



Álgebra

Práctica 0

Los distintos objetos y fenómenos que observamos en la naturaleza suelen estar relacionados entre sí. Cuando ello sucede, decimos que son interdependientes. Lo mismo ocurre con las magnitudes que el hombre necesita definir y utilizar en sus distintas actividades. En nuestro caso, **la administración y la economía**, existe interdependencia, por ejemplo, entre cantidad de mercadería y costos, entre capital e interés, entre tiempo y salarios, etc. Es frecuente que los acontecimientos del mundo exterior estén regidos por leyes que tienen un carácter cuantitativo que permiten que se puedan describir por medio de fórmulas, ecuaciones o inecuaciones. Cuando ello es así se pueden investigar esos acontecimientos numéricamente, y entonces hacer los cálculos y predicciones que sean necesarios.

De lo expuesto, surge la importancia de la Matemática como ciencia auxiliar indispensable en casi todas las ramas del quehacer científico, y muy especialmente en las Ciencias Económicas.

Se simboliza con:

\mathbb{N}_0 al conjunto formado por los números naturales y el cero,

\mathbb{Z} al conjunto formado por los números enteros,

\mathbb{Q} al conjunto formado por los números racionales,

\mathbb{R} al conjunto formado por los números reales y

\mathbb{C} al conjunto de los números complejos.



ACTIVIDAD N° 1

Codificar:

Si x es un número entero cualquiera desconocido ($x \in \mathbb{Z}$)

a) su siguiente o sucesor es: $x + 1$

c) un número par desconocido es: $2x$

e) su opuesto es: $-x$

Continúe solo:

g) el opuesto de su siguiente es:

i) el precedente de su opuesto es:

k) el opuesto del precedente de un número impar desconocido es:

m) la tercera parte de x es:

b) su precedente o antecesor es: $x - 1$

d) un número impar desconocido es: $2x + 1$ ó $2x - 1$

f) el opuesto de su precedente es: $-(x - 1)$

h) el siguiente de su opuesto es:

j) el opuesto del precedente de un número par desconocido es:

l) la mitad de x es:

n) el opuesto del sucesor del triple de x es:

ACTIVIDAD N° 2

Decodificar:

a) $-x - 1$ es el precedente del opuesto de x

b) $x / 3$ es la tercera parte de x

Continúe solo:

c) $3x - 1$ es:

d) $3(x - 1)$ es:

e) $(2x + 1)^2$ es:

f) $(3x - 1) : 2$ es:

g) $1/2(x - 1)^2$ es:

h) $1/4(x + 1) - 1$ es:

i) $x^2 + 1$ es:

j) $(x + 1)^2$ es:



ACTIVIDAD N° 3

Resolver las siguientes ecuaciones en \mathbb{N}_0 .

- a) La tercera parte del sucesor del doble de x es **11** ¿Cuánto vale x ?
- b) Si al triple del antecesor de x le sumamos **12** nos da **39** ¿Cuánto vale x ?
- c) Si al triple de un número le sumamos el doble de su antecesor nos da **48** ¿Cuánto vale ese número?
- d) Si se resta **27** del cubo del siguiente de x , da **0** ¿Cuánto vale x ?
- e) La suma de **3** números pares consecutivos es **66** ¿Cuánto valen dichos números?
- f) La suma de dos números impares consecutivos es **19** ¿Cuánto valen dichos números?
- g) El triple del sucesor de un número es **27** ¿Cuánto vale ese número?
- h) El cuádruplo del precedente del triple de un número, menos el duplo de dicho número es igual a **56** ¿Cuánto vale ese número?

ACTIVIDAD N° 4

i) Indique cuáles de las siguientes ecuaciones no tienen solución en \mathbb{N}_0 :

a) $x + 8 = 12$

b) $x + 5 = 2$

c) $x + 1 = 1$

d) $x + 10 = 5$

Si ha respondido b) y d), tiene razón.

