- Enunciado

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ ; $\vec{v}$ un vector unitario y $\vec{w}$ un vector de norma $\sqrt{2}$. Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ es el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, indicá la opción que muestra el resultado del producto escalar entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

*a*) $0,5$
*b*) $\sqrt{2}$
*c*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
*d*) $0,7$

Opción correcta: *c*)

Resolución
Para resolver este ejercicio solo hay que tener presente que el producto escalar entre vectores se puede calcular como: $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot cos(\alpha)$. Reemplazando los datos se obtiene que la respuesta correcta es $\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

- Enunciado

Si se le aplica una dilatación $\alpha \in \mathbb{R}$ al vector $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; -1\right)$ seguido de una traslación con dirección $(-1; 0; 3)$ se obtiene el vector $(1; 1; -2)$. Indicá la única opción que muestra el valor de $\alpha$:

*a*) $\frac{1}{5}$
*b*) $-5$
*c*) $5$
*d*) $1$

Opción correcta: *c*)

Resolución
Para resolver este ejercicio una opción es plantear la ecuación vectorial: $\alpha \cdot \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5} - 1\right) + (-1; 0; 3) = (1; 1; -2)$ De acá, operando nos queda la igualdad: $\left(\frac{2}{5}\alpha - 1; \frac{1}{5}\alpha; -\alpha + 3\right) = (1; 1; -2)$ Luego, igualando coordenada a coordenada obtenemos, tres ecuaciones que nos permiten deducir que el valor de $\alpha = 5$.

---

- Enunciado

Dado el plano de ecuación $x + y - z = 1$ y la recta de ecuación $(x; y; z) = \alpha \cdot (-1; 0; 1) + (1; -1; 1)$, la intersección entre el plano y la recta es:

*a*) $(2; -1; 0)$
*b*) $(0; -1; 2)$
*c*) $(1; -1; 1)$
*d*) $(1; 1; -1)$

Opción correcta: *a*)

Resolución
Un punto genérico de la recta es de la forma $(1-\alpha; -1; \alpha+1)$. Para hallar la intersección con el plano, reemplazamos en la ecuación del plano y despejamos $\alpha$. En este caso tenemos que el valor de $\alpha$ es $-1$. Reemplazando dicho valor en la ecuación de la recta obtenemos el punto $(2; -1; 0)$.

---

- Enunciado

La distancia entre el punto $(1; 3; 1)$ y el plano de ecuación $\pi : x - 2y + z = 2$ es:

*a*) $\sqrt{6}$
*b*) $6$
*c*) $\sqrt{11}$
*d*) $2$

Opción correcta: *a*)

Resolución
Para hallar la distancia entre el $(1; 3; 1)$ y el plano primero debemos hallar la proyección de $(1; 3; 1)$ sobre el plano. Esto lo hacemos hallando la intersección entre la recta cuya dirección es la misma que la normal, es decir perpendicular al plano, y que pasa por $(1; 3; 1)$. Como la proyección da $(2; 1; 2)$, tenemos que la distancia es $||(1; 3; 1) - (2; 1; 2)||$. Esto da $\sqrt{6}$.

---

- Enunciado

Decidí cuál de los siguientes vectores es combinación lineal de $(1;2;3)$ y $(-1;-1,2)$.

*a)* $(-1;-2;-3)$
*b)* $(-2;-3;-5)$
*c)* $(-2;-4;6)$
*d)* $(2;5;4)$

Opción correcta: *a)*

Resolución
Para obtener la respuesta correcta escribimos la combinación lineal obteniendo: $-1(1;2;3)+0(-1;-1;2)=(-1;-2;-3)$.

---

- Enunciado

Considerá los subespacios $S=\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^{:}\ (x_1;x_2;x_3)=\lambda(1,2,-4)\}$ y $T=\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 : 2x_1-5x_2+3x_3=0\}$. Indicá cuál de los siguientes es $S\cap T$:

*a)* $S\cap T=\{(0;1;1),(0;0;1)\}$
*b)* $S\cap T=\{(1;0;0)\}$
*c)* $S\cap T=\{(0;0;1;0;0)\}$
*d)* $S\cap T=\{(0;0;0)\}$

Opción correcta: *d)*

Resolución
Reemplazando $\lambda$, $2\lambda$ y $-4\lambda$ en $2x_1-5x_2+3x_3=0$ tenemos que $-20\lambda=0$. Luego el único punto en común es $(0;0;0)$.

---

- Enunciado

La única opción que indica las coordenadas del foco de la parábola de ecuación $x^2-8x-3y+22=0$ es:

*a)* $\left(4,\frac{5}{4}\right)$
*b)* $(4,2)$
*c)* $\left(4,\frac{11}{4}\right)$
*d)* $\left(\frac{11}{4},4\right)$

Opción correcta: *c)*

Resolución
La ecuación de la parábola $x^2-8x-3y+22=0$ puede ser escrita, completando cuadrados, como $(x-4)^2=3(y-2)$. Como las coordenadas del vértice son $(4,2)$ y $2p=3$ entonces $\frac{p}{2}=\frac{3}{4}$. Luego, las coordenadas del foco son $\left(4,2+\frac{3}{4}\right)=\left(4,\frac{11}{4}\right)$.

---

- Enunciado

Elegí la única opción que indica el valor de $n$ para que la elipse de ecuación $\frac{(x-n)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$ tenga uno de sus focos en el punto $(-4,-3)$.

*a)* $n=-4$
*b)* $n=5$
*c)* $n=4$
*d)* $n=-3$

Opción correcta: *a)*

Resolución
Para encontrar el valor de $c$ se debe plantear que $25=9+c^2$ por lo que $c=4$. Como uno de los focos es $(-4,-3)$, y la coordenada $y$ del centro es 1, significa que el otro foco estará a la misma distancia de la recta $y=1$ que el foco $(-4,-3)$. Luego, si el otro foco es $(-4,5)$, el centro de la elipse será el punto medio entre ambos focos, es decir: $(-4,1)$. Entonces $n=-4$. Otra manera de pensarlo es que el foco $(-4,-3)$ está alineado con el centro de la elipse entonces no queda otra opción que sea $n=-4$.

---