

Capítulo 1

FUNCIONES

Producto Cartesiano: Dados dos conjuntos A y B , se llama *producto cartesiano de A por B* y se designa $A \times B$ al conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B .

A : conjunto de partida

B : conjunto de llegada

(x, y) : par ordenado, siendo x la primera componente e y la segunda componente.

En símbolos:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Ejemplo 1: Sean los conjuntos $A = \{1; 2\}$ y $B = \{3; 4; 5\}$. Entonces, el producto cartesiano es:

$$A \times B = \{(1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 3); (2, 4); (2, 5)\}$$

Observación: El producto cartesiano no es conmutativo, dado que $A \times B \neq B \times A$.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Luego, cambiando el orden en que son tomados dos elementos, se obtiene un par ordenado distinto, es decir, el par $(1, 3)$ es distinto del par $(3, 1)$.

Relaciones

Una ***relación*** entre los elementos de un conjunto A y otro B es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Cada subconjunto define una relación **R** .

En símbolos:

$$R \text{ es una relación de } A \text{ en } B \Leftrightarrow R \subseteq A \times B$$

Análogamente **R** es una relación entre los elementos de un conjunto A si es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.

Funciones

Dominio de una relación (D_R) : Es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares de la relación.

Recorrido de una Relación (R_R) : Es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares de la relación.

Observación: $D_R \subseteq A$ y $R_R \subseteq B$

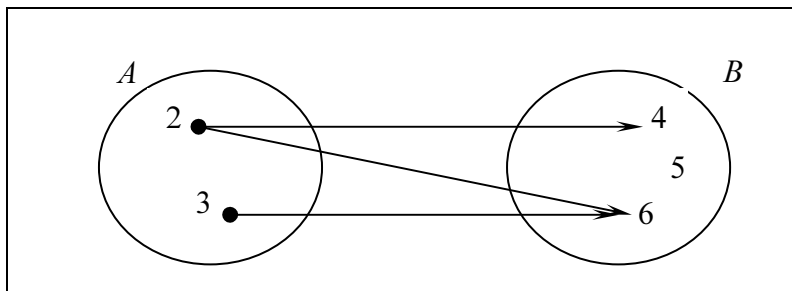
Formas de Representación

1) Diagrama de Venn

$$A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 3\}$$

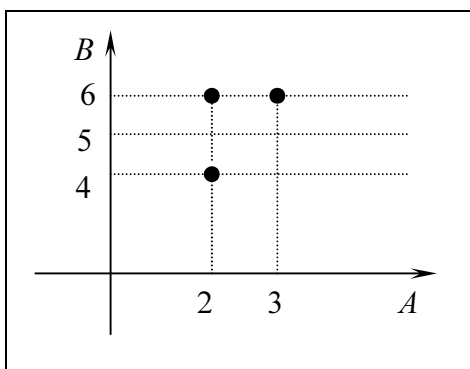
$$B = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq x \leq 6\}$$

$$R = \{(x, y) / (x, y) \in A \times B \wedge x \text{ es divisor de } y\}$$



Cada flecha representa un par de la relación.

2) Gráfico cartesiano: Continuemos con el ejemplo anterior



Relación Inversa : Sea R una relación de A en B ($R : A \rightarrow B$). Se llama **relación inversa** de B en A , y se nota R^{-1} , a aquella formada por pares (x, y) tales que (y, x) pertenecen a R .

En símbolos:

$$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in R\}$$

FUNCIONES

Una **función** f de A en B es una relación que le hace corresponder a cada elemento $x \in A$ uno y sólo un elemento $y \in B$, llamado **imagen** de x por f , que se escribe $y = f(x)$.

En símbolos:

$$f : A \rightarrow B \quad / \quad y = f(x)$$

Es decir que para que una relación de un conjunto A en otro B sea función, debe cumplir dos condiciones, a saber:

- 1) Todo elemento del conjunto de partida A debe tener imagen, es decir, el dominio de la función debe ser A $\therefore Df = A$.

En símbolos:

$$\forall x \in A : \exists y \in B \quad / \quad y = f(x)$$

- 2) La imagen de cada elemento $x \in A$ debe ser única. Es decir, ningún elemento del dominio puede tener más de una imagen.

En símbolos:

$$\forall x \in A : (x, y) \in f \quad \wedge \quad (x, z) \in f \quad \Rightarrow \quad y = z$$

El conjunto formado por todos los elementos de B que son imagen de algún elemento del dominio se denomina **conjunto imagen** o **recorrido** de f .

En símbolos:

$$Rf = \{y \in B \quad / \quad \exists x \in A \quad \wedge \quad (x, y) \in f\}$$

Observaciones:

- a) En una función $f : A \rightarrow B$ todo elemento $x \in A$ tiene una y sólo una imagen $y \in B$.
- b) Un elemento $y \in B$ puede:
 - i) No ser imagen de ningún elemento $x \in A$.
 - ii) Ser imagen de un elemento $x \in A$.
 - iii) Ser imagen de varios elementos $x \in A$.
- c) La relación inversa f^{-1} de una función f puede no ser una función.

Funciones reales de una variable real

Se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es **real** si $B \subseteq \mathbb{R}$ (puede suponerse $B = \mathbb{R}$) y se dice que es de **variable real** si su dominio es un conjunto de números reales ($A \subseteq \mathbb{R}$).

En símbolos:

$$f : A \rightarrow B \quad / \quad y = f(x) \quad \text{con} \quad A \subseteq \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} x: \text{variable independiente o argumento} \\ y: \text{variable dependiente.} \end{array}$$

Formas de expresión de una función

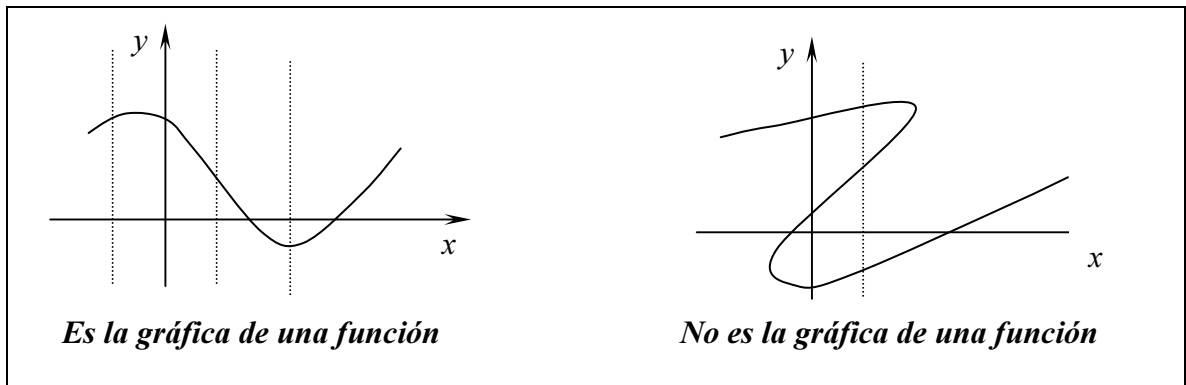
1) Mediante el uso de tablas:

| x | y |
|---------------|---------------|
| -1 | 1 |
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| ... | ... |

2) **Gráficamente:** Cabe aclarar que llamamos **gráfica** de una función real de variable real al conjunto de puntos del plano que referidos a un sistema de ejes cartesianos ortogonales tienen coordenadas $(x, f(x))$ donde $x \in A$.

Observaciones:

- a) El dominio de la función se considera sobre el eje de abscisas.
- b) El conjunto imagen o recorrido se considera sobre el eje de ordenadas.
- c) Si trazamos paralelas al eje de ordenadas, éstas *no pueden* intersectar al gráfico de una función *en más de un punto*, pues de lo contrario habría más de una imagen para ciertos elementos del dominio, lo que contradice la definición de función.



3) **Analíticamente:** Cuando la función está dada por $y = f(x)$ donde f representa a una expresión analítica.

Por ejemplo: $y = x^2 - 2$

Funciones

Observación: Cuando se da una función real de variable real por medio de una fórmula $y = f(x)$ que permite hallar la imagen de cada elemento x pero no está dado expresamente el dominio, se entiende que el mismo es el conjunto más amplio posible $A \subseteq \mathbb{R}$ de valores de x para los cuales la expresión analítica $f(x)$ adquiere un valor real determinado.

Por ejemplo en $y = x^2 - 2$, $A = \mathbb{R}$, pues esa expresión está definida para cualquier valor de x .

En cambio si la función está dada por $y = \frac{x^2}{x+2}$, la expresión está definida para cualquier valor de x excepto para $x = -2$. Luego, el dominio de la función $f(x)$ es $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Paridad de una función

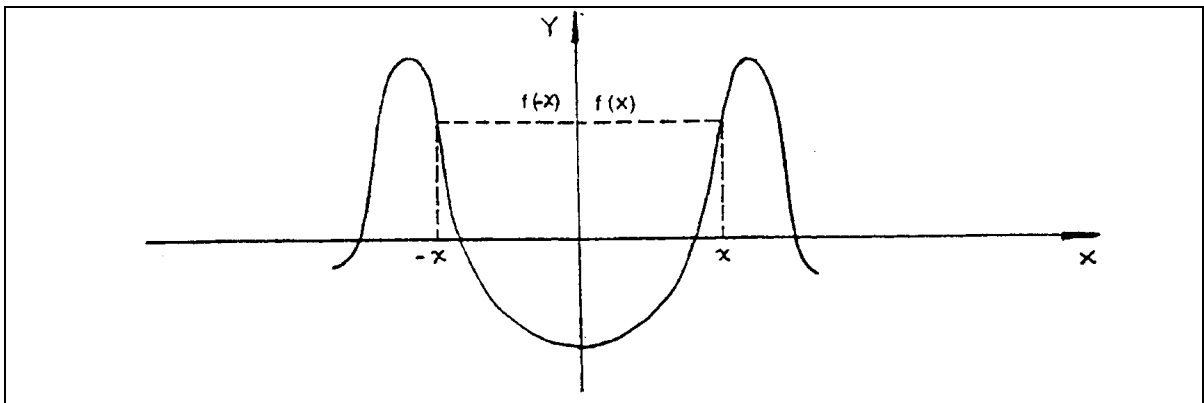
Sea una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en la que $A \subseteq \mathbb{R}$ es simétrico respecto del origen, vale decir si $x \in A \Rightarrow -x \in A$.

Se dice que:

a) f es una función **par** $\Leftrightarrow \forall x \in A : f(-x) = f(x)$

Es decir, elementos opuestos del dominio tienen la misma imagen.

En cuanto a la gráfica de una función par es una curva simétrica respecto del eje de ordenadas.

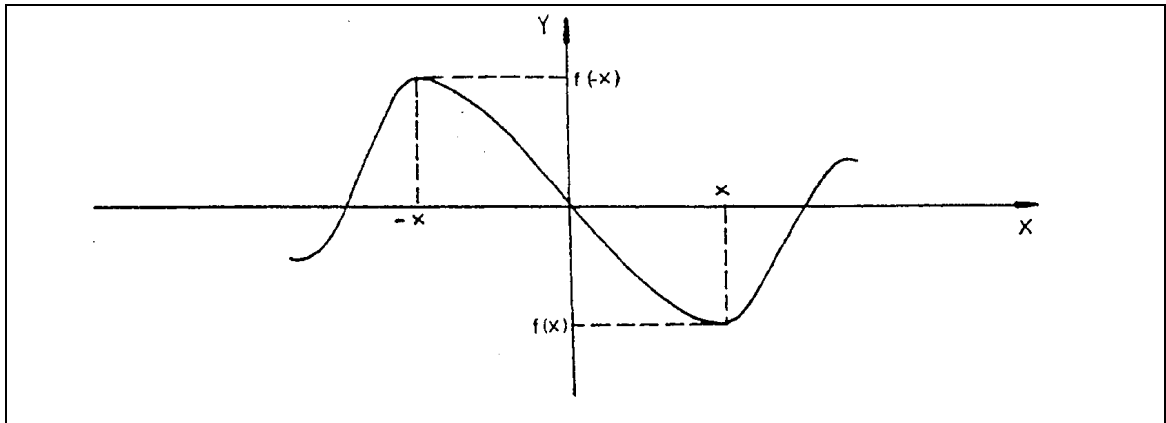


b) f es una función **impar** $\Leftrightarrow \forall x \in A : f(-x) = -f(x)$

Es decir que a elementos opuestos del dominio les corresponden imágenes opuestas en el recorrido.

En cuanto a las gráficas de estas funciones son curvas con simetría respecto del origen de coordenadas.

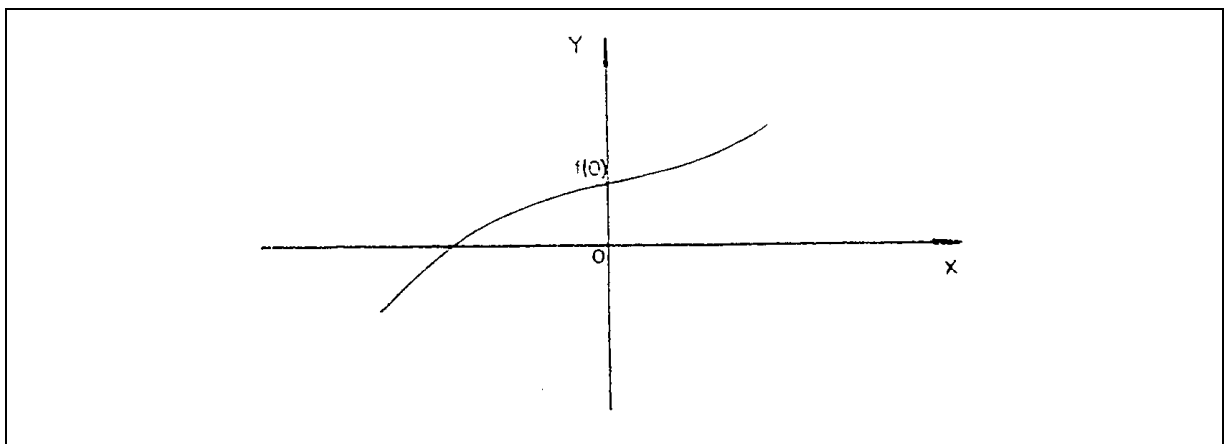
Funciones



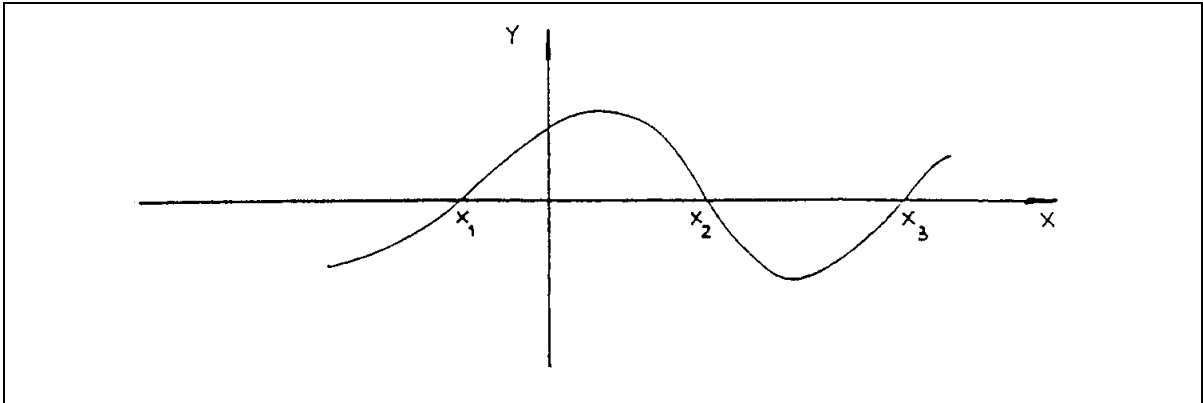
Intersecciones con los ejes coordenados

Son los puntos en que la gráfica de una función interseca a los ejes de abscisas y de ordenadas.

- a) **Con el eje de ordenadas (y):** Se obtiene haciendo $x = 0$. Es decir, corresponde al par $(0, f(0))$. (Observemos que si existe, es único, tal como lo exige la definición de función).



- b) **Con el eje de las abscisas (x):** Se obtienen para aquellos valores x del dominio donde se anula el valor de la función. Dichos valores de x se denominan **ceros** de la función y son las soluciones o raíces de la ecuación $f(x) = 0$.



Comencemos ahora con el estudio de algunas funciones elementales:

I. FUNCIÓN LINEAL

Está dada por la fórmula $y = mx + b$ donde m y b son números reales llamados **pendiente** y **ordenada al origen** respectivamente.

Su gráfica es una **recta**.

Las intersecciones con los ejes coordenados son:

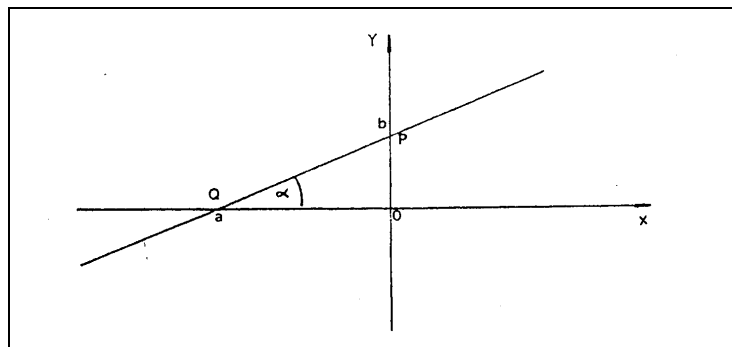
i) Con el eje y : $P = (0, b)$

ii) Con el eje x : $Q = (a, 0)$ donde a es el cero de la función y raíz de la ecuación $mx + b = 0$.

Por lo tanto, $a = -\frac{b}{m}$.

Observemos que, dada la ecuación $y = mx + b$:

- a) Si $m = 0$, entonces $y = b$. Es decir, se obtiene la **función constante**, cuya gráfica es una recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0, b)$.
- b) Si $b = 0$, entonces $y = mx$. Esta ecuación tiene por gráfica una recta que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$.



Funciones

La recta forma con el eje x un ángulo α . Veamos la relación que existe entre m y α .

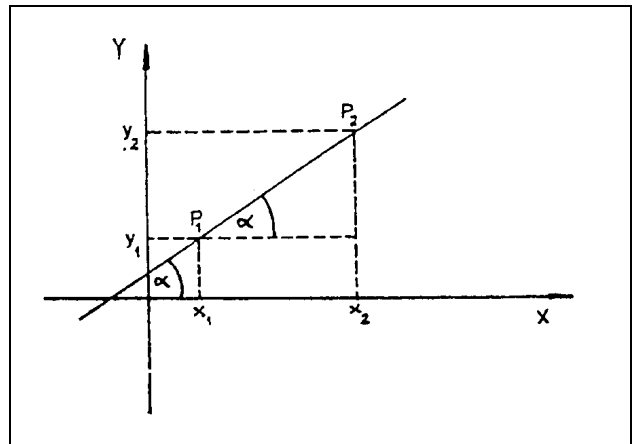
En el triángulo rectángulo $\triangle POQ$ es:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{b-0}{0-a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{-\left(-\frac{b}{m}\right)} = m$$

Luego, $m = \operatorname{tg} \alpha$ (la pendiente da la tangente del ángulo α , que forma la recta con el eje x medido en sentido contrario a las agujas del reloj).

Teniendo en cuenta la conclusión anterior las coordenadas de cualquier par de puntos de la recta $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ deberán cumplir:

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Definimos $\Delta y = y_2 - y_1$ como el **incremento** o **variación** de y , $\Delta x = x_2 - x_1$ como el **incremento** o **variación** de x .

