Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales) Práctica 7

Silvina Del Duca
Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino
Silvia Vietri

Índice general

Práctica 7

SUCESIONES Y SERIES

7.1. Sucesiones

Ejercicio 7.1. Escribir los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a. $a_n = n^2 - 1$

b. $b_n = n^3 - 3$

c. $c_n = \frac{1}{n}$

d. $d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

e. $e_n = \frac{cos(\pi(n-1))}{n}$

f. $f_n = \frac{sen(\frac{\pi}{2}n)}{n}$

g. $g_n = \frac{12}{n!}$

h. $h_n = \frac{1}{n+1}$

i. $i_n = \frac{2^n}{n}$

j. $j_n = (\frac{1}{2})^n$

k. $k_n = 2^{-n}$

l. $l_n = \frac{3n+1}{2-5n}$

Ejercicio 7.2. Hallar la fórmula general para cada sucesión:

a. $a_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}...$

b. $b_n = \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}...$

c. $c_n = 3, 4, 5, 6...$

d. $d_n = 1, -3, 5, -7, 9...$

e. $e_n = \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}...$

Ejercicio 7.3. Hallar un valor N a partir del cual todos los terminos a partir de dicho N verifiquen que :

a. $a_n = n^2 - 8n - 3$ sea mayor que 0.

b. $a_n = n^2 - 8n - 3$ sea mayor que 100.

c. $a_n = -n^2 + 4n + 6$ sea menor que 0.

d. $a_n = \frac{n+5}{n^2+1}$ esté entre 0 y 1.

e. $a_n = \frac{n+5}{n^2+1}$ esté entre 0 y 0,2.

f. $a_n = \frac{n+5}{n+1}$ esté entre 0 y 2.

g. $a_n = \frac{n+5}{n+1}$ esté entre 0,5 y 1,5.

h. $a_n = \frac{n+5}{n+1}$ esté entre 0,9 y 1,1.

Ejercicio 7.4. Para cada sucesión indicar su límite al infinito:

a. $a_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - n$

b. $a_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n^2 + 2}$

c. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

d. $a_n = \sqrt[n]{7^n + 5^n}$

e. $a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}$

f. $a_n = (\frac{n^2+1}{2n^2+3})^{3/n}$

g. $a_n = (\frac{n^2+1}{n^2+3})^{3n}$

h. $a_n = \frac{3+2^n}{n!}$

7.1.1. Problemas

Ejercicio 7.5. Se desea poner un plazo fijo en el banco de \$10.000. Se sabe que paga un 25 % anual de interés. El plazo fijo capitaliza todo los meses (esto quiere decir que paga interés todo los meses), el interés por mes es el total dividido 12 meses. Además, da interés de los intereses. Se desea saber:

a. ¿Cuánto es el capital al mes? ¿a los 2 meses? ¿a los 3 meses? ¿a los 4 meses? ¿ a los n meses?

b. ¿Cuánto capital habría que depositar si se quiere obtener un interes de 20.000 a los 5 meses?

Ejercicio 7.6. Supongamos que un compañero de la facultad desea invertir \$10.000 por 5 años a una tasa anual del 25 %.

a. ¿Cuánto tendría si el interés capitaliza semestralmente?¿Y si lo hace cutrimestralmente? ¿Y si es bimestral ? ¿y si lo hace n veces al año?

b. Con la fórmula hallada en el ítem anterior, analizar que pasa si la capitalización es continua, o sea, capitaliza en cada instante. (Esto quiere decir que $n \to \infty$).

c. ¿Cuál sería la fórmula si la capitalización es continua y el capital se deja t años?

7.2. Series

Ejercicio 7.7. Con las sucesiones a, c, d y j del ejercicio 7.1, se pide:

a. Hallar S_1, S_2, S_3 y S_5, donde S_k es la suma hasta el término k.

b. De lo observado en el punto anterior indicar si -aparentemente- son convergentes o no.

7.2.1. Series geométricas

Ejercicio 7.8. Decidir si las siguientes series son convergentes. En caso afirmativo hallar el valor:

a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$

c. $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{30}{2^n}$

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}+5^{n-1}}{7^{n+2}}$

e. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4-3^{n+2}}{5^{n-2}}$

7.2.2. Criterios de convergencia

Ejercicio 7.9. Utilizando los diferentes criterios de convergencia decidir si cada serie es convergente o no.

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

b. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{n^2-1}}}$

c. $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{ln(n)}{n}$

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+\frac{1}{n})^n$

e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{5n^3+2n-6}$

f. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2+\frac{(-1)^n}{2n}\right)$

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{n}\right)^n$

j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

k. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

7.2.3. Series de potencia

Ejercicio 7.10. Se sabe que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$. Indicar los valores de x para que las siguientes sumas converjan. Encontrar dicha suma.

a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n}$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{x}\right)^n$

d. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-5x+2)^n$

Ejercicio 7.11. Determinar el radio y el intervalo de convergencia de las series que se encuentran a continuación. Analizar que pasa en los extremos de los intervalos.

a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n+1}$

b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}x^n$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-2)^n$

d. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+1)^n}{n2^n}$

e. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

f. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$

Ejercicio 7.12. Realizar el desarrollo de Taylor de las siguientes funciones centrado en 0 para n tendiendo a infinito e indicar el radio de convergencia.

a. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

b. $f(x) = e^{2x}$

c. $f(x) = \ln(x+1)$

d. $f(x) = \sin(2x+\pi)$

7.2.4. Problemas

Ejercicio 7.13. Se estimó en 1990 que el total de reservas de petroleo de las plataforma de YPF en Argentina era de $4{,}10^5$toneladas. Suponiendo que la produccion de ese año fue de $1{,}10^2$toneladas y que a partir de entonces la producción se reduce en un 2 % cada año. ¿Se puede asegurar la existencia de reservas por un tiempo indefinido? (Sugerencia: armar una serie de geometrica)

Ejercicio 7.14. Una persona deposita \$10.000 en una banco que le paga el 3 % de interés mensual. Si reinvierte los intereses, ¿cuál será su capital al cabo de dos años? (Sugerencia: armar una serie geometrica)

7.3. Respuestas de la Práctica 7

Ejercicio 7. 1.

a. $a_1 = 0; a_2 = 3; a_3 = 8; a_4 = 15; a_5 = 24$

b.

c. $a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = \frac{1}{4}; a_5 = \frac{1}{5}$

d.

e. $a_1 = 1; a_2 = -\frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = -\frac{1}{4}; a_5 = \frac{1}{5}$

f.

g. $a_1 = 12; a_2 = 6; a_3 = 2; a_4 = \frac{1}{2}; a_5 = \frac{1}{10}$

h.

i. $a_1 = 2; a_2 = 2; a_3 = \frac{8}{3}; a_4 = 4; a_5 = \frac{32}{5}$

j.

k. $a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{1}{8}; a_4 = \frac{1}{16}; a_5 = \frac{1}{32}$

Ejercicio 7. 2.

a. $a_n = \frac{n}{n+1}$

b. $b_n = \frac{3}{2^n}$

c. $c_n = n + 1$

d. $d_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$

e. $e_n = \frac{\sqrt{n}}{5}$

Ejercicio 7. 3.

a. $n \geq 9$

b. $n \geq 15$

c. $n \geq 6$

d. $n \geq 4$

e. $n \geq 9$

f. $n \geq 4$

g. $n \geq 8$

h. $n \geq 40$

Ejercicio 7. 4.

a. 1

b. 1

c. 0

d. 7

e. $\frac{1}{3}$

f. 1

g. 1

h. 0

Ejercicio 7. 5.

a. Fórmula para n meses: $c_n = 10{,}000\left(1+\frac{0{,}25}{12}\right)^n$.

b. Capital a invertir: 184,165$ aproximadamente.

Ejercicio 7. 6.

a. Si el interés capitaliza semestralmente: $\$\,32{,}473,21$ $(n=2)$; si lo hace cuatrimestralmente: $\$\,33{,}222,45$ $(n=3)$; si es bimestral: $\$\,34{,}030,08$ $(n=6)$; si lo hace n veces al año: $\$\,10{,}000.\left(1+\frac{0{,}25}{n}\right)^{5n}$

b. El capital a los 5 años será de $10{,}000e^{5\,0{,}25}$.

c. $\$\,10{,}000.e^{t/4}$

Ejercicio 7. 7. Para la sucesión a_n se obtiene que: $S_1 = 0$, $S_2 = 0+3$,$S_3 = 0+3+8$, $S_k = \sum_{n=1}^{k}(n^2-1)$. Esta sucesión no es convergente, porque va dando números cada vez más grandes.

Ejercicio 7. 8.

a. Converge a 2

b. Converge a 1

c. Converge a $\frac{30}{512}$

d. Converge a $\frac{11}{294}$

e. Converge a $-197,5$

Ejercicio 7. 9.

a. Diverge. Método comparación con $\frac{1}{n}$.

b. Diverge. Método comparación con $\frac{1}{n^{1/2}}$.

c. Diverge. Método comparación con $\frac{1}{n}$.

d. Diverge. Criterio de la raíz.

e. Diverge. Método comparación con $\frac{1}{n}$.

f. Converge. Serie alternada con a_n decreciente y limite con n tendiendo a infinito igual a 0.

g. Converge. Criterio de d'Alembert.

h. Diverge. El limite de a_n cuando n tiende a infinito es 2.

i. Converge. Criterio de la raíz.

j. Converge. Serie alternada con a_n decreciente y limite con n tendiendo a infinito igual a 0.

k. Converge. Serie alternada con a_n decreciente y limite con n tendiendo a infinito igual a 0.

Ejercicio 7. 10.

a. La serie converge si $-1 < x < 1$. En esos casos, la suma de la serie será igual a $\frac{1}{1-x^3}$.

b. La serie converge si $-1 < x < 1$. En esos casos, la suma de la serie será igual a $\frac{1}{1-x} - 1$.

c. La serie converge si $x > 2$ ó $x < -2$. En esos casos, la suma de la serie será igual a $\frac{-2}{x+2}$.

d. La serie converge si $\frac{1}{5} < x < \frac{3}{5}$. En esos casos, la suma de la serie será igual a $\frac{1}{5x-1}$.

Ejercicio 7. 11.

a. Converge para $x = 0$ con $R = 0$.

b. Converge para $x \in [-1, 1)$ con $R = 1$.

c. Converge para todo x real, $R = \infty$.

d. Converge para $x \in [-3, 1)$ con $R = 2$.

e. Converge para $x \in (-1, 1)$ con $R = 1$.

f. Converge para $x \in (-1, 1)$ con $R = 1$.

Ejercicio 7. 12.

a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. Radio de convergencia igual a 1.

b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$. Radio de convergencia infinito.

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Radio de convergencia igual a 1.

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Radio de convergencia infinito.

Ejercicio 7. 13. a. Si, la producción indefinida no llega a agotar las reservas (serie geométrica de razón $0,98$)

Ejercicio 7. 14. El capital será de $20{,}327,94$.