Números Reales. Valor absoluto. Intervalos. Inecuaciones

Orden en los reales

En el conjunto de los números reales se cumple que:

Si $a \in \Re$ y $b \in \Re$ y $a \neq b$, entonces es $a > b$ ó $a < b$

- $a > b$ se lee "a es mayor que b"
- $a < b$ se lee "a es menor que b"

También escribiremos:

- $a \geq b$ para indicar que a es mayor o igual que b.
- $a \leq b$ para indicar que a es menor o igual que b.

Recordamos las **propiedades del orden:**

Sean a, b y c, números reales, entonces

1. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
2. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$
3. Si $a < b$; $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$
4. Si $a < b$; $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$

Intervalos

La relación de orden en los números reales permite definir en la recta real los siguientes conjuntos numéricos.

- **Intervalo abierto de extremos *a* y *b*.** Es el conjunto de números reales cuyos elementos son mayores que *a* y menores que *b*. Lo simbolizamos:

  $(a, b) = \{ x \in \Re / a < x < b\}$

- ***Intervalo cerrado de extremos a y b***. Es el conjunto de números reales cuyos elementos son mayores o iguales que *a* y menores o iguales que *b*. Lo simbolizamos:

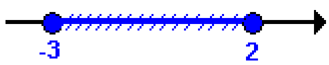
  $[a, b] = \{ x \in \Re / a \leq x \leq b\}$

Veamos algunos ejemplos.

- $[-3; 2] = \{x \in \Re: -3 \leq x \leq 2\}$

  Es el intervalo de extremos – 3 y 2. Ambos extremos pertenecen al intervalo.

  Gráficamente:

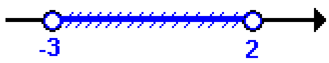


(En el gráfico indicamos con un círculo lleno que los extremos pertenecen al intervalo)

- $(-3; 2) = \{x \in \Re: -3 < x < 2\}$

  Es el intervalo de extremos – 3 y 2. Los extremos no pertenecen al intervalo.

  Gráficamente:



(En el gráfico indicamos con un círculo vacío que los extremos no pertenecen al intervalo)

- ***Intervalo semiabierto (o semicerrado) de extremos a y b***. En este caso sólo uno de los extremos pertenece al intervalo.
  - $[a, b) = \{ x \in \Re / a \leq x < b\}$

    En este caso, a pertenece al intervalo y b no pertenece al intervalo.
  - $(a, b] = \{ x \in \Re / a < x \leq b\}$

    En este caso, a no pertenece al intervalo pero b le pertenece.

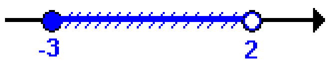
Por ejemplo;

$[-3; 2) = \{x \in \Re: -3 \leq x < 2\}$

Es el intervalo de extremos – 3 y 2.

- 3 pertenece al intervalo y 2 no le pertenece

Gráficamente:



De igual forma podemos definir los siguientes intervalos:

- $[a, +\infty) = \{x \in \Re / x \geq a\}$

  Es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a.

- $(a, +\infty) = \{x \in \Re / x > a\}$

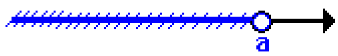
  Es el conjunto de los números reales mayores que a.

- $(-\infty, a] = \{x \in \Re / x \leq a\}$

  Es el conjunto de los números reales menores o iguales que a.

- $(-\infty, a) = \{x \in \Re / x < a\}$

  Es el conjunto de los números reales menores que a.



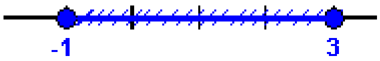
El conjunto de los números reales puede representarse como:

$$\Re = (-\infty, +\infty)$$

Resolvemos un ejemplo:

Escribir en forma de intervalos los conjuntos representados en la recta numérica.

a)



En el gráfico se representan todos los números reales que se encuentran entre -1 y 3, incluyendo a -1 y 3.

Son los números que pertenecen al intervalo cerrado [-1, 3]

b)

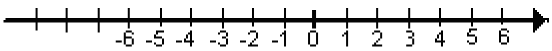
En el gráfico se representan todos los números reales mayores o iguales que 2 ó menores o iguales que -2.

Lo interpretamos como la unión de dos intervalos:

$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Valor absoluto de un número real

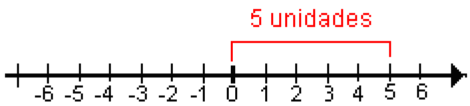
La representación de los números reales en la recta, nos permite establecer la distancia entre cualquiera de ellos y el cero.



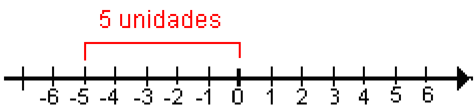
Podemos afirmar que la distancia entre el 4 y el 0 es de 4 unidades, o que la distancia entre – 6 y 0 es de 6 unidades.

Si deseamos encontrar un número cuya distancia al cero sea de 5 unidades, tendremos dos soluciones posibles:

- Una a la derecha del cero: el número 5 cuya distancia al cero es de 5 unidades



- Otra, a la izquierda del cero: -5 cuya distancia al cero también es de 5 unidades



Los números –5 y 5 representan dos puntos distintos en la recta numérica sin embargo ambos están a la misma distancia del cero.

A la distancia entre un número real **a** y el cero la llamamos ***módulo o valor absoluto*** del número real.

Se escribe **|a|** y se lee *módulo o valor absoluto del número a.*

Así, por ejemplo

- $|3| = 3$
  se lee módulo o valor absoluto de 3 e indica la distancia del 3 al 0.
- $|0| = 0$
  se lee módulo o valor absoluto de 0 e indica la distancia del 0 al 0.
- $|-2| = 2$
  se lee módulo o valor absoluto de –2 e indica la distancia del –2 al 0.

En general, podemos afirmar:

- El valor absoluto o módulo indica la distancia entre un número real y el cero, por lo que nunca será negativo. Lo indicamos:

$$\mathbf{|a| \geq 0}$$

- Si el módulo de un número real *a* es igual a cero, entonces *a* es igual a cero. Y si a es igual a cero, entonces módulo de a es igual a cero.

|a| = 0 sí y sólo sí a = 0

Definimos el **valor absoluto de un número real a** como:

$|a| = a$ si a es mayor que cero

$|a| = -a$ si a es menor que cero

$|a| = 0$ si a es igual a cero

O bien:

Si a es un número real el valor absoluto o módulo de a se denota |a| *y se define:*

$$|\mathbf{a}| = \begin{cases} \mathbf{a \text{ si } a \geq 0} \\ \mathbf{-a \text{ si } a < 0} \end{cases}$$

En forma similar podemos establecer la distancia entre dos números de la recta real.

Llamamos **distancia** entre dos números reales **a** y **b**, al valor absoluto de su diferencia:

d(a,b)=|b-a|=|a-b|

Por ejemplo,

- la distancia entre -3 y 4 se determina encontrando;

$$|4 - (-3)| = |4 + 3| = |7| = 7$$

- la distancia entre - 5 y -1 se determina encontrando

$$|-5 - (-1)| = |-5 + 1| = |-4| = 4$$

Usamos la definición de distancia entre dos números para resolver la siguiente situación.

Ejemplo.

- ¿Para qué valores de x se cumple que $|x - 2| = 3$?

Solución.

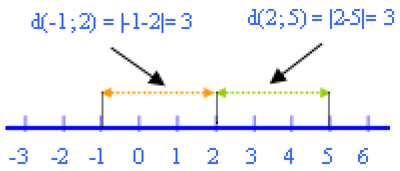
La expresión $|x - 2| = 3$ la interpretamos como *el número real x cuya distancia a 2 es igual a 3*.

Queremos hallar *x.* Probando con algunos números encontramos que;

- $x = 5$; $|5 - 2| = |3| = 3$, sirve pues la distancia entre 5 y 2 es igual a 3.
- $x = -1$ $|-1 - 2| = |-3| = 3$ también sirve pues la distancia entre -1 y 2 es igual a 3.

De este modo, encontramos dos números cuya distancia a 2 es igual a 3.

Interpretemos gráficamente la situación:



Al desplazarnos 3 unidades hacia la derecha de 2 encontramos que x = 5 está a distancia 3 de 2.

Y si nos desplazamos 3 unidades hacia la izquierda de 2, encontramos que x = -1 está a distancia 3 de 2.

Con lo que llegamos al mismo resultado.

Comprobamos lo que hicimos planteando el problema en forma analítica.

Queremos hallar los números reales que verifican $|x - 2| = 3$.

La definición de módulo nos hace pensar que x - 2 puede ser:

- mayor que cero
- menor que cero
- igual que cero

Por lo que debemos plantearnos estas situaciones.

$$x - 2 > 0 \text{ ó } x - 2 < 0 \text{ ó } x - 2 = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$x - 2 \geq 0 \text{ ó } x - 2 < 0$$

Luego,

- Si $x \geq 2$ es $|x - 2| = x - 2$ (por definición de valor absoluto)

  Así resulta:
  $|x - 2| = 3 \Rightarrow x - 2 = 3$ de donde $x = 5$
- Si $x < 2$ es $|x - 2| = -(x - 2)$ (por definición de valor absoluto)

Por lo que es

$$|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

Entonces

$$|x - 2| = 3 \Rightarrow -x + 2 = 3 \text{ de donde } x = -1$$

De este modo, los números reales que cumplen con la condición de que su distancia a 2 es igual a 3 son:

$$x = -1 \text{ ó } x = 5$$

Podemos escribir el conjunto solución como.

$$S = \{-1; 5\}$$

Propiedades del valor absoluto

1. Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto

$$|a| = |-a|$$

2. $|a| = 0$ sí y sólo sí $a = 0$

3. El valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos de los factores:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Veamos algunos ejemplos

- $|2 \cdot (-1)| = |-2| = 2$ es igual a $|2| \cdot |-1| = 2 \cdot 1 = 2$
- $|(-3) \cdot (-2)| = |6| = 6$ es igual a $|-3| \cdot |-2| = 3 \cdot 2 = 6$
- $-\sqrt{5}$ es el opuesto de $\sqrt{5}$ entonces $|-\sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

Inecuaciones

Expresiones como: “peso máximo 225 kg”, “velocidad mínima 40 km/h”, “lo esperé más de 15 minutos” son habituales en la vida cotidiana.

Para traducir al lenguaje matemático cualquiera de estas relaciones se hace uso de desigualdades.

- peso (p) máximo 225 kg $\rightarrow p \leq 225$
- velocidad (v) mínima 40 km/h $\rightarrow v \geq 40$
- esperé (e) más de 15 minutos $\rightarrow e > 15$

Las relaciones algebraicas que se expresan mediante desigualdades reciben el nombre de *inecuaciones*.

En la inecuación $p \leq 225$, cualquier número que cumpla con las condiciones de la inecuación será solución de la misma.

- $p = 200$ es solución de $p \leq 225$ pues $200 \leq 225$
- $p = 225$ también es solución de $p \leq 225$ pues $225 = 225$
- También son soluciones $p = 100$:, $p = 55$, $p = 0$.
- Pero no lo es $p = 300$ pues no cumple la relación de menor o igual que 225
- Y tampoco lo es $p = -15$ pues no tiene sentido un peso negativo (debe ser $p \geq 0$)

En algunos casos como el del ejemplo, es relativamente fácil, encontrar todos los valores que verifican la desigualdad.

Pero generalmente para resolver una inecuación es preciso transformarla en otras equivalentes. Para ello utilizamos las propiedades de orden en el conjunto de los reales.

Así, podemos afirmar que:

Para recordar

Las siguientes operaciones no cambian el sentido de la desigualdad:

- Sumar o restar un número a ambos miembros de la desigualdad.
- Multiplicar (o dividir) por un número mayor que cero

Pero cambia el sentido de la desigualdad:

- Multiplicar (o dividir) por un número menor que cero.
  $3 > 1$ pero $3\,(-2) < 1\,(-2)$ ya que $-6 < -2$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.

Resolver $x - 3 > 7$

Solución

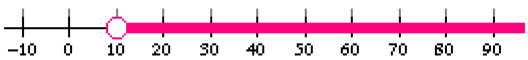
$x - 3 > 7$

$x - 3 + 3 > 7 + 3$ Sumando 3 a ambos miembros.

$x > 10$

Los números reales que verifican la desigualdad son todos aquellos mayores que 10.

Gráficamente,



Luego el conjunto solución es

$$S = (10, +\infty) = \{x \in \Re \,/\, x > 10\}$$

Ejemplo 2.

Resolver $3.(1-x) \leq -2 - x$

Solución

$3.1 - 3x \leq -2 - x$ Distribuyendo

$3 - 3x \leq -2 - x$

$3 - 3x + x \leq -2 - x + x$ Sumando x a ambos miembros

$3 - 2x \leq -2$

$-3 + 3 - 2x \leq -2 - 3$ Restando 3 a ambos miembros

$-2x \leq -5$

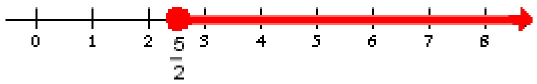
$\left(-\frac{1}{2}\right)$ (-2x) $\geq \left(-\frac{1}{2}\right)$ (-5) Multiplicando ambos miembros por $-\frac{1}{2} < 0$, cambia el sentido de la desigualdad)

$$x \geq \frac{5}{2}$$

Luego, son solución de la inecuación todos los números reales mayores o iguales que $\frac{5}{2}$. Lo escribimos así:

$$S = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) = \left\{x \in \Re \,/\, x \geq \frac{5}{2}\right\}$$

Gráficamente,



Ejemplo 3

Encontrar el conjunto de números reales que verifican $-3 \leq 2x + 1 \leq 7$

Solución

Para resolver este problema debemos encontrar los números reales que verifican simultáneamente:

$$-3 \leq 2x + 1 \quad y \quad 2x + 1 \leq 7$$

Para ello debemos resolver las dos inecuaciones.

Resolvemos

- $-3 \leq 2x + 1$

  $-3 - 1 \leq 2x + 1 - 1$ Restamos miembro a miembro 1

  $-4 \leq 2x$

  $-4 : 2 \leq 2x : 2$ Dividimos ambos miembros por 2 (Al ser 2 > 0, no cambia el sentido de la desigualdad)

  $-2 \leq x$

- $2x + 1 \leq 7$

  $2x + 1 - 1 \leq 7 - 1$ Restamos miembro a miembro 1

  $2x \leq 6$

  $2x : 2 \leq 6 : 2$ Dividimos ambos miembros por 2 (Al ser 2 > 0, no cambia el sentido de la desigualdad)

  $x \leq 3$

Gráficamente

Luego, los números que buscamos deben cumplir simultáneamente:

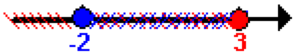
$$-2 \leq x \quad y \quad x \leq 3$$

O bien;

$$-2 \leq x \leq 3$$

Gráficamente

Los números que satisfacen simultáneamente las dos condicones están pintados con el doble rayado.



Vemos que son los números que pertenecen al intervalo:

$$[-2 , 3]$$

Por lo que el conjunto solución es:

$$S = [-2 , 3] = \{ x \in \Re / -2 \leq x \leq 3\}$$

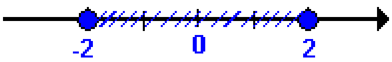
Desigualdades con valor absoluto

Nos proponemos encontrar los números reales que verifican que su distancia al cero es menor o igual que 2.

Si recordamos que la distancia de un número al cero la expresamos mediante $|x|$, lo que buscamos lo podemos simbolizar como:

$$\mathbf{|x| \leq 2}$$

Es decir que los números buscados están en un segmento de longitud 2 a la izquierda o a la derecha del cero.

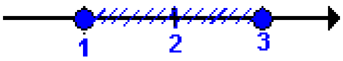


Vemos que los números buscados cumplen la condición $-2 \leq x \leq 2$. Entonces podemos escribir

$$|x| \leq 2 \text{ sí y sólo sí } -2 \leq x \leq 2$$

Los números reales que pertenecen al intervalo $[-2; 2]$ verifican $|x| \leq 2$.

De la misma manera, los números reales que verifican que $|x-2| \leq 1$ son aquellos números cuya distancia al 2 es menor o igual que 1. Por lo tanto están en un segmento de longiud 1 a la derecha o a la izquierda del 2.



Los números buscados cumplen la condición $1 \leq x \leq 3$

Podemos escribir

$$|x-2| \leq 1 \text{ sí y sólo sí } 1 \leq x \leq 3$$

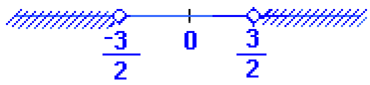
Los números reales que pertenecen al intervalo $[1, 3]$ verifican $|x-2| \leq 1$

En general, si a y b (b >0) son números reales, se verifica

- $|x| \leq b$ sí y sólo sí $-b \leq x \leq b$,
- $|x - a| \leq b$ sí y sólo sí $-b \leq x - a \leq b$, sí y sólo sí $-b + a \leq x \leq b + a$

Buscamos ahora todos los números reales que verifican; $|x| > \frac{3}{2}$.

Los números que buscamos están a distancia mayor que $\frac{3}{2}$ con respecto al cero, por lo tanto los x que buscamos están fuera de los dos segmentos de longitud $\frac{3}{2}$ a la izquierda o a la derecha del cero.
Representado en la recta numérica obtenemos:



Vemos que los números reales buscados cumplen la condición

$$x < -\frac{3}{2} \text{ ó } x > \frac{3}{2}$$

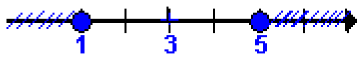
Por lo que, los números reales que verifican $|x|$ **>** $\frac{3}{2}$ pertenecen al intervalo

$$\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

(Recordar que con "$\cup$" simbolizamos la unión de conjuntos)

En forma similar, si deseamos encontrar los números que verifican $|x - 3| \geq 2$ los números que buscamos están a distancia mayor o igual que 2 respecto del 3, por lo tanto están fuera de los dos segmentos de longitud 2 a la izquierda o a la derecha del 3.

Representado en la recta numérica obtenemos:



Luego, los números que verifican que $|x - 3| \geq 2$ pertenecen al intervalo

$$(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$$

En general, si a y b (b >0) son números reales, se verifca

- $|x| \geq b$ sí y sólo sí $x \leq -b \leq$ ó $x \geq b$,
- $|x - a| \geq b$ sí y sólo sí $x - a \leq -b \leq$ ó $x - a \geq b$,
  sí y sólo sí $x \leq -b + a \leq$ ó $x \geq b + a$