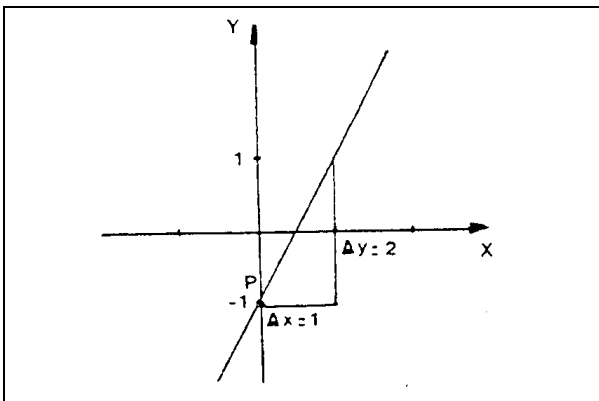
Veamos cómo representar gráficamente una función lineal dada su ecuación.

Ejemplo 2: Representemos $y = 2x - 1$

a) Consideramos un punto y la pendiente:

$P = (0, -1)$ (intersección con el eje y)

$m = 2$



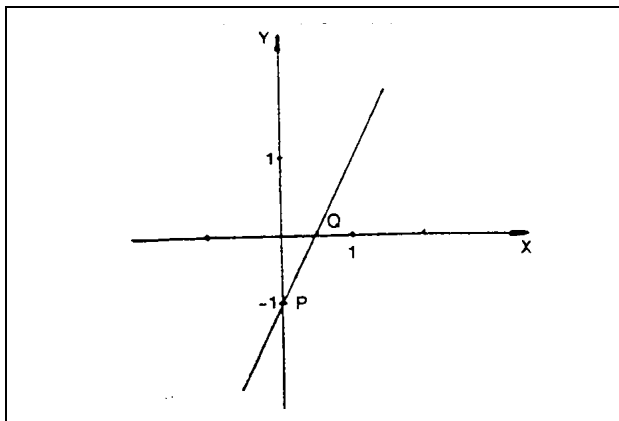
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \therefore \text{si } \Delta x = 1 \text{ es } \Delta y = 2$$

Funciones

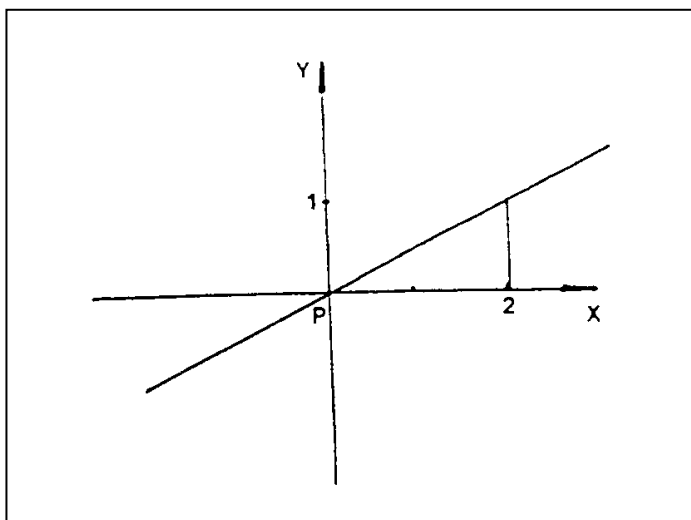
- b) Consideramos dos puntos cualesquiera de la recta, por ejemplo, los puntos de intersección con los ejes x e y .

$$P = (0; -1)$$

$$Q = \left(\frac{-b}{m}, 0 \right) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$$



Ejemplo 3: Representemos ahora $y = \frac{1}{2}x$



Su pendiente es $m = \frac{1}{2}$ y, por ser $b = 0$, pasa por el origen $(0, 0)$.

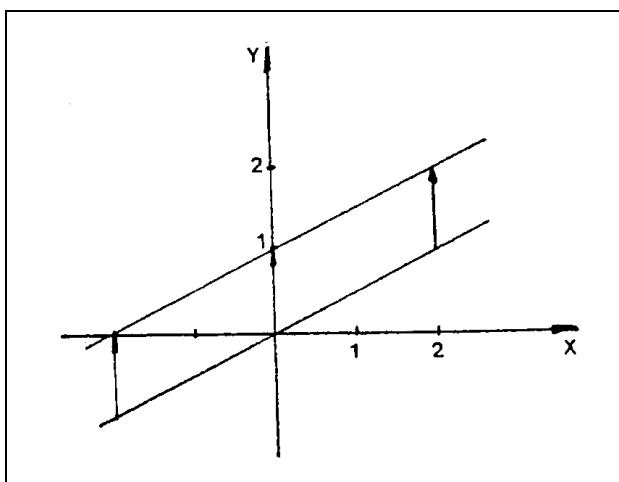
Marcamos $P = (0, 0)$ y consideramos $\Delta x = 2$ y $\Delta y = 1$

ya que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 4: Observemos los desplazamientos que tendría la recta $y = \frac{1}{2}x$ con las siguientes modificaciones en la ecuación.

- i) Sumando o restando un número $k > 0$ a la función.

Funciones



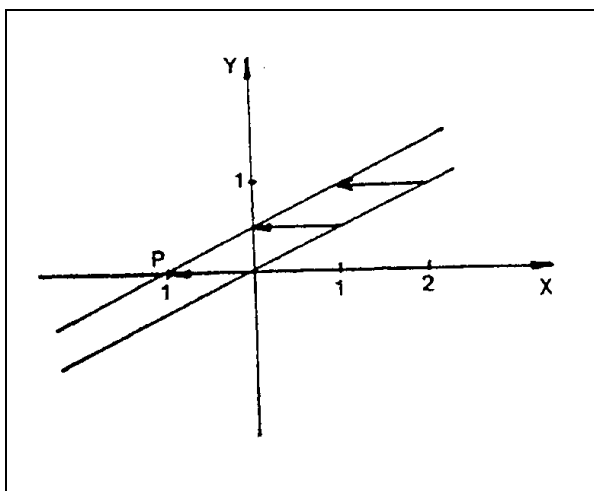
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Hemos considerado $k = 1$.

Todos los puntos de la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x$ se desplazaron 1 unidad en el sentido positivo del eje y .

Observemos que si hubiésemos restado 1, el corrimiento hubiera sido en el sentido negativo del eje y .

ii) Sumando o restando un número real $k > 0$ al argumento x .



$$y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

Hemos considerado $k = 1$.

$$P = (-1, 0) \quad y \quad m = \frac{1}{2}$$

Todos los puntos de la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x$ se desplazaron 1 unidad en el sentido negativo del eje x .

Observemos que si hubiésemos restado 1, el corrimiento hubiera sido en el sentido positivo del eje x .

Conclusión: Dada una función $y = f(x)$ y $k > 0$:

a) La gráfica de $y = f(x) \pm k$ se obtiene desplazando la curva de $y = f(x)$ en la dirección del eje y

i) k unidades en el sentido positivo si $y = f(x) + k$

ii) k unidades en el sentido negativo si $y = f(x) - k$

b) La gráfica de $y = f(x \pm k)$ se obtiene desplazando la curva de $y = f(x)$ en la dirección del eje x .

i) k unidades en el sentido positivo si $y = f(x - k)$

ii) k unidades en el sentido negativo si $y = f(x + k)$

Ecuación de una recta que pasa por un punto $P = (x_0, y_0)$ y pendiente dada m .

Queremos hallar la ecuación de la recta conocida su pendiente y que pasa por un punto dado $P = (x_0, y_0)$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5: Sea $P = (x_0, y_0) = (-2, 1)$ y sea $m = 1$ la pendiente.

Podemos plantear: $y = mx + b$ por tratarse de una función lineal con $m = 1$ y b a determinar.

Si el punto dado pertenece a la gráfica de la función sus coordenadas deben satisfacer la ecuación, luego:

$$y_0 = m x_0 + b$$

$$1 = m(-2) + b \quad \text{reemplazamos } m = 1$$

$$1 = -2 + b$$

$$b = 3$$

La función buscada es entonces $y = x + 3$

****Procediendo análogamente puede resolverse el ejercicio 3) i) de la guía de trabajos prácticos.***

Alternativamente puede aplicarse la siguiente expresión que se obtiene de despejar de la

ecuación $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Utilicemos esta expresión para resolver el ejemplo anterior. Reemplazando $P = (-2, 1)$ y $m = 1$ resulta:

$$y - 1 = 1(x - (-2))$$

$$y - 1 = x + 2$$

$$y = x + 3$$

Obteniéndose el mismo resultado que por el procedimiento anterior.

Ecuación de una recta conocidos dos de sus puntos

Supongamos ahora que queremos hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos de coordenadas $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$.

Ejemplo 6: Sean $P_0 = (x_0, y_0) = (-1, 1)$ y $P_1 = (x_1, y_1) = (-2, 4)$. Como los puntos dados pertenecen a la recta $y = mx + b$, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma que es de la forma con m y b a determinar.

Funciones

Reemplazando las coordenadas de los puntos en la ecuación general obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son m y b .

$$y_0 = m x_0 + b$$

$$y_1 = m x_1 + b$$

En nuestro ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = m(-1) + b \\ 4 = m(-2) + b \end{array} \right\} \text{ Sistema de ecuaciones en } m \text{ y } b$$

Resolviendo el sistema planteado por igualación o por cualquier otro método:

$$\left. \begin{array}{l} b = m + 1 \\ b = 2m + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow m + 1 = 2m + 4 \Rightarrow m = -3$$

Reemplazando, obtenemos que $b = -3 + 1 = -2$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta es: $y = -3x - 2$

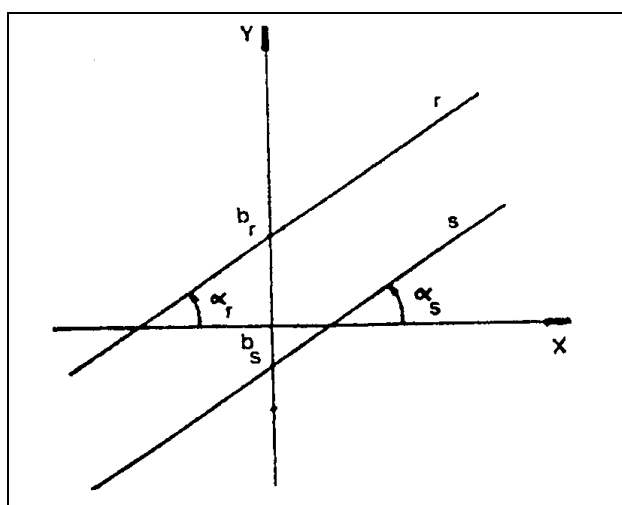
Alternativamente puede utilizarse la siguiente expresión, que se obtiene reemplazando

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ en la ecuación } y - y_0 = m(x - x_0):$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Rectas paralelas y Perpendiculares

1) Paralelas



$$r: y = m_r x + b_r$$

$$s: y = m_s x + b_s$$

$$r \parallel s \Leftrightarrow \hat{\alpha}_r = \hat{\alpha}_s$$

$$\hat{\alpha}_r = \hat{\alpha}_s \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{\alpha}_r = \operatorname{tg} \hat{\alpha}_s \Rightarrow m_r = m_s$$

paralelas las pendientes deben ser iguales.

Veamos un ejemplo.

Por lo tanto, para que dos rectas sean

Ejemplo 7: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0 = (1, 1)$ y es paralela a la recta de ecuación $x + y = 5$

Podemos plantear:

r : pasa por $P_0 = (1, 1)$ y tiene pendiente m_r

s : $x + y = 5$

$r \parallel s$

Para determinar la pendiente de la recta s (m_s), le damos forma explícita a su ecuación:

$y = -x + 5$ de donde $m_s = -1$.

Como $r \parallel s \Rightarrow m_r = m_s$

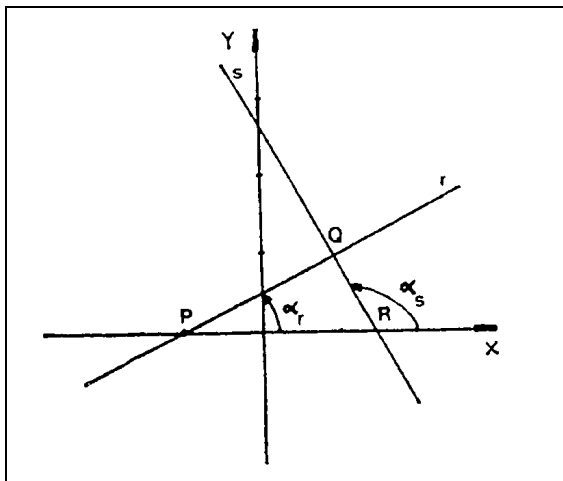
Ahora conocemos de la recta r un punto $P_0 = (1, 1)$ y su pendiente $m_r = -1$, aplicando

$y - y_0 = m_r (x - x_0)$

$y - 1 = -1 (x - 1)$

$y = -x + 2$

2) Perpendiculares



$r \perp s \Rightarrow \triangle PQR$ rectángulo

$\hat{\alpha}_s = \hat{\alpha}_r + 90^\circ$

$\text{tg } \hat{\alpha}_s = \text{tg } (\hat{\alpha}_r + 90^\circ) = -\cot g \hat{\alpha}_r = -\frac{1}{\text{tg } \hat{\alpha}_r}$

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Por lo tanto, la condición de perpendicularidad entre dos rectas es que la pendiente de una de ellas sea la recíproca cambiada de signo de la pendiente de la otra.

Apliquemos esta condición a la resolución de un ejercicio.

Ejemplo 8: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q = (2, 2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $P_0 = (0, 3)$ y $P_1 = (1, 1)$. Graficar ambas rectas.

Llamemos s a la recta que pasa por $Q = (2, 2)$ y r a la determinada por $P_0 = (0, 3)$ y $P_1 = (1, 1)$.

Vamos a hallar primero la ecuación de la recta r , aplicando:

Funciones

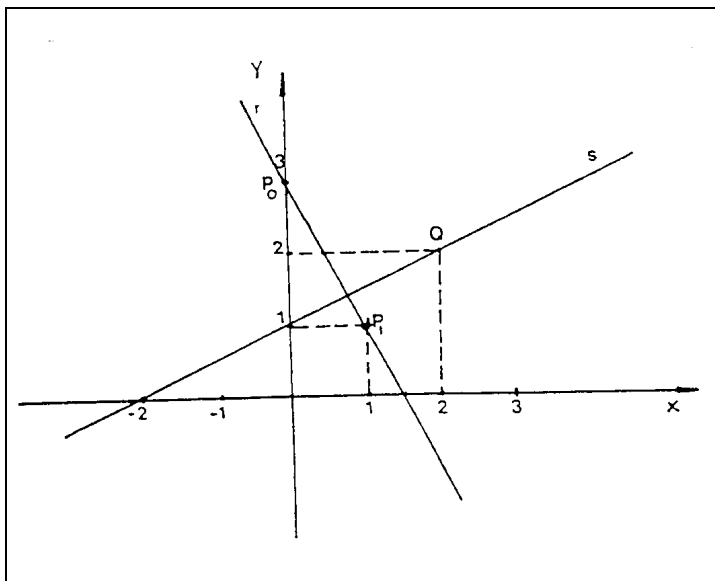
$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1 - 3}{1 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow m_r = -2$$

Por la condición de perpendicularidad resulta:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Ahora hallamos la ecuación de la recta s de la cual conocemos un punto $Q = (2, 2)$ y la pendiente $m_s = \frac{1}{2}$ para lo cual aplicamos:



$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Sistemas de ecuaciones

Lo explicaremos con un ejemplo.

Ejemplo 9: Resolver analítica y gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$$

Para resolver analíticamente utilizamos el método de igualación.

Despejamos y de ambas ecuaciones e igualamos las expresiones resultantes.

Funciones

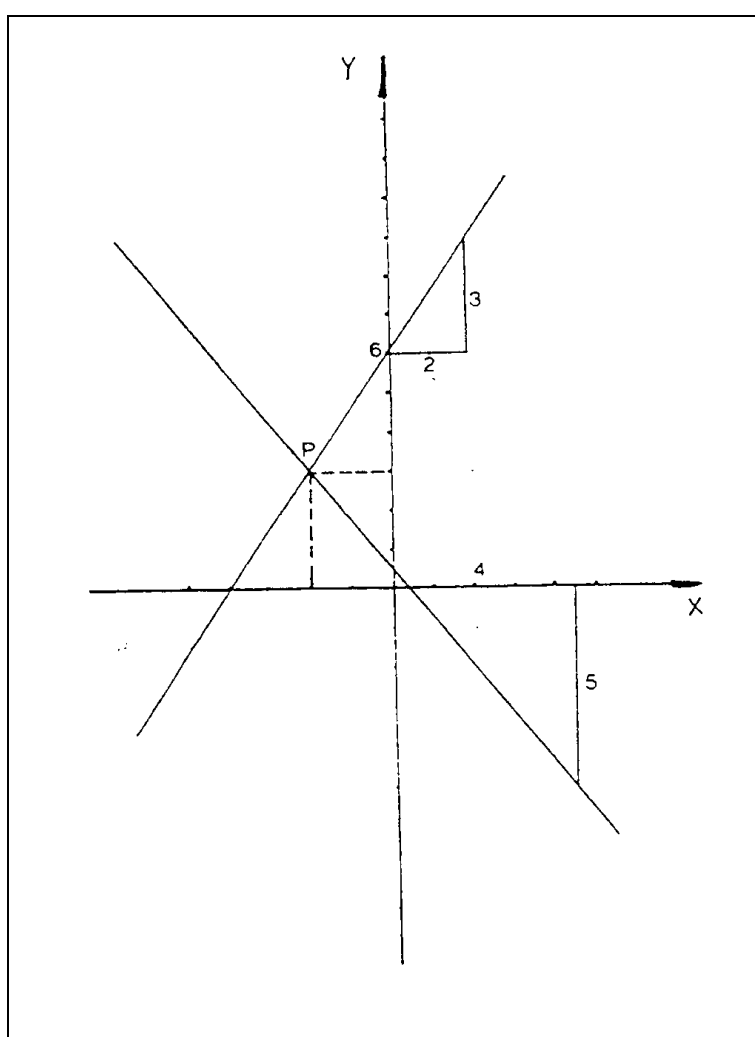
$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3x+12}{2} \\ y = \frac{-5x+2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3x+12}{2} = \frac{-5x+2}{4} \Rightarrow 2(3x+12) = -5x+2 \Rightarrow$$
$$6x+24 = -5x+2 \Rightarrow 11x = -22 \Rightarrow x = -2$$

Reemplazando:

$$y = \frac{3(-2)+12}{2} = 3$$

El conjunto solución es $S = \{(-2,3)\}$.

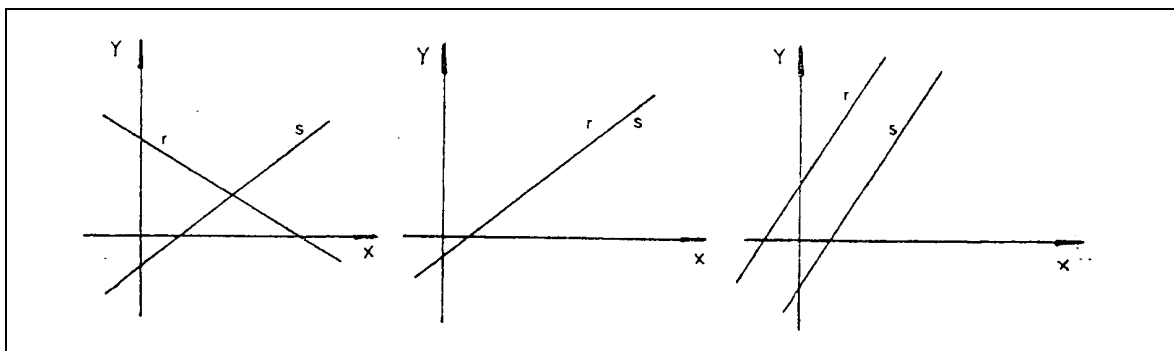
Para resolver gráficamente el sistema debemos graficar la función lineal que cada ecuación define y determinar el punto de intersección entre las rectas.



