Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)

NOTAS SOBRE SUCESIONES

Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino

Índice general

Notas para Práctica 7

Sucesiones

7.1. Definición de sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Hay que destacar que la imagen no tiene ninguna restricción, por lo que pertenece al conjunto de los Reales. Podría suceder que, también, perteneciera a los números Naturales, dado que este conjunto está contenido en los Reales; pero esto sería un caso particular.

7.1.1. Notación

En las sucesiones - a diferencia de las funciones - tendremos un primer elemento (el que surja de reemplazar con 1 en la fórmula), un segundo (al reemplazar con 2), etcétera. Teniendo en cuenta esto, la notación, en lugar de indicarla como en las funciones, por ejemplo $f(1)$ que indicaría el primer elemento, $f(2)$ que indicaría el segundo, se indica con subíndices: f_1, f_2, f_3... . Además, para las fórmulas, con la finalidad de distinguir una sucesión de una función, se usan las letras *a, b, c* en lugar de la f y para los valores del dominio, la letra n (de naturales) en lugar de la x.

Algunos ejemplos:

- $a(n) = a_n = n^2 - 1$
- $b(n) = b_n = \frac{3}{n+5}$

También, nos podemos encontrar con que una sucesión está indicada mediante los primeros términos que la definen. En nuestros ejemplos quedarían de esta forma:

- $a_n = 0, 3, 8, 15...$
- $b_n = \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}...$

Encontrarnos con sucesiones dadas de esta manera nos traen dos problemas:

1. No es fácil identificar cuál es el término siguiente. Por ejemplo, en a_n si quisiéramos saber cuál es el término a_5 no nos daríamos cuenta, a simple vista, no sabemos cuál es la fórmula que genera esa sucesión.

2. Un problema mayor es que podríamos (y seguro se cumple) tener diferentes fórmulas para una misma sucesión. Por ejemplo:

$$c_n = 1, 2, 4...$$

   En esta sucesión, si quisiéramos saber cuál es el cuarto término (pensemoslo unos segundos antes de seguir leyendo...)
   Alguien podría decir que el cuarto término es 8. Otro, podría decir que es 7. Y, efectivamente, los dos podrían tener razón.
   La primera persona estaría pensando en esta fórmula: $c_n = 2^{n-1}$. En realidad, esta persona no pensaría exactamente en esta fórmula, sino que lo estaría pensando en forma recursiva (cosa que veremos enseguida), viendo que la relación con el término anterior es del doble. Es decir, 2 es el doble de 1; 4 lo es de 2; por lo tanto, el doble de 4 será 8.
   En cambio, el pensamiento de la otra persona se ajustaría a la siguiente fórmula: $c_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Nuevamente, esta persona de seguro no habría pensado en esta fórmula, habría observado que el segundo término es 1 más que el primero, y el tercero es 2 más que el segundo, por lo tanto, el cuarto será 3 más que el tercero, etcétera.

Por lo visto, una sucesión está bien definida con la fórmula.

7.1.2. Definición recursiva

Muchas veces nos será más cómodo definir una sucesión de forma recursiva. En lugar de tener una fórmula o mostrar varios términos, la definimos en función de algún término anterior. Por ejemplo:

$a_n = 2^{n-1}$ definición con la fórmula

$a_n = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16...$ mostrando los cinco primeros términos

$a_n = 2a_{n-1};\ a_1 = 1$ definición recursiva

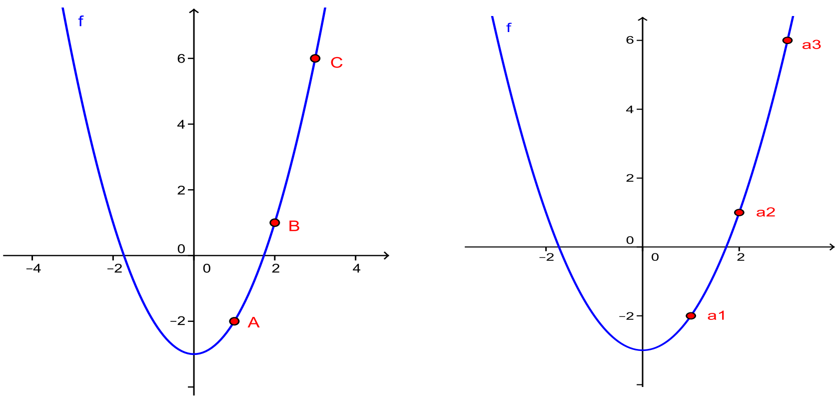
En la definición recursiva estamos diciendo que cualquier término es el doble del anterior. Por ejemplo $a_7 = 2a_6$ y $a_6 = 2a_5$ y así, de manera recursiva, llegamos hasta el primer término. Nótese que hay que definir este primer término aparte. Por ejemplo, si miramos la sucesión $b_n = 3, 6, 12, 24, 48...$, cada término es el doble del anterior. Sin embargo, no es la misma que a_n. ¿Qué cambia? El primer término, en lugar de ser 1 es 3.

