



Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales) Práctica 5

Silvina Del Duca
Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino
Silvia Vietri

Práctica 5

TEOREMA DE TAYLOR

Aproximación: Polinomio de Taylor

Ejercicio 5.1. Obtener el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \ln(x+2)$ en un entorno de $x = 1$ de orden 3. Verificar que $f(1)$ es igual a $p(1)$, $f'(1)$ es igual a $p'(1)$, $f''(1)$ es igual a $p''(1)$ y $f'''(1)$ es igual a $p'''(1)$, ¿qué se puede decir al respecto?

Ejercicio 5.2. Calcular el polinomio de Taylor de las siguientes funciones del orden indicado centrado en x_0 .

- $f(x) = \ln(x)$ de orden 3 con $x_0 = 1$.
- $f(x) = \frac{3}{2-3x}$ de orden 3 con $x_0 = \frac{1}{3}$.
- $f(x) = \cos(x)$ de orden 10 con $x_0 = 0$.
- $f(x) = \sqrt{3-x}$ de orden 2 con $x_0 = 2$.
- $f(x) = x \ln(x+1)$ de orden 3 con $x_0 = 0$.

Ejercicio 5.3. Sea el polinomio de Taylor $P(x) = 5(x-3)^4 + 3(x-3) + 1$ asociado a la función $y = f(x)$ centrado en $x = 3$ de grado 6. Se pide:

- Calcular $f(3)$, $f'(3)$, $f'''(3)$ y $f^{iv}(3)$.
- Calcular la recta tangente a $f(x)$ en $x = 3$.
- Calcular el polinomio de Taylor de $g(x) = e^{f(x)}$ centrado en $x = 3$ de grado 2.

Ejercicio 5.4. Dada la función $f(x) = e^x$. Se pide:

- Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $x = 0$.
- Hallar el polinomio de Taylor de grado n .
- Con el polinomio hallado en el ítem a , calcular el valor aproximado del número e .

Ejercicio 5.5. Sabiendo que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivable de orden 8 en \mathbb{R} , y su polinomio de Taylor de tercer grado en $x = 4$ asociado a f es $P(x) = 3 - x^2 + \frac{1}{3}x^3$ y $g(x) = f(x^2)$.

- Determinar $g''(2)$.
- Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de $g(x)$ en $x = 2$.
- ¿Hasta el polinomio de qué grado podría calcular con la información dada?
- ¿Es posible calcular el polinomio de Taylor centrado en otro valor de x según la información dada?

Ejercicio 5.6. Si el polinomio de Taylor de f de orden 3 centrado en $x = 2$ es $P(x) = 5 + 4x - x^2$. Hallar el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $x = 2$ de $g(x) = \frac{1-f(x)}{[f(x)]^2}$.

Ejercicio 5.7. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x = 1$ de la función $g(x) = \ln(x^2)$. Con dicho polinomio calcular aproximadamente el valor de $\ln(1,21)$.

Ejercicio 5.8. Utilizar un polinomio de Taylor de grado 2 para calcular el valor aproximado de $\sqrt{37}$.

Ejercicio 5.9. Con el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $x = 0$ aproximar el valor de $\cos(0,2)$.

Ejercicio 5.10. Dada la función $f(x) = \ln(x - 1)$.

- Calcular $\ln(1,1)$ con un polinomio de grado 2.
- Con el polinomio hallado, ¿es posible aproximar $\ln(5)$? ¿Por qué?

Ejercicio 5.11. Hallar los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x = 0$ de la función $f(x) = a \sin(bx)$, sea $P(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$.

Respuestas de la Práctica 5

Ejercicio 5. 1. $P_3(x) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3$

Ejercicio 5. 2. a. $P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$
 b. $P_3(x) = 3 + 9(x-1/3) + 27(x-1/3)^2 + 81(x-1/3)^3$
 c. $P_{10}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}$
 d. $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2$
 e. $P_3(x) = x^2 - x^3/2$

Ejercicio 5. 3. a. $f(3) = 1$, $f'(3) = 3$
 b. $y = 3(x-3) + 1 = 3x - 8$
 c. $P_6(x) = e + 3e(x-3) + \frac{9}{2}e(x-3)^2$

Ejercicio 5. 4. a. $P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$
 b. $P_n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$
 c. $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} \approx 2,71805556$

Ejercicio 5. 5. a. $g''(2) = 112$
 b. $P_{g^2}(x) = 25/3 + 32(x-2) + 56(x-2)^2$
 c. Hasta el grado 4 (el mismo de f)
 d. También en $x = -2$ porque al elevar al cuadrado da 4

Ejercicio 5. 6. $P_2(x) = -\frac{8}{81} - \frac{7}{729}(x-2)^2$

Ejercicio 5. 7. $p(x) = 2(x-1) - (x-1)^2$
 $x = 1,1$ (por estar al cuadrado) $p(1,1) = 0,19$

Ejercicio 5. 8. $P_3(x) = 6 + \frac{1}{12}(x-36) - \frac{1}{1728}(x-36)^2$
 $\sqrt{37} \approx 6,0827$

Ejercicio 5. 9. $P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$
 $P_4(0,2) = 1 - \frac{1}{2}0,2^2 + \frac{1}{4!}0,2^4 \simeq 0,980066$

Ejercicio 5. 10. b) El polinomio hallado aproxima a la función en un entorno del valor $x = 2$. Se cometería mucho error, porque dicho valor está lejos de $x = 2$ y el valor de las derivadas de la función en $x = 2$ difieren mucho del valor de las derivadas en $x = 5$.

Ejercicio 5. 11. $(a = 1 \text{ y } b = 2)$ o $(a = -1 \text{ y } b = -2)$