$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 6 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

El punto de intersección es
 $P = (-2,3)$

Observación: Al graficar ambas funciones lineales pueden presentarse los siguientes casos:



Hay un único punto de intersección. Se trata de un **sistema compatible determinado** (admite solución única).

Se obtienen dos rectas superpuestas y en consecuencia hay infinitos puntos de intersección. Se trata de un **sistema compatible indeterminado** (existen infinitas soluciones).

Se obtienen dos rectas paralelas y, por lo tanto, la intersección es vacía. Se trata de un **sistema incompatible** (no tiene solución).

II. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Esta función responde a la fórmula:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

Su gráfica es una curva llamada **parábola** cuyas características son:

- a) Si $a > 0$ es cóncava y admite un mínimo
Si $a < 0$ es convexa y admite un máximo
- b) **Vértice**: punto de la curva donde la función alcanza el mínimo o el máximo.
Sus coordenadas se obtienen de la siguiente forma:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

$$\begin{aligned} y_V = f(x_V) &= ax_V^2 + bx_V + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \\ &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a} \quad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (discriminante)} \end{aligned}$$

Luego, $V = (x_V, y_V)$

- c) **Eje de simetría**: $x = x_V$

Funciones

d) Intersección con el eje y : $(0, f(0)) = (0, c)$

e) Intersecciones con el eje x : Se obtiene resolviendo la ecuación de 2^{do} grado
 $ax^2 + bx + c = 0$.

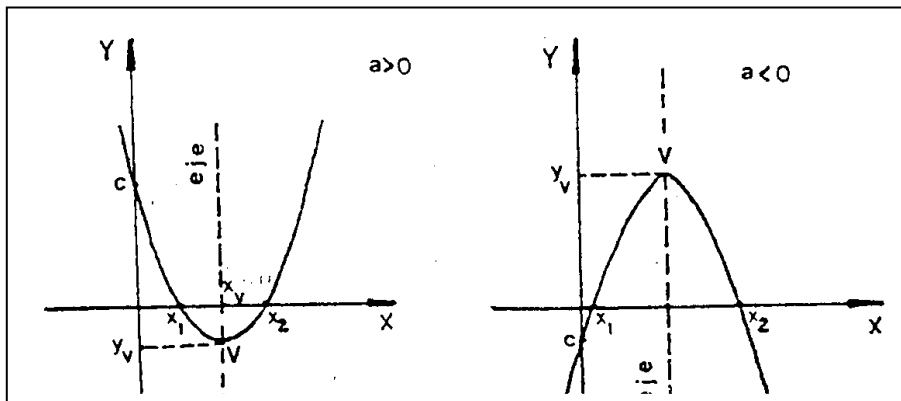
Las raíces pueden calcularse con la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y según sea el valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ pueden presentarse los siguientes casos:

i) $\Delta > 0$: Las raíces son reales y distintas, en cuyo caso la función tiene dos ceros reales distintos y la parábola corta al eje x en dos puntos de abscisas

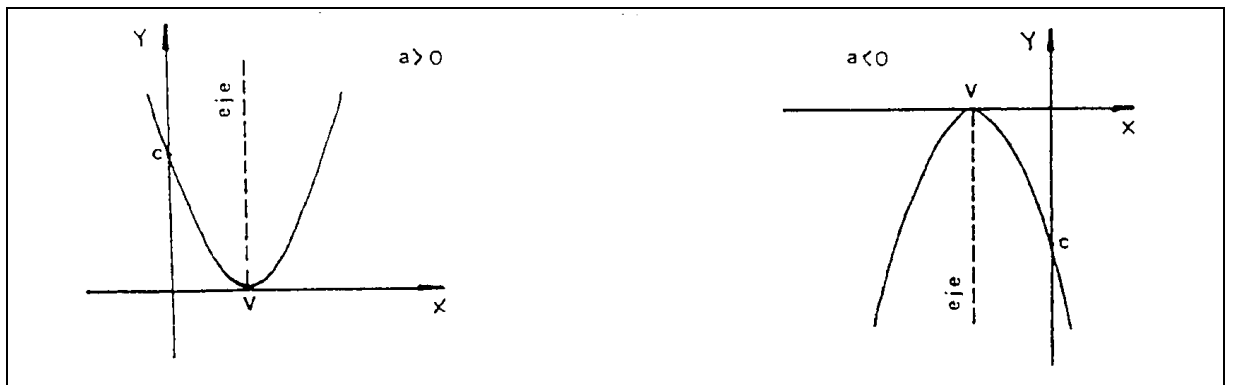
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



Obsérvese que $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

ii) $\Delta = 0$: La ecuación de 2^{do} grado tiene en este caso una raíz doble y la función cuadrática un solo cero. La parábola tiene un solo punto de intersección con el eje x en

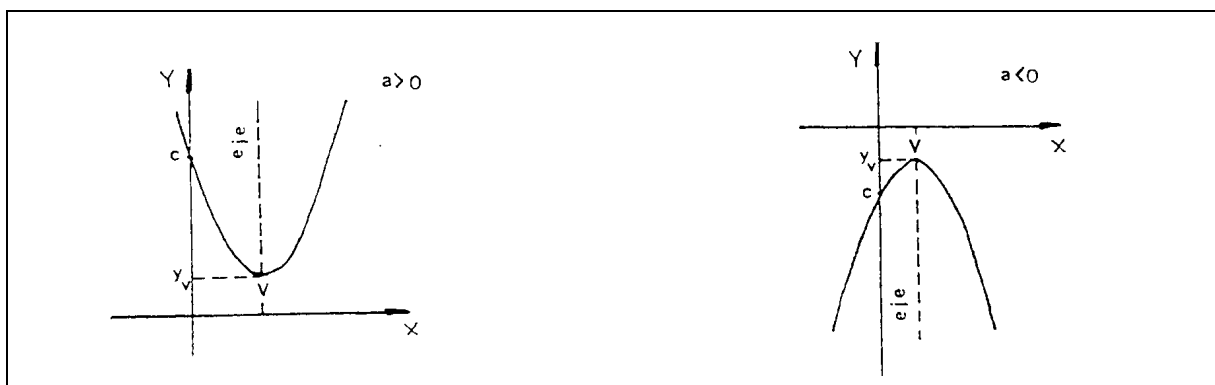
$$x = \frac{-b}{2a} = x_v$$



En este caso el eje x es tangente a la parábola.

Funciones

- iii) $\Delta < 0$: Las raíces de la ecuación de segundo grado $f(x) = 0$ son complejas en cuyo caso la función no tiene ceros reales y la parábola no tiene intersecciones con el eje x .



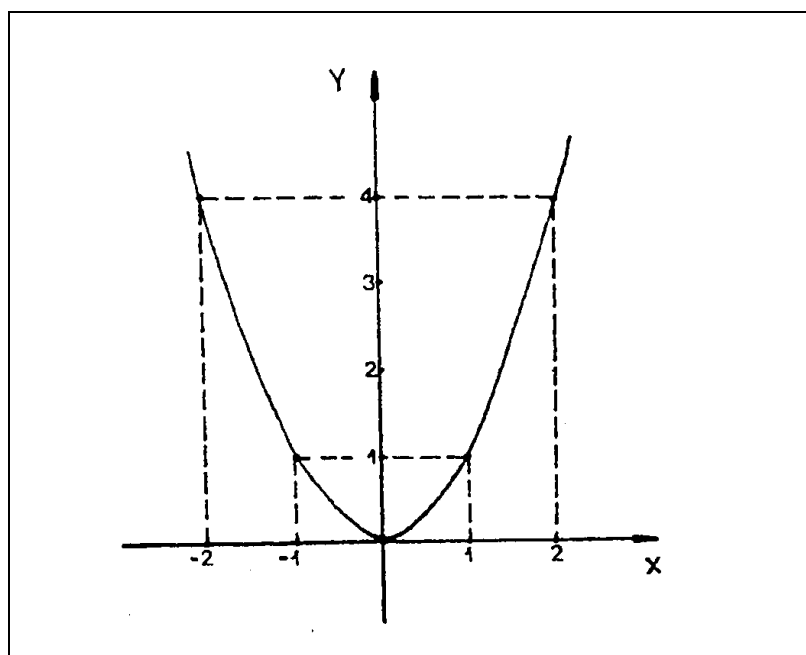
Factorización de la función cuadrática: Las posibilidades que se presentan son las siguientes:

- i) $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, siendo x_1 y x_2 los ceros de la función.
- ii) $y = a(x - x_1)^2$ si tiene un cero único.
- iii) Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces complejas la función no se puede factorizar y se dice que es irreducible.

Ejemplo 10: Representemos gráficamente la función cuadrática $y = x^2$.

Mediante una tabla de valores obtenemos algunos puntos de la parábola

| x | $y = x^2$ |
|-----|-----------|
| 0 | 0 |
| -1 | 1 |
| -2 | 4 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |



Funciones

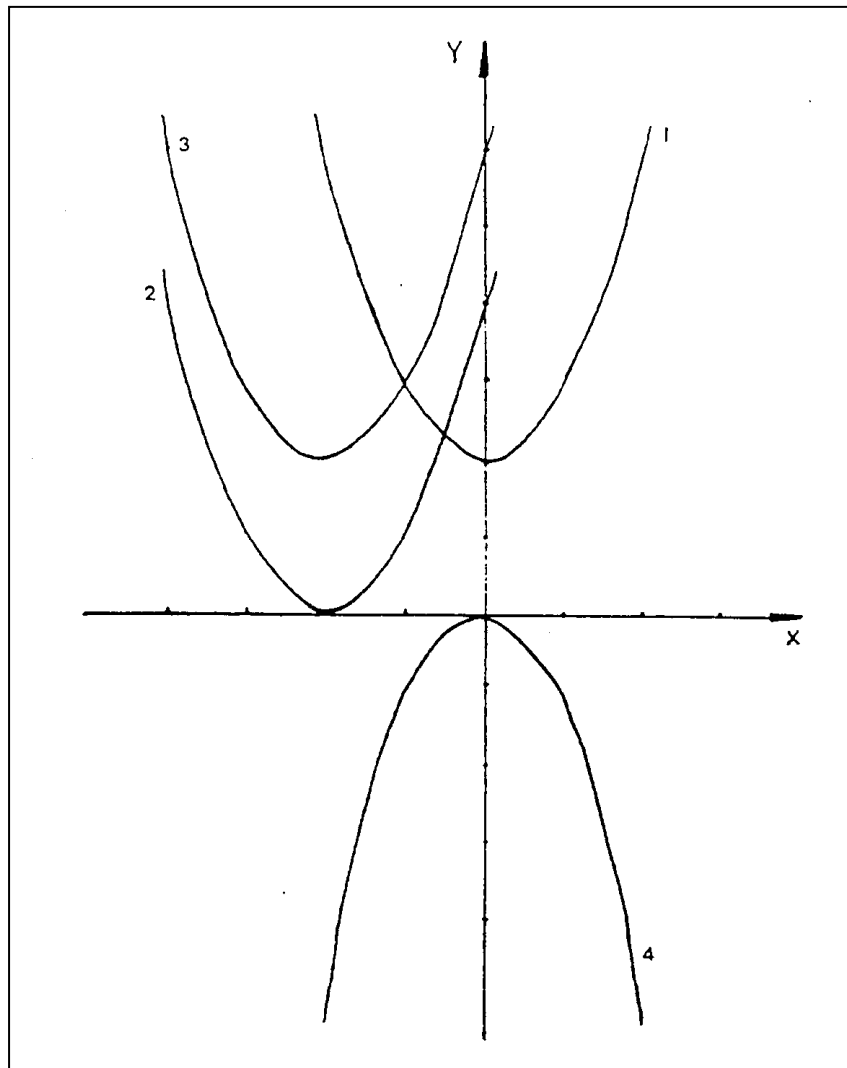
Observemos que $V = (0, 0)$ y el eje de simetría es $x = 0$. Además se puede ver que la función $y = x^2$ es par ya que $x^2 = (-x)^2$, es decir, $f(x) = f(-x)$.

Ejemplo 11: Estudiemos los desplazamientos de la parábola en los siguientes casos:

1. $y = x^2 + 2$ (sumamos 2 a la función $y = x^2$)
2. $y = (x + 2)^2$ (sumamos 2 al argumento x de la función $y = x^2$)
3. $y = (x + 2)^2 + 2$
4. $y = -x^2$

Observemos las gráficas. La parábola correspondiente a la función $y = x^2$ se desplaza en cada caso:

1. 2 unidades en el sentido positivo del eje y .
2. 2 unidades en el sentido negativo del eje x .
3. 2 unidades en el sentido positivo del eje y y 2 unidades en el sentido negativo del eje x .
4. En este caso se obtiene una parábola simétrica respecto del eje x de la correspondiente a $y = x^2$.



Funciones

Observando los desplazamientos del vértice podemos escribir la ecuación de una parábola cuyo vértice sea $V = (x_V, y_V)$ como:

$$y = a(x - x_V)^2 + y_V$$

Dicha ecuación en la que aparecen las coordenadas del vértice se denomina **ecuación canónica**.

Dada la ecuación canónica de una parábola es inmediato decir cuáles son las coordenadas del vértice.

Ejemplo 12: $y = 2(x + 3)^2 - 1 \Rightarrow V = (-3, -1)$. Luego, como $a = 2 > 0$, la parábola es cóncava y tiene un mínimo.

Si se pregunta el dominio y el recorrido o imagen podemos deducir que $Df = \mathbb{R}$ y

$If = [-1, +\infty)$ ya que $y_V = y_{\text{mínimo}} = -1$

Cuando la función está escrita en forma polinómica $y = ax^2 + bx + c$ y se pide su forma canónica puede procederse de dos maneras distintas: *hallando previamente las coordenadas del vértice*, o bien, *completando cuadrados*.

Ejemplo 13: Escribamos la ecuación $y = 2x^2 - 4x + 1$ en forma canónica.

i) Hallando previamente las coordenadas del vértice

$$y = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_V = \frac{-b}{2a} = 1 \\ y_V = f(x_V) = f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 2(x - 1)^2 - 1$$

ii) Completando cuadrados

$$y = 2x^2 - 4x + 1$$

$$y = 2\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)$$

Sacamos factor común a . En este caso, $a = 2$.

$$y = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{1}{2}\right)$$

Sumamos y restamos un número para que los tres

primeros términos del paréntesis sean los de un trinomio cuadrado perfecto. En este caso, el número sumado y restado es 1 (el cuadrado de la mitad del coeficiente de x).

$$y = 2\left[(x - 1)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

Escribimos el trinomio cuadrado como cuadrado de un binomio.

$$y = 2(x - 1)^2 - 1$$

Distribuimos a .

Sistemas de ecuaciones formados por una función cuadrática y una lineal

Recurrimos al siguiente ejemplo para explicarlo:

Ejemplo 14: Resolver analíticamente y gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Analíticamente: Igualamos las funciones

$$x^2 - 4x + 3 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 3$$

Luego el conjunto solución es $S = \{(0,3), (3,0)\}$

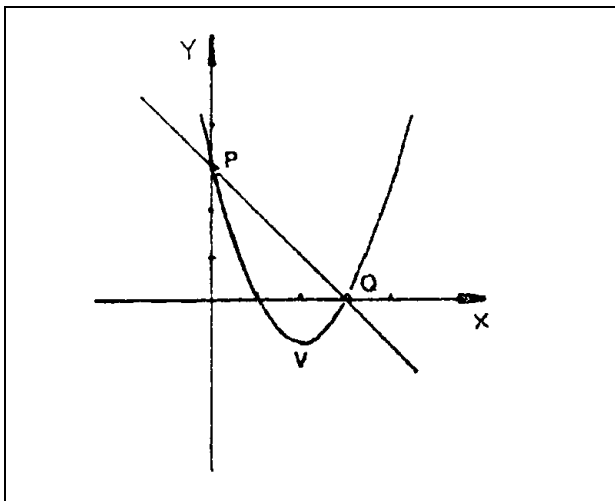
Gráficamente: Debemos representar gráficamente ambas funciones para determinar los puntos de intersección.

En este caso se trata de determinar los puntos de intersección de una recta con una parábola.

Para representar la parábola determinamos: raíces, vértice, intersección con eje y, simétrico de éste respecto del eje de simetría.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = 3$$

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \Rightarrow y_v = -1$$



Los puntos de intersección son

$$P = (0, 3) \wedge Q = (3, 0).$$

III. FUNCIONES POLINÓMICAS

Son de la forma:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0.$$

Se dice que la función es de **grado n** y $n \in \mathbb{N}$.

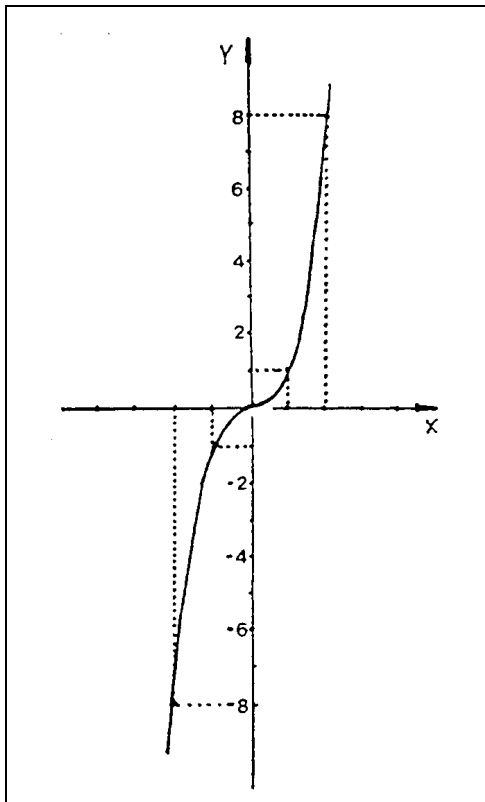
La función lineal y la cuadrática son casos particulares de ella. En efecto:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad n = 2$$

$$y = a_1 x + a_0 \quad n = 1$$

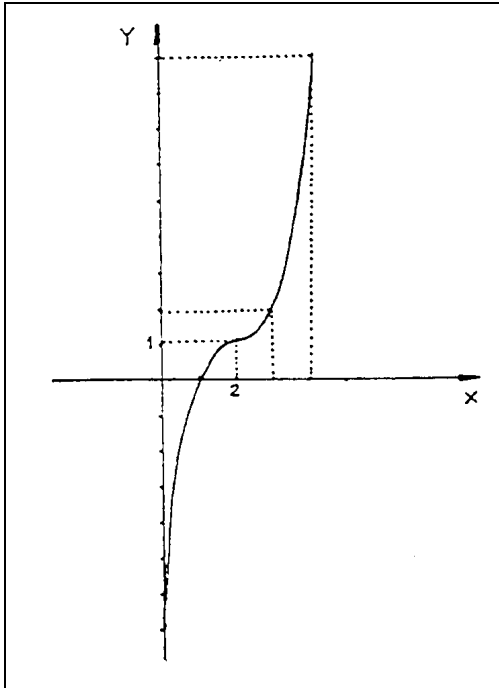
Ejemplo 15: Representemos gráficamente $y = x^3$.

Construyamos una tabla de valores para obtener algunos puntos.



Observando la gráfica podemos ver que se trata de una función impar, es decir, $f(x) = -f(-x)$. Además, $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$.

Ejemplo 16: La gráfica de $y = (x - 2)^3 + 1$ se obtiene desplazando la de $y = x^3$ de la siguiente forma: 2 unidades en el sentido positivo del eje x y 1 unidad en el sentido positivo del eje y .