En algunos casos, utilizaremos más de un término anterior. Por ejemplo, en la **sucesión de Fibonacci**, donde $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. En esta sucesión estamos diciendo que cada término es igual a la suma de los dos términos anteriores. En este caso deberemos definir los dos primeros términos, ya que al hacer f_3 nos indica que es igual a $f_1 + f_2$ y ya no podríamos seguir retrocediendo. Por lo tanto, hay que definir estos dos primeros términos: $f_1 = f_2 = 1$

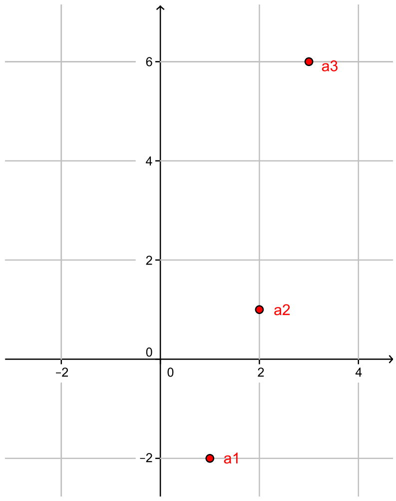
7.2. Comparación entre una sucesión y una función

¿Cuáles son las diferencias más importantes al comparar una sucesión con una función?

Veamos un ejemplo:

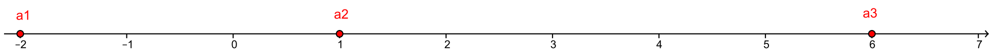


En la imagen, en la línea azul tenemos la función $f(x) = x^2 - 3$, en puntos rojos tenemos la sucesión $a_n = n^2 - 3$. Viendo nuevamente el gráfico pero, esta vez, sin el gráfico de la función:



Vemos que la sucesión son puntos que estarían sobre la gráfica de la función que es continua.

Otra forma de representar las sucesiones es en la misma recta de los reales, en un solo eje, como vemos en la siguiente figura:



Es decir, en este eje horizontal, estamos representando los valores de la imagen, indicando, arriba de cada punto, a qué término pertenece.

7.2.1. Límites aplicados a sucesiones

Como vimos en los gráficos, la representación de las sucesiones son puntos aislados (aunque puedan acumularse en alguna zona). Por lo que no tendría sentido hablar de cosas como límite en un punto, rectas tangentes, derivadas, etcétera. Es decir, no podremos derivar una sucesión.

Nos va a interesar el límite de la sucesión cuando el valor de n sea muy grande. ¿A qué tiende esa sucesión?

Continuando con el mismo ejemplo de la sucesión anterior:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-3\right)=+\infty$$

En general podremos utilizar todo lo visto y aplicado en las funciones, con algunos cuidados. Por ejemplo, si quisiéramos calcular este límite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{n-1}$$

En donde tenemos una indeterminación de tipo "infinito" sobre "infinito", podríamos sacar n factor común en el numerador y en el denominador y, luego de simplificar, indicar que el límite es 2. Sin embargo, si alguien quisiera aplicar L'Hopital no podríamos. ¿Por qué?

Por lo comentado anteriormente, no podremos derivar algo que es discreto (son puntos). Por supuesto que podríamos argumentar que la sucesión tendrá el mismo comportamiento en el infinito que una función con la misma fórmula pero con dominio en los reales (exceptuando alguno que anule el denominador). Es más, la sucesión serán puntos que pertenecen a la función. Por lo tanto, podríamos armar una función de esta forma:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Y, luego, hacer:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2x+3}{x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1} = 2$$

De esta forma aplicamos L'Hopital, derivamos numerador y denominador y concluimos que el límite de la función es 2, por lo que el límite de la sucesión será el mismo valor. Por supuesto que el resultado es el mismo pero, conceptualmente, no podemos derivar una sucesión ya que carece de sentido.

7.3. Algunas cuestiones más

Lo que nos faltaría agregar es que las sucesiones, como las funciones, podrían no estar definidas para ciertos valores de n. En el ejemplo anterior, la sucesión no estaba definida para $n = 1$. Por lo tanto podríamos decir que la