Análisis Matemático A
(para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
NOTAS DE ESTUDIOS DE FUNCIONES Y REGLA DE L'HOPITAL

Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino
Silvina Del Duca
Silvia Vietri

Índice general

Notas para Práctica 4

Estudio de funciones

4.1. Algunas definiciones

> **Máximo relativo.** Decimos que en x_0 tenemos un máximo relativo - o también llamado máximo local - de valor $f(x_0)$ si dicho valor es más grande que el resto de los valores de la función alrededor del x_0.

Precisando un poco más: cuando decimos "alrededor del x_0" estamos hablando de un entorno del punto. Este entorno podría ser bastante amplio o muy pequeño. Lo importante es que exista. Viendo un gráfico de la función, es muy sencillo darse cuenta que un máximo local representa una cima en dicho gráfico. Además, dichos maximos relativos los podemos subclasificar:

- **Máximo relativo en sentido estricto.** En este caso pedimos que la $f(x_0)$ sea mayor estricta que el resto de los valores. Es decir, en el gráfico no podríamos tener una meseta.
- **Máximo relativo en sentido amplio.** Pedimos que la $f(x_0)$ sea mayor o igual que el resto de los valores. Por lo que, en este caso, aceptaríamos una meseta como todos puntos máximos de la función. En general, se utiliza este último enfoque cuando hablamos de máximos locales.

Observación 4.1. Algunos autores piden que el punto x_0 sea un punto interior al dominio. En este caso, no podrían existir máximos locales en los bordes si tuviéramos un dominio cerrado o semi cerrado. Otros no tienen esta exigencia, aceptando máximos locales, también, en los bordes.

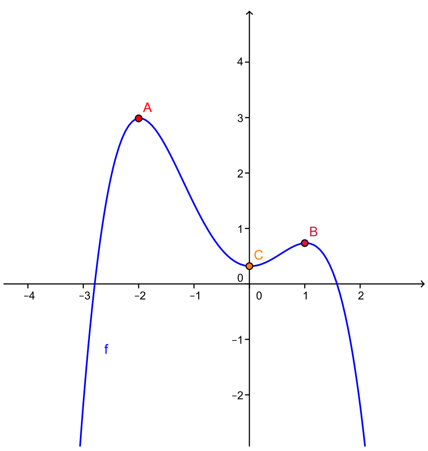
Máximo absoluto. Decimos que en x_0 tenemos un máximo absoluto de valor $f(x_0)$ si dicho valor es más grande que el resto de los valores de la función. Es decir, para todo x de su dominio.

En este caso, también tenemos la diferencia de máximo absoluto en sentido estricto o amplio. Acá SIEMPRE se aceptan máximos absolutos en los bordes, si los hubiera. Para tener una idea intuitiva de la diferencia entre local y absoluto, si uno pudiera escalar el cerro Tupungato, y pararse en la cima, estaría en el punto más alto en algunos kilómetros alrededor. Pero este punto no es el más alto de la Cordillera de los Andes. El punto más alto es el Aconcagua. Por lo tanto, el Aconcagua es el máximo absoluto de la Cordillera de los Andes y, también, es un máximo local. En cambio, el Tupungato, sólo es local.

Otra cosa que hay que distinguir y tener en cuenta es *dónde están esos puntos* y *cuánto valen*. Si nos preguntan ¿cuál es la altura máxima de la Cordillera de los Andes? Diremos 6.962 metros (sería el valor de la función en x_0). En cambio, si nos consultan ¿dónde está la altura máxima? Diremos las coordenadas latitud y longitud donde se encuentra el Aconcagua. Esto representa el valor del x_0.

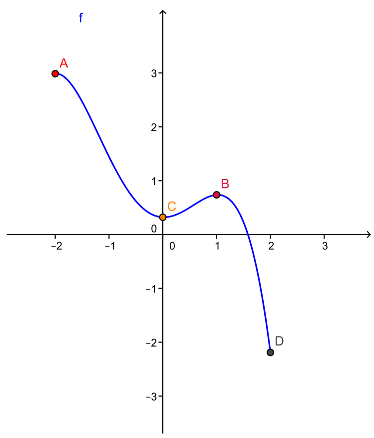
Mínimos absolutos y relativos. La idea es la misma que para los máximos pero cambiando "más grande" por "más chico".

Por ejemplo, observemos el siguiente gráfico:



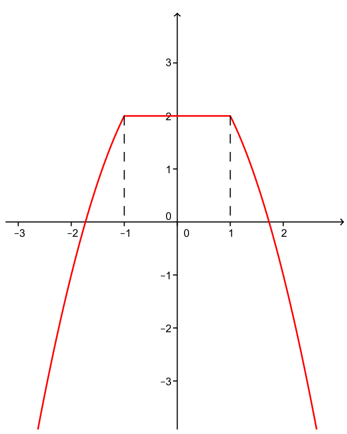
En el punto B tenemos un máximo local porque, alrededor de él, es el punto más alto. Sin embargo no es un máximo absoluto ya que hay otros valores de la función que están por encima de B. En el punto A, también tenemos un máximo local que, además, es absoluto, dado que no hay otros valores de la función que estén por encima de este punto. Si observamos el punto C es un mínimo local. Esta función no tiene mínimo absoluto (tener en cuenta que menos infinito no es un valor, sino un concepto).

Otro ejemplo, miremos el siguiente gráfico:



Es la misma función que la anterior, pero está definida en un intervalo cerrado (recortamos su dominio). Ahora sí, esta función tiene un mínimo absoluto que está en el punto D. El punto A seguiría siendo el máximo absoluto pero, según algunos autores no sería un máximo relativo.