División de polinomios: Recordemos que un polinomio $P(x)$ puede dividirse por otro polinomio $Q(x)$ si se verifica: $gr P \geq gr Q$.

$$\begin{array}{r} P(x) \\ R(x) \end{array} \overline{) \begin{array}{r} Q(x) \\ C(x) \end{array}}$$

donde $P(x)$ es el dividendo; $C(x)$ el cociente; $Q(x)$ el divisor y $R(x)$ el resto

Además,
$$\begin{cases} gr Q \leq gr P & \wedge & (gr R < gr Q \vee R = 0) \\ C(x) Q(x) + R(x) = P(x) \end{cases}$$

Ejemplo 17: Sean $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de x y el dividendo debe completarse.

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x - 3 \\ -x^4 + 2x^3 - x^2 \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 \\ \hline -6x \end{array} \overline{) \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 3 \end{array}}$$

Observemos que $C(x) = x^2 - 3$ y $R(x) = -6x$.

Regla de Ruffini: Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente de la división de un polinomio por otro que guarda la forma $x + a$

Ejemplo 18: Hallar cociente y resto de la división

$$(x^3 - 7x^2 + 14x - 21) : (x - 2)$$

No hay que olvidar completar y ordenar el dividendo si fuera necesario.

La disposición práctica es la siguiente:

| | | | | | |
|----------|---|----|-----|-----|------------------------------|
| $-a = 2$ | 1 | -7 | 14 | -21 | ← coeficientes del dividendo |
| | ↓ | 2 | -10 | 8 | |
| | 1 | -5 | 4 | -13 | ← resto |
| | | | ↖ | | |

coeficientes del cociente ordenado

Por lo tanto, obtenemos que $C(x) = 1x^2 - 5x + 4$ y $R(x) = -13$. Observemos que el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos 1, es decir: $gr C(x) = 3 - 1 = 2$.

Factorización de la función polinómica: Podemos extender lo que ya habíamos visto para función cuadrática. Dada la función:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \forall n : a_n \in \mathbb{R}$$

Podemos escribirla como:

i) Si tiene n raíces reales simples $y = a_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$

ii) Si tiene j raíces reales múltiples $y = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_j)^{k_j}$

Aclaremos que una raíz o cero x_j de un polinomio tiene orden de multiplicidad k_j , si el polinomio es divisible por $(x - x_j)^{k_j}$ pero no lo es por $(x - x_j)^{k_j+1}$.

Observación: En la factorización de una función polinómica pueden aparecer expresiones cuadráticas irreducibles, en cuyo caso la función tiene ceros complejos conjugados.

Ejemplo 19: Veamos algunos ejemplos de polinomios ya factorizados.

a) $y = x^2 (x - 1)$ Es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son: $x_1 = 0$ (raíz doble) y $x_2 = 1$ (raíz simple).

Funciones

- b) $y = 2x(x-1)^2(x+2)^3$ Es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son: $x_1 = 0$ (raíz simple), $x_2 = 1$ (raíz doble) y $x_3 = -2$ (raíz triple).
- c) $y = x(x+1)(x^2+1)$ Es una función polinómica de grado 4. Tiene sólo dos ceros reales $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$; los otros dos ceros son complejos.

Ejemplo 20:

Se pide probar que 1 es raíz de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Debemos probar que $P(1) = 0$, o bien, que el polinomio dado es divisible por $(x-1)$.

Calculamos $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$.

Para determinar el orden de multiplicidad de la raíz $x_1 = 1$ dividimos por $(x-1)$ en forma consecutiva hasta que el resto de la división sea distinto de cero.

Podemos aplicar la Regla de Ruffini en forma reiterada.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 2 &
 \end{array}$$

Observar que el polinomio es divisible por $(x-1)$ pero no lo es por $(x-1)^2$ ya que el resto de la segunda división no es cero. Luego x_1 es una raíz simple.

Para factorizar el polinomio escribimos el producto indicado entre $(x-1)$ y el cociente de la división entre $P(x)$ y $(x-1)$: $P(x) = (x-1)(x^2+1)$.

Obsérvese también que ha aparecido un factor cuadrático irreducible por lo cual el polinomio tiene un par de raíces complejas conjugadas.

Teorema del Resto: “El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $(x+a)$ es igual al valor del polinomio $P(x)$ especializado en $x = -a$, o sea, $P(-a)$ ”

En efecto:

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) & x+a \\
 R & C(x)
 \end{array}$$

Como $P(x) = C(x)(x+a) + R$, si hacemos $x = -a$ resulta

$$P(-a) = C(-a)(-a+a) + R = R$$

Ejemplo 21: Utilizar el teorema del resto para determinar los valores de k , de modo que $g(x)$ sea un factor de $f(x)$.

$$f(x) = x^3 + kx^2 - kx - 9 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3$$

Funciones

Para ello debe ser $f(x)$ divisible por $(x+3)$, es decir el resto de la siguiente división $f(x):(x+3)$ debe ser cero.

Podemos plantear:

$$R = f(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^3 + k(-3)^2 - k(-3) - 9 = 0 \Rightarrow k = 3$$

Ejemplo 22: Hallar una función polinómica de grado 3 cuyos ceros sean $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -2$.

Podemos plantear: $y = a x (x-1)(x+2)$

Como no está determinado el valor de a , existen infinitas funciones polinómicas de 3er grado que cumplen con la condición dada. Obtenemos cualquiera de ellas dándole un valor cualquiera a a , por ejemplo si $a = 1$: $y = x(x-1)(x+2)$, que obviamente no es única.

Si además nos hubieran pedido que: $f(2) = 4$ entonces a está determinada pues:

$$f(2) = a \cdot 2(2-1)(2+2) = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2(2-1)(2+2)} = \frac{1}{2}$$

y la función pedida sería:

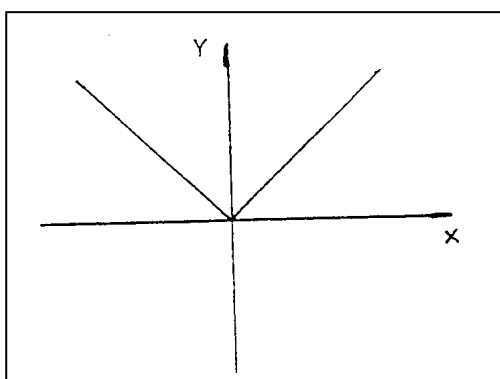
$$y = \frac{1}{2} x (x-1)(x+2)$$

IV. FUNCIÓN MÓDULO o VALOR ABSOLUTO

Está definida por: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Su dominio es $Df = \mathbb{R}$ y su imagen $If = [0, +\infty)$.

Su gráfica es:



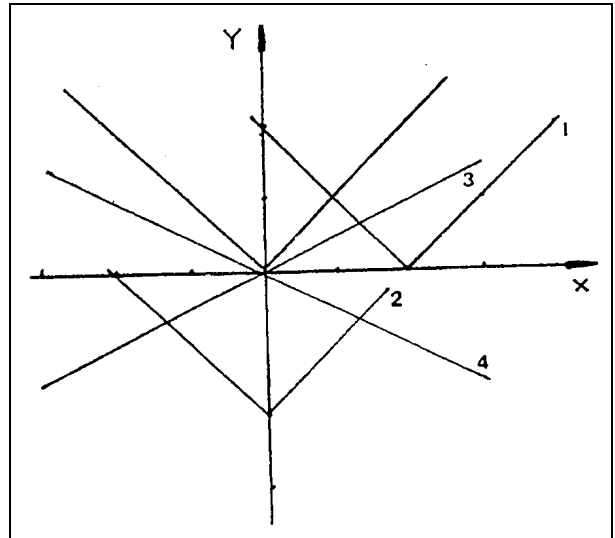
Observación: $|x| = \sqrt{x^2}$

Ejemplo 23: Desplazando convenientemente la gráfica de $y = |x|$ se pueden trazar las gráficas de funciones tales como:

- 1) $y = |x - 2|$
- 2) $y = |x| - 2$
- 3) $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$
- 4) $y = -\left|\frac{1}{2}x\right|$

En cada caso se observa:

- 1) Un desplazamiento 2 unidades en el sentido positivo del eje x .
- 2) Un desplazamiento 2 unidades en el sentido negativo del eje y .
- 3) Un cambio de pendiente
- 4) Imágenes opuestas respecto de $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$.



Propiedades del valor absoluto

- 1) $\forall x, x \neq 0: |x| > 0$
- 2) $\forall k > 0 \forall x: (|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k)$
- 3) $\forall k > 0 \forall x: (|x| > k \Leftrightarrow x < -k \vee x > k)$
- 4) $\forall x \forall y: |xy| = |x||y|$
- 5) $\forall x \forall y: |x + y| \leq |x| + |y|$

Ejemplo 24: Veamos algunos ejemplos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| = 3\}$

$$|x| = 3 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < 1\}$

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow -1 + 2 < x < 1 + 2 \Rightarrow 1 < x < 3$$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| > 1\}$

$$|x - 2| > 1 \Rightarrow x - 2 > 1 \vee x - 2 < -1 \Rightarrow x > 1 + 2 \vee x < -1 + 2 \Rightarrow x > 3 \vee x < 1$$

V. FUNCIÓN HOMOGRAFICA

Responde a la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ donde $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$

En efecto si:

• $c = 0 \Rightarrow y = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ la función es lineal.

• $ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Luego,

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b\left(\frac{a}{b}x+1\right)}{d\left(\frac{c}{d}x+1\right)} = \frac{b}{d} \quad \text{la función es constante.}$$

La función está definida para todo número x real excepto para aquel que anula el denominador

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / cx + d \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{d}{c}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

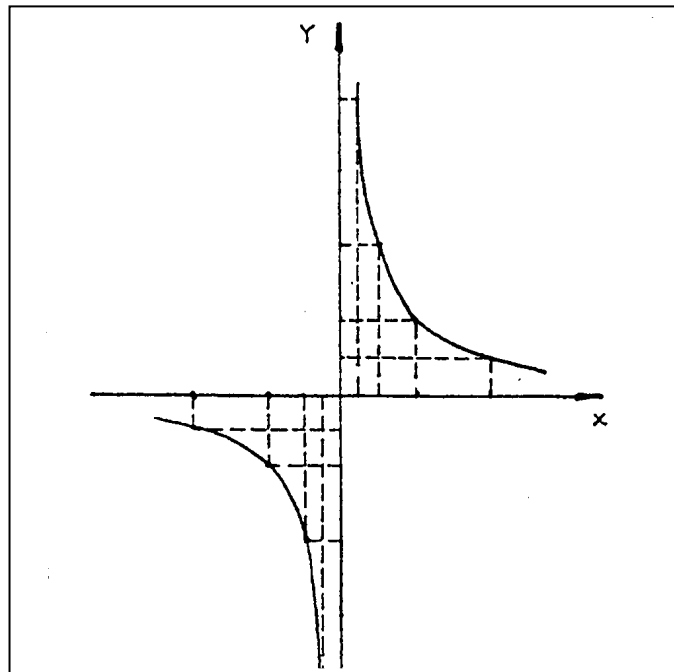
Su gráfica es una curva llamada **hipérbola**.

Ejemplo 25: Representemos gráficamente la siguiente función:

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{donde } a = 0, b = 1, c = 1 \text{ y } d = 0.$$

Hagamos una tabla de valores para obtener algunos puntos:

| x | y |
|----------------|----------------|
| $-\frac{1}{4}$ | 4 |
| $-\frac{1}{2}$ | -2 |
| -1 | -1 |
| -2 | $-\frac{1}{2}$ |
| 1 | 1 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | 2 |
| $\frac{1}{4}$ | 4 |



Observación:

1) Conforme los valores de x están más próximos a 0 el valor absoluto de la función es cada vez mayor (se dice que $f(x)$ *tiende a infinito* cuando x se acerca a 0).

La función no está definida en $x_0 = 0$, su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$. Se dice que el eje y de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical de la curva.

2) A medida que x crece en valor absoluto los valores que toma la función se acercan cada vez más a 0. Decimos que el eje x de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal al gráfico de $f(x)$.

Las asíntotas (los ejes coordenados en este caso) son perpendiculares (hipérbola equilátera) y se cortan en un punto que es centro de simetría de la curva.

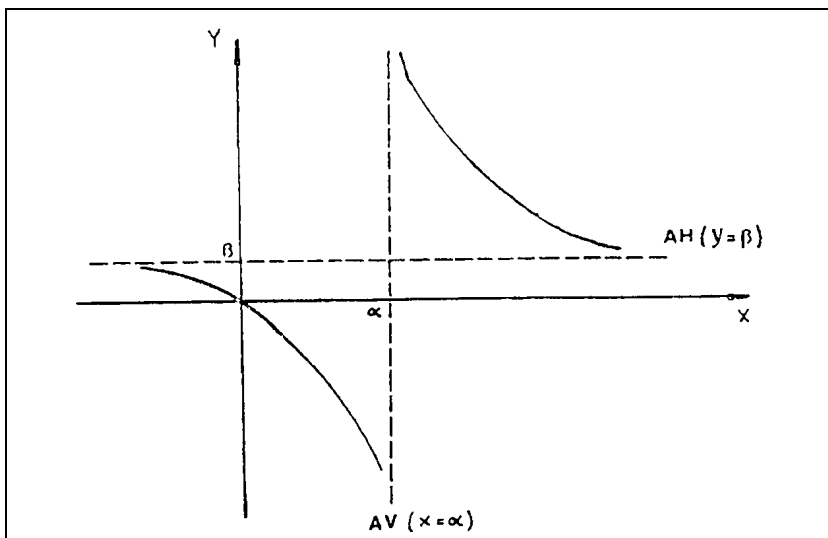
3) La hipérbola tiene dos ramas simétricas respecto del punto de intersección de las asíntotas que están situadas en el 1º y 3º cuadrante respecto de ellas.

Para la función $y = -\frac{1}{x}$ las ramas estarían situadas en el 2º y 4º cuadrante.

Conocida la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ puede obtenerse mediante los correspondientes desplazamientos la gráfica de una función que responda a:

$$y = \frac{K}{x - \alpha} + \beta \quad \text{con} \quad \alpha > 0 \wedge \beta > 0$$

A esta función le corresponde una hipérbola equilátera obtenida corriendo la hipérbola de ecuación $y = \frac{K}{x}$, α unidades en el sentido positivo del eje x y β unidades en el sentido positivo del eje y .



Discutir el caso de α y/o β menores que cero.

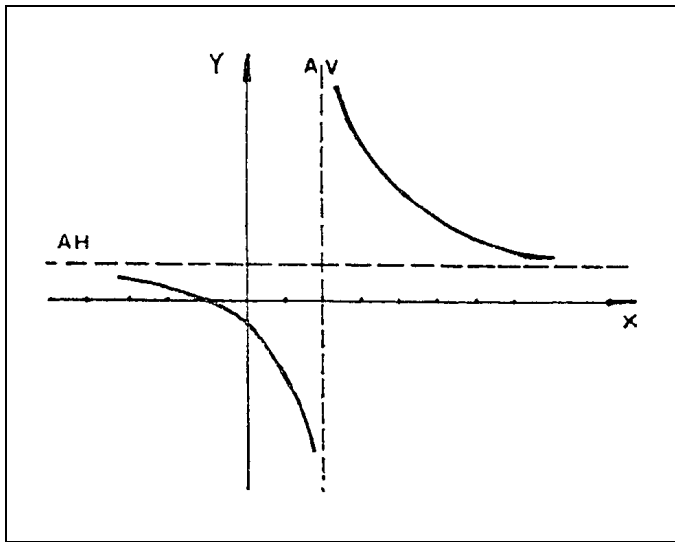
Funciones

Si la función está dada en la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ puede llevarse a la forma $y = \frac{K}{x-\alpha} + \beta$ dividiendo los polinomios $(ax+b)$ y $(cx+d)$.

Ejemplo 26: Sea la función $y = \frac{x+1}{x-2}$. Dividiendo ambos polinomios obtenemos:

$$\begin{array}{r} x+1 \\ -x+2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-2 \\ 1 \end{array}$$

Por lo tanto queda: $y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$ donde $K = 3 > 0$, $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.



Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$A.V. : x = 2$$

$$A.H. : y = 1$$

El dominio de la función es

$Df = \mathbb{R} - \{2\}$ y el recorrido o imagen es $If = \mathbb{R} - \{1\}$.

Observación: El signo de K determina en cuáles cuadrantes respecto de las asíntotas están incluidas las ramas de la hipérbola:

1) $K > 0 \Rightarrow (y - \beta)(x - \alpha) = K > 0 \Rightarrow 1^\circ$ y 3° cuadrantes respecto de $A.V.$ y $A.H.$

2) $K < 0 \Rightarrow (y - \beta)(x - \alpha) = K < 0 \Rightarrow 2^\circ$ y 4° cuadrantes respecto de $A.V.$ y $A.H.$

Alternativamente se pueden aplicar las siguientes fórmulas:

$$A.V. : x = -\frac{d}{c} \quad \wedge \quad A.H. : y = \frac{a}{c}$$

$$Df = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \quad \wedge \quad If = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

Sistemas formados por una función lineal y una homográfica

Vamos a ilustrarlo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 27: Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} y = \frac{x+6}{x-2} \\ y = x+1 \end{cases}$$

Analíticamente: Igualamos ambas funciones

$$\frac{x+6}{x-2} = x+1 \Rightarrow x+6 = (x+1)(x-2) \Rightarrow x+6 = x^2 - 2x + x - 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

Resolvemos ahora la ecuación de segundo grado:

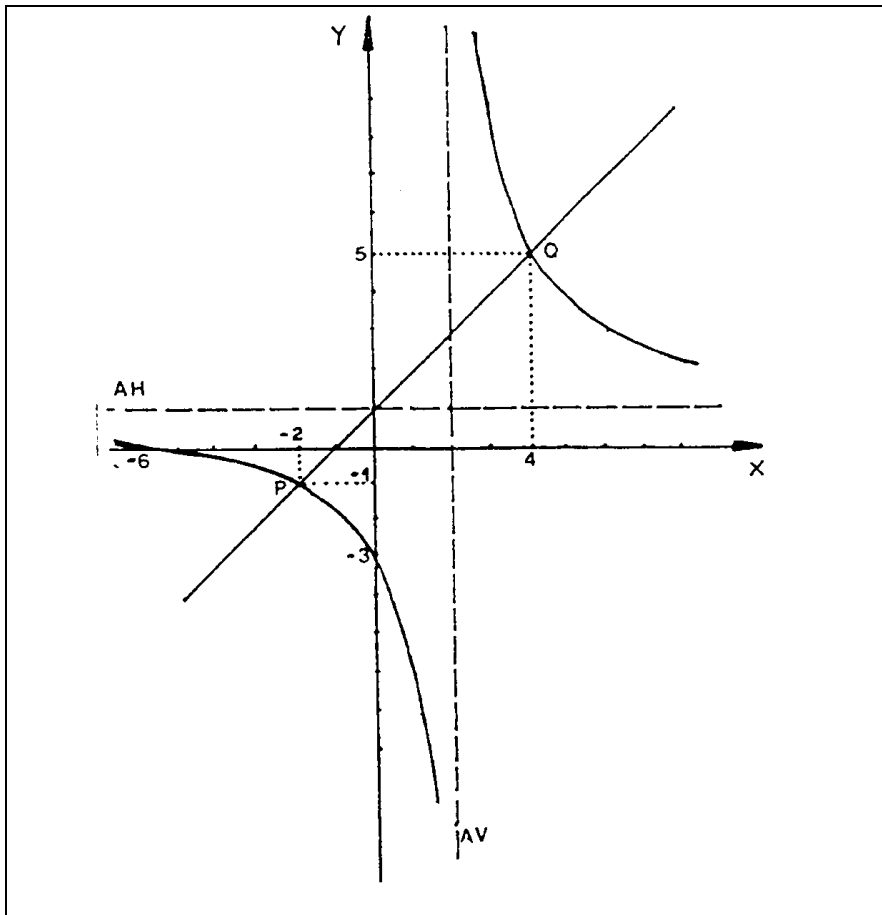
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 4$$

Buscamos los valores de las ordenadas: $y_1 = -1 \wedge y_2 = 5$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{(-2, -1); (4, 5)\}$

Gráficamente: Hay que graficar la función lineal y la homográfica. Para trazar la hipérbola determinamos previamente.

$$A.V.: x = 2 \quad \wedge \quad A.H.: y = 1$$



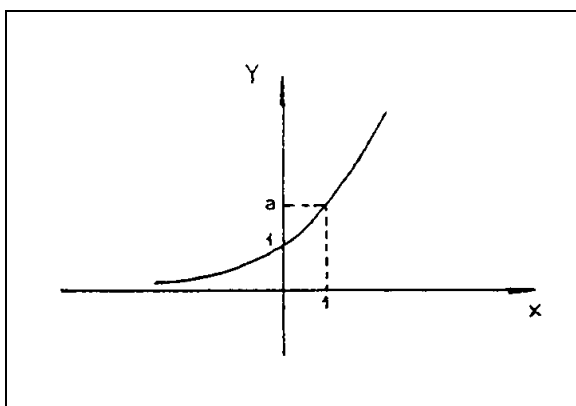
Los puntos de intersección son
 $P = (-2, -1) \wedge Q = (4, 5)$

VI. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Es de la forma $y = a^x$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$.

