Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
Ejercicio resueltos de Números Reales y Funciones

Silvina Del Duca
Silvia Vietri

Índice general

Práctica 1

Ejercicios resueltos

1.1. Números reales

Ejemplo 1.1. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos los siguientes conjuntos y especificar, si existe, la menor de las cotas superiores y la mayor de las cotas inferiores.

a. A=$\left\{x\epsilon\mathbb{R}/\frac{x+1}{x-2}<-2\right\}$

b. B=$\left\{x\epsilon\mathbb{R}/\frac{6x^2}{2x-5}\geqslant 3x\right\}$

Solución:

a. En principio, debe ser $x-2\neq 0$, es decir, $x\neq 2$, pues el denominador no puede ser nulo.

- Si $x-2>0$, es decir, si $x>2$ (primera condición sobre x), podemos multiplicar a ambos lados de la desigualdad por este término, sin que la desigualdad se invierta, porque estamos multiplicando por un número positivo. Entonces,

$$\begin{aligned} x+1 &< -2(x-2) \\ x+1 &< -2x+4 \\ 3x &< 3 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

(segunda condición sobre x). La respuesta es la intersección de las dos condiciones anteriores ($x>2$ y $x<1$) y en este caso es el conjunto vacío.

- Si $x-2<0$, es decir, si $x<2$, podemos multiplicar a ambos lados de la desigualdad por este término, pero como estamos multiplicando por un número negativo, debemos invertir la desigualdad. Entonces,

$$\begin{aligned} x+1 &> -2(x-2) \\ x+1 &> -2x+4 \\ 3x &> 3 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

La respuesta es la intersección de las dos condiciones anteriores ($x < 2$ y $x > 1$) y en este caso es el intervalo $(1; 2)$.

- Finalmente, el conjunto A es la unión de las dos respuestas anteriores, es decir, A= $(1; 2)$.
- La mayor cota inferior (ínfimo) del conjunto A es 1 y la menor cota superior (supremo) es 2.

b. En principio, debe ser $2x - 5 \neq 0$, es decir, $x \neq \frac{5}{2}$. Como el denominador puede ser negativo o positivo, hay que resolver la desigualdad para los dos casos.

- Si $2x - 5 > 0$ ($x > \frac{5}{2}$), multiplicamos por este término positivo a ambos lados de la desigualdad. Entonces,

$$\begin{aligned} 6x^2 &\geq 3x(2x-5) \\ 6x^2 &\geq 6x^2 - 15x \\ 15x &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

La respuesta es la intersección de las dos condiciones anteriores ($x > \frac{5}{2}$ y $x \geq 0$), que es el intervalo$\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

- Si $2x - 5 < 0$ ($x < \frac{5}{2}$), se debe invertir la desigualdad porque multiplicamos por un término negativo. Entonces,

$$\begin{aligned} 6x^2 &\leq 3x(2x-5) \\ 6x^2 &\leq 6x^2 - 15x \\ 15x &\leq 0 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

La respuesta es la intersección de las dos condiciones anteriores ($x < \frac{5}{2}$ y $x \leq 0$), que es el intervalo$(-\infty; 0]$.

- Finalmente, el conjunto B es la unión de las dos respuestas anteriores, $B = (-\infty; 0] \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$y en este caso no existe ni el supremo ni el ínfimo del conjunto .

1.2. Funciones

Ejemplo 1.2. Dada la siguiente función, hallar su Dominio y representarla gráficamente. Analizar también la monotonía e indicar las raíces.

$$f(x) = 2\ln(x^2 - 3x + 2)$$

Solución:

Para hallar el Dominio de la función, como se trata de una función logarítmica, pedimos que x verifique $x^2 - 3x + 2 > 0$, es decir, necesitamos hallar el conjunto de positividad de la cuadrática $x^2 - 3x + 2$. Si buscamos las raíces de dicha cuadrática, vemos que las mismas son $x = 1$ y $x = 2$.

Por lo tanto, la cuadrática se puede escribir como $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ y es positiva en $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Entonces el $Dom(f) = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

La función tiene asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = 2$.

El gráfico es

../../../../UBAXXI\protect \unhbox \voidb@x \protect \penalty

A partir del gráfico se ve que la función decrece en el intervalo $(-\infty; 1)$ y crece en $(2; +\infty)$, por lo tanto no es monótona.

Para hallar las raíces igualamos la función a cero: $2\ln(x^2 - 3x + 2) = 0$.

Si dividimos por 2 y usamos la definición de logaritmo natural, nos queda:

$$e^0 = 1 = x^2 - 3x + 2$$

Por lo tanto las raíces de $f(x)$ son los x tales que $x^2 - 3x + 1 = 0$, es decir, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ejemplo 1.3. Hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$-2\cos(4x + \pi) = \sqrt{2} \qquad \text{con } x \epsilon [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Solución:

En primer lugar, dividimos por -2 y nos queda $\cos(4x + \pi) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Si llamamos $\alpha = 4x + \pi$, buscamos los valores de α tal que $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Entonces $\alpha = (\pi - \frac{\pi}{4}) + 2k\pi$ y $\alpha = (\pi + \frac{\pi}{4}) + 2k\pi$, con $k \epsilon \mathbb{Z}$. Si reemplazamos α , nos queda $4x + \pi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ y $4x + \pi = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$. Despejando x, queda $x = (\frac{3}{4}\pi + 2k\pi - \pi)/4$ y $x = (\frac{5}{4}\pi + 2k\pi - \pi)/4$, es decir, hay dos familias de soluciones en $\mathbb{R}$, que son $x_1 = -\frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}k\pi$ y $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}k\pi$, con $k \epsilon \mathbb{Z}$.

Como lo que pide el ejercicio es hallar las soluciones en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, debemos darle valores a $k \epsilon \mathbb{Z}$, para hallar los x que pertenecen a dicho intervalo.

- Con $k = 0$ se obtiene $x_1 = -\frac{\pi}{16}$ y $x_2 = \frac{\pi}{16}$, ambos pertenecen a dicho intervalo;
- Con $k = 1$ se obtiene $x_1 = \frac{7}{16}\pi$ y $x_2 = \frac{9}{16}\pi$, pero este último no pertenece a dicho intervalo;
- Con $k = -1$ se obtiene $x_1 = -\frac{9}{16}\pi$ y $x_2 = -\frac{7}{16}\pi$, pero el primero no pertenece a dicho intervalo.
- Para otros valores de k, ninguna solución pertenece al intervalo dado.

Por lo tanto ,el conjunto solución de la ecuación planteada es $\left\{-\frac{7}{16}\pi,\ -\frac{\pi}{16},\ \frac{\pi}{16},\ \frac{7}{16}\pi\right\}$.