Cónicas

Unidad 4

Respuestas

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Nota. *Si no entendés alguna respuesta o alguna de las tuyas no coincide con las aquí presentadas, no dudes en consultarlo en el foro.*

Circunferencia

Ejercicio 1.

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 4$

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = 10$

Ejercicio 2.
El punto no se encuentra en la circunferencia.

Ejercicio 3.

a) $x_1 = 2 + \frac{\sqrt{15}}{2}$ $x_2 = 2 - \frac{\sqrt{15}}{2}$

b) $y_1 = 4 + \sqrt{3}$, $y_2 = 4 - \sqrt{3}$

Ejercicio 4.

a) Centro $= \{(2; -4,5)\}$, $r = \frac{\sqrt{109}}{2}$

b) Centro $= \{(-5; 1)\}$, $r = \sqrt{48}$

c) Centro $= \{(0; 7)\}$, $r = 5$

Ejercicio 5.

- Centro $= \{(5; 4)\}$, $r = \sqrt{10}$
- Centro $= \{(2; \frac{5}{2})\}$, $r = \frac{5}{2}$
- Intersecciones: $(4; 1)$ y $(2; 5)$

Ejercicio 6.

a) Se tocan en el punto (1;1).

b) Los posibles centros son $(1 - \sqrt{3}; 1)$ y $(1 + \sqrt{3}; 1)$.

Elipse

Ejercicio 7.
$a = 10$, $b = 6$

Ejercicio 8.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $F_1 = (\sqrt{7}, 0)$ y $F_2 = (-\sqrt{7}, 0)$

b) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$, $F_1 = (1, -1)$ y $F_2 = (1, 7)$

Ejercicio 9.

a) (i) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{49} = 1$
(ii) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
(iii) $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

b) (i) $F_1 = (3; -3 + 2\sqrt{6})$; $F_2 = (3; -3 - 2\sqrt{6})$
(ii) $F_1 = (-2 + \sqrt{5}; -1)$; $F_2 = (-2 - \sqrt{5}; -1)$
(iii) $F_1 = (4; 3 + 4\sqrt{2})$; $F_2 = (4; 3 - 4\sqrt{2})$

c) (i) $e = \frac{2\sqrt{6}}{7}$
(ii) $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$
(iii) $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Ejercicio 10.

a) $\frac{(x+1)^2}{225} + \frac{(y-3)^2}{289} = 1$

b) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$

Ejercicio 11.

a) $\frac{(x-1)^2}{84} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$
Y en su ecuación general: $25x^2 + 21y^2 - 50x - 84y - 1991 = 0$

b) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
Y en su ecuación general: $25x^2 - 50x + 9y^2 - 36y = 164$

Ejercicio 12.
Datos: si centramos la elipse en (0,0) su curva es: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
Si hallamos la intersección de la curva con $y = 2$ se obtiene: $x = \frac{5}{3}\sqrt{5}$
Entonces: $r = 5 - \frac{5}{3}\sqrt{5}$

Ejercicio 13.
Los datos del problema son la excentricidad $e = 0,017$ y el semieje mayor $a = \frac{3}{2}10^8$. Con estos datos es posible obtener la semidistancia focal c. La distancia mínima se halla como: $a - c = 147450000$ y la distancia máxima se halla como: $a + c = 152550000$

Hipérbola

Ejercicio 14.
Datos: los focos son los puntos A y B, lo que nos permite conocer que $c = 50$. El valor constante $4 = 2a$. Con estos datos es posible hallar b. La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2496} = 1$

Ejercicio 15.

a) Focos: $F_1 = (-\sqrt{13}; 0)$ y $F_2 = (\sqrt{13}; 0)$. Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

b) Focos: $F_1 = (-4; 2 - \sqrt{13})$ y $F_2 = (-4; 2 + \sqrt{13})$. Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Ejercicio 16.

a) Los focos están sobre el eje x. Luego $c = 13$. Por lo que $169 = a^2 + b^2$ y $169 - a^2 = b^2$
La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{(169-b^2)} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Si reemplazamos por las coordenadas del punto M en la ecuación planteada, podemos hallar el valor de b. Se obtiene $b^2 = 48$ y $a^2 = 121$. Por lo que la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{48} = 1$.

b) $2c = 26$ por lo que $c = 13$. Como el eje que contiene a los focos es paralelo al eje y la ecuación de la hipérbola será: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Dado que la excentricidad es $e = 2,6 = \frac{c}{b} = \frac{13}{b}$. Es posible despejar $b = 5$ y con la relación pitagórica entre a, c, b encontrar que $a = 12$. Luego la ecuación de la hipérbola es: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$.

c) La asíntota plantea que la relación $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Es posible expresar $b = \frac{3a}{4}$. Reemplazando esta expresión en la ecuación de la hipérbola y, al mismo tiempo, por las coordenadas de $M = (2,1)$ se obtiene la ecuación: $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{\frac{9a^2}{16}} = 1$. Resolviendo esta ecuación se obtiene: $a^2 = \frac{20}{9}$, $b^2 = \frac{5}{4}$ y la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{\frac{20}{9}} - \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$.