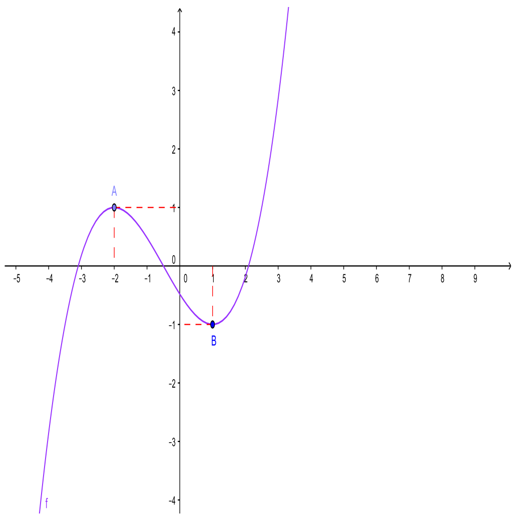
Observemos este otro ejemplo:



Si tomamos el sentido amplio de extremos (que es lo más común) esta función tiene infinitos máximos absolutos y relativos. Todos los que van desde $x_0 = -1$ hasta $x_0 = 1$ y valen 2. En cambio, en sentido estricto no tendría máximos.

4.2. Primeras observaciones

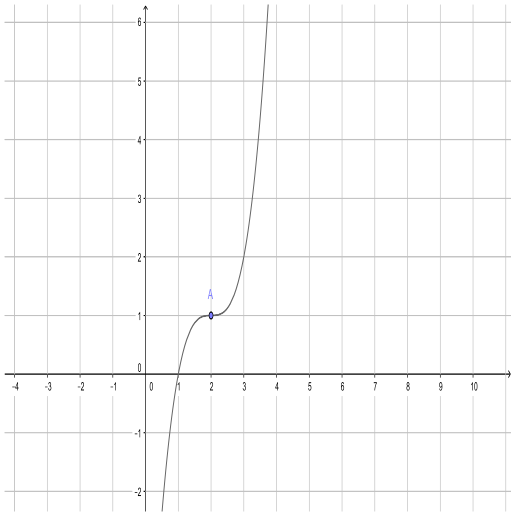
Ejercicio 4.2. Copiar en una hoja - si es posible cuadriculada - el siguiente gráfico que representa el gráfico de una función f:



- Anotar las coordenadas de los puntos A y B.
- ¿Hay un valor máximo absoluto de la función? ¿Y mínimo absoluto?
- ¿Hay algún valor máximo relativo o local? En caso afirmativo, ¿cuál es? ¿Dónde se produce?
- ¿Y mínimo? ¿Cuál es? ¿Dónde es?
- Indicar qué son los puntos A y B.
- Escribir los intervalos de crecimiento (IC) y los de decrecimiento (ID)
- Trazar, a mano alzada, algunas rectas tangentes (tres o cuatro) en los IC.
- Observar el *signo* de la pendiente de las rectas dibujadas.
- ¿Qué se puede concluir?
- Hacer lo mismo en los ID.
- Trazar la tangente al gráfico en el punto A.
- ¿Qué pendiente tiene dicha recta?
- Hacer lo mismo en el punto B.

- De lo realizado en los puntos anteriores sacar algunas conclusiones generales.

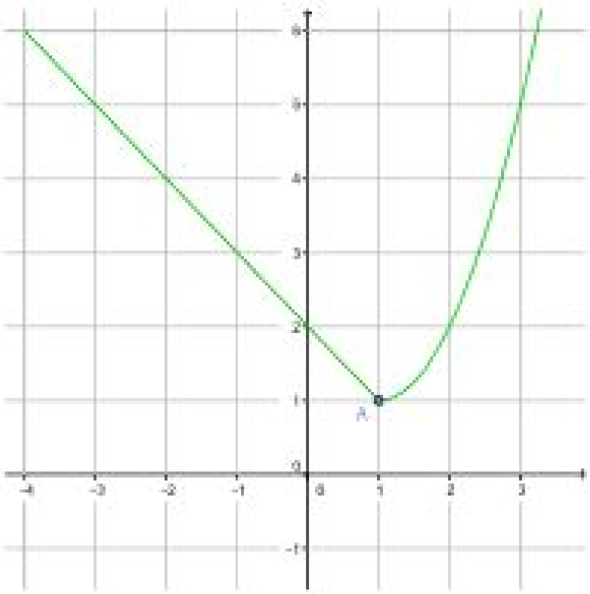
Ejercicio 4.3. Observar el siguiente gráfico:



Hacer lo mismo que en el punto anterior, copiar el gráfico y responder:

- Anotar las coordenadas del punto A.
- Anotar qué clase de punto es A.
- Anotar los IC e ID.
- Trazar una recta tangente en A. ¿Qué pendiente tiene esa recta?
- Ampliar y ajustar las conclusiones a las que se arribó en el punto anterior para que se ajusten con lo observado en este gráfico.

Ejercicio 4.4. Observar el siguiente gráfico:



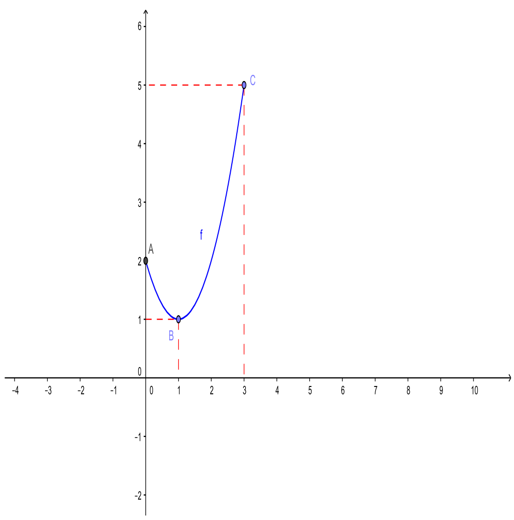
- Indicar las coordenadas del punto A.
- Indicar IC e ID.
- ¿Tiene algún valor máximo la función? En caso afirmativo, ¿cuál es?
- ¿Tiene algún valor mínimo? En caso afirmativo, ¿cuál es?
- ¿Es absoluto, relativo o ambas cosas?
- Indicar qué tipo de punto es A.
- ¿Qué pasa con la recta tangente en el punto A?
- Generalizar, ajustar y modificar las conclusiones extraídas en los puntos anteriores.

