- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Sean los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que el ángulo que forman dichos vectores es $\frac{\pi}{3}$; $||\vec{v}|| = 2$ y $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{v} - \vec{w}$. Entonces $||\vec{w}||$ es:
La respuesta es un número natural.

Respuesta: 4

Resolución
Como $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{v} - \vec{w}$ tenemos que $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$. Como el producto escalar es distributivo respecto de la diferencia tenemos $||\vec{v}||^2 - \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$; esto es $4 - 2 \cdot ||\vec{w}|| \cdot cos(\frac{\pi}{3}) = 0$. Despejando obtenemos el valor de $||\vec{w}||$.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Sea el plano $\Pi : 5x - y - z = 1$ y un punto $P = \left(\frac{1}{4}; -1; \frac{1}{2}\right)$. Si R es el punto simétrico de P respecto del plano Π, indicá la única opción que muestra la distancia de P a R.

A) $\frac{3}{108}$
B) $\frac{3}{\sqrt{27}}$
C) $\frac{3}{2\sqrt{27}}$
D) $-\frac{3}{27}$

Respuesta: C

Resolución
Como los puntos P y R son simétricos respecto del plano dado, entonces, los puntos se encuentran a igual distancia del mismo. Luego, la distancia entre los puntos resultará el doble de la distancia entre P y el plano Π. Recuperando el procedimiento estudiado para hallar la distancia de un punto a un plano, llegaremos a que la distancia entre P y Π es $\frac{3}{4\sqrt{27}}$. Finalmente, la distancia entre P y R es $\frac{3}{2\sqrt{27}}$.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

En el conjunto $S = \{(1; 5; 0; 4), (1; 2; 0; 3), (0; 3; 0; k)\}$ para el valor $k = 1$ la dimensión del subespacio S es:

Respuesta: 2

Resolución
Vemos que $\{(1; 5; 0; 4) = (1; 2; 0; 3) + (0; 3; 0; 1)\}$ por lo tanto la base tiene dos vectores y en ese caso la dimensión de S es 2.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

Sea la parábola de ecuación $y^2 - 8x - 2y = -9$. La ecuación de la directriz es:

A) $x = -1$
B) $x = 3$
C) $x = -3$
D) $x = 5$

Respuesta: $x = -1$

Resolución
Para hallar los diversos elementos de la parábola, debemos llevarla a su expresión canónica. Completando cuadrados, llegamos a la ecuación $(y - 1)^2 = 8(x - 1)$. Luego el vértice es el punto $(1; 1)$ y el valor de p es 4. Luego el valor de $\frac{p}{2}$ es 2. Luego la ecuación de la directriz es $x = 1 - 2$, es decir; $x = -1$.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -k \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

El valor de k que hace que el determinante de $A^2 - AB$ sea 3 es:

Respuesta: $k = \frac{1}{4}$

Resolución

Calcular el determinante de $A^2 - AB$ es lo mismo que calcular el determinante de $A(A-B)$. Por propiedades de los determinantes esto es lo mismo que calcular del producto del determinante de A y el determinante de $A-B$. El determinante de A es -6. El determinante de $A-B$ es $2k-1$. Luego $-6(2k-1) = 3$, decir, $k = \frac{1}{4}$.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz asociada es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensión de la imagen de T es:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Respuesta: D

Resolución

Teniendo en cuenta que $\det(T) \neq 0$ entonces la matriz es inversible, luego el sistema $A_T \cdot \vec{X} = \vec{0}$ tiene solución única $\vec{0}$ por lo tanto $\dim(Nu(T)) = 0$ y por el teorema de la dimensión tenemos que $\dim(Img(T)) = 3$.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

Hallá la forma binómica del número complejo w con parte imaginaria negativa y que cumple la siguiente ecuación:

$$w = \frac{2 + wi}{\overline{w}}$$

Respuesta: $-2i$.

Resolución

Podemos comenzar con reemplazar $w = a + bi$ en la ecuación dada para deducir la parte real e imaginaria de w:

$a + bi = \frac{2+(a+bi)i}{a-bi}$

$(a+bi)\cdot(a-bi) = 2 + ai - b$

$a^2 + b^2 = 2 - b + ai$

De esta última igualdad se puede leer, igualando partes reales e imaginarias de los complejos que se formaron de cada lado de la igualdad, que: $a^2 + b^2 = 2 - b; 0 = a$ por lo que nos queda que $a = 0$ y que $b^2 + b - 2 = 0$. En consecuencia, y usando además el dato de que b es negativo, nos queda: $a = 0$ y $b = -2$.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

Dados los polinomios $P(x) = (x^2-4)(x^2+7)$ y $Q(x) = (x^2-7)(x^2-4)$.
Elegí la única opción que resulta verdadera.

A) $Q(x) - P(x)$ tiene grado 4.

B) $P(x) + Q(x)$ tiene al menos una raíz compleja.

C) $Q(x) - P(x)$ no tiene raíces simples.

D) $P(x) + Q(x)$ tiene una raíz doble.

Respuesta: D

Resolución

Si se resuelve $(P+Q)(x) = 2x^2(x^2-4)$ y $(Q-P)(x) = -14(x^2-4)$ puede comprobarse que la única opción correcta es que el polinomio $(P+Q)(x)$ tiene una raíz doble $x = 0$.