Ejercicio 17.

a) El centro es $(1,1)$; $b = 2$ y $c = \sqrt{13}$. Puede hallarse a a través de la igualdad: $c^2 = a^2 + b^2$. Se obtiene $a^2 = 9$. Luego la ecuación de la hipérbola es:
Escrita en forma canónica: $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$
Ecuación general: $9y^2 - 4x^2 - 18y + 8x = 31$

b) Por el gráfico es posible saber el centro de la hipérbola $(2, -3)$ y que $a = 2$. Como la pendiente es $\frac{b}{a} = 1,5$ se despeja $b = 3$. Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$
Su ecuación general es: $9x^2 - 36x - 4y^2 - 24y = 36$

Ejercicio 18.

Datos: $F_1 = (-80; 0)$, $F_2 = (80; 0)$. Si $P = (x; y)$ es un punto de la hipérbola debe verificarse que $dist(F_1, P) - dist(F_2, P) = 100$. La ecuación que se obtiene es: $\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{3900} = 1$.
La distancia pedida es $c - a = 80 - 50 = 30 millas$

Parábola

Ejercicio 19.

a) El vértice es el punto medio entre el foco y la directriz: $V = (0; 0)$. La distancia entre el vértice y el foco es $\frac{p}{2} = 4$.
Luego la ecuación de la parábola es $16(x - 0) = (y - 0)^2$, o lo que es lo mismo, $16x = y^2$

b) El vértice es el punto $V = (0; 6)$ y $\frac{p}{2} = 2$
Luego la ecuación de la parábola es: $8(y - 6) = (x - 0)^2$.

Ejercicio 20.

a) $F = (0; 1,5)$. Directriz $y = -1,5$. Vértice $V = (0; 0)$

b) $F = (2,25; 0)$. Directriz $x = -2,25$. Vértice $V = (0; 0)$

c) $F = (-5; 1,5)$. Directriz $y = 0,5$. Vértice $V = (-5; 1)$

d) $F = (-7; 3)$. Directriz $x = -5$. Vértice $V = (-6; 3)$

Ejercicio 21.

a) $-20(x - 0) = (y - 0)^2$

b) $4(y + 3) = (x + 1)^2$

c) $-10(y - 9,5) = (x - 8)^2$

d) $5,5(x + 0,125) = (y + 1)^2$

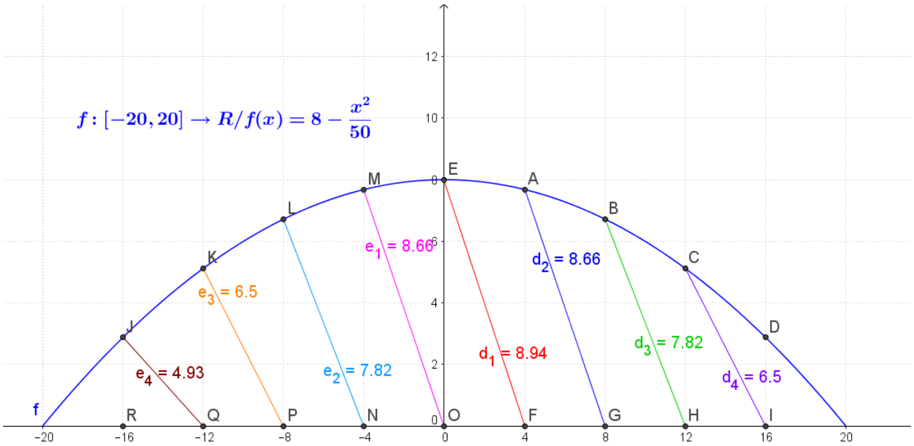
Ejercicio 22.

A través del procedimiento de completar cuadrados es posible escribir la igualdad $y^2 + 2x + \alpha y + \beta = 0$ como:
$[y - (-\frac{\alpha}{2})]^2 = -2[x - (\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\beta}{2})]$. Resta comparar esta expresión con la forma canónica de la parábola.
Si $y_v = -\frac{3}{2}$ entonces $-\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{2}$. De esta igualdad se obtiene $\alpha = 3$
Si $x_v = \frac{1}{2}$ entonces $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$. De esta igualdad se obtiene $\beta = \frac{5}{4}$

Ejercicio 23.
Si consideramos una parábola con vértice en (0;0), y que pasa por los puntos (-7,5;8) y (7,5;8) podemos escribir la ecuación:
$(x-0)^2 = 2p(y-0)$. Si reemplazamos por el punto (7,5,8) obtenemos que $2p = \frac{225}{32}$
Con lo cual: $\frac{p}{2} = \frac{225}{128}$. La lamparita hay que colocarla en el foco de coordenadas: $\left(0, \frac{225}{128}\right)$

Ejercicio 24.
La altura máxima permitida es 4,5 mts.

Ejercicio 25.



Ejercicio 26.
$p = \frac{9}{2}$, $q = \frac{33}{4}$.