En efecto, si $a \in \mathbb{N}_0$ y $b \in \mathbb{N}_0$ la ecuación $a + x = b$ sólo tiene solución en ese conjunto cuando $b \geq a$.

En el caso que $b < a$ ¿a qué conjunto pertenece la solución?



ii) Indique cuáles de las siguientes ecuaciones no tienen solución en \mathbb{Z} :

a) $2x + 1 = 7$

b) $3x - 5 = 10$

c) $-7x - 3 = 4$

d) $5 - 11x = 3$

Si ha respondido **d)** tiene razón, ya que si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, las ecuaciones de la forma $a \cdot x = b$ sólo tienen solución en \mathbb{Z} cuando b es múltiplo de a .

En el caso que b no sea múltiplo de a ¿a qué conjunto pertenece la solución?

iii) Resolver las siguientes ecuaciones en \mathbb{Q} :

a) $3(x-1)+1=\frac{1}{2}$

b) El recíproco del siguiente del doble de x es **4** ¿Cuánto vale x ?

c) Encontrar el número que esté en el medio de $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$

El conjunto \mathbb{Q} tiene una importante propiedad: **entre 2 números racionales siempre existe otro racional**.

En general si $a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a < b$ entonces $\exists c \in \mathbb{Q} / a < c < b$, siendo $c = \frac{a+b}{2}$

Esta propiedad, en realidad, va mucho más allá de lo que enuncia. Por aplicación reiterada de la misma surge que entre dos números racionales cualesquiera, existen infinitos racionales más. Cuando los elementos de un conjunto cumplen con esta propiedad, decimos que el conjunto es **denso**.

Luego, **el conjunto \mathbb{Q} es denso**.

La densidad del conjunto \mathbb{Q} hace que sus elementos sean ampliamente suficientes para cualquier propósito práctico de medida.

Parece entonces que sería suficiente, para cualquier aplicación, manejarse con elementos de este conjunto. Pero.....



ACTIVIDAD N° 5

Codificar:

a) el recíproco de x es $1/x$ ó x^{-1}

b) el recíproco del siguiente de x es: $1/(x + 1)$ ó $(x + 1)^{-1}$

Continúe solo:

c) el siguiente del recíproco de x es:

d) el precedente del recíproco de un número par desconocido es:

e) el doble del recíproco de x es:

f) el triple del recíproco de un número impar desconocido es:

ACTIVIDAD N° 6

Decodificar:

a) $\frac{1}{-(x+1)}$

b) $-(x-1)^{-1}$

c) $\frac{\frac{1}{2}x}{2}$

d) $(x^{-1}+1)^2$

ACTIVIDAD N° 7

Hallar el error en el siguiente razonamiento:

$$4 + \frac{18}{3} = \frac{12}{3} + 6$$

$$4 - \frac{12}{3} = 6 - \frac{18}{3}$$

$$2 \cdot \left(2 - \frac{6}{3}\right) = 3 \cdot \left(2 - \frac{6}{3}\right)$$

$$2 = 3$$



ACTIVIDAD N° 8

Decir si el siguiente problema tiene solución en \mathbb{Q} :

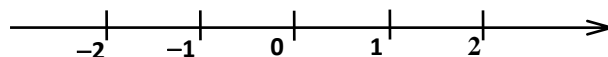
Se desea cercar el lado indicado con x del siguiente terreno:
¿Qué cantidad lineal de cerco se necesita comprar?

Si el resultado no pertenece a \mathbb{Q} , ¿a qué conjunto pertenece?

Entonces la objeción que se había planteado al estudiar los números racionales, tenía sentido, no todas las cantidades pueden ser expresadas con ellos.

El conjunto \mathbb{Q} , a pesar de ser denso, deja "huecos". Esos huecos son cubiertos por los **números irracionales**.

