Vectores

Unidad 1

Respuestas

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Nota. *Si no entendés alguna respuesta o alguna de las tuyas no coincide con las aquí presentadas, no dudes en consultarlo en el foro.*

Conjuntos

Ejercicio 1.

a) Verdadero
b) Falso
c) Verdadero
d) Falso
e) Verdadero

Ejercicio 2.

a) Verdadero
b) Falso
c) Falso
d) Verdadero
e) Falso

Ejercicio 3.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$
c) $B \cup C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
d) $A \cap B = \emptyset$
e) $A \cap C = \{5, 7\}$
f) $B \cap C = \{6, 8\}$
g) $(A \cap B) \cup C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
h) $A \cap (B \cup C) = \{5, 7\}$
i) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
j) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{5, 7\}$

Ejercicio 4.

a) $A \setminus B = \{\gamma, \delta\}$
b) $B \setminus A = \{\epsilon\}$
c) $(A \setminus B) \cup B = \{\gamma, \delta, \alpha, \beta, \epsilon\}$
d) $(B \setminus A) \cup A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$
e) $C \setminus A = \emptyset$
f) $A \setminus C = \{\gamma, \delta\}$
g) $B \setminus D = \{\alpha, \beta\}$
h) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$
i) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$
j) $A^c = \{\epsilon, \theta, \rho\}$
k) $A^c = \{\epsilon\}$

Ejercicio 5. Este problema tiene las respuestas en archivos pgn. Los invitamos a explorarlos. Para ello vayan al Repositorio digital del campus y en la carpeta *Unidad 1:Vectores - Problema 5* los encontrarán.

Ejercicio 6.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 3\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (-3 < x \leq 1 \text{ y } -3 \leq y \leq 4) \cup (2 \leq x \leq 3 \text{ y } -3 < y < 4)\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq x\}$

Vectores

Ejercicio 7.

a)

b)
- $\vec{v} + \vec{w} = (2, 6)$
- $\vec{v} - \vec{w} = (4, -2)$
- $-\vec{v} = (-3, -2)$
- $2\vec{w} = (-2, 8)$
- $\frac{1}{2}\vec{v} = (\frac{3}{2}, 1)$
- $2\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v} = (-\frac{7}{2}, 7)$

c)
- $3\vec{v} + 3\vec{w} = 3(3, 2) + 3(-1, 4) = (9, 6) + (-3, 12) = (9 - 3, 6 + 12) = (6, 18)$
- $3(\vec{v} + \vec{w}) = 3((3, 2) + (-1, 4)) = 3(3 - 1, 2 + 4) = 3(2, 6) = (6, 18)$

d)

Ejercicio 8.

a)
- $\vec{v} + \vec{w} = (2, 1, 0)$
- $\vec{w} - \vec{u} = (0, 0, -1)$
- $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

c) $\alpha = 3$, $\beta = -3$ y $\gamma = 1$.

Ejercicio 9.

a) Al modificar el signo de la primera coordenada, se produce una simetría axial con respecto al eje y.

b) Al modificar el signo de la segunda coordenada, se produce una simetría axial con respecto al eje x.

c) Al multiplicar por -1 a un vector se modifican los signos de sus dos coordenadas. Esto puede ser interpretado geométricamente como una combinación de las dos simetrías analizadas en los ítems anteriores o, de manera más sencilla, como un vector que conserva el módulo y la dirección del vector original pero que modifica su sentido.

Ejercicio 10.

a) El triángulo que se obtiene sufre una traslación con respecto al vector $\vec{t}$.

b) Los tres triángulos siguen teniendo sus lados paralelos entre sí. Lo que se modifica es el área que determinan (producto de que se duplican o se dividen en dos la medida de sus lados).

Ejercicio 11.

a) No, no se puede saber. Existen infinitas posibilidades.

b) Si, se puede. La dilatación consiste en multiplicar por $\frac{1}{2}$ y la traslación consiste en sumar $(-\frac{13}{2}, 11)$.

c) No, no puede ser.

d) Llamemos (x_1, x_2, x_3) al vector de la traslación. Entonces $(2, 1, 3)$ va a parar al $(2\lambda + x_1, \lambda + x_2, 3\lambda - x_3)$. Ahora, como $(2, 1, 5) = \lambda(1, 1, 1) + (x_1, x_2, x_3)$ entonces

$$\begin{cases} 2 &= \lambda + x_1 \\ 1 &= \lambda + x_2 \\ 5 &= \lambda + x_3 \end{cases}$$

Por lo tanto,

- $2\lambda + x_1 = \lambda + (\lambda + x_1) = \lambda + 2$ (aquí hemos usado la información provista en la primera ecuación).
- $\lambda + x_2 = 1$ (por la segunda ecuación)
- $3\lambda + x_3 = 2\lambda + (\lambda + x_3) = 2\lambda + 5$ (por la tercera ecuación).

Ejercicio 12.

a) $(2, 3)$.

b) $(0, 5, \frac{3}{2})$.

Ejercicio 13.

a) $\left(\frac{4}{15}; \frac{11}{15}\right)$.

b) $(0,267; 0,733)$.

Producto escalar

Ejercicio 14.

a) -2

b) 0

c) 5

d) 0

Ejercicio 15.

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 8$; $\vec{w} \cdot \vec{v} = 8$.

b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = 13$; $(\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{w} \cdot \vec{u}) = 13$.

c) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w} = 24$; $3(\vec{v} \cdot \vec{w}) = 24$.

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = 9$; $\vec{w} \cdot \vec{w} = 13$.

Ejercicio 16.

a) 5

b) $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{10}$

d) $\sqrt{n}$

Ejercicio 17.

a)
- $||\vec{v}|| = 5$
- $||\vec{w}|| = \sqrt{5}$
- $||\vec{v} + \vec{w}|| = \sqrt{20}$
- $||\vec{v}|| + ||\vec{w}|| = 5 + \sqrt{5}$
- $||2\vec{v}|| = 10$
- $||\frac{1}{2}\vec{v}|| = \frac{5}{2}$

b) $||2\vec{v}||$ es $2||\vec{v}||$ y $||\frac{1}{2}\vec{v}|| = \frac{1}{2}||\vec{v}||$.

c) $||\vec{v}+\vec{w}||$ es menor a $||\vec{v}||+||\vec{w}||$.

Ejercicio 18.

a) $||\vec{v}-\vec{w}||=\sqrt{5}$

b) $||\vec{v}-\vec{w}||\approx 2,236$

c) $||\vec{v}-\vec{w}||\approx 2,23607$

Ejercicio 19.

a) $\sqrt{10}$

b) 5

c) $\sqrt{11}$

d) 3

Ejercicio 20.

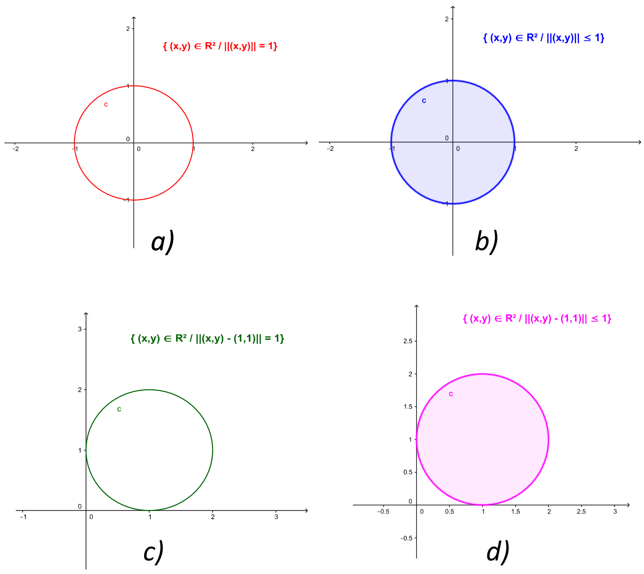
a) $k=3$ o $k=-3$.

b) No existe ninguno.

c) $k=-\frac{1}{3}$ o $k=\frac{1}{3}$

d) $k=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ o $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$

Ejercicio 21.



Ejercicio 22.

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

Ejercicio 23.

a) $k = -1$ o $k = 1$

b) $k = -1$

Ejercicio 24.

a) $(\sqrt{3}, 1)$ y $(\sqrt{3}, -1)$

b) $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

Ejercicio 25.

a) No

b) Sí

c) No

d) No

e) Sí

f) No

Ejercicio 26.

a) Por ejemplo: $(-3, 2)$, $(3, -2)$, $(-6, 4)$. Son todos múltiplos entre sí.

b) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

c) Por ejemplo: $(-4, 1, 2)$ y $(7, -5, 3)$.

d) Por ejemplo: $(-3, -1, 5)$, $(3, 1, -5)$ y $(-6, -2, 10)$. Son todos múltiplos entre sí.

Ejercicio 27.

a) Verdadero

b) Verdadero

c) Falso

d) Verdadero

Ejercicio 28.

a) $\vec{w} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $\vec{w} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$.

b) $||\vec{v}|| = 2$.

Ejercicio 29. $k = 0$ ó $k = \frac{8}{3}$