

Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes

UNIDAD 5

RESPUESTAS

Nota. Si no entendés alguna respuesta o alguna de las tuyas no coincide con las aquí presentadas, no dudes en consultarlo en el foro.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio 1.

La única 4-upla que es solución del sistema es \vec{v}_2 .

Ejercicio 2.

- a) $a = -2, b = 3$.
- b) No existen a, b que verifiquen lo pedido.

Ejercicio 3.

- a) No. Para exhibir un contraejemplo, consideren el sistema de dos incógnitas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ tiene por única solución a $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Si reemplazamos ambas ecuaciones por su suma obtenemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 0 \end{cases}$ el cual tiene por solución a todos los vectores de la forma $(x, -x) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, el $(1, -1)$ es solución.
- b) Sí.
- c) No. Para exhibir un contraejemplo, consideren el mismo sistema del punto a): $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ cuya única solución es $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Si sumamos 2 al primer miembro de cada ecuación, obtenemos el sistema: $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$ o, lo que es lo mismo, $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ cuya única solución es $(-2, -2)$.
- d) Sí.
- e) Sí.
- f) Sí.

Ejercicio 4.

- a) Compatible determinado. Solución: $\{(-1, 1)\}$
- b) Incompatible.
- c) Compatible determinado. Solución: $\{(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})\}$
- d) Compatible determinado. Solución: $\{(1, 0, 2)\}$
- e) Compatible indeterminado.
Soluciones: $\{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(0, 1, 1) + (3, 2, 0), t \in \mathbb{R}\}$
- f) Incompatible.
- g) Compatible indeterminado.
Soluciones: $\{X \in \mathbb{R}^4 : X = t(1, -2, -3, 0) + s(0, -1, 0, 1) + (0, 5, 3, 0), t, s \in \mathbb{R}\}$
- h) Compatible indeterminado.
Soluciones: $\{X \in \mathbb{R}^4 : X = t(-2, 0, 0, 1) + s(-3, 2, 1, 0) + (2, -1, 0, 0), t \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 5.

Hay infinitas opciones. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a) \quad & \blacksquare S_1 = \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -5 \end{cases} \\ & \blacksquare S_2 = \begin{cases} x + y + z = -4 \\ y + z = -3 \\ z = -5 \end{cases} \\ b) \quad & \blacksquare S = \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 6.

Hay infinitas opciones para cada ítem. Por ejemplo:

- a) $z = 0$ (una ecuación que no se deduce de las anteriores).
- b) $7x + y - z = 1$ (la suma de las ecuaciones).
- c) $7x + y - z = 10$ (la suma del miembro izquierdo de las ecuaciones igualado a algo que no es la suma del miembro derecho de las ecuaciones).

Ejercicio 7.

- a)
 - Compatible determinado: $k \neq -2, 1, 3, -3$
 - Compatible indeterminado: $k = -2, 1, 3, -3$
- b)
 - Compatible determinado: $k \neq 0, 1$
 - Compatible indeterminado: $k = 1$
 - Incompatible: $k = 0$
- c)
 - Compatible determinado: $k \neq -4$
 - Incompatible: $k = -4$
- d)
 - Compatible determinado: $k \neq 0, 1, -3$
 - Compatible indeterminado: $k = 1$
 - Incompatible: $k = 0, -3$
- e)
 - Compatible indeterminado: $k = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$
 - Incompatible: $k \neq \sqrt{5}, -\sqrt{5}$
- f)
 - Compatible indeterminado: $k \neq 1$
 - Incompatible: $k = 1$

Ejercicio 8.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ y $b = 1$

MATRICES

Ejercicio 9.

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \\ b) \quad & \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \\ c) \quad & \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ d) \quad & \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 10.

- a) 4×7
- b) No es posible.
- c) 5×5
- d) 7×7
- e) 4×5
- f) No es posible.
- g) No es posible.
- h) 5×5

Ejercicio 11.

- a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$; $B \cdot A$ no es posible.
- b) $A \cdot B = 9$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 19 \\ 14 & 1 & 11 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ 12 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12.

- a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
- b) $B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 15 \\ 18 & -8 & 26 \\ 28 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
- c) $-2A^2 + B^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 26 & -14 & -22 \\ 30 & 16 & 4 \\ -10 & 80 & 44 \end{pmatrix}$

Ejercicio 13.

- a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- b) $(AB)^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ y $B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14.

Hay infinitas opciones para cada ítem.

- a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 15.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$

Ejercicio 17.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ \frac{3}{2} & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18.

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES

Ejercicio 19.

a) -10

b) 0

c) 4

d) 0

Ejercicio 20.

a) 6

b) -36

c) 0

d) 0

Ejercicio 21.

a) 104

b) 6

c) -120

d) 120

e) 1960

Ejercicio 22.

a) 5

b) -10

c) -5

Ejercicio 23.

- a) Para $k \neq \frac{10}{3}$
- b) Para todo $k \in \mathbb{R}$
- c) Para todo $k \in \mathbb{R}$
- d) Para $k \neq 0, 4$

Ejercicio 24.

- a) 8
- b) 128
- c) 32768
- d) $\frac{1}{8}$
- e) 2

Ejercicio 25.

- a) -64
- b) $-\frac{1643}{4}$

Ejercicio 26.

- Compatible determinado para $a \neq 0, 1$
- Compatible indeterminado para $a = 1$
- Incompatible para $a = 0$

Ejercicio 27.

Para $a = 0, a = 5$.

Ejercicio 28.

Todo X en el subespacio $\langle (1, 1, -2) \rangle$