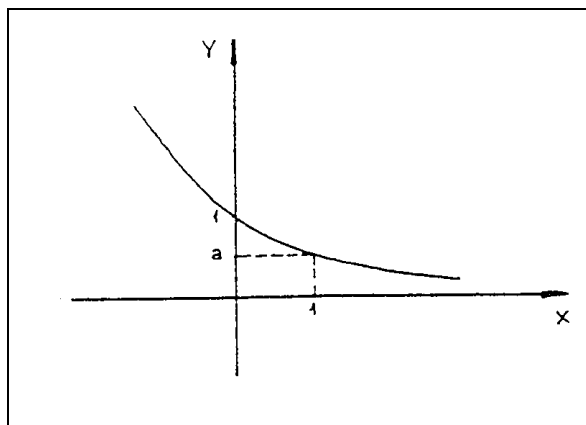
Su gráfica tiene las siguientes características:

1) $a > 1$



- i) Creciente
- ii) Asintótica al semieje negativo de abscisas
- iii) No tiene ceros
- iv) $f(0) = 1 \wedge f(1) = a$

2) $0 < a < 1$



- i) Decreciente
- ii) Asintótica al semieje positivo de abscisas
- iii) No tiene ceros
- iv) $f(0) = 1 \wedge f(1) = a$

En ambos casos: $Df = \mathbb{R} \wedge If = (0, +\infty)$.

A partir de las curvas anteriores y desplazamientos correspondientes pueden obtenerse las curvas de funciones de la forma:

$$y = a^{x-\alpha} + \beta$$

**Así son las funciones que proponemos resolver en el ejercicio 19 de la práctica.*

VII. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Recordemos primeramente la definición de logaritmo

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

El logaritmo en base a ($a > 0, a \neq 1$) de un número b ($b > 0$) es el número c al que hay que elevar la base a para obtener el número b .

Ejemplo 28: Veamos algunos ejemplos:

- | | | |
|-------------------------------|------------------|--|
| a) $\log_3 81 = 4$ | ya que | $3^4 = 81$ |
| b) $\log_{10} 0,001 = -3$ | ya que | $10^{-3} = 0,001$ |
| c) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ | ya que | $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ |
| d) $\log_8 1 = 0$ | ya que | $8^0 = 1$ |
| e) $\log_{10} 0$ | no está definido | |
| f) $\log_a a = 1$ | ya que | $a^1 = a$ |

La función logarítmica responde a:

$$y = \log_a x \text{ con } a > 0 \wedge a \neq 1$$

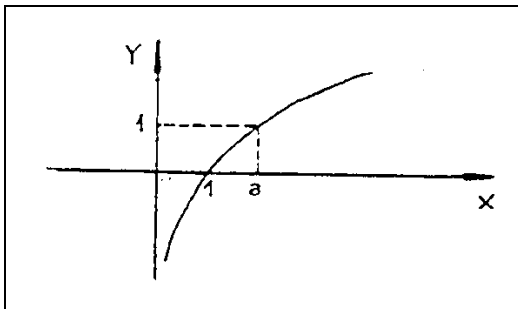
Su dominio e imagen son: $Df = (0, +\infty) \wedge If = \mathbb{R}$.

Si $a = 10 \Rightarrow y = \log x$ (*logaritmo decimal*)

Si $a = e \Rightarrow y = \ln x$ (*logaritmo natural*)

Su gráfica tiene las siguientes características:

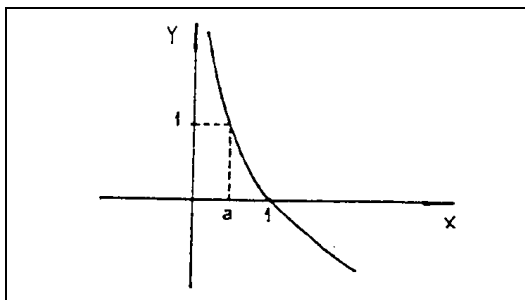
1) $a > 1$



- i) Función creciente
- ii) Asíntota al semieje negativo de ordenadas
- iii) $f(1) = 0 \wedge f(a) = 1$

2) $0 < a < 1$

Funciones



- i) Función decreciente
- ii) Asíntota al semieje positivo de ordenadas
- iii) $f(1) = 0 \quad \wedge \quad f(a) = 1$

**Efectuando desplazamientos de la curva $y = \log_a x$ pueden obtenerse las gráficas de funciones de la forma $y = \log_a(x - \alpha) + \beta$ como las del ejercicio 20 de la práctica.*

Propiedades de los logaritmos

- 1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- 2) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- 3) $\log_a b^n = n \log_a b$
- 4) $a^{\log_a b} = b$

Ejemplo 29: Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $\log_4(x-3)^2 - \log_4(x-3) = \log_4 5$

Utilizando las propiedades antes enunciadas

$$2 \log_4(x-3) - \log_4(x-3) = \log_4 5$$

$$\log_4(x-3) = \log_4 5$$

$$x-3 = 5 \Rightarrow x = 8$$

b) $\log_3(x^2 - 3x - 1) = 1$

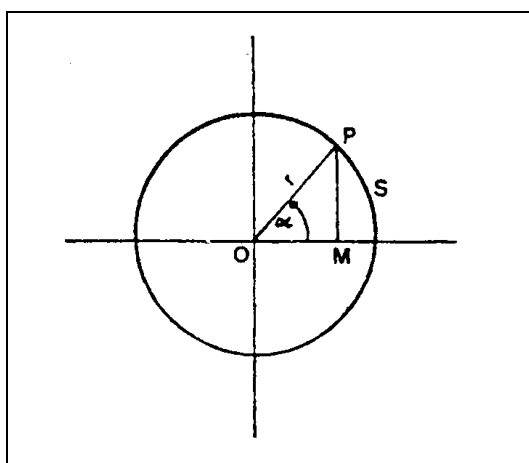
Utilizando la definición de logaritmo:

$$x^2 - 3x - 1 = 3^1 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \quad \wedge \quad x_2 = -1$$

VIII. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos una circunferencia con centro en el origen de coordenadas de radio r . Sea S la longitud del arco de circunferencia que abarca un ángulo de amplitud α .



$$\text{long } \overline{OP} = r$$

Luego, llamamos x a: $x = \frac{S}{r}$

Éste es un número real que indica cuántas veces está contenido el radio r en el arco S abarcado por el ángulo α . En otras palabras, x es la medida del arco tomando como unidad al radio.

El *sistema circular* para la medición de ángulos toma como unidad a un ángulo que abarca un arco de igual longitud que el radio, es decir, $S = r$. A este ángulo se lo denomina **radián**. Así, un ángulo de x radianes abarca un arco de longitud $S = x \cdot r$.

Para establecer la equivalencia entre la medida de la amplitud de un ángulo en *grados sexagesimales* y *radianes* tengamos en cuenta que un ángulo de 360° abarca un arco cuya longitud es la de la circunferencia.

Luego:

$$\alpha = \frac{\text{long. circunf.}}{r} = \frac{2 \pi r}{r} = 2 \pi \text{ radianes}$$

| <i>Grados sexagesimales</i> | <i>Radianes</i> |
|-----------------------------|-----------------|
| 360 | 2π |
| 180 | π |
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ |

Funciones

Las **funciones trigonométricas** o **circulares** son aquellas que le asignan a cada número real x las razones trigonométricas del ángulo de x radianes, las cuales son, observando el gráfico del principio del capítulo:

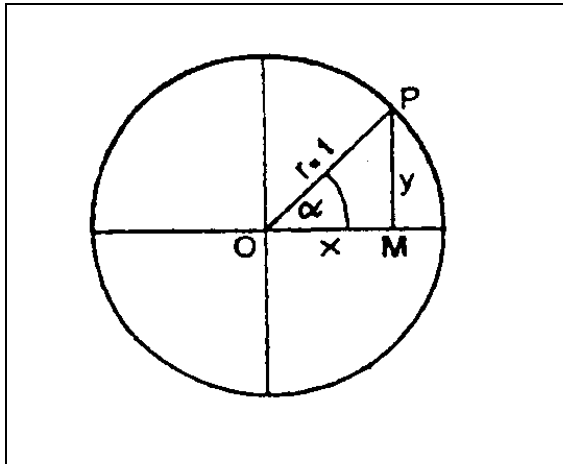
$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{ordenada de } P}{r} \quad \cos x = \frac{\text{abscisa de } P}{r} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P}$$

donde P es el extremo del arco con origen en $(r,0)$ correspondiente al ángulo de x radianes.

Observación: A partir de ahora la circunferencia trigonométrica será considerada de radio 1.

Relación fundamental de la trigonometría

Consideremos el triángulo rectángulo $\triangle PMO$.



$\overline{OM} \wedge \overline{PM}$ catetos
 \overline{OP} hipotenusa

Aplicando el Teorema de Pitágoras
 $x^2 + y^2 = 1$. Resulta:

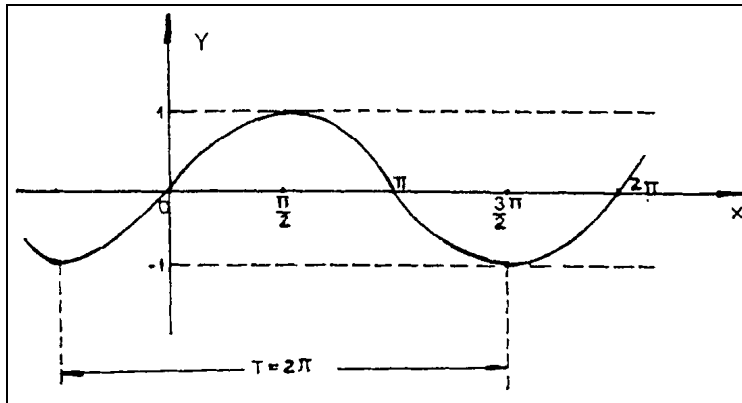
$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Definición: Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **periódica**, y su período se indica con T , si se cumple
 $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Veamos, ahora, la gráfica de algunas funciones trigonométricas.

Funciones

Función seno: Responde a $y = \sin x$

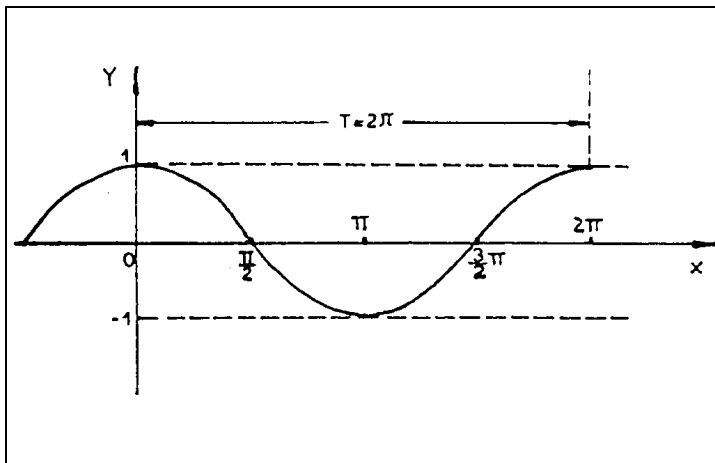


$$Df = IR$$

$$If = [-1, 1]$$

$$T = 2\pi$$

Función coseno: Responde a $y = \cos x$

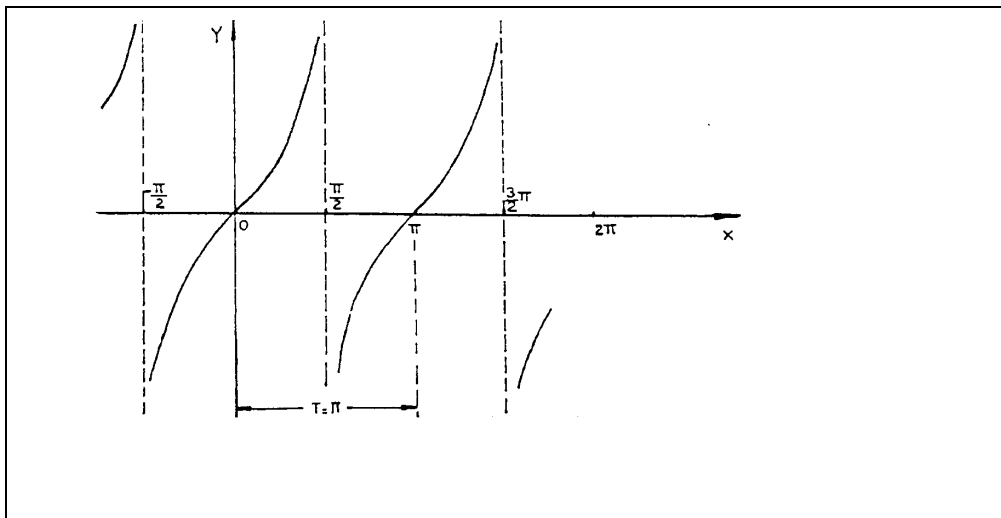


$$Df = IR$$

$$If = [-1, 1]$$

$$T = 2\pi$$

Función tangente: Responde a $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$



Funciones

$$Df = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \right\} \quad If = \mathbb{R} \quad T = \pi$$

Función cosecante: Responde a $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

Función secante: Responde a $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

Función cotangente: Responde a $y = \cot g x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Si una función que responde a:

$$y = a \operatorname{sen}(bx)$$

a: *amplitud*, da el máximo y el mínimo valor que alcanza la función

$$y_{\max} = |a| \quad \wedge \quad y_{\min} = -|a|$$

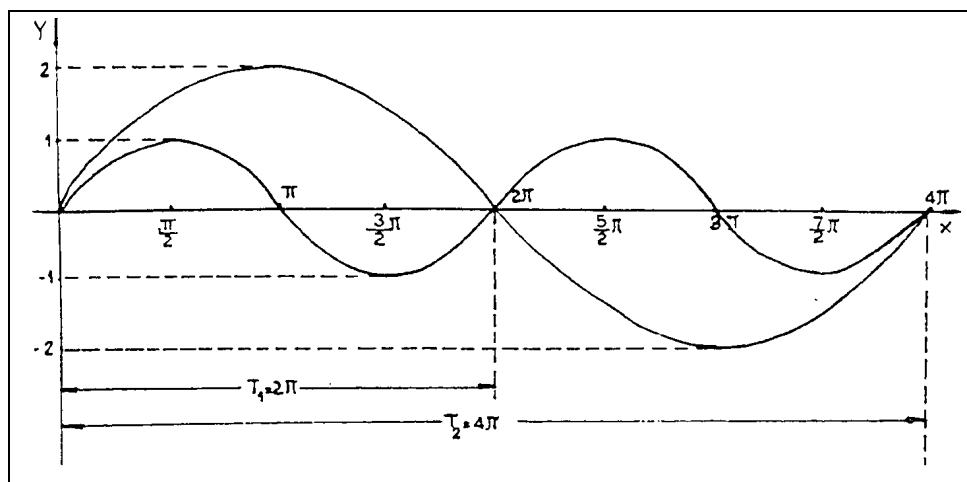
b: factor que modifica el *período T*.

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Ejemplo 30: Representemos en un mismo gráfico las funciones:

1) $y_1 = \operatorname{sen} x \Rightarrow T_1 = 2\pi \quad a_1 = 1$

2) $y_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad a_2 = 2$



Funciones

***Resolver el ejercicio 21 de la guía de trabajos prácticos.**

Es conveniente tener presente la siguiente tabla sobre los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables del 1er cuadrante.

| α (radianes) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\text{sen } \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\text{cos } \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\text{tg } \alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | \nexists |

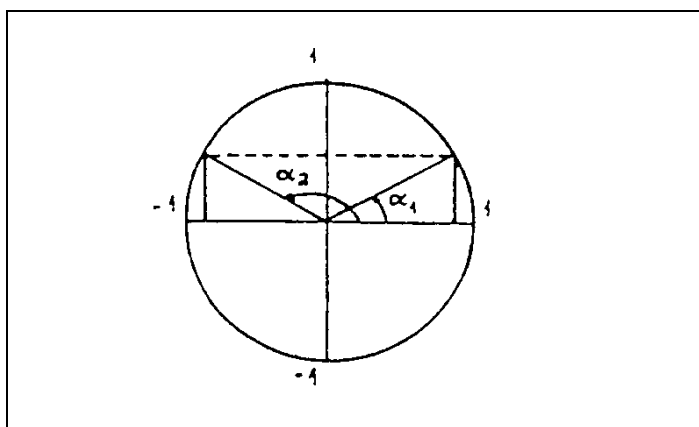
Ejemplo 31: Hallar los valores de $x \in [0, 2\pi)$ que satisfacen:

a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

Trazamos una circunferencia de $r = 1$ para guiarnos.

Observemos que el $\text{sen } \alpha$ está dado por la coordenada y ya que $r = 1$.

Luego, hay dos ángulos en $[0, 2\pi)$ para los que el seno vale $\frac{1}{2}$.



El primero pertenece al 1er. cuadrante

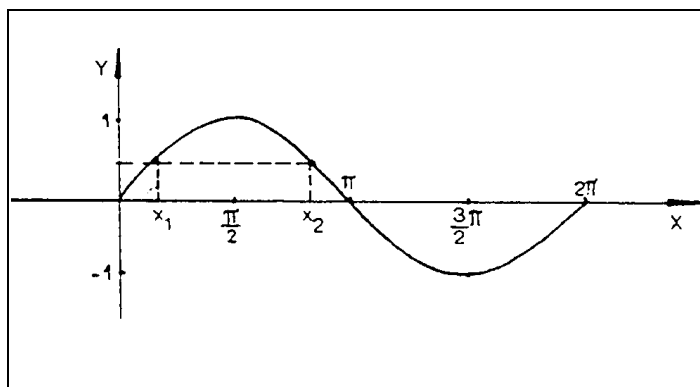
$$\therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{6}.$$

El otro pertenece al 2º cuadrante y podemos calcularlo así:

$$\alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

En la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ vemos que:

Funciones

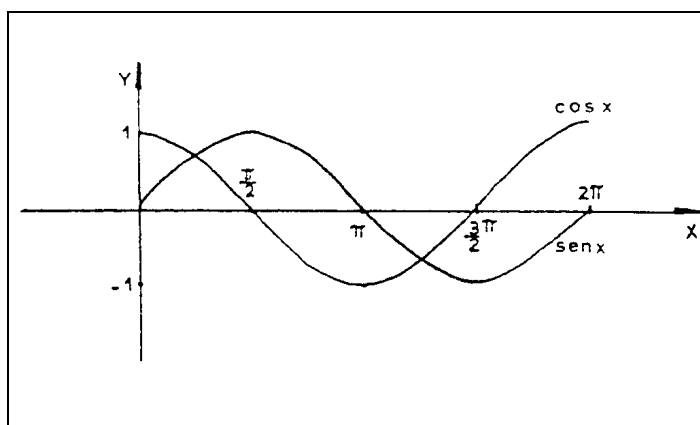


$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Luego, la solución será:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

b)
$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$



Observar que para ningún punto $x \in [0, 2\pi)$ se cumple simultáneamente:

$$\sin x = 1 \quad \wedge \quad \cos x = -1$$

Luego, el conjunto solución es:
 $S = \emptyset$.

DOMINIO DE FUNCIONES

Determinar el **dominio** de una función real de variable real (función escalar) definida mediante una fórmula $y = f(x)$ cuando éste no está indicado significa hallar el subconjunto de números reales más amplio posible para el cual la expresión $f(x)$ tenga sentido y tome valores reales. Para ello deberán hacerse las siguientes consideraciones:

- 1) **Denominadores:** Cuando en la expresión $f(x)$ figuren denominadores, estos no pueden valer cero.

Ejemplo 32: Hallar el dominio de $f(x) = \frac{2}{(x+1)(x-3)}$

Debemos plantear: $(x+1)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \quad \wedge \quad x \neq 3$.

Por lo tanto, el dominio de la función es $Df = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

- 2) **Radicales:** Cuando figuran radicales de índice par los radicandos no pueden tomar valores negativos.

Ejemplo 33: Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$

Debemos plantear $(x+1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$. Completando cuadrados obtenemos:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \\ x-1 \geq 2 \vee x-1 \leq -2 \Rightarrow x \geq 3 \vee x \leq -1$$

Por lo tanto, el dominio de la función es: $Df = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

- 3) **Argumentos de logaritmos:** Cuando figure un logaritmo su argumento no puede ser nulo ni negativo.

Ejemplo 34: Hallar el dominio de $f(x) = \log[(x+1)(x-3)]$

Debemos plantear: $(x+1)(x-3) > 0 \Rightarrow x > 3 \vee x < -1$

Por lo tanto, el dominio de la función es: $Df = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Resolvemos a continuación algunos ejercicios sobre la determinación de dominios.

Ejemplo 35: Hallar el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Debemos plantear que el denominador sea distinto de cero y que el radicando sea mayor o igual a cero.

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$$

Por lo tanto, el dominio de la función es: $Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

2) $f(x) = \frac{2}{\log(2x+3)}$

Debemos plantear dos condiciones:

i) $\log(2x+3) \neq 0 \Rightarrow 2x+3 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$

ii) $2x+3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$

Por lo tanto, haciendo la intersección de ambas condiciones, obtenemos:

$$Df = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > -\frac{3}{2} \wedge x \neq -1 \right\} = \left(-\frac{3}{2}, -1 \right) \cup (-1, +\infty)$$

3) $f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases}$

Funciones

En este caso la función está definida para todo x real excepto para $x = 1$, ya que ninguna de las expresiones que definen la función es aplicable cuando $x = 1$.

Luego: $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

**Ahora puede resolver el ejercicio 22 de la guía de trabajos prácticos.*

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

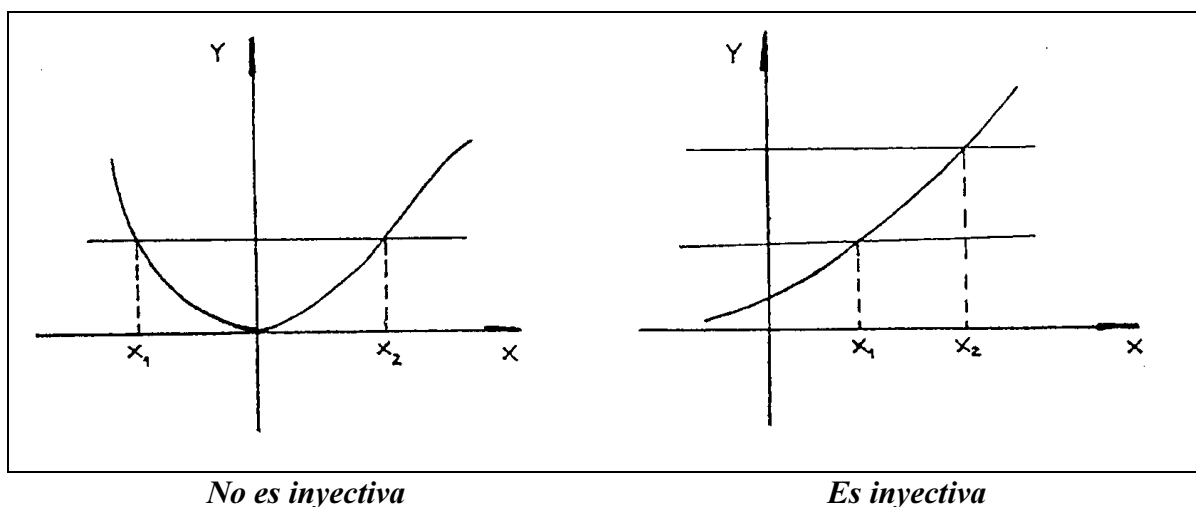
1) **Función inyectiva:** Una función $f : A \rightarrow B$ es **inyectiva** si y solo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el codominio (B).

En símbolos:

$$\forall x_1 \in A, \quad \forall x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

o bien, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede intersectar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del codominio puede ser imagen de más de un elemento del dominio.



Ejemplo 36: Investigar si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = x^2 + 2$

Para investigar analíticamente la inyectividad debemos analizar la validez de la siguiente proposición:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

En este caso, reemplazando x_1 y x_2 en $f(x)$:

$$x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

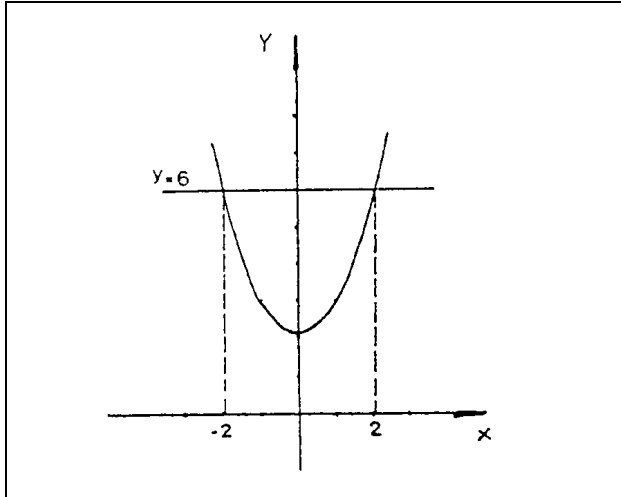
La igualdad a la que hemos llegado no quiere decir que necesariamente sea $x_1 = x_2$, ya que podrían ser números opuestos, o sea:

Funciones

$$|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

. Luego la proposición $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ **no** es verdadera. Por lo tanto, $f(x)$ no es inyectiva.

Gráficamente se puede observar que la recta de ecuación $y = 6$ interseca a la parábola en los puntos $(-2, 6)$ y $(2, 6)$. Luego, $f(x)$ no es inyectiva.



$$-2 \neq 2 \wedge f(-2) = f(2)$$

b) Consideremos una restricción de la función $f(x)$ del ejercicio anterior, tomando como dominio al conjunto $A = [0, +\infty)$, es decir:

$$f^*: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f^*(x) = x^2 + 2$$

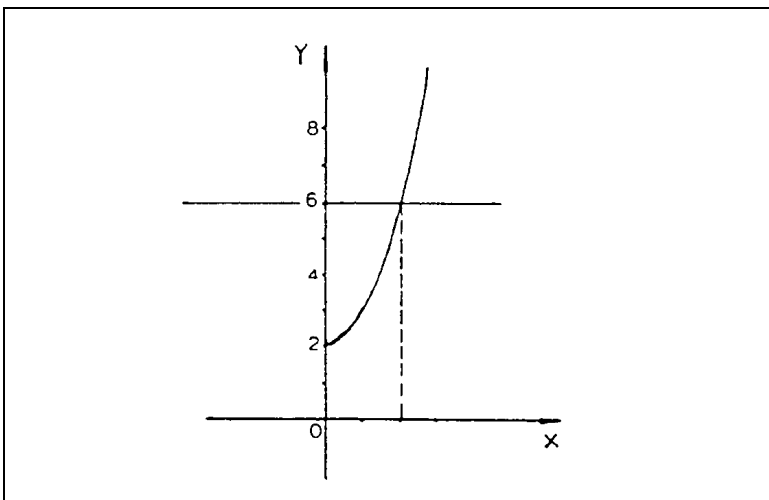
Veamos ahora si es inyectiva:

$$f^*(x_1) = f^*(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

En efecto, como $x_1 \in [0, +\infty)$ es $x_1 \geq 0$, por lo tanto, $|x_1| = x_1$. Análogamente, $|x_2| = x_2$.

La restricción $f^*(x)$ de la función es una función inyectiva.

Geométricamente: cualquier recta de ecuación $y = k$ (constante) interseca a la curva que es gráfica de $f^*(x)$ a lo sumo en un punto.



Funciones

También hubiéramos obtenido una función inyectiva restringiendo el dominio de la función al conjunto $(-\infty, 0]$.

c) $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \quad / \quad g(x) = 2^{x+3}$

Veamos si es inyectiva:

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow 2^{x_1+3} = 2^{x_2+3} \Rightarrow \log_2 2^{x_1+3} = \log_2 2^{x_2+3} \Rightarrow \\ (x_1 + 3) \log_2 2 &= (x_2 + 3) \log_2 2 \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Luego, $g(x)$ es inyectiva.

2) **Función Sobreyectiva o Suryectiva:** Una función $f: A \rightarrow B$ es *suryectiva* si y solo si todos los elementos del codominio (B) tienen preimagen en el dominio (A). Dicho con otras palabras el codominio (B) y el recorrido o imagen If deben coincidir.

En símbolos:

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad / \quad y = f(x)$$

Veamos ejemplos:

Ejemplo 37: Investigar si las siguientes funciones son suryectivas:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = x^2 + 2$

Para determinar si una función es sobreyectiva debemos hallar el recorrido para ver si coincide con el codominio.

El recorrido o conjunto imagen lo podemos obtener analíticamente despejando x y determinando para que valores reales de y se obtendrían valores de x pertenecientes al dominio (\mathbb{R}).

$$y = x^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = x^2$$

Como $x^2 \geq 0 \Rightarrow y - 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$. Luego, $If = [2, +\infty)$.

La imagen o recorrido If no coincide con el codominio (\mathbb{R}) lo cual implica que no todos los elementos del codominio tienen preimagen en el dominio. Por ejemplo 1 no es imagen de ningún elemento x del dominio. Concluimos que la función dada no es sobreyectiva.

b) Si efectuamos una restricción en el codominio del ejemplo anterior:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [2, +\infty) \quad / \quad f(x) = x^2 + 2$$

obtenemos una función suryectiva ya que el codominio coincide con la imagen.

c) $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \quad / \quad g(x) = 2^{x+3}$

Busquemos la imagen:

$$y = 2^{x+3} \Rightarrow \log_2 y = \log_2 2^{x+3} \Rightarrow \log_2 y = (x+3) \log_2 2 \Rightarrow x = \log_2 y - 3$$

Nótese que y sólo puede tomar valores positivos para que se obtengan valores reales de x .

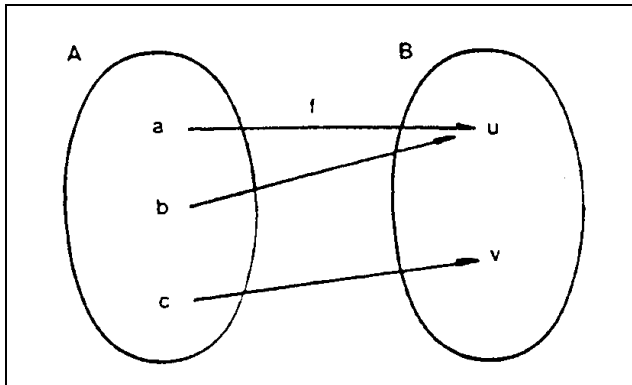
Luego, $If = (0, +\infty)$ que coincide con el codominio o conjunto de llegada.

Por lo tanto, la función g es suryectiva.

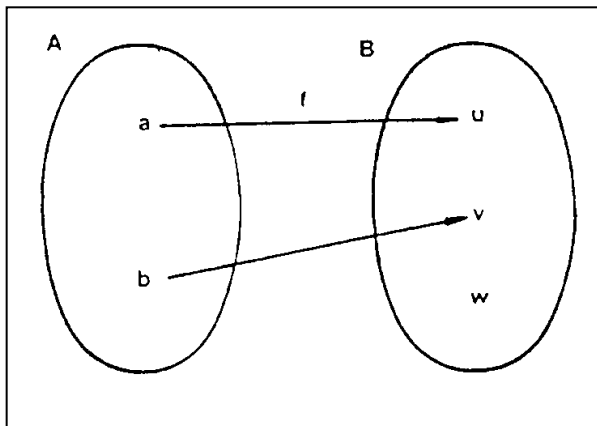
3) **Función biyectiva:** Una función es *biyectiva* si y solo si es inyectiva y suryectiva.

FUNCIÓN INVERSA

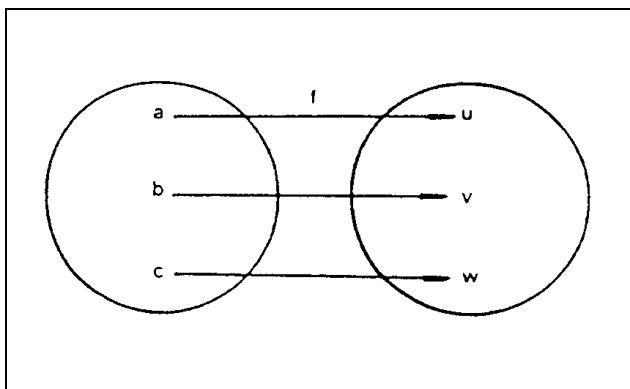
Las relaciones inversas de funciones biyectivas son también funciones biyectivas. En efecto, si f es una función cualquiera su relación inversa puede o no ser una función; solo si f es biyectiva, la relación inversa es otra función llamada *función inversa*, que anotamos f^{-1} .



f es suryectiva pero no inyectiva.
 f^{-1} no es función (no cumple la condición de unicidad de la imagen).



f es inyectiva pero no suryectiva.
 f^{-1} no es función (no cumple la condición de existencia de imagen para todo elemento del conjunto de partida).



f es biyectiva, por lo tanto f^{-1} es función.

$$Df^{-1} = If \quad \wedge \quad If^{-1} = Df$$

Funciones

Ejemplo 38: Dada la función $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \log_{1/3}(x+3)$. Clasificarla y

hallar, si existe, su inversa.

- Analizamos inyectividad:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \log_{1/3}(x_1 + 3) = \log_{1/3}(x_2 + 3) \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Investigamos suryectividad:

$$y = \log_{1/3}(x+3) \Rightarrow x+3 = \left(\frac{1}{3}\right)^y \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^y - 3$$

Todo número real y tiene preimagen x en el conjunto $(-3, +\infty)$.

En símbolos:

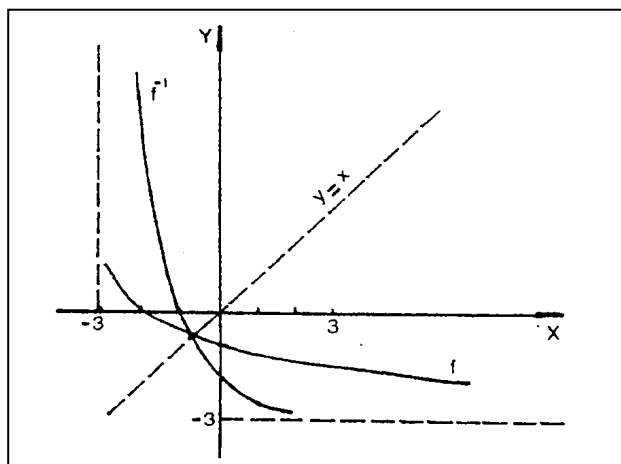
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in (-3, +\infty) \quad / \quad y = f(x)$$

Por lo tanto, $f(x)$ es suryectiva.

- Concluimos que la función $f(x)$ es biyectiva y por lo tanto admite función inversa. Para hallar $f^{-1}(x)$ despejamos x de $y = f(x)$ y en la expresión obtenida cambiamos x por y , e y por x pues por costumbre se designa con x a la variable independiente e y a la dependiente.

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^y - 3 \Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-3, +\infty) \quad / \quad f^{-1}(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$$

Trazamos las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.



Observación: Las curvas que son gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la recta de ecuación $y = x$.

Ejemplo 39: Dadas las siguientes funciones clasificarlas. Redefinir, si fuera necesario, dominio y codominio para que sean biyectivas y hallar su inversa.

a) $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

- Investigamos la inyectividad:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 2} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 2} \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 - 2) = (x_2 + 1)(x_1 - 2) \Rightarrow$$

$$x_1 x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 = x_1 x_2 - 2x_2 + x_1 - 2 \Rightarrow x_2 + 2x_2 = x_1 + 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto, $f(x)$ es inyectiva.

- Investigamos la suryectividad:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = x+1 \Rightarrow yx - 2y = x+1 \Rightarrow yx - x = 2y+1 \Rightarrow$$

$$x(y-1) = 2y+1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

Luego, $If = IR - \{1\}$ y, como no coincide con el codominio IR , $f(x)$ no es suryectiva.

Redefinamos el codominio para que sea biyectiva.

$$f : IR - \{2\} \rightarrow IR - \{1\} \quad / \quad f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

- Luego, $f(x)$ es biyectiva por ser inyectiva y suryectiva, por lo tanto $f^{-1}(x)$ es función.

Despejamos x

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

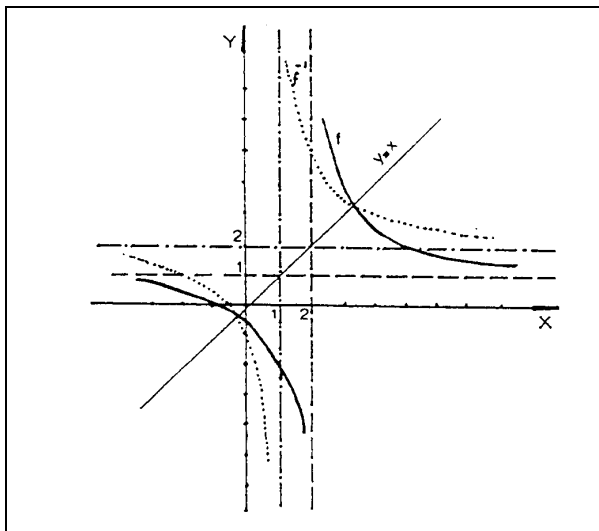
En la fórmula obtenida cambiamos las variables

$$y = \frac{2x+1}{x-1}$$

Definamos entonces la función inversa:

$$f^{-1} : IR - \{1\} \rightarrow IR - \{2\} \quad / \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

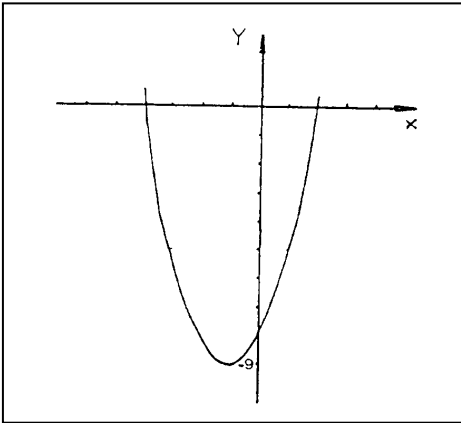
Las gráficas de ambas funciones son las siguientes:



b) $f : IR \rightarrow IR \quad / \quad f(x) = x^2 + 2x - 8$

Se trata de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola como muestra la figura siguiente:

Funciones



Observando el gráfico podemos decir que la función no es inyectiva, ya que cualquier recta de ecuación $y = k$ con $k > -9$ interseca a la parábola en dos puntos. Tampoco es suryectiva, ya que la imagen es el conjunto $[-9, +\infty)$ y el codominio es \mathbb{R} .

