- Enunciado

Dado el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 4 = 0 \end{cases}$ La única opción que muestra su conjunto solución es:

A) $\{\alpha(0;-1;1;1) + (1;1;0;0), \alpha \in \mathbb{R}\}$
B) $\{(1;1;0;0)\}$
C) $\{(0;-1;1;1) + \alpha(1;1;0;0), \alpha \in \mathbb{R}\}$
D) $\{(0;-1;1;1)\}$

Opción correcta: A)
Resolución
Si escribís el sistema en forma matricial y lo triangulás, una posible solución es $(1, 1 - x_4, x_4, x_4)$. De esta expresión podrás encontrar la opción correcta.

- Enunciado

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La única opción que muestra el determinante de la matriz A^2 es:

A) 91
B) -91
C) 8281
D) 182

Opción correcta: C)
Resolución
Conociendo la propiedad de que el determinante de una matriz cuadrada es el cuadrado del determinante de la matriz, bastará con encontrar que el determinante de la matriz dada es 91 y luego elevarlo al cuadrado para obtener la respuesta al problema.

- Enunciado

Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz: $A_T = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & -2 & -k \end{pmatrix}$ Indicá la opción que muestra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que $T(1;2;-1) = (-8,0;-1)$

A) $k = 4$
B) $k = 2$
C) $k = 3$
D) No existen valores de k para que se cumpla lo pedido.

Opción correcta: B)
Resolución
Usando la forma matricial de la transformación lineal, planteamos lo siguiente para hallar $T(1;2;-1)$: $T(\vec{v}) = A_T \cdot \vec{v}$
Reemplazando con los datos que tenemos nos queda que: $\begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & -2 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Y, realizando la operación de matrices obtenemos que: $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -3+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Finalmente, igualando coordenada a coordenada, se deduce que el único valor posible para k es 2.

- Enunciado

Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con expresión funcional: $T(x_1;x_2;x_3) = (-x_1 + x_3; 0; 5x_1 - x_3; x_2)$ Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única verdadera:

A) El núcleo de T tiene dimensión 1.
B) T es un isomorfismo.
C) El núcleo de T es un conjunto vacío.
D) La imagen de T tiene dimensión 3.

Opción correcta: D)
Resolución
Para analizar las afirmaciones alcanza con hallar el núcleo o la imagen de T para luego, apoyándonos en el Teorema de la dimensión, poder deducir la dimensión de imagen o núcleo. Si optamos por analizar el núcleo, debemos plantear $T(x_1;x_2;x_3) = (0;0;0;0)$. De allí, nos quedan cuatro igualdades de donde se deduce que el $(x_1;x_2,x_3) = (0;0;0)$. Es decir, $Nu(T) = (0;0;0)$, por lo tanto $dim(Nu(T)) = 0$ y se descartan dos de las opciones. Siguiendo, gracias al Teorema de la dimensión, como el espacio de partida tiene dimensión 3, podemos deducir que $dim(Im(T)) = 3$. Por último, observemos que, como el espacio de llegada de T es $\mathbb{R}^4$ esto descarta la posibilidad de que T sea isomorfismo.

- Enunciado

Sean los complejos $w = 2 - i$ y $z = -8 + 6i$. El cuadrado del módulo de $\overline{(\frac{z}{w^2})}$ es

A) 4

B) 2

C) -2

D) -4

Opción correcta: A)

Resolución

Para hallar módulo, primero debemos realizar la cuenta propuesta. Al realizar las operaciones obtenemos que el resultado es $-\frac{48}{25} + \frac{14}{25}i$. Como pide el cuadrado del módulo, alcanza con sumar los cuadrados de las partes imaginarias y reales: esto da 4.

- Enunciado

Dado el complejo $z = \sqrt{8} \cdot (cos(\frac{\pi}{4}) - sen(\frac{\pi}{4})i)$ la única opción que muestra su forma exponencial es:

A) $8 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

B) $8 \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i}$

C) $\sqrt{8} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

D) $\sqrt{8} \cdot e^{7\frac{\pi}{4}i}$

Opción correcta: D)

Resolución

El complejo z no está dado en forma exponencial. Si lo expresamos en su forma binómica, obtenemos el complejo $2 - 2i$. Este complejo tiene módulo $\sqrt{8}$ y argumento $\frac{7\pi}{4}$. Luego la forma exponencial es $\sqrt{8} \cdot e^{7\frac{\pi}{4}i}$.

- Enunciado

Consideren el polinomio $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6$. Sabiendo que $-i$ es raíz de $P(x)$, ¿cuál de las siguientes opciones es su factorización en $\mathbb{C}$?

A) $(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$

B) $(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i)(x+1)$

C) $(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i)(x+i)$

D) $(x-2)(x^2-3)(x^2+1)$

Opción correcta: C)

Resolución

Dado que $-i$ es raíz de $P(x)$ sabemos que en $\mathbb{Z}$ también debe ser i raíz de $P(x)$ entonces $(x-i)(x+i) = x^2+1$ debe dividir a $P(x)$, entonces $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6 = (x-i)(x+i)(x^3 - 2x^2 - 3x + 6)$, por el Lema de Gauss deducimos que $x = 2$ es raíz de $P(x)$, y entonces dividimos por $x - 2$ para obtener $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6 = (x-i)(x+i)(x-2)(x^2-3)$, de la factorización de esto último nos queda: $P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6 = (x-i)(x+i)(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

- Enunciado

Consideren el polinomio $P(x) = x^8 - x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 12x^3 + 8x^2$. Sabiendo que $x^2 + x - 2$ divide a P(x), ¿cuál de las siguientes opciones muestra las raíces de P?

A) $\{0; -1; 1; -2; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

B) $\{0; 1+i; 1-i; 1; -2; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

C) $\{0; 1+i; 1-i; 2; -2; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

D) $\{1+i; 1-i; 1; -2; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

Opción correcta: B)

Resolución

Primero dividimos a $P(x) = x^8 - x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 12x^3 + 8x^2$ por $x^2 - 2x + 2$, que por la resolvente tenemos sus raíces, a saber $1+i$ y $1-i$, observamos que x^2 divide al resultado pues se encuentra en todos los términos, con lo cual 0 es raíz doble. Lo que nos queda por Gauss tiene raíz 1, con lo cual obtenemos $x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ que también por Gauss tenemos que tiene raíz -2 de lo que resta es fácil obtener las últimos dos raíces $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.