Ejercicio 4.5. Enunciar una ley general en la búsqueda de máximos y mínimos.

Ejercicio 4.6. Enunciar una ley general en la búsqueda de los IC e ID.

4.3. Extremos en intervalos cerrados

Observar el siguiente gráfico:

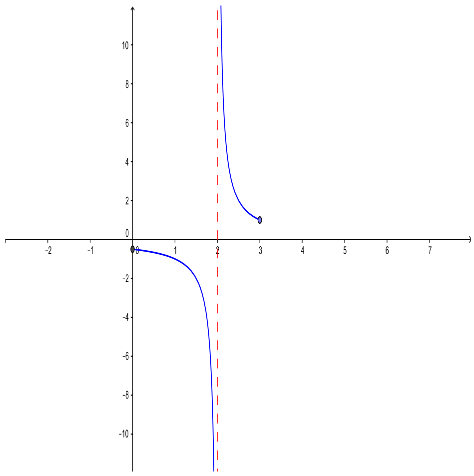


Es el gráfico de la función $f(x) = (x-1)^2 + 1$ definida en $x\epsilon\,[0,3]$

- Observar cuál es el valor mínimo. ¿En qué punto está?
- Observar cuál es el valor máximo. ¿En qué punto está?

- Si la función estuviera definida en R, ¿tendría máximo? ¿Qué pendiente tendría la tangente en el punto C?
- Sacar algunas conclusiones.

Observar este otro gráfico:



Este gráfico corresponde a la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ definida en $x\epsilon\,[0,3]\,,\ x \neq 2$

- Observar si hay algún valor mínimo.
- ¿Y máximo?
- Reformular las conclusiones sacadas en el punto anterior.
- Leer del capítulo 4 del libro: *Stewart, J. (2012) Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (7°ed.). México: Cengage Learning*
    - Sección 4.1 (pág. 274 a 280)
    - Sección 4.2 (pág. 284 a 288)
    - Sección 4.3 (pág. 290 a 297)
    - Sección 4.5 (pág. 310 a 316)
    - Comparar con las conclusiones arribadas

Observación. Tratar de resolver la práctica 4 primera sección.

4.4. Regla de L'Hopital

Cuando trabajamos con límites de funciones, existen casos denominados *indeterminaciones*, en los que no es posible hallar el límite directamente . Recordemos por ejemplo, que si se trata de hallar el límite de un cociente de funciones donde tanto el numerador como el denominador tienden a cero, se dice que se está frente a un cociente de infinitésimos, o a una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$, también denominada 0/0. En estos casos, una posibilidad para salvar la indeterminación, es aplicar propiedades algebraicas (factorizar polinomios, racionalizar cocientes, etc) u otras propiedades, como por ejemplo las de funciones trigonométricas.

En esta sección enunciaremos la *Regla de L´Hôpital,* que es un procedimiento que utiliza derivadas y permite salvar indeterminaciones de límite. Si bien se demuestra que la *Regla de L´Hôpital* puede aplicarse para salvar indeterminaciones del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ e $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, el resto de las indeterminaciones $\to 0. \to \infty$, $\to \infty - \to \infty$ $\to 1^{\to\infty} y$ $\to 0^{\to 0}$ pueden llevarse mediante propiedades algebraicas a los casos anteriores para resolver luego aplicando la Regla.

Antes de demostrar la *Regla de L´Hôpital*, se enunciará *el Teorema de Cauchy* (generalización del Teorema del Valor Medio de Lagrange ya visto) que será útil para comprender la demostración de la regla.

Teorema 4.7. ***Teorema de Cauchy***

Si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, tienen derivada finita en el intervalo (a, b) y para todo x en (a, b) $g'(x) \neq 0$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Ver que no es necesario pedir $g(b) - g(a) \neq 0$, ya que si esto ocurriera, por Teorema de Rolle, existiría un punto o valor de abscisa, interior al intervalo (a, b) donde se anularía la derivada de g, lo cual contradice una de las hipótesis del teorema.

Demostración. Para la demostración se considera la función auxiliar

$$p(x) = [f(b) - f(a)].g(x) - [g(b) - g(a)].f(x)$$

Esta función p es continua en $[a, b]$ por ser resta de dos fuciones derivables (f y g) multiplicadas cada una de ellas por una constante, y derivable en (a, b) por el mismo motivo. Por otro lado, $p(a) = p(b)$, ya que :

$$p(a) = p(b) = f(b)g(a) - g(b)p(a).$$

Sugerencia: reemplazar a y b en la fórmula de p y verificar la igualdad.

Esto implica que la función p satisface las hipótesis del *Teorema de Rolle*, por lo tanto existe un $c \in (a,\, b)$ tal que p'(c) = 0.

Derivando p y evaluando en c la derivada, resulta que

$$p'(\mathrm{c}) = [f(b) - f(a)].\, g'(c) - [g(b) - g(a)].f\,'(c) = 0.$$

Como por hipótesis $g\,\acute{}(\mathrm{x}) \neq 0$ y $g(b) - g(a) \neq 0$, despejando, se obtiene que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\,\acute{}(\mathrm{c})}{g\,\acute{}(c)}$, que es lo que se quería probar. □

Una vez visto el Teorema de Cauchy , se enunciará la *Regla de L´Hôpital.*

Teorema 4.8. ***Regla de L´Hôpital***

Si f y g son funciones derivables en un entorno reducido de $x = a$ (entorno del punto a que no lo incluye), y $g\,\acute{}(x) \neq 0$ para todo punto interior a ese entorno .

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = L$$

Es decir, el límite del cociente entre f y g se calcula como el límite del cociente de sus respectivas derivadas.

Demostración. Se efectuará la demostración para puntos que pertenecen a un entorno del punto a, pero a la derecha del mismo, es decir en el intervalo $(a,\, a+h)$ con $h > 0$ tomando límites laterales para x tendiendo a a por la derecha. Se puede demostrar de la misma manera en el intervalo $(a - h,\, a)$ con $h > 0$, con lo que quedará demostrado el teorema cuando x tiende a a.

Para la demostración, se aplica el Teorema de Cauchy en el intervalo $[a - h\,, a + h]$ con $h > 0$ .Como no se conoce el comportamiento de las funciones f y g en el punto $x = a$, se definen las siguientes funciones F y G como se indica a continuación:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq a \\ 0 & si\ x = a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \neq a \\ 0 & si\ x = a \end{cases}$$

Las funciones F y G son continuas en $x = a$, ya que $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $F(a) = 0$; y $\lim\limits_{x\to a} G(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $G(a) = 0$.

Si se considera el intervalo $[a\,, x]$ donde x es un punto cualquiera del intervalo $(a,\, a+h)$ con $h > 0$, se puede aplicar el *Teorema de Cauchy* en dicho intervalo. (Notar que F y G son funciones continuas en $[a\,, x]$ y derivables en $(a,\, x)$ con $G\,\acute{}(x) \neq 0$ en $(a,\, x)$ ya que G'(x)=g'(x)).

Por lo tanto existe un $c \in (a,\, x)$ tal que $\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F\text{'}(\mathrm{c})}{G\,\acute{}(\mathrm{c})}$ con $a < c < x$ y como

$F(a) = G(a) = 0$,

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\mathrm{c})}{G'(\mathrm{c})} \tag{4.4.1}$$

Como en el intervalo $(a,\ a+h)$ se cumple que $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,\ a+h)$ y además $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$, dado que $c \in (a,\ a+h)$ entonces $F'(c) = f'(c)$ y $G'(c) = g'(c)$

Tomando límite cuando $x \to a^+$en 4.4.1, se obtiene que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4.4.2}$$

Como c es un punto interior al intervalo (a, x) y depende de x, entonces si $x \to a$ también $c \to a$ por lo tanto

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

Reemplazando en 4.4.2, se demuestra que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{4.4.3}$$

En forma análoga se puede probar la igualdad 4.4.3 tomando límite lateral cuando $x \to a^-$, con lo que queda demostrado el teorema para $x \to a$. Es decir, se demuestra que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

□

Nota : Puede ocurrir que al aplicar la Regla, $f'(x)$ y $g'(x)$ sean infinitésimos en el punto $x = a$ y satisfagan las hipótesis del teorema anterior, en cuyo caso se puede volver a aplicar la regla utilizando derivadas segundas.De igual forma, podría volver a aplicarse reiteradas veces la regla, siempre que se cumplan las hipótesis del teorema.(Esta demostración puede hacerse por inducción, pero no la incluiremos en este texto)

Ejemplo 4.9. Supongamos que queremos calcular el siguiente límite :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 2}$$

Se trata de un cociente de infinitésimos, o lo que es lo mismo, una indeterminación del tipo$\frac{\to 0}{\to 0}$.

Ejemplo 4.10. Tenemos dos maneras distintas de calcular este límite, una de ellas, es salvar la indeterminación aplicando propiedades algebraicas. En este caso factorizando los polinomios que se encuentran en el numerador y denominador de esta función racional nos queda:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \; y \; 2x^2 - 2 = 2(x-1)(x+1)$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{2x^2-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{2(x+1)} = \frac{3}{4}$$

Otra posibilidad, es aplicar la *Regla de L´Hôpital*, teniendo en cuenta que tanto numerador como denominador son funciones derivables en un entorno de $x = 1$(recordemos los polinomios son funciones derivables) , y que la derivada de $g(x) = 2x^2 - 2$ es $g´(x) = 4x$ que no se anula en un intervalo suficientemente pequeño centrado en $x = 1$. Si aplicamos la Regla entonces, queda

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{2x^2-2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{4x} = \frac{3}{4}$$

Observemos que no hay una única forma de salvar indeterminaciones de límites, pero lo que se debe tener en cuenta, es que, de cualquier manera que se resuelva se debe llegar al mismo resultado.

Ejemplo 4.11. Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5-5e^x}{3sen(2x)}$$

Se trata nuevamente de una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Veamos que aquí no es fácil salvar la indeterminación aplicando propiedades como en el ejemplo anterior, por lo tanto vamos a aplicar la *Regla de L´Hôpital*. Recordemos verificar siempre que se cumplan las hipótesis (en este caso numerador y denominador son funciones derivables y la derivada del denominador no se anula en las proximidades de $x = 0$. Específicamente $6\,cos(2x) \neq 0$ si $0 <\mid x \mid< \frac{\pi}{4}$).

Aplicando la Regla queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5-5e^x}{3sen(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-5e^x}{6\,cos(2x)} = -\frac{5}{6}$$

Ejemplo 4.12. Vamos a calcular ahora

$$\lim_{x\to 1} \frac{-lnx + x - 1}{4 + 4cos(\pi x)}$$

Como vemos es una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$, donde tanto numerador como denominador satisfacen las hipótesis para aplicar la *Regla de L´Hôpital* (verificar). Aplicando la Regla queda:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x}+1}{-4\pi sen(\pi x)}$$

Tomando límite vemos que sigue quedando una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$. Antes de aplicar nuevamente la Regla como se indica en 4.4 simplifiquemos algebraicamente la expresión sacando denominador común en el numerador y escribiendo como un solo cociente. Queda entonces:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1+x}{-4x\pi sen(\pi x)}$$

Si volvemos a aplicar la Regla , derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{-4\pi sen(\pi x) - 4x\pi^2 cos(\pi x)}$$

Calculando el límite, da por resultado que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{-4\pi sen(\pi x) - 4x\pi^2 cos(\pi x)} = \frac{1}{4\pi^2}$$

Proposición 4.13. *: La Regla de L´Hôpital también puede aplicarse si f y g son funciones derivables para x tendiendo a infinito siempre que g'(x) $\neq 0$ cuando x tiende a infinito y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Bajo estas hipótesis se verifica que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración. Al efectuar el cambio de variables, llamando $x = 1/t$, se puede ver que cuando $x \to \infty$, $t \to 0$, en cuyo caso $\lim_{t\to 0} f(t)$ y $\lim_{t\to 0} g(t)$. Aplicando la *Regla de L´Hôpital* demostrada en el teorema anterior, y derivando por regla de la cadena numerador y denominador, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\ (1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t).(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

que es lo que se quería probar.

Ejemplo 4.14. Para ejemplificar la proposición anterior, calculemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sen(\frac{7}{x})}{\frac{2}{x}}$$

Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ con x tendiendo a infinito, donde se satisfacen las hipótesis de la *Regla de L´Hôpital* (verificar). Aplicando la Regla queda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{7}{x^2}\,cos(\frac{7}{x})}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7cos(\frac{7}{x})}{2} = \frac{7}{2}$$

□

Otro caso de aplicación de la *Regla de L´Hôpital* Se demostró hasta este momento que la Regla de L´Hopital se aplica para el caso de la indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$. Veremos ahora a partir de los teoremas que se enuncian a continuación, que esta regla puede aplicarse también para salvar la indeterminación del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$.

Teorema 4.15. *Sean f y g funciones derivables en todo punto $x \neq a$ en un entorno de $x{=}a$ y $g'(x) \neq 0$. Si vale que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f´(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g(x)} = L$*

Demostración. Considerando dos puntos β y x en un entorno del punto a, tal que $\beta < x < a$ ó $(a < x < \beta)$, si se aplica el *Teorema de Cauchy*, resulta que

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{g(x)-g(\beta)} = \frac{f´(c)}{g´(c)} \tag{4.4.4}$$

con $\beta < c < x$

Escribiendo 4.4.4 de la forma

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{g(x)-g(\beta)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}{1-\frac{g(\beta)}{g(x)}} \tag{4.4.5}$$

De las expresiones 4.4.4 y 4.4.5 se obtiene que

$$\frac{f\text{'(c)}}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}{1-\frac{g(\beta)}{g(x)}}$$

Despejando, queda que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\text{'(c)}}{g'(c)}\,\frac{1-\frac{g(\beta)}{g(x)}}{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}} \tag{4.4.6}$$

Tomando límite cuando $x \to a^+$ en 4.4.6, resulta que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{g(\beta)}{g(x)} = 0$$

ya que el límite del denominador es infinito y el numerador es una constante. Análogamente,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(\beta)}{f(x)} = 0$$

entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1-\frac{g(\beta)}{g(x)}}{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}} = 1 \tag{4.4.7}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4.4.8}$$

Como por hipótesis

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

por definición de límite, se deduce que para todo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede elegir un $h > 0$,tal que si $x\varepsilon\,(a,\ a+h)$

$$\mid \frac{f\text{'(x)}}{g'(x)} - L \mid < \varepsilon$$

Hallado el valor $h > 0$, cualquier otro $h\acute{} > 0$, menor que h, satisface la expresión anterior. Basta entonces con hallar un h suficientemente pequeño, que haga que x esté suficientemente próximo a a, para que el punto c pertenezca al intervalo $(a,\ a+h)$ y verifique también la igualdad

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

A partir de la igualdad 4.4.8, se prueba que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

En forma análoga se demuestra la igualdad para $x \to a^-$, con lo que queda probado que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$\square$

Ejemplo 4.16. Calculemos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(\frac{1}{x})}{ln(\frac{3}{x^2})}$$

Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ con x tendiendo a un número. Como se cumplen las hipótesis de 4.15,(verificar) aplicaremos la *Regla de L´Hôpital*

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(\frac{1}{x})}{ln(\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\frac{3}{x^2}} - \frac{6}{x^3}}$$

acomodando algebraicamente el cociente queda:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Proposición 4.17. *El Teorema4.15 puede generalizarse para el caso en que $x \to \infty$ de la siguiente forma:*

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ y existe $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(\mathrm{x})} = \lim_{x \to} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Para aplicar la propiedad anterior, calculemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x^2 + 5x}$$

Si evaluamos numerador y denominador cuando $x \to \infty$ queda una indeterminación del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$. Como se verifican las hipótesis de la propiedad anterior, aplicamos la *Regla de L´Hôpital*, y nos queda entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x^2 + 5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{4x + 5}$$

Como sigue dando de la forma $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, aplicamos nuevamene la Regla y obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{4} = +\infty$$

Error!

Un error muy frecuente en la aplicación de la *Regla de L´Hôpital* es derivar el cociente planteado en el límite,como una división. RECORDAR que debe derivarse numerador y denominador *por separado* como indica la Regla.

4.4.1. Uso de la *Regla de L´Hôpital* para los distintos casos de indeterminaciónes de límites

Hasta el momento, se demostró que la *Regla de L´Hôpital* puede aplicarse, siempre que se cumplan las hipótesis propuestas, para los casos de indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ y $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ tanto para el caso en que $x \to a$ con $a \epsilon \mathbb{R}$ como para $x \to \infty$. A continuación veremos de qué forma otras indeterminaciones de límite pueden llevarse mediante propiedades algebraicas a los casos anteriores, para resolver luego aplicando la Regla.

Caso 1. $\to 0. \to \infty$ **(Infinitésimo por infinito)** Si f y g son funciones derivables en un entorno reducido del punto a, tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, y se desea calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$. El producto al que se le quiere calcular el límite, se puede transformar en un cociente de la forma:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

con $f(x) \neq 0$ y/o $g(x) \neq 0$, en cuyo caso queda escrito como una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ o $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, y se le puede aplicar la *Regla de L´Hôpital* como se demostró anteriormente.

Ejemplo 4.18. Calculemos el

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} ln\left(\frac{2x+5}{3x+5}\right)$$

Si evaluamos, vemos que se trata de una indeterminación del tipo $\to 0. \to \infty$, por lo tanto, para aplicar la Regla transformamos de la forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\left(\frac{2x+5}{3x+5}\right)}{\frac{1}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{ln\left(\frac{2x+5}{3x+5}\right)}{x}$$

Ahora quedó una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$, y como se cumplen las hipótesis (verificar siempre aunque no se escriba), aplicamos *Regla de L´Hôpital*.

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\left(\frac{2x+5}{3x+5}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{3x+5}{2x+5}\right)\frac{2(3x+5)-(2x+5)3}{(3x+5)^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x+5)}{(2x+5)} \frac{(-5)}{(3x+5)^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-5}{(2x+5)(3x+5)} = -\frac{1}{5}$$

Caso 2. $\to\infty$-$\to\infty$ **(Resta de infinitos de igual signo)** Si f y g son funciones derivables en un entorno reducido del punto a, tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, y se desea calcular $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$. La idea es reescribir la expresión a la que le queremos hallar el límite para poder resolver como en alguno de los casos anteriores. Si se trata de una diferencia de cocientes, es conveniente sacar denominador común para que quede un solo cociente y a partir de allí, aplicar la Regla. Si esto no es posible, una sugerencia, es transformar la diferencia $f(x) - g(x)$ en un cociente , de la forma:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right)\ f(x).g(x)\right]$$

con $f(x)\neq 0$ y $g(\mathrm{x})\neq 0$, en cuyo caso queda escrito como una indeterminación del tipo $\to 0. \to\infty$,al que se le puede aplicar la *Regla de L´Hôpital* como en el *Caso* 1.

Ejemplo 4.19. Calculemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{sen(x)}$$

como se trata de una indeterminación del tipo $\to +\infty$ -$\to +\infty$ y es una resta de cocientes, sacaremos denominador común, entonces

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{sen(x)-\sqrt{x}}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{x}sen(x)}_{\to 0}}$$

Ahora quedó como un cociente de infinitésimos, es decir de la forma $\frac{\to 0}{\to 0}$ y aplicaremos la Regla

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)-\sqrt{x}}{\sqrt{x}sen(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{cos(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}sen(x)+\sqrt{x}cos(x)\right)}$$

antes de aplicar nuevamente la Regla, siempre tratar de acomodar de modo que quede un solo cociente, simplificando lo que sea posible.

En este caso

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\sqrt{x}cos(x).-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{sen(x)-2xcos(x)}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{2\sqrt{x}cos(x)-1}^{\to -1}}{\underbrace{sen(x)-2xcos(x)}_{\to 0^+}} = -\infty$$

Caso 3. $\to 1^{\to\infty}$, $\to 0^{\to 0}$ ó $\to +\infty^{\to 0}$ **(Límite de funciones exponenciales potenciales)** Si f y g son funciones derivables en un entorno reducido del punto a, tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ se desea calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$. Una posibilidad para poder aplicar la *Regla de L´Hôpital* es reescribir la expresión a la que le queremos calcular el límite, aplicando propiedades de funciones exponenciales y logarítmicas. De esta forma

$$f(x)^{g(x)} = e^{ln\left[f(x)^{g(x)}\right]}$$

(teniendo en cuenta que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica). Aplicando propiedades de logaritmo, escribimos la expresión 4.4.1como

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)ln(f(x))}$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)ln(f(x))}$$

y por propiedad de límite podemos plantear la igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)ln(f(x))}$$

Si la indeterminación inicial es del tipo $\to 1^{\to\infty}$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ entonces $\lim\limits_{x\to a}[ln(f(x))] = 0$, y como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, el límite a calcular como exponente del número e, es una indeterminación del tipo$\to 0. \to \infty$, que puede resolverse como se indicó en el *Caso* 1.

Si la indeterminación inicial es del tipo $\to 0^{\to 0}$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a}[ln(f(x))] = +\infty$ y como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, el límite a calcular como exponente del número e, es una indeterminación del tipo $\to 0. \to \infty$, que puede también resolverse como se indicó en el *Caso 1.*

Si la indeterminación inicial es del tipo $\to +\infty^{\to 0}$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a}[ln(f(x))] = +\infty$ y como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, el límite a calcular como exponente del número e, es una indeterminación del tipo $\to 0. \to \infty$, que puede también resolverse como se indicó en el *Caso* 1.

Ejemplo 4.20. Para ejemplificar el caso anterior, calculemos ahora

$$\lim_{x\to 0} [cos(x)]^{\frac{1}{2x}}$$

Esta indeterminación es del tipo $\to 1^{\to\infty}$, por lo tanto vamos a escribir

$$[cos(x)]^{\frac{1}{2x}} = e^{ln\left([cos(x)]^{\frac{1}{2x}}\right)} = e^{\frac{1}{2x} ln[cos(x)]}$$

Resolvemos el límite del exponente

$$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{2x} ln\,[cos(x)]] = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{ln\,[cos(x)]}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}}$$

como se verifican las hipótesis, aplicamos la *Regla de L´Hôpital,* entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{ln\,[cos(x)]}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos(x)}(-sen(x))}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\overbrace{sen(x)}^{\to 0}}{\underbrace{2cos(x)}_{\to 2}} = 0$$

El límite que queremos calcular es igual a

$$\lim_{x\to 0}[cos(x)]^{\frac{1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{2cos(x)}} = 1$$

Ejemplo 4.21. Vamos a calcular en este ejemplo, el valor de

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{ln(x)}$$

Si evaluamos en $x = 1$, se trata de una indeterminación del tipo $\to 0^{\to 0}$, reescribiendo la función a la que le queremos hallar el límite queda:

$$(x-1)^{ln(x)} = e^{ln[(x-1)^{ln(x)}]} = e^{ln(x)ln(x-1)}$$

Analicemos el límite del exponente

$$\lim_{x\to 1^+}\overbrace{ln(x)}^{\to 0}\overbrace{ln(x-1)}^{\to +\infty}$$

acomodamos como un cociente

$$\lim_{x\to 1^+}\overbrace{ln(x)}^{\to 0}\overbrace{ln(x-1)}^{\to +\infty} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{ln(x-1)}^{\to +\infty}}{\frac{1}{\underbrace{ln(x)}_{\to +\infty}}}$$

y aplicamos la Regla

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{ln(x-1)}^{\to +\infty}}{\frac{1}{\underbrace{ln(x)}_{\to +\infty}}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x.ln^2(x)}}$$

antes de seguir, acomodamos como un solo cociente y queda

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{-xln^2(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}$$

aplicamos nuevamente la Regla, entonces

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{-xln^2(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{-\,ln^2(x) - 4ln(x)}^{\to 0}}{\underbrace{1}_{\to 1}} = 0$$

Por lo tanto el límite que buscamos vale

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{ln(x)} = e^0 = 1$$

Observación. Verificar siempre antes de aplicar la *Regla de L'Hopital* , si se cumplen las hipótesis, ya que podríamos arribar a resultados erróneos.

Ejemplo 4.22. Calculemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + sen(2x)}{6x}$$

Si aplicamos la *Regla de L'Hopital,* derivando numerador y denominador, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + 2cos(2x)}{6}$$

evaluando el límite, concluímos que el límite dado no existe, ya que la función $f(x) = cos(x)$ oscila cuando $x \to \infty$.

Sin embargo, es INCORRECTO aplicar la *Regla de L'Hopital* inicialmente, ya que no se trata de una indeterminación . El límite a calcular se puede escribir de la forma:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{6x} + \frac{sen(2x)}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{6x}}_{\to 0} \underbrace{sen(2x)}_{acotado}$$

Por lo tanto, el límite que queremos hallar vale

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{6x}}_{\to 0} \underbrace{sen(2x)}_{acotado} = \frac{1}{6}$$

⚠ Antes de aplicar la *Regla de L'Hopital,* verificar que se trate de una indeterminación y que valgan las hiopótesis para aplicar la Regla. Tener en cuenta además que aún verificándose las hipótesis puede ocurrir que aplicando la Regla no se pueda resolver el límite, como se ejemplifica a continuación.

Ejemplo 4.23. Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}+1}{2x}$$

Como la indeterminación planteada es del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, y valen las hipótesis de la Regla, procedemos a aplicar la *Regla de L'Hopital*:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2\sqrt{2+x^2}} = \tag{4.4.9}$$

Volvemos a obtener $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, si aplicamos nuevamente ahora la *Regla de L'Hopital* obtenemos:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4x}{2\sqrt{2+x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{2x}$$

Si observamos, nos vuelve a quedar para resolver un límite igual al inicial y no tiene sentido seguir aplicando la Regla, ya que entraríamos en un círculo sin poder hallar la solución (hacer).

Conviene entonces pensar en aplicar sólo una vez la *Regla de L'Hopital* e introducir el numerador dentro de la raíz cuadrada del denominador, de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2\sqrt{2+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{2+x^2}} =$$

dividiendo dentro de la raíz cuadrada, numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2/x^2}{2/x^2+x^2/x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2/x^2+1}} = \frac{1}{2}$$

salvando así la indeterminación.

Veamos a continuación un ejercicio que integra lo visto en este capítulo.

Ejemplo 4.24. . Realizar un estudio completo de la función $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ calculando:

a. Dominio e intesercción con los ejes x e y.

b. Intervalos de positividad y negatividad.

c. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d. Intervalos de crecimiento, de decrecimiento y extremos locales.

e. Intervalos de concavidad positiva, de concavidad negativa y puntos de inflexión.

f. Conjunto Imagen.

g. Gráfico aproximado.

a. ***Dominio de la función:***

Para que exista el cociente que aparece en el exponente de la función exponencial, pedimos que $x \neq 0$, con lo que $Dom f = R - \{0\}$.

Raíces o ceros:

Para hallar la intersección del gráfico de f con el eje x, igualamos la función a cero. Pero $x\, e^{\frac{1}{x}} = 0$ sólo si $x = 0$ ya que la función exponencial nunca se anula. Pero $x = 0$ está excluído del dominio de la función, por lo tanto no hay intersección del gráfico de f con el eje x y f no tiene raíces.

Intersección con el eje y (ordenada al origen):

Como $x = 0$ no pertenece al dominio de f no hay intersección del gráfico de f con el eje y.

b. ***Intervalos de positividad y negatividad de f:*** aplicamos el Corolario del Teorema de Bolzano.

Como el $Dom f = R - \{0\}$ y no hay ceros , evaluamos la función en los intervalos que determina este valor y observamos el signo de f .En este caso, debemos analizar los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de f	-	$+$
Comportamiento de f	negativa	positiva

Si elegimos un valor de x en $(-\infty, 0)$ por ejemplo $x = -1$, como $f(-1) = -1e^{-1} < 0$, concluimos que la función es negativa en dicho intervalo.

Si tomamos un valor de x en $(0, +\infty)$ por ejemplo $x = 1$, como $f(1) = e^{1} > 0$, entonces f es positiva en el intervalo analizado.

Intervalos de positividad de f: $(0, +\infty)$

Intervalos de negatividad de f: (- $\infty, 0)$.

c. ***Asíntotas:***

Asíntotas verticales (AV): Analizamos $x = 0$ que es el valor que excluímos del $Dom f$. Tomando límite lateral cuando $x \to 0^-$ vemos que el exponente de e tiende a $-\infty$, entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 0} = 0$$

y concluimos que no hay asíntota vertical. Tomando límite lateral cuando $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty}$$

Como queda una indeterminación, para aplicar la Regla de L'Hopital acomodamos como un cociente de la forma:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Queda una indeterminación del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ y aplicamos la Regla de L´Hopital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \frac{(-1)}{(x)^2}}{\frac{(-1)}{(x)^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Entonces la recta $x = 0$ es asíntota vertical a derecha.

Asíntotas horizontales (AH): Analizamos el comportamiento de f en infinito. Para ello calculamos

$$\lim_{x\to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 1} = -\infty$$

y

$$\lim_{x\to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 1} = +\infty$$

por lo tanto no hay asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas (AO): Calculamos la pendiente y la ordenada al origen cuando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\, e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

es una indeterminación del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ y aplicando la Regla de L´Hopital nos da:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\, e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Para hallar b planteamos

$$b = \lim_{x \to -\infty} x\, e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{x \to -\infty} x\,(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

Como es una indeterminación del tipo $\to 0. \to \infty$, reacomodando como cociente queda:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

Aplicando la Regla de L´Hopital

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2})}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Si repetimos el procedimiento cuando $x \to +\infty$ da los mismos resultados. Por lo tanto la recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua .

d. **Intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos locales:**

Sabemos que el $Dom f = R - \{0\}$.Calculamos$f\,´$

$$f\,´(\mathrm{x}) = e^{\frac{1}{x}} + x.e^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$$

El $Dom f\,´ = R - \{0\}$y buscamos dónde $f\,´(x) = 0$. Pero $f\,´(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x}) = 0$ sólo si $1 - \frac{1}{x} = 0$, entonces $1 = \frac{1}{x}$ y despejando queda que $x = 1$es un punto crítico.

Evaluamos la derivada de f en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ determinados por $x = 0$ que exclúimos del dominio de f y $x = 1$ que es el punto crítico.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de$f\,´$	+	-	+
Comportamiento de f	crecee	decrece	crece

Si calculamos $f\,´(-1) = e^{-1}(1 + 1) > 0$, por lo tanto f crece en $(-\infty, 0)$.

Como $f\,´(\frac{1}{2}) = e^2(-1) < 0$, f decrece en el intervalo $(0, 1)$.

Evaluando $f\,´(2) = e^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) > 0$, con lo que f también crece en $(1, +\infty)$. Por lo tanto el Intervalo de crecimiento de $f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, y el Intervalo de decrecimiento de $f = (0, 1)$.

A partir de lo analizado, podemos decir que en $x = 1$ hay un mínimo relativo de f y vale $f(1) = e$, por lo tanto las coordenadas del mínimo relativo son $(1, e)$. En $x = 0$ no hay extremo porque $x = 0$ no pertenece al dominio de f. Teniendo en cuenta el comportamiento de f cuando $x \to +\infty$, cuando

$x \to -\infty$ y la existencia de asíntota vertical, se deduce que f no tiene extremos absolutos.

e. **Intervalos de concavidad , de convexidad y puntos de inflexión:**

Para analizar concavidad calculamos f". Derivando f' obtenemos

$$f\text{'(x)}=e^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2})(1-\frac{1}{x})+e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2})=e^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2})=e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^3})$$

$Dom f'' = R - \{0\}$, si buscamos los puntos que anulan f''vemos que f"(x)$=e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^3})$ nunca se anula, ya que $e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^3}) \neq 0$ para todo $x \in R$. Entonces evaluamos la concavidad de f estudiando el signo de f'' en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de f''	-	+
Comportamiento de f	cóncava	convexa

Como f''(-1)$=e^{-1}(-1) < 0$ entonces f es cóncava o tiene concavidad hacia abajo en $(-\infty, 0)$. Como además $f''(1)=e^1 > 0$, se concluye que f es convexa o tiene concavidad hacia arriba en $(0, +\infty)$.

Por lo tanto el Intervalo de concavidad de f es $(-\infty, 0)$, y el Intervalo de convexidad de f es $(0, +\infty)$. La función f no tiene puntos de inflexión, ya que $x = 0$ no pertenece al dominio de f.

f. **Imagen de** f: A partir del gráfico de la función se deduce que el conjunto Imf $=(-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$.

g. **Gráfico de** f**:** *Ver Figura 7*

Para seguir ampliando leer Capítulo 4 del libro *Stewart, J. (2012) Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (7°ed.). México: Cengage Learning*, sección 4.4 (páginas 301 a 307).

Observación. Hacer los ejercicios 15 a 17 de la guía de trabajos prácticos. Opcional: Stewart: ejercicios 7 a 66 (páginas 307 y 308).

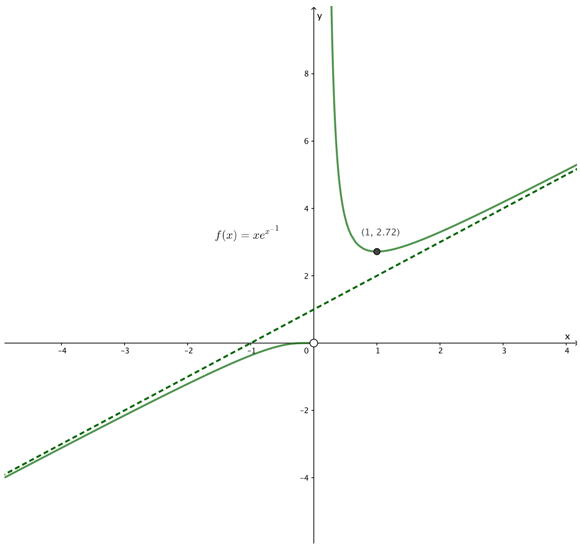


Figura 4.4.1: