $A = \{1\}$ ii) $A = \{a, b\}$ iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

9. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes.

i) $p \Rightarrow q$, $\sim q \Rightarrow \sim p$, $\sim p \vee q$ y $\sim (p \wedge \sim q)$.

Esto nos dice que podemos demostrar una afirmación de la forma $p \Rightarrow q$ probando en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ (es decir *demostrando el contrarrecíproco*), o probando $\sim (p \wedge \sim q)$ (esto es una *demostración por reducción al absurdo*).

ii) $\sim (p \Rightarrow q)$ y $p \wedge \sim q$.

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas.

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

12. i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente.

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \vee\ n \leq 8$.

(b) $\exists\, n \in \mathbb{N} /\ n \geq 5 \ \wedge\ n \leq 8$.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N} \ /\ m > n$.

(d) $\exists\, n \in \mathbb{N} /\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ m > n$.

(e) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$.

(f) Si n es un número natural terminado en 4, entonces n es par.

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) Reescribir las proposiciones ***e)*** y ***f)*** del ítem **i)** utilizando las equivalencias del ejercicio ***10i)***.

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$.

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$.

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$.

iv) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

iii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.

iv) $(A \cap B)^c \cup (C \cap D)^c = (A \cap C)^c \cup (B \cap D)^c$.

v) $A \subseteq B \Rightarrow A \triangle B = B \cap A^c$.

vi) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$.

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$.

Relaciones

17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (1,7), (3,1), (3,5)\}$.

ii) $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,7), (3,2), (3,5)\}$.

iii) $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,7), (3,7)\}$.

iv) $\mathcal{R} = \{(1,3), (2,1), (3,7)\}$.

18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B.

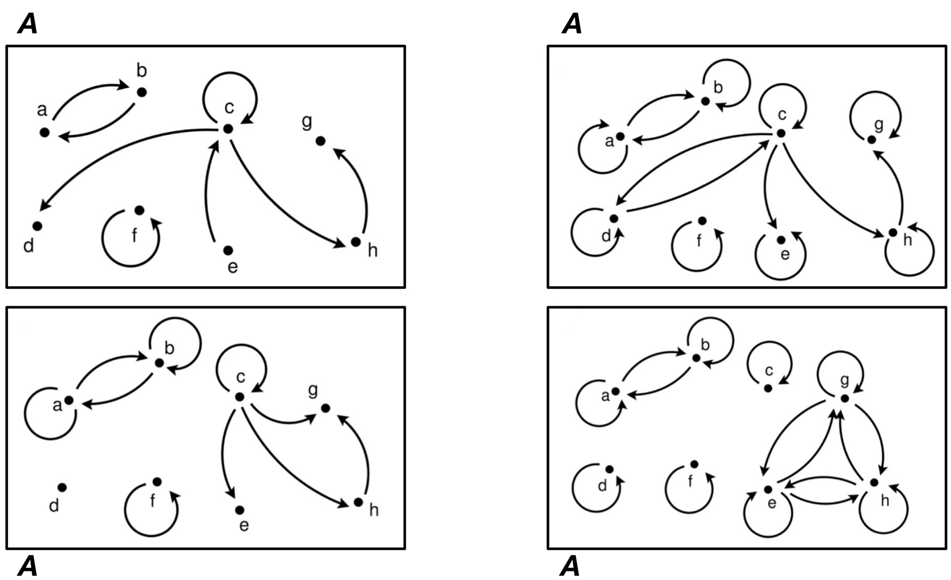
i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

19. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

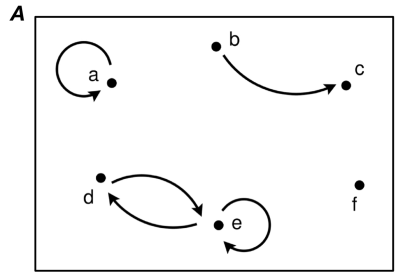


20. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (6,4), (4,6), (4,4), (6,6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

21. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva,
ii) simétrica,
iii) transitiva,
iv) reflexiva y simétrica,
v) simétrica y transitiva,
vi) de equivalencia.

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$.
ii) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b$ es par$\}$.
iii) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\}$.
iv) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \;\Leftrightarrow\; b$ es múltiplo de a.
v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \;\Leftrightarrow\; X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$.
vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N}/n \leq 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \;\Leftrightarrow\; 2 \notin X \cap Y^c$.
vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \;\Leftrightarrow\; bc$ es múltiplo de ad.

23. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas.
ii) de equivalencia y de orden.

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

24. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

25. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\big\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\big\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

26. Sean $P = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ el conjunto de partes de $\{1, \ldots, 10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P definida por

$$A \,\mathcal{R}\, B \iff (A \triangle B) \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica. (Sugerencia: usar adecuadamente el ejercicio **14iii)**).
ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$.

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia ¿Es antisimétrica?

ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$.

28. i) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Consideremos en $\mathcal{P}(A)$ la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos de A están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

ii) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada por el cardinal: dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

Funciones

29. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$

ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$.

iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$.

iv) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,/\, a = 2b - 3\}$.

v) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,/\, a = 2b - 3\}$.

vi) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b \text{ es divisible por } 5\}$.

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, 2z)$.

iv) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$.

v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$.

vi) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$.

31. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n, m) = n(m + 1),$$

calcular, de ser posible, $(f \circ g)(3, 4)$, $(f \circ g)(2, 5)$ y $(f \circ g)(3, 2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 7\\ 2x-1 & \text{si } x>7\end{cases} \quad \text{y} \quad g:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ g(n)=\sqrt{n},$$

hallar, si existen, todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $(f\circ g)(n)=13$ y todos los $m\in\mathbb{N}$ tales que $(f\circ g)(m)=15$.

32. Hallar $f\circ g$ y $g\circ f$ (cuando sea posible) en los casos

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-18$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+3$.

ii) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=\begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4\\ n+1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4\end{cases}$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ g(n)=4n$.

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x)=(x+5,3x)$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ g(n)=\sqrt{n}$.

33. Hallar dos funciones $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ y $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ tales que $f\circ g=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g\circ f\neq\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto $\mathbb{N}$.

34. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f:B\longrightarrow C$ y $g:A\longrightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f\circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

ii) si $f\circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva.

iii) si f y g son inyectivas entonces $f\circ g$ es inyectiva.

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f\circ g$ es sobreyectiva.

v) si f y g son biyectivas entonces $f\circ g$ es biyectiva.

35. Sea $\mathcal{F}=\{f:\{1,\dots,10\}\longrightarrow\{1,\dots,10\}\ /\ f$ es una función **biyectiva**$\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f\,\mathcal{R}\,g \iff \exists\, n\in\{1,\dots,10\}\ /\ f(n)=1 \ \textbf{ y } \ g(n)=1.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

ii) Sea $\mathrm{Id}:\{1,\dots,10\}\longrightarrow\{1,\dots,10\}$ la función identidad, o sea, $\mathrm{Id}(n)=n,\ \forall\, n\in\{1,\dots,10\}$. Dar tres elementos **distintos** de la clase de equivalencia de Id.

Importante: al exhibir una función es indispensable definirla en **todos** los elementos de su dominio.

36. Sea $f:\{1,2,3,4\}\longrightarrow\{1,2,3,4\}$ una función. Consideremos el conjunto de **todas** las funciones de $\{1,2,3,4\}$ en $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, es decir,

$$\mathcal{F}=\Big\{g:\{1,2,3,4\}\longrightarrow\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\Big\}$$

y definimos sobre $\mathcal{F}$ la relación dada por

$$g\,\mathcal{R}\,h \iff g\circ f=h\circ f.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es siempre antisimétrica (sin importar cómo sea f)?

ii) Asumiendo que f es sobreyectiva, calcular la clase de equivalencia de cada $g\in\mathcal{F}$.