Tomaremos la convención, para la representación de los números reales, de ubicarlos ordenadamente sobre una recta como la que se muestra a continuación:



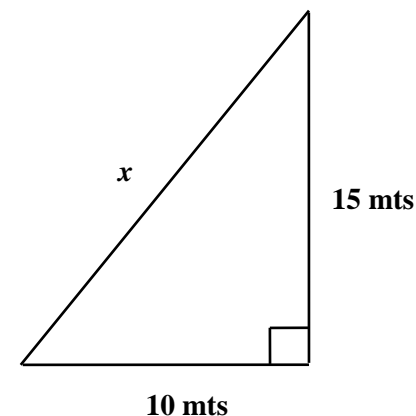
El conjunto \mathbb{R} también es denso. Pero posee una propiedad que lo distingue del conjunto \mathbb{Q} : esa propiedad es la **continuidad**.

En la representación gráfica del conjunto \mathbb{R} hay una **correspondencia biunívoca** entre puntos y números reales: a cada punto de la recta le corresponde un único número real, y recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto de la recta.

La recta recibe el nombre de **recta real** o **espacio de una dimensión**, y los términos punto o número real se usan indistintamente.

Para terminar con el tema, insistimos con un concepto ya expuesto: para cualquier aplicación práctica que se desee efectuar, los números racionales son autosuficientes.

En otras palabras, cuando por medios mecánicos realizamos la medición de cualquier tipo de magnitud, por precisos que sean esos medios, la medida de esa magnitud estará expresada en números racionales. Los números irracionales solo aparecerán en los desarrollos teóricos. Sin embargo es muy importante conocerlos y saber operar con ellos, pero recordando que en última instancia deberán ser reemplazados por una aproximación decimal, tanto más precisa cuanto mayor sea la precisión que requieran nuestros cálculos (tolerancia).





ACTIVIDAD N° 9

Las letras a y b representan números reales cualesquiera.

Completar con $=$ ó \neq , según sea el caso:

a) $(a \cdot b)^2$ $a^2 \cdot b^2$

b) $(a - b)^2$ $a^2 - b^2$

c) $(a / b)^2$ a^2 / b^2 ; $b \neq 0$

d) $a^3 \cdot a^2$ a^5

e) $(a + b)^2 + (a - b)^2$ $2(a^2 + b^2)$

Si a y b son tales que las raíces están definidas:

f) $\sqrt{a + b}$ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

g) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $b \neq 0$

h) $\sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Enunciar en cada ítem la propiedad que corresponda.

ACTIVIDAD N° 10

Dados los siguientes polinomios:

$$p(x) = 2x + x^3 - 1 - 4x^2$$

$$q(x) = 100 - x^4 + 3x^3$$

$$r(x) = 0,5x^2 - 3x + x^5 - 0,75 + 0,3x^4$$

a) Ordenarlos según las potencias decrecientes de su **variable**,

b) Clasificarlos por su grado y su número de términos,

c) Hallar sus **valores numéricos** para los siguientes valores de su variable: $x = 3$, $x = -1/2$ y $x = a$



ACTIVIDAD N° 11

Dados los polinomios:

$$p(x) = x^2 - x + 6$$

$$q(x) = x^3 - 5x^2 + 1$$

$$r(x) = 1/2x^4 - x^3 + 5x - 3$$

Efectuar:

$$a) p(x) + q(x) + r(x) =$$

$$b) p(x) - q(x) - r(x) =$$

$$c) -p(x) + q(x) - r(x) =$$

$$d) 3p(x) - 2q(x) + r(x) =$$

$$e) 2[p(x) - q(x)] - 4r(x) =$$

$$f) p(x) - [q(x) - r(x)] =$$

ACTIVIDAD N° 12

Realizar las siguientes multiplicaciones:

$$a) (x^2 - 3x + 1) \cdot (x - 2) =$$

$$b) (x^3 - 3x^2 + 6x - 8) \cdot (x^2 - x + 2) =$$

$$c) (a^3 - 5a^2 + 1) \cdot (3a^4 + a^3 - 6a + 2) =$$

ACTIVIDAD N° 13

Desarrollar las siguientes potencias de binomios:

$$a) (x - 6)^2 =$$

$$b) (3x + 1)^2 =$$

$$c) (x + 2)^3 =$$

$$d) (0,5x - 2)^3 =$$



ACTIVIDAD N° 14

Dados los polinomios:

$$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$r(x) = -3x^3 + x$$

$$q(x) = -5x^4 + 2x^2 - 2$$

Efectuar:

$$a) p(x) \cdot r(x) =$$

$$b) p(x) \cdot q(x) =$$

$$c) 3r(x) \cdot q(x) =$$

$$d) (x-1) \cdot p(x) + (x-1) \cdot r(x) =$$

$$e) 3p(x) - (x+1) \cdot r(x) =$$

$$f) p(x) + [r(x)]^2 =$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS (I)

Efectuamos la siguiente división: $(x^3 - 4x^2 + 3x - 3) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 + 3x - 3 \quad | \quad x - 2 \text{ (divisor)} \\
 + \quad \quad \quad x^2 - 2x - 1 \text{ (cociente)} \\
 \hline
 -x^3 + 2x^2 \\
 -2x^2 + 3x \\
 + \\
 2x^2 - 4x \\
 \hline
 -x - 3 \\
 + \\
 x - 2 \\
 \hline
 -5 \text{ (Resto)}
 \end{array}$$

El resultado de la división lo podemos escribir así:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 3}{x - 2} = x^2 - 2x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$$



En general: $D \overline{) d}$
 R / c

Siendo : *Des el dividendo*

d es el divisor

c es el cociente

Res el resto (cuando $R = 0$ el cociente es exacto)

Por definición de división resulta $c \cdot d + R = D$

ACTIVIDAD N° 15

Aplicando la última fórmula, verificar la división realizada.

ACTIVIDAD N° 16

Determinar el cociente $c(x)$ y el **resto** de las siguientes divisiones:

a) $(x^2 - 3x + 2) : (x + 1) =$

b) $(x^3 - 4x - x^2) : (2x - 1) =$

c) $(x^3 - 3x + 1) : (3x^2 + 2) =$

d) $(x^3 - 1) : (x - 1) =$

e) $(x^3 - 1) : (x + 1) =$



REGLA DE RUFFINI (II)

Recordemos que es una regla práctica para resolver aquellas divisiones de polinomios que cumplen con las dos condiciones siguientes:

- i) su dividendo es un polinomio **en x** ($D(x)$ o cualquier otra variable)
- ii) su divisor es un binomio de la forma $x - a$ ($a \in \mathbb{R}$).

Como la división efectuada en (I) cumple con estas condiciones, puede ser resuelta por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 3 & -3 \\ 2 & \downarrow & 2 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & -5 \end{array}$$

$c(x) = x^2 - 2x - 1$ es el cociente, y $R = -5$ es el resto.

También, entre otros, el ejercicio *e*) de la **ACTIVIDAD N° 16** de esta misma unidad es una división realizable por **Ruffini**. Veamos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \downarrow & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}$$

Luego, el cociente es $c(x) = x^2 - x + 1$ y el resto $R = -2 \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x + 1} = x^2 - x + 1 + \frac{-2}{x + 1}$

¿Coinciden las respuestas?



ACTIVIDAD N° 17

En la **ACTIVIDAD N° 16** hay otras divisiones propuestas que admiten ser resueltas por Ruffini:

- i) ¿Cuáles son?
- ii) Vuelva a efectuarlas aplicando, ahora, esta regla.

TEOREMA DEL RESTO

Sea una división cualquiera de polinomios de aquellas que puedan ser efectuadas por la **regla de Ruffini**:

$$\begin{array}{r} D(x) \quad | \quad x - a \\ R/ \quad c(x) \end{array}$$

Por definición de división es $D(x) = c(x) \cdot (x - a) + R$

Demos a la variable x el valor numérico a .

Resulta que: $D(a) = c(a) \cdot (a - a) + R \Rightarrow D(a) = R$

Hemos demostrado el teorema del resto.

ACTIVIDAD N° 18

Enuncie el teorema del resto.

Volvamos una vez más a la división efectuada como ejemplo por el método clásico (I) y por Ruffini (II). Apliquemos en ella el teorema del resto:

$$R = D(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 3 = 8 - 16 + 6 - 3 = -5$$

$$R = -5 \quad (\text{como era de esperar}).$$



ACTIVIDAD N° 19

En todas aquellas divisiones de la **ACTIVIDAD N° 16** que lo permitan, aplicar el teorema del resto.

IMPORTANCIA DEL TEOREMA DEL RESTO

Dado un polinomio $p(x)$, decimos que el número real a es raíz del mismo $\Leftrightarrow p(a) = 0$

Por ejemplo, **3** es raíz de $p(x) = x^2 - 5x + 6$, pues $p(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

Cuando dado un polinomio $p(x)$, por cualquier circunstancia sabemos que el número a es raíz del mismo, entonces, en virtud del teorema del resto sabemos que el cociente de la división $\frac{p(x)}{x-a}$, será exacto.

ACTIVIDAD N° 20

Justificar el razonamiento anterior.

Retornando al último ejemplo $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$ (*cociente exacto*) (*)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 6 & \\ 3 & \downarrow & 3 & -6 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Con lo cual de (*) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

En síntesis, **conocida una raíz real de un polinomio siempre es posible factorizarlo.**



ACTIVIDAD N° 21

- a) Verificar que -2 es raíz de $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$.
- b) ¿Qué significa factorizar un polinomio? Factorizar $p(x)$.
- c) Verificar que -1 y 3 son raíces de $r(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.
- d) Factorizar $r(x)$

Nota: La propiedad anterior es muy interesante, pero no siempre es fácil encontrar las raíces reales de un polinomio (si es que las tiene). Hay una propiedad (llamada **teorema de Gauss**) que en ocasiones puede ayudarnos a salir del paso. Dice así: “Dado un polinomio **normalizado** (**) $x^n + \dots + a_1 x + a_0$, tal que todos sus coeficientes son números enteros, si $p \in \mathbb{Z}$ es raíz del mismo, entonces p debe ser divisor de a_0 ”.

(**) Un polinomio está normalizado cuando el coeficiente de su término de mayor grado (coeficiente dominante) es 1.

Ejemplo. Sea el polinomio normalizado $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Los divisores de su término independiente son: $2, -2, 1$ y -1 . Probemos:

$$p(2) = 8 + 8 + 2 + 2 = 20 \neq 0$$

$$p(-2) = -8 + 8 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow p(x) \text{ es divisible por } x + 2$$

$$\text{En efecto } \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x + 2} = x^2 + 1 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + 1)(x + 2)$$



RESPUESTAS

PRÁCTICA O

ACTIVIDAD N° 1 ($x \in \mathbb{Z}$)

$g) - (x + 1)$

$h) -x + 1$

$i) -x - 1$

$j) - (2x - 1)$

$k) - 2x$

$l) x/2$

$m) x/3$

$n) - (3x + 1)$

ACTIVIDAD N° 2 ($x \in \mathbb{Z}$)

$c)$ El precedente del triple de un número entero.

$d)$ El triple del anterior de un número.

$e)$ El cuadrado del sucesor de un número par.

$f)$ La mitad del precedente del triple de un número.

$g)$ La mitad del cuadrado del anterior de un número.

$h)$ El anterior de la cuarta parte del siguiente de un número.

$i)$ El siguiente del cuadrado de un número.

$j)$ El cuadrado del siguiente de un número.



ACTIVIDAD N° 3

a) $x = 16$

b) $x = 10$

c) $x = 10$

d) $x = 2$

e) $x_1 = 20, x_2 = 22, x_3 = 24$

f) No existe

g) $x = 8$

h) $x = 6$

ACTIVIDAD N° 4

i) b) y d)

ii) d)

iii) a) $x = 5/6$

b) $x = -3/8$

c) $x = 5/8$

ACTIVIDAD N° 5

c) $\frac{1}{x} + 1$

d) $\frac{1}{2x} - 1$

e) $\frac{2}{x}$

f) $\frac{3}{2x+1}$

ACTIVIDAD N° 6

a) El recíproco del opuesto del siguiente de un número entero.

b) El recíproco del opuesto del precedente de un número entero.

c) La mitad de la mitad de un número entero.

d) El cuadrado del siguiente del recíproco de un número entero.



ACTIVIDAD N° 7

No se puede dividir por 0.

ACTIVIDAD N° 8

...

ACTIVIDAD N° 9

a) = b) \neq c) = d) = e) = f) \neq g) = h) =

ACTIVIDAD N° 10

a) y b)

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ cuatrinomio de tercer grado

$q(x) = -x^4 + 3x^3 + 100$ trinomio de cuarto grado

$r(x) = x^5 + 0,3x^4 + 0,5x^2 - 3x - 0,75$ polinomio de quinto grado

$$c) \quad p(3) = -4 \qquad p(-1/2) = -25/8 \qquad p(a) = a^3 - 4a^2 + 2a - 1$$

$$q(3) = 100 \qquad q(-1/2) = 1593/16 \qquad q(a) = -a^4 + 3a^3 + 100$$

$$r(3) = 262,05 \qquad r(-1/2) = 0,8625 \qquad r(a) = a^5 + 0,3a^4 + 0,5a^2 - 3a - 0,75$$



ACTIVIDAD N° 11

$$a) = 0,5x^4 - 4x^2 + 4x + 4$$

$$d) = 0,5x^4 - 3x^3 + 13x^2 + 2x + 13$$

$$b) = -0,5x^4 + 6x^2 - 6x + 8$$

$$e) = -2x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 22x + 22$$

$$c) = -0,5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 4x - 2$$

$$f) = 0,5x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 4x + 2$$

ACTIVIDAD N° 12

$$a) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$$

$$b) = x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 20x - 16$$

$$c) = 3a^7 - 14a^6 - 5a^5 - 3a^4 + 33a^3 - 10a^2 - 6a + 2$$

ACTIVIDAD N° 13

$$a) = x^2 - 12x + 36$$

$$b) = 9x^2 + 6x + 1$$

$$c) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$d) = 0,125x^3 - 1,5x^2 + 6x - 8$$

ACTIVIDAD N° 14

$$a) = -9x^5 + 6x^4 - 2x^2 + x$$

$$b) = -15x^6 + 10x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x - 2$$

$$c) = 45x^7 - 33x^5 + 24x^3 - 6x$$

$$d) = -3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 1$$

$$e) = 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 7x + 3$$

$$f) = 9x^6 - 6x^4 + 4x^2 - 2x + 1$$

ACTIVIDAD N° 15

$$(x^2 - 2x - 1)(x - 2) + (-5) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$$



ACTIVIDAD N° 16

a) $c(x) = x - 4$, $R(x) = 6$

b) $c(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{17}{8}$, $R(x) = -\frac{17}{8}$

c) $c(x) = \frac{x}{3}$, $R(x) = -\frac{11}{3}x + 1$

d) $c(x) = x^2 + x + 1$, $R(x) = 0$

e) $c(x) = x^2 - x + 1$, $R(x) = -2$

ACTIVIDAD N° 17

i) a, d, e

ACTIVIDAD N° 18

Consultar bibliografía

ACTIVIDAD N° 19

a) $R = p(-1) = 6$

d) $R = p(1) = 0$

e) $R = p(-1) = -2$

ACTIVIDAD N° 20

Es una aplicación directa del teorema del resto; si $R = 0$ el cociente es exacto.

ACTIVIDAD N° 21

a) V

b) Consultar bibliografía: $p(x) = (x + 2).(3x - 1)$

c) V

d) $r(x) = (x + 1).(x - 3).(2x - 1)$