- Enunciado

Sabiendo que la distancia entre los puntos $\left(-\frac{5}{7};-5;\frac{1}{7}\right)$ y $\left(0;-5;-\frac{6}{7}\right)$ es la misma que la distancia entre el punto $(1;0;k)$ y el punto $(1;-k;k)$, indicá cuál es la única opción que muestra todos los posibles valores de k.

a) $\frac{\sqrt{74}}{7}, -\frac{\sqrt{74}}{7}$
b) $\frac{2\sqrt{37}}{7}; -\frac{2\sqrt{37}}{7}$
c) $\frac{74}{49}; -\frac{74}{49}$
d) $\frac{\sqrt{74}}{49}$

Opción correcta: *a)*

Resolución
Para resolver este problema habrá que recordar cómo se calcula la distancia entre dos puntos. Teniendo esto en cuenta, planteamos la condición que nos relata el problema: $||\left(-\frac{5}{7};-5;\frac{1}{7}\right)-\left(0;-5;-\frac{6}{7}\right)|| = ||(1;0;k)-(1;-k;k)||$.
Desarrollando esto nos quedará: $\sqrt{\left(-\frac{5}{7}\right)^2+0^2+1^2}=\sqrt{0^2+k^2+0^2}$
$\sqrt{\frac{25}{49}+1}=\sqrt{k^2} \to \frac{74}{49}=k^2 \to \sqrt{\frac{74}{49}}=|k|$ De donde obtenemos los dos valores de k: $\frac{\sqrt{74}}{7}, -\frac{\sqrt{74}}{7}$.

- Enunciado

Conociendo que el producto escalar entre los vectores de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es -18 y que ambos son vectores de norma 6, indicá la única opción que muestra el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{\pi}{3}$

Opción correcta: *b)*

Resolución
Para resolver este problema hay que tener presente la fórmula para hallar el ángulo entre vectores: $\cos(\alpha)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\cdot||\vec{w}||}$
Reemplazando los datos del problema, llegamos a que $\cos(\alpha)=-\frac{1}{2}$, luego $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

- Enunciado

Sean las rectas $L_1:(x;y;z)=\alpha\cdot(1;-1;0)+(1;1;2)$; $L_2:(x;y;z)=\beta\cdot(-1;1;-1)+(0;2;0)$. La única opción correcta es:

a) L_1 y L_2 son paralelas.
b) L_1 y L_2 son alabeadas.
c) L_1 y L_2 son ortogonales.
d) L_1 y L_2 son secantes.

Opción correcta: *d)*

Resolución
Como los vectores directores no son múltiplos podemos descartar que las rectas sean paralelas. Como el producto escalar entre los vectores directores no da 0, podemos descartar que las rectas sean ortogonales. Como la intersección entre las rectas no es vacía (es el punto $(2,0,2)$), podemos decir que las rectas son secantes.

- Enunciado

La distancia entre el punto $(2;0;0)$ y la recta de ecuación $(x;y;z)=\alpha\cdot(1;1;1)+(1;0;1)$ es:

a) $\sqrt{2}$
b) 2
c) $\sqrt{11}$
d) 6

Opción correcta: *a)*

Resolución
Para hallar la distancia entre el punto $(2;0;0)$ y la recta primero debemos hallar la proyección de $(2;0;0)$ sobre la recta. Esto lo hacemos hallando la intersección entre la recta y el plano cuya normal es el vector director de la recta, es decir perpendicular a la recta, y que pasa por $(2;0;0)$. Como la proyección da $(1;0;1)$, tenemos que la distancia es $||(1;0;1)-(2;0;0)||$. Esto da $\sqrt{2}$.

- Enunciado

Sea el subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}$, la dimensión de S es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Opción correcta: *b*)

Resolución
A partir de $x_1 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0$ despejamos $x_1 = x_3$ y $x_2 = x_4$ y entonces tenemos $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1; x_2; x_1; x_2) = x_1(1; 0; 1; 0) + x_2(0; 1; 0; 1)$ con lo cual $S = \{(1; 0; 1; 0), (0; 1; 0; 1)\}$ y por lo tanto $dim(S) = 2$.

- Enunciado

A partir de los subespacios $R = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R} : (x_1; x_2; x_3) = \lambda(1, 1, -1)\}$ y $R' = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. Indicá cuál de los siguientes es $R \cap R'$:

a) $R \cap R' = \{(0; 1; 1), (0; 0; 1)\}$
b) $R \cap R' = \{(1; 0; 0)\}$
c) $R \cap R' = \{(0; 0; 1; 0; 0)\}$
d) $R \cap R' = \{(0; 0; 0)\}$

Opción correcta: *d*)

Resolución
Reemplazando $x_1 = \lambda$, $x_2 = \lambda$ y $x_3 = -\lambda$ que se obtienen de R en $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ tenemos que $-4\lambda = 0$. Luego el único punto en común es $(0; 0; 0)$.

- Enunciado

La única opción que indica la ecuación de la directriz de la parábola $x^2 - 8x - 3y + 22 = 0$ es:

a) $y = \frac{4}{5}$
b) $y = \frac{11}{4}$
c) $y = \frac{3}{4}$
d) $y = \frac{5}{4}$

Opción correcta: *d*)

Resolución
La ecuación de la parábola $x^2 - 8x - 3y + 22 = 0$ puede ser escrita, completando cuadrados, como $(x-4)^2 = 3(y-2)$. Como las coordenadas del vértice son $(4, 2)$ y $2p = 3$ entonces $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$. Luego, la ecuación de la directriz es: $\left(4, 2 - \frac{3}{4}\right) = \left(4, \frac{5}{4}\right) \to y = \frac{5}{4}$.

- Enunciado

Elegí la única opción que indica el valor de p para que la elipse de ecuación $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-p)^2}{9} = 1$ tenga uno de sus focos en el punto $(-8, 1)$.

a) $p = 5$
b) $p = 1$
c) $p = -1$
d) $p = 3$

Opción correcta: *b*)

Resolución
Para encontrar el valor de c se debe plantear que $25 = c^2 + 9$ por lo que $c = 4$. Como uno de los focos es $(-8, 1)$, y la coordenada x del centro es -4, significa que el otro foco estará a la misma distancia de la recta $x = -4$ que el foco $(-8, 1)$. Luego, si el otro foco es $(0, 1)$, el centro de la elipse será el punto medio entre ambos focos, es decir: $(-4, 1)$. Entonces $p = 1$. Otra manera de pensarlo es que el foco $(-8, 1)$ está alineado con el centro de la elipse entonces no queda otra opción que sea $p = 1$.
