Práctica 7: Estudio de Funciones

Ejercicio 1 Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^7 + 7x^5 + 4x$

b) $f(x) = 2 - x^{\frac{1}{3}}$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

d) $f(x) = e^{(x-1)^2}$

e) $f(x) = xe^x$

f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

g) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{en} \quad [-\pi, \pi]$

h) $f(x) = x \ln x$

i) $f(x) = \dfrac{1-x}{2x+3}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

l) $f(x) = x \ln^2 x$

m) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

n) $f(x) = e^{2x^4 - 4x^2}$

Ejercicio 2 Sea $f(x) = \dfrac{24e^x}{3e^x + 1}$. Pruebe que es monótona y halle la imagen de f.

Ejercicio 3 Determine $k \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \dfrac{x+k}{x^2+1}$ alcance un extremo local en $x = 2$. ¿Es un máximo o un mínimo local?

Ejercicio 4 De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en todo su dominio, se sabe que su derivada se anula en $x = -1$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2}$. Además se tiene que

$\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} = (-\infty, -1) \cup \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ y

$\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\} = \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$. Encuentre los máximos y los mínimos locales de f.

Ejercicio 5 Encuentre, si las hay, las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.) de las siguientes funciones. Localice en un dibujo, la posición del gráfico de la función con respecto a las asíntotas halladas:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = x + e^x \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+1)}$

d) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

e) $f(x) = x \ln\left(e - \dfrac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = 2x + \sqrt{1 + x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

i) $f(x) = \dfrac{3e^x}{5e^x + 1}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Ejercicio 6 Encuentre los valores de a y de b tales que la recta $y = 2x + 7$ resulte una asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^2 + 5}$ para $x \to \infty$.

Ejercicio 7 Determine los intervalos de concavidad y convexidad y localice los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

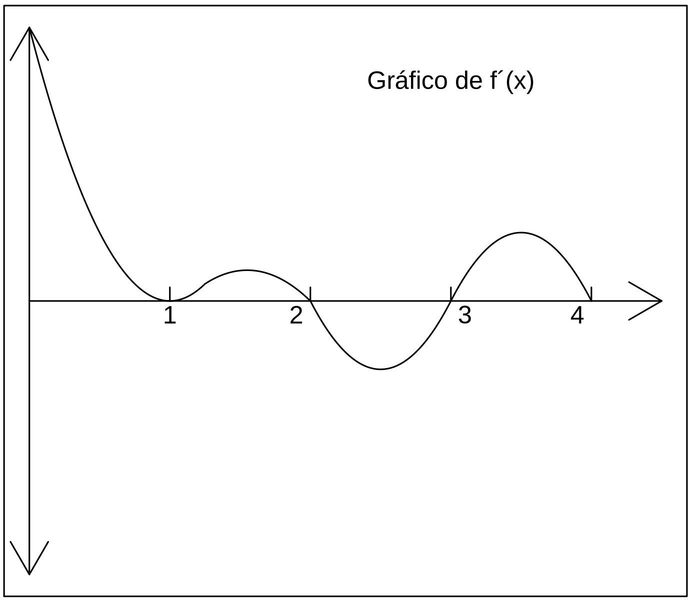
c) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

e) $f(x) = xe^{-x}$

f) $f(x) = x^2 \ln x$

Ejercicio 8 Sea $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ continua y derivable, tal que el gráfico de la función derivada $y = f'(x)$ es el de la figura dada al final del enunciado de este ejercicio. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y los puntos de inflexión de f. Si $f(0) = 1$ haga un gráfico aproximado de $f(x)$.



Ejercicio 9 Para cada una de las siguientes funciones, halle el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales. Determine cuáles de ellos son absolutos. Escriba la ecuación de las asíntotas. Determine, si la cuenta lo permite, los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión. Con la información obtenida haga un gráfico aproximado de la función:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = xe^{-x}$

e) $f(x) = x \ln x$

f) $f(x) = x \ln^2 x$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

h) $f(x) = x^2 e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2+100}{x^2-25}$

j) $f(x) = x\sqrt{4-x}$

k) $f(x) = x^2(2-x)^2$

l) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$

m) $f(x) = x^5 - 5x$

n) $f(x) = (1+x+2x^2)e^x$

o) $f(x) = \sqrt{x-2} - 5\ln(x-2)$

p) $f(x) = x - 3(x-5)^{\frac{2}{3}}$

q) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

r) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

s)*f*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

t) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$

Ejercicio 10 Determine la cantidad de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^7 + 3x^5 + 2x + 1 = 0$

b) $e^x = 1 - x$

c) $xe^{-x^2} = \dfrac{1}{5}$

d) $4x - 5x^{\frac{4}{5}} = 2$

e) $\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 2$

f) $xe^{\frac{1}{x}} = 1$

g) $f(x) = 2$, con

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

h) $x \ln x = -\dfrac{1}{2}$

Ejercicio 11 Pruebe las siguientes desigualdades:

a) $\operatorname{sen} x < x \quad \text{si} \quad x > 0$

b) $x \ln x \ge -1$

c) $e^x > 1 + x$

d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \le xe^{-x^2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{1}{2}}$

e) $(1+x)^{10} > 1+10x$ si $x > 0$

f) $\ln(1+x) > 1 - \dfrac{1}{x}$ si $x > 1$

Ejercicio 12 Para cada una de las siguientes funciones, analice la existencia de extremos absolutos donde se indica:

a) $f(x) = 3x+1$, $[-1,3]$

b) $f(x) = x^2 - 1$, $[-1,1]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $[2,5]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $[0,2]$, $x \neq 1$

e) $f(x) = x^2$, $[-3,4]$

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $(0,2]$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(-\infty,+\infty)$

h) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $[0,\pi]$

Ejercicio 13 Se quiere ahorrar el máximo de material al hacer un tanque recto de base cuadrada y sin tapa, de manera tal que el volumen sea de $32\ m^3$. Halle las dimensiones del tanque. Haga lo mismo pero ahora con tapa.

Ejercicio 14 Determine las dimensiones de un rectángulo de área $169\ cm^2$ que tengan la diagonal de menor longitud.

Ejercicio 15 Por el punto $(2;1)$ pasan rectas que determinan triángulos al cortarse con los semiejes positivos. Entre estas rectas, halle la que genera un triángulo de área mínima.

Ejercicio 16 Pruebe que entre todos los números positivos x e y que satisfacen $x^2+y^2=100$, la suma es máxima cuando $x=y$.

Ejercicio 17 Considere el recinto delimitado por el gráfico de $f(x)=\sqrt{x}$, el eje de las x y la recta $x=4$. Se inscribe allí un rectángulo de vértices $A=(x;0)$, $B=(4;0)$, $C=(4;f(x))$ y $D=(x;f(x))$. Halle el de área máxima. ¿Hay alguno de área mínima?

Ejercicio 18 Considere el gráfico de la función $f(x)=xe^{-x}$, $0 \leq x < +\infty$. De entre todos los triángulos de vértices $(0;0)$, $(x;0)$ y $(x;f(x))$ encuentre el de área máxima.

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Sea $f(x) = x^2 \ln x$.

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -\dfrac{1}{6}$?

b) ¿Para qué valores de k la ecuación $f(x) = k$ tiene una sola solución?

Ejercicio 2 Determine el mayor valor de k para que la desigualdad

$$x^2 \ln x \geq k,$$

sea verdadera para todo $x > 0$.

Ejercicio 3 Sean las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$. Pruebe que existe un único $c > 0$ donde los gráficos de ambas funciones tienen rectas tangentes paralelas en el punto de abscisa $x = c$.

Ejercicio 4 Pruebe que $xe^{-8x^2+1} < \dfrac{9}{20}$ si $x > 0$.

Ejercicio 5 Sea $f(x) = e^{2x+1}\left(x^2 - 7x + \dfrac{1}{2}\right)$. Encuentre todos los puntos para los cuales la pendiente de la recta tangente al gráfico de f resulta mínima.

Ejercicio 6 Determine los valores de $c \in (0, +\infty)$ para los cuales la ecuación

$$e^{\frac{x^2}{x-1}} = c,$$

tiene una única solución.

Ejercicio 7 Para cada $x \in [0, 1]$, la recta tangente al gráfico de $f(x) = \sqrt{4-x}$ forma, con los ejes coordenados una triángulo rectángulo. Halle el de menor área. ¿Existe un triángulo de área máxima?

Ejercicio 8 La lata de una gaseosa tiene una capacidad de $354\ cm^3$. Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo del material sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).

Ejercicio 9 Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $\dfrac{e^{4x}}{x^2} = k$ tiene tres soluciones.

Ejercicio 10 Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $\dfrac{e^{\frac{5}{3}x}}{x^5} = k$ no tiene solución.

Ejercicio 11 Sea $f(x) = (x+1)^3 e^{\frac{3}{4}x^2-5} - 3$. Demuestre que para todo $k \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) = k$ tiene exactamente una solución.

Ejercicio 12 Determine la cantidad de soluciones de la ecuación

$$\sqrt{x-5}\; e^{-4(x-5)^2+1} = 1.$$

Ejercicio 13 Sea $f(x) = \dfrac{2e^{-x^2}}{x^2-4}$. Calcule la imagen de f.

Ejercicio 14 Sea $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Pruebe que $f(x) \geq 3$ para todo $x \geq 0$.

Ejercicio 15 Determine la cantidad de soluciones de la ecuación

$$x^2 - \ln(1+9x^2) = -\frac{2}{3}$$

Ejercicio 16 Sea $f(x) = \dfrac{6e^{4x}}{2e^{4x}+3x^2}$. Calcule la imagen de f.

Ejercicio 17 Determine la cantidad de soluciones que tiene la ecuación

$$\frac{2}{x^3} + 486x = 225$$

Ejercicio 18 Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la desigualdad $\ln(4x+3) \leq 4x + a$ es verdadera para todo $x > -\dfrac{3}{4}$.

Ejercicio 19 Sea $f : [-1, 8] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$. Pruebe que f no es derivable en $x = 0$ y halle todos los extremos absolutos y locales de f.

Ejercicio 20 Sea $f : [-4, 7] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 25}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f.

Ejercicio 21 Sea $f(x) = \dfrac{729}{4(x-2)} + (x-2)^2$ con $x \in [3, 11]$. Halle los puntos en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 22 Sea $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{x^2} + 7$. Halle el máximo y el mínimo absolutos de f.

Ejercicio 23 Sea $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - 9}$ con $x \in [-10, 0]$. Halle los valores de x en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 24 Sea $f(x) = (6 - x)e^{\frac{x^2}{16} - 3}$ con $x \in \left[0, \dfrac{18}{5}\right]$. Halle los valores de x en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 25 Sea $f(x) = 15x + \dfrac{80}{x^3}$ con $x \in [1, 3]$. Halle los puntos de ese intervalo en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 26 Sea $f : \left[2, \dfrac{13}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 4}}{x}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f.

Ejercicio 27 Sea $f : [10, 18] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{3x - 27}}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f.