Redefinimos dominio y codominio para que sea biyectiva de la siguiente manera:

$$f^*: [-1, +\infty) \rightarrow [-9, +\infty) \quad / \quad f^*(x) = x^2 + 2x - 8$$

Hallamos la inversa despejando x , para lo cual completamos cuadrados.

$$y = x^2 + 2x - 8 = (x^2 + 2x + 4) - 4 - 8 = (x+1)^2 - 9 \Rightarrow (x+1)^2 = y+9 \Rightarrow |x+1| = \sqrt{y+9}$$

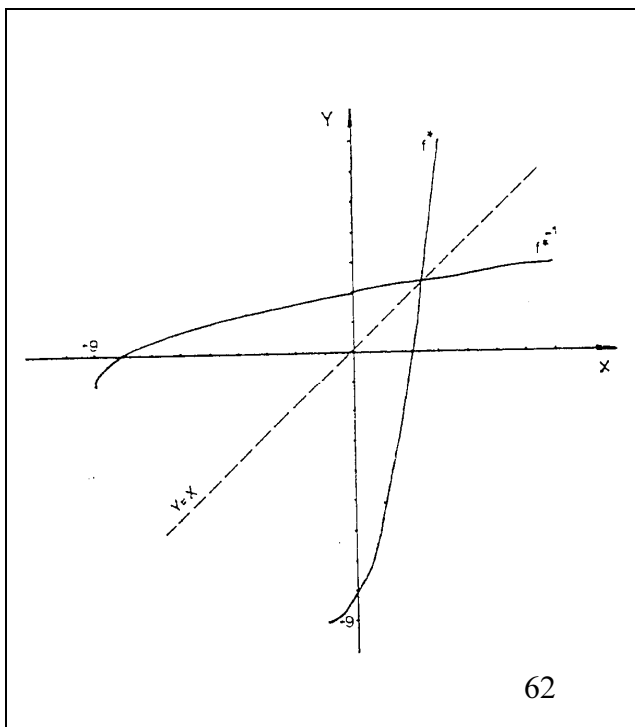
Luego, como $x \in [-1, +\infty)$, se verifica que:

$$x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \quad \therefore x = \sqrt{y+9} - 1$$

Por lo tanto, la función inversa es:

$$f^{*-1}: [-9, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty) \quad / \quad f^{*-1}(x) = \sqrt{x+9} - 1$$

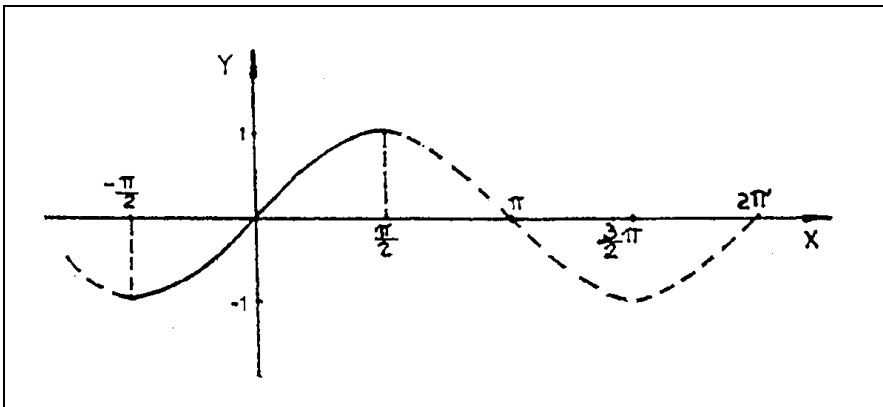
En la siguiente figura mostramos las gráficas de $f^*(x)$ y $f^{*-1}(x)$.



Funciones circulares inversas

1) $y = \arcsen x$

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \sen x$ no es inyectiva. En efecto, hay infinitos valores $x \in \mathbb{R}$ que tienen la misma imagen. Por ejemplo, consideremos $x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = x_1 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\sen x_1 = \sen x_2$.



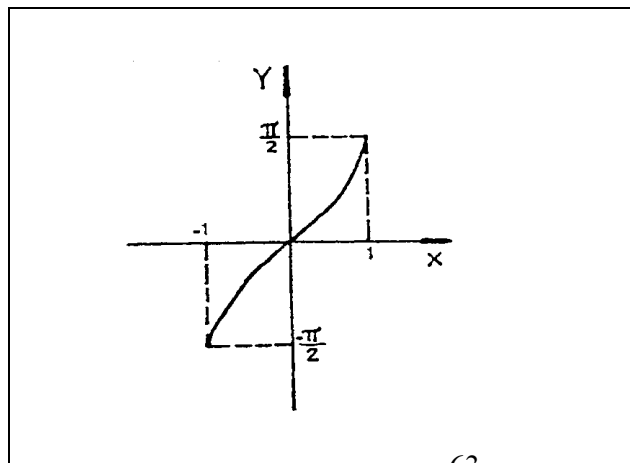
Por lo tanto, el seno no tiene función inversa, pero sí la tiene una restricción del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, ya que $f^*: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R} / f^*(x) = \sen x$ es inyectiva.

Si consideramos como codominio al intervalo $[-1, 1]$, la función:

$$f^*: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1] / f^*(x) = \sen x$$

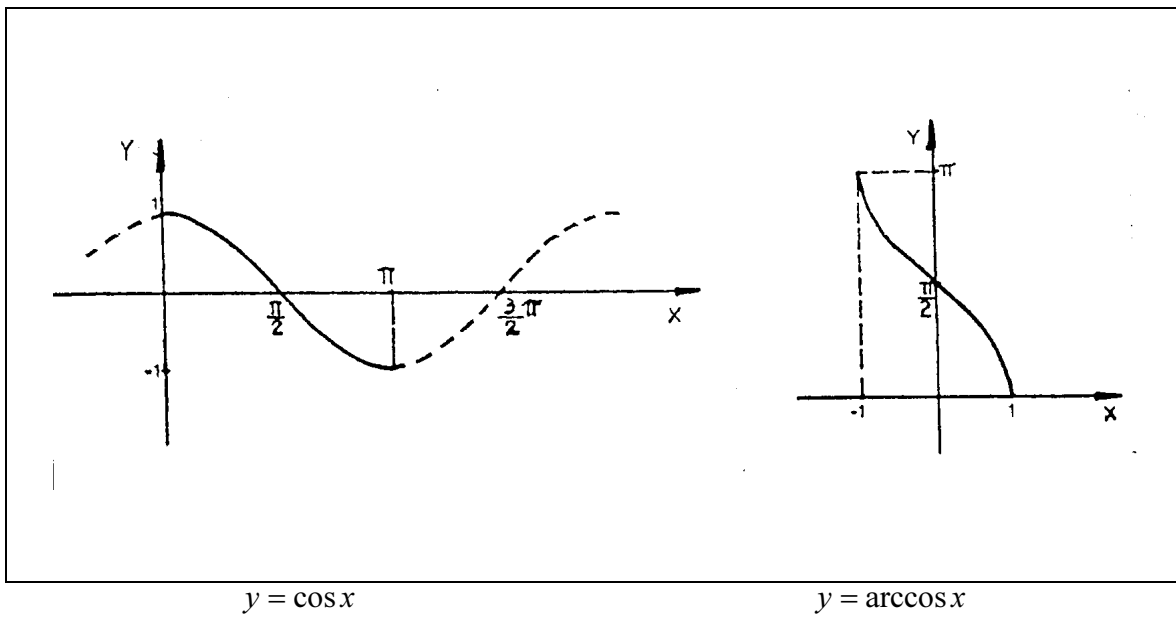
es biyectiva y por lo tanto tiene inversa llamada **arco seno**

$$f^{*-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] / f^{*-1}(x) = \arcsen x$$

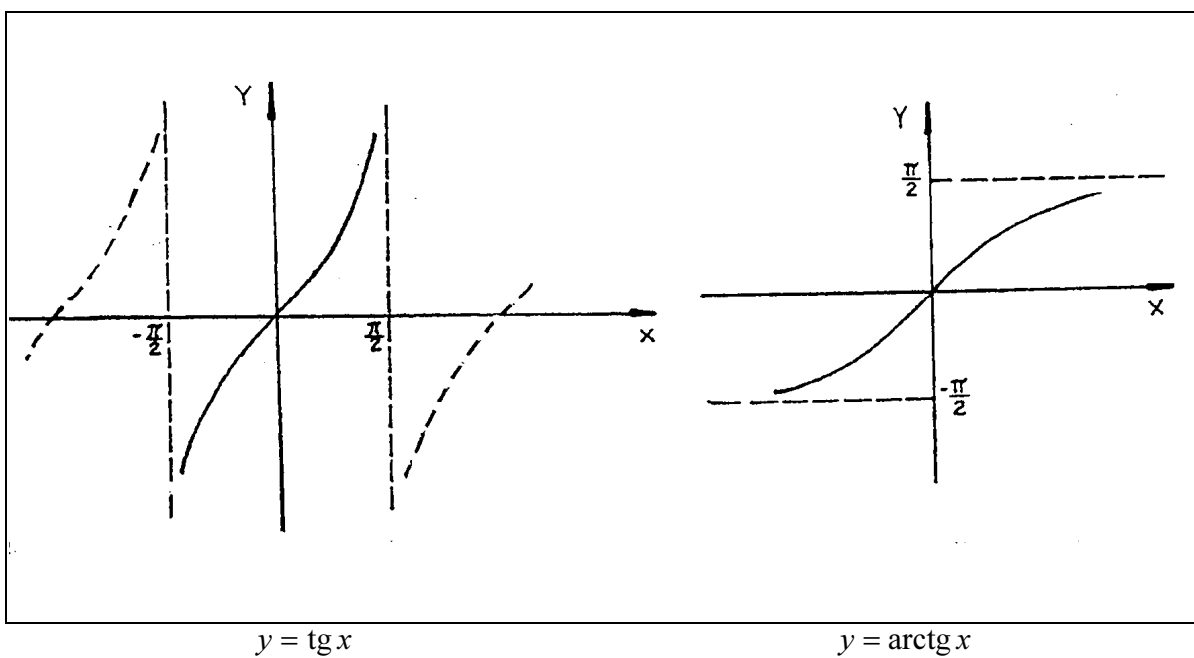


Funciones

2) $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad / \quad f(x) = \arccos x$

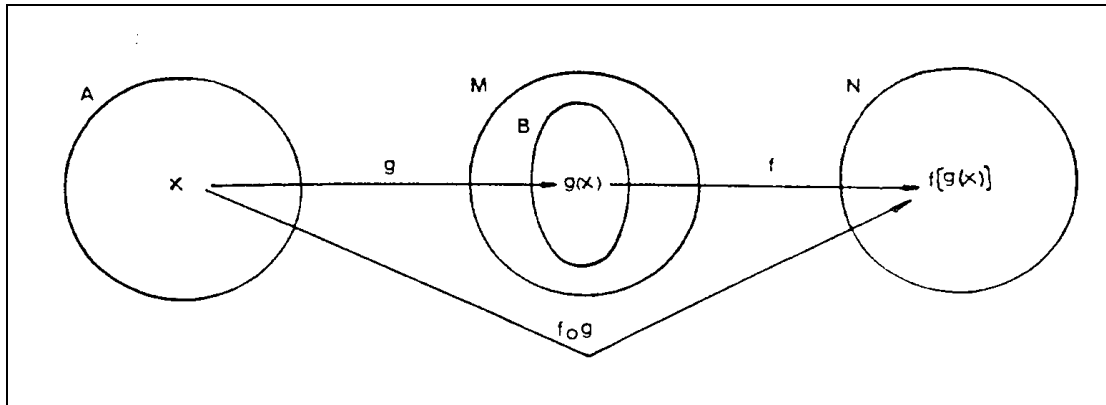


3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad / \quad f(x) = \arctg x$

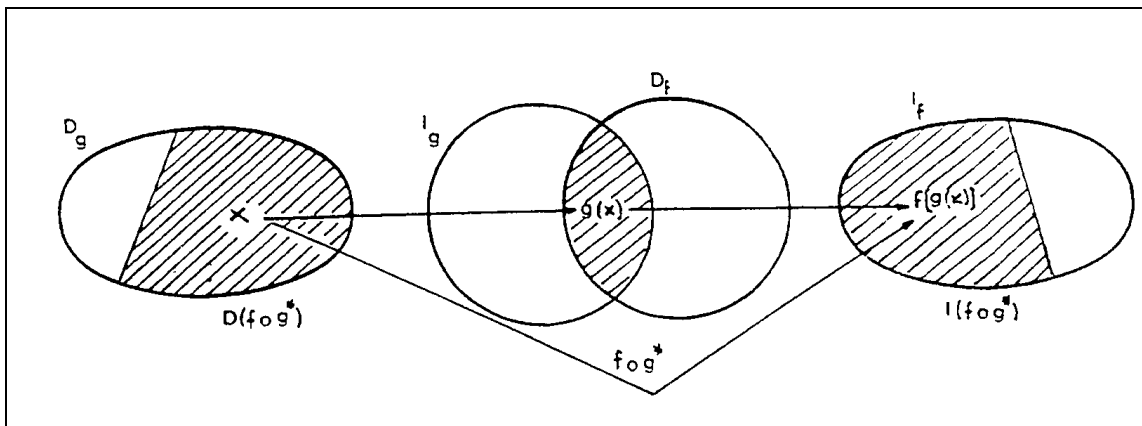


FUNCIÓN COMPUESTA

Dadas dos funciones $g: A \rightarrow B$ y $f: M \rightarrow N$ donde $B \subseteq M$ se llama **composición de g con f** a la función $f \circ g: A \rightarrow N$ definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.



Obsérvese que para que la función compuesta $f \circ g$ exista es necesario que la imagen de g esté incluida en el dominio de f , o sea, $I_g \subseteq D_f$. Si esta condición no se cumple debemos considerar una restricción de g como se ilustra en la figura siguiente:



El asterisco indica que se ha compuesto una restricción de g con f .

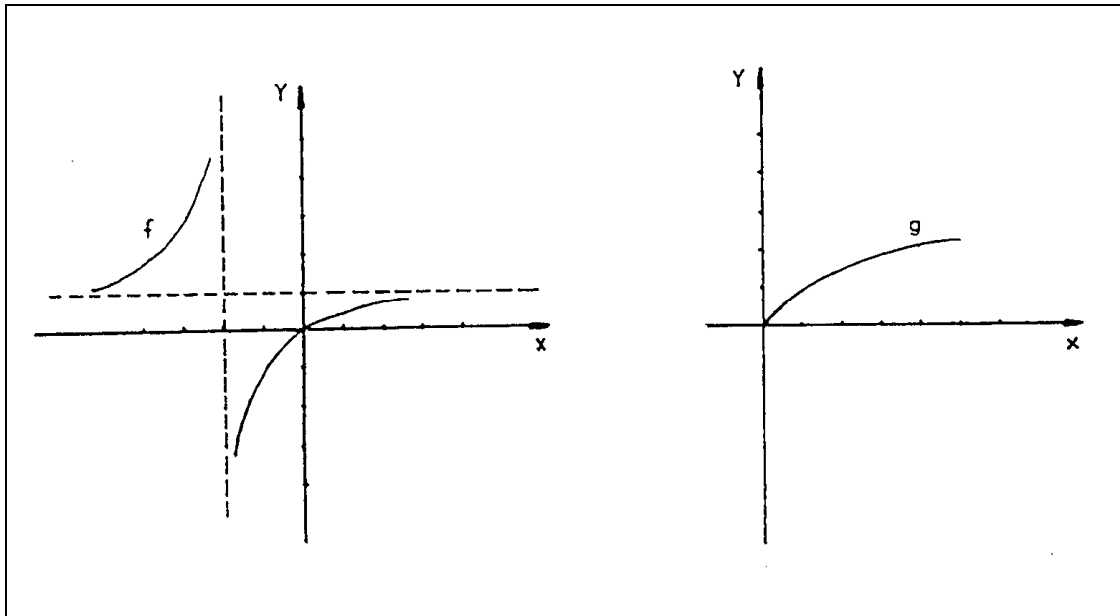
Resolvemos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 40: Hallar la composición de las siguientes funciones realizando en los casos que sea necesario restricciones para que la compuesta sea función.

a) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ $g(x) = \sqrt{x}$

Funciones

Comenzamos determinando dominio e imagen de cada función.



$$Df = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$If = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$Dg = [0, +\infty)$$

$$Ig = [0, +\infty)$$

- Para que $f \circ g$ sea una función debe cumplirse que $Ig \subseteq Df$. Como $[0, +\infty) \subset \mathbb{R} - \{-2\}$, no es necesario hacer restricciones a g .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

Observemos que $D(f \circ g) = [0, +\infty)$ (coincide con el dominio de g) y $I(f \circ g) = [0, 1)$.

Por lo tanto,

$$f \circ g : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1) \quad / \quad (f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

- Para hallar $g \circ f$ debe cumplirse que $If \subseteq Dg$. Vemos que esto no se cumple, ya que $\mathbb{R} - \{1\} \not\subset [0, +\infty)$. Por lo tanto, debemos considerar una restricción de f .

Llamando f^* a dicha restricción.

$$If^* = If \cap Dg = [0, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow Df^* = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$$

Observemos que $D(g \circ f^*) = Df^*$ (no coincide con el dominio de f ya que hemos considerado una restricción de f) y $I(g \circ f^*) = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Por lo tanto,

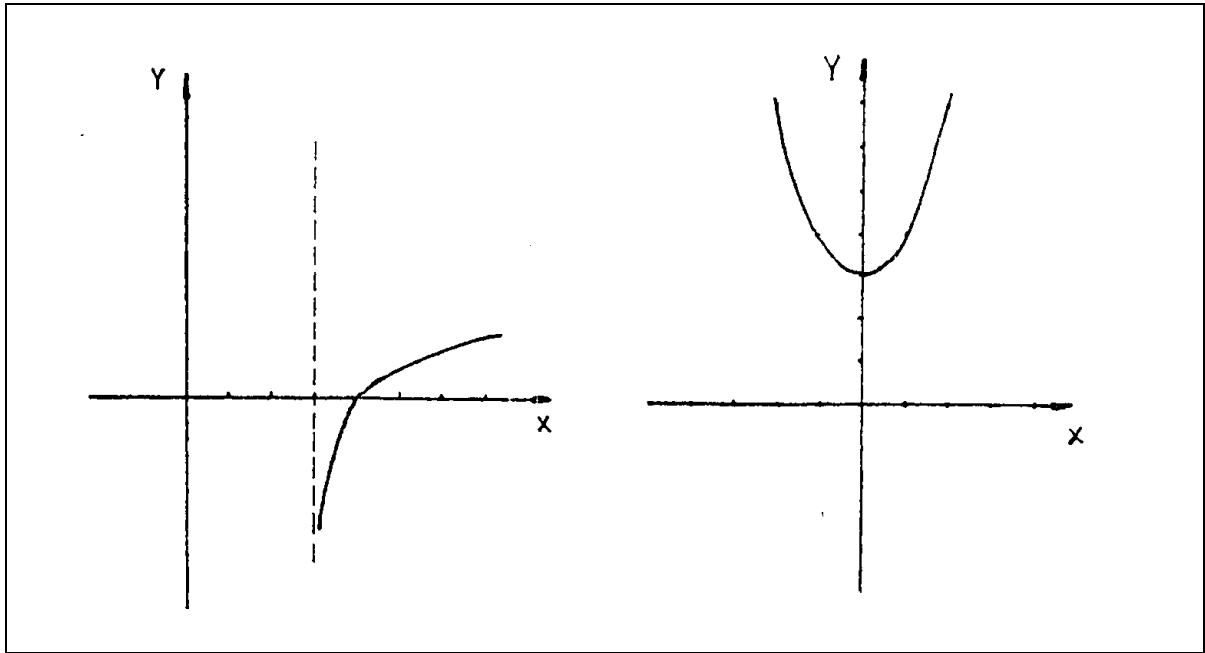
$$(g \circ f^*)(x) = g(f^*(x)) = g\left(\frac{x}{x+2}\right) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

Concluimos que

$$g \circ f^* : (-\infty, -2) \cup [0, +\infty) \rightarrow [0, 1) \cup (1, +\infty) \quad / \quad (g \circ f^*)(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

Funciones

b) $f(x) = \ln(x - 3)$ $g(x) = x^2 + 3$



$$Df = (3, +\infty)$$

$$If = \mathbb{R}$$

$$Dg = \mathbb{R}$$

$$Ig = [3, +\infty)$$

- Vamos a hallar $f \circ g$. Como $Ig \not\subseteq Df$, debemos considerar una restricción de g tal que:

$$Ig^* = Ig \cap Df = (3, +\infty) \Rightarrow Dg^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

Observemos que $D(f \circ g^*) = Dg^*$ y $I(f \circ g^*) = \mathbb{R}$.

Por lo tanto,

$$(f \circ g^*)(x) = f(g^*(x)) = f(x^2 + 3) = \ln(x^2 + 3 - 3) = \ln x^2$$

Concluimos que:

$$f \circ g^* : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad (f \circ g^*)(x) = \ln x^2$$

- Vamos a hallar $g \circ f$. Como $If \subseteq Dg$, no es necesario considerar una restricción de f .

Por lo tanto, $D(g \circ f) = Df = (3, +\infty)$ y $I(g \circ f) = Ig = [3, +\infty)$.

Luego: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(x - 3)) = \ln^2(x - 3) + 3$.

Concluimos que:

$$g \circ f : (3, +\infty) \rightarrow [3, +\infty) \quad / \quad (g \circ f)(x) = \ln^2(x - 3) + 3$$

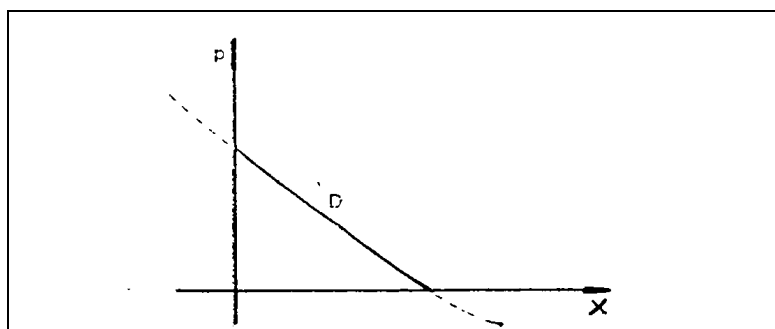
APLICACIONES ECONÓMICAS

FUNCIONES ECONÓMICAS

Funciones de Demanda: Si bien la cantidad demandada de un producto depende de varias variables como precio del bien, precio de los bienes sustitutos y complementarios, el ingreso de los consumidores, los gustos, las costumbres, etc., para simplificar el análisis consideramos como variable fundamental al precio del producto resultando una función $x = D(p)$, donde x representa la cantidad que los consumidores están dispuestos a adquirir para distintos niveles o valores del precio p .

Para los llamados *bienes típicos* la cantidad demandada disminuye al aumentar el precio, es decir, las funciones de demanda son decrecientes.

La gráfica de una función de demanda constituye la curva de demanda. Cabe aclarar que sólo tiene sentido económico la sección o tramo de la curva que queda en el primer cuadrante, ya que las cantidades de un producto y sus precios toman valores nulos o positivos. Las funciones de demanda están en algunos casos representadas por ecuaciones lineales, en otros casos dichas funciones no son lineales.



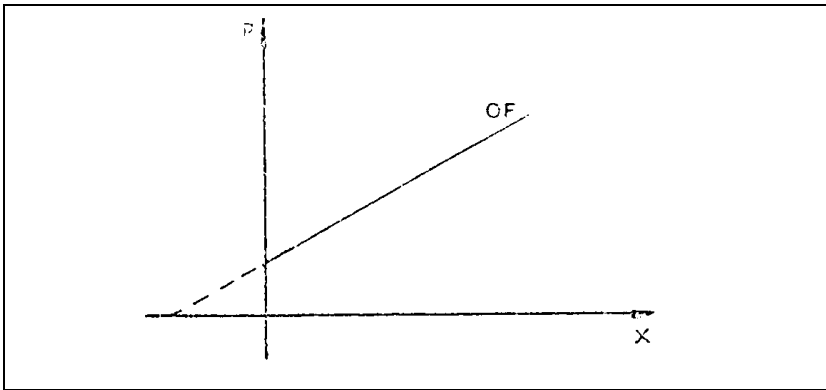
Observación: La convención de los economistas es representar p en el eje de las ordenadas y x en el de las abscisas.

Funciones de Oferta: Haciendo la misma hipótesis simplificativa que para el análisis de la demanda, una función de oferta es $x = Of(p)$, estableciendo las cantidades x del bien considerado que los productores ofrecen para cada valor del precio.

Comúnmente al aumentar el precio, aumenta la cantidad ofrecida y si el precio disminuye se reduce la oferta.

También hacemos aquí las consideraciones sobre la no negatividad de las variables x y p . Las curvas de oferta se representan en el primer cuadrante.

Funciones

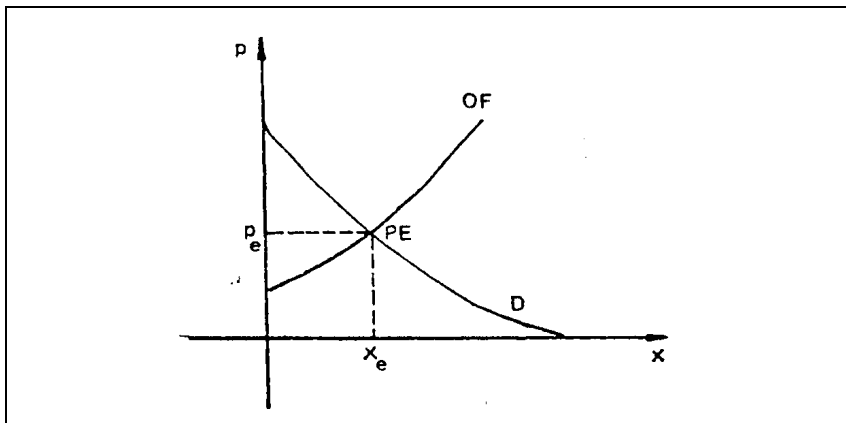


Observación: Si las funciones de demanda u oferta están expresadas en función del precio p , habrá que hallar la función inversa.

Punto de Equilibrio de Mercado: Se produce equilibrio de mercado cuando la cantidad demandada de un producto es igual a la cantidad ofrecida del mismo.

El precio y la cantidad de equilibrio corresponden a las coordenadas del punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda.

Para determinar analíticamente el punto de equilibrio debe resolverse el sistema de ecuaciones que representan las funciones de oferta y de demanda.



Resolvemos a continuación algunos ejemplos ilustrativos

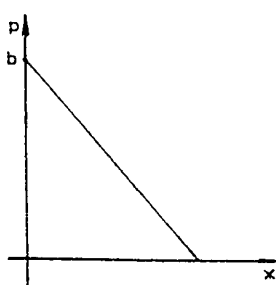
Ejemplo 41: ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones representan curvas de demanda, oferta o ninguna de ellas?

- i) $3x + 4p - 12 = 0$
- ii) $x - 3 = 0$
- iii) $2p + 3x + 2 = 0$
- iv) $x - 3p = 0$

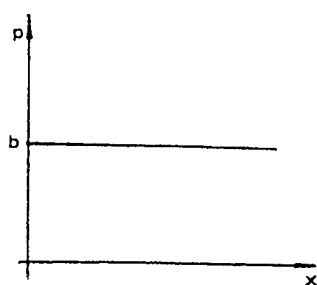
Funciones

En todos los casos se trata de ecuaciones lineales. Para determinar si representan funciones de oferta o demanda determinamos la pendiente. El caso más común es que la pendiente de una recta de demanda sea negativa y la de una oferta positiva aunque pueden darse los casos siguientes:

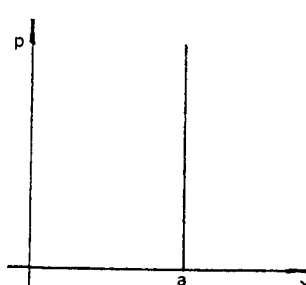
- la pendiente de la recta de demanda es cero: precio constante cualquiera sea la cantidad demandada.
- la pendiente de la gráfica de demanda no está definida: cantidad demandada constante cualquiera sea el precio.
- la pendiente de la recta de oferta es cero: precio constante, cualquiera sea la cantidad ofrecida.
- la pendiente de la gráfica de oferta no está definida: la cantidad ofrecida es constante e independiente del precio.



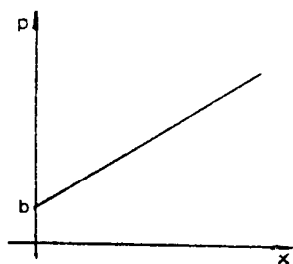
Demanda con pendiente
negativa



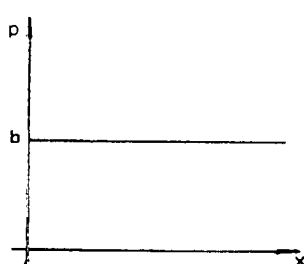
Demanda con pendiente
nula



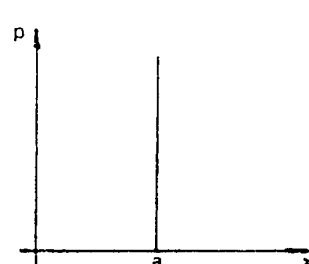
Demanda con pendiente no
definida



Oferta con pendiente
positiva



Oferta con pendiente
nula



Oferta con pendiente no
definida

- i) $4p = -3x + 12 \Rightarrow p = -\frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow$ **demanda**
- ii) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Como la pendiente es no definida, entonces **oferta** o **demanda**.
- iii) $p = -\frac{3}{2}x - 1$. Luego, no representa a ninguna, pues ningún punto de la recta pertenece al primer cuadrante.
- iv) $p = \frac{1}{3}x \Rightarrow m = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ **oferta**.

Ejemplo 42: Cuando el precio de un producto es \$ 6 se venden 30 unidades; cuando el precio sea \$ 8, sólo se venderán 10 unidades.

Hallar la ecuación que corresponde a la función de demanda suponiéndola lineal. Graficar la curva de demanda.

$$x_0 = 30 \quad p_0 = 6$$

$$x_1 = 10 \quad p_1 = 8$$

Conocemos dos puntos de la recta de demanda. Aplicando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos obtenemos:

$$p - p_0 = \frac{p_1 - p_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow p - 6 = \frac{8 - 6}{10 - 30} (x - 30) \Rightarrow p = -0.1x + 9$$

Ejemplo 43: La ecuación de la oferta de un artículo es lineal y se sabe que cuando el precio es \$ 60 hay disponibles en el mercado 900 unidades y que la oferta disminuirá 270 unidades si el precio disminuyera \$ 15.

- i) Hallar la ecuación de la oferta.
- ii) ¿Cuál es el menor precio al que los productores ofrecerían este artículo?
- iii) Graficar la curva

Veamos cómo resolver este problema:

$$i) \quad p_0 = 60 \quad x_0 = 900 \Rightarrow \Delta x = -270 \quad \wedge \quad \Delta p = -15$$

Podemos calcular la pendiente de la recta de oferta.

$$m = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{-15}{-270} = \frac{1}{18}$$

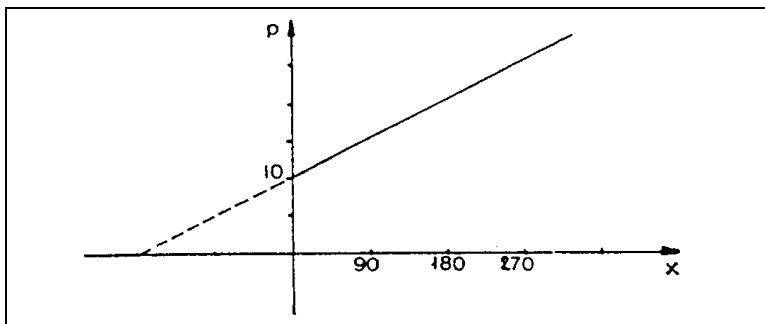
Aplicando la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por un punto (x_0, p_0) :

$$p - p_0 = m(x - x_0) \Rightarrow p - 60 = \frac{1}{18}(x - 900) \Rightarrow p = \frac{1}{18}x + 10$$

ii) Se nos pide hallar el precio por debajo del cual no habría oferta

$$x = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{18}0 + 10 \Rightarrow p = 10$$

iii)



Funciones

Ejemplo 44: Dado el siguiente sistema.

$$\begin{cases} p = 2 + 0.2x + 0.01x^2 \\ p = 7.5 - 0.25x \end{cases}$$

- i) ¿Cuál ecuación representa una curva de demanda y cuál una de oferta?
- ii) Determinar analítica y gráficamente el punto de equilibrio de mercado.

Vamos a resolver este problema:

- i) $p = -0.25x + 7.5 \Rightarrow m = -0.25 < 0$ (ecuación de una recta con pendiente negativa)

\Rightarrow demanda.

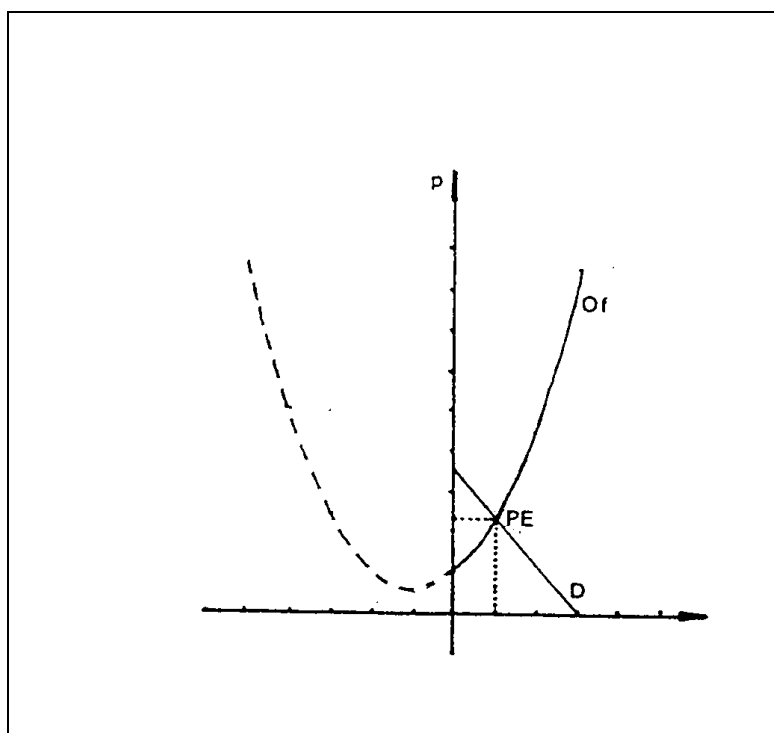
$p = 0.01x^2 + 0.2x + 2$ (es la ecuación de una parábola de eje de simetría paralelo al eje p)

\Rightarrow oferta.

- ii) Para representar la parábola determinemos el vértice y los ceros.

$$x_{1,2} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{(0,2)^2 - 4 \cdot 0,01 \cdot 2}}{0,02} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{-0,04}}{0,02} \Rightarrow \text{no tiene ceros}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0,2}{2 \cdot (0,01)} = -10$$



Para hallar el punto de equilibrio igualamos la oferta y la demanda.

$$0.01x^2 + 0.2x + 2 = -0.25x + 7.5 \Rightarrow 0.01x^2 + 0.45x - 5.5 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-0.45 \pm \sqrt{(0.45)^2 + 4 \cdot 0.01 \cdot 5.5}}{0.02} = \frac{-0.45 \pm 0.65}{0.02} \Rightarrow x_1 = 10 \wedge x_2 = -55$$

Observemos que este último valor carece de sentido económico. Luego,

$$p = -0.25 \cdot 10 + 7.5 = 5 \Rightarrow P.E. = (10, 5)$$

Funciones

Función de Costo: Una función lineal de *costo* está dada por:

$C(x) = ax + b$ con $a > 0$ y $b > 0$, donde x es la cantidad producida y $C(x)$ es el costo total de producir x unidades de un bien.

Si no se fabrica el producto ($x = 0$) hay un costo $C(0) = b$ llamado *costo fijo*.

Las funciones de costo pueden estar dadas en muchos casos por ecuaciones no lineales.

Llamamos *costo medio, promedio* o *costo por unidad* a la función: $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

Función de Ingreso: Se llama *ingreso total* I al producto del número x de unidades demandadas por el precio unitario p .

$$I(x) = x p$$

Para cualquier función de demanda $p = f(x)$ es

$$I(x) = x f(x)$$

El *ingreso medio* o *ingreso por unidad* $\bar{I}(x) = \frac{I(x)}{x}$

Función de Beneficio o Utilidad: Se la define como la diferencia entre la función de ingreso y la función de costo total.

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

El *beneficio medio* $\bar{B}(x) = \frac{B(x)}{x}$

Veamos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 45: Una empresa tiene una función de costo total representada por la ecuación

$$C(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

¿Cuál es la ecuación de costo promedio?

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x}{x} = 2x^2 - 3x - 12$$

Ejemplo 46: Hallar la ecuación de la función de ingreso si la demanda está dada por $p = -3x + 24$.

$$I(x) = x p = x (-3x + 24) = -3x^2 + 24x$$

INTERÉS COMPUESTO

Una suma de dinero C_0 (*capital*) colocada a la *tasa de interés* i (interés ganado por cada peso en un intervalo definido de tiempo llamado *período*) capitalizada k veces por período, se transforma al cabo de n períodos en una suma C_n llamada *monto* (capital + interés).

La expresión que permite calcular el monto es:

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn}$$

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 47: Una persona tiene \$5000 para depositar al 10% anual. Calcular el monto al cabo de 3 años, si los intereses se capitalizan:

i) Una sola vez por año.

ii) Cada 90 días.

Luego:

i) $k = 1 \Rightarrow C_n = C_0 (1 + i)^n$. Como la tasa es del 10%, entonces $i = \frac{10}{100} = 0.10$. Por lo

tanto, $C_n = 5000 (1 + 0.10)^3 = 6655$.

ii) $k = \frac{360}{90} = 4$ ya que la tasa de 10% anual se paga 4 veces por año.

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} = 5000 \left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 5000 (1 + 0.025)^{12} = 6724.45$$

Ejemplo 48: ¿Cuánto debemos depositar ahora para contar con \$ 12000 dentro de 2 años si nos pagan el 6% anual de interés capitalizable por mes?

Que la capitalización sea por mes significa que la tasa del 6% anual se capitaliza 12 veces por año. En efecto:

$k = \frac{360}{30} = 12$. Como la tasa es del 6 %, entonces $i = \frac{6}{100} = 0.06$.

Debemos calcular C_0

$$C_0 = C_n \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-kn} = 12000 \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{-12 \cdot 2} = 12000 (1 + 0.005)^{-24} = 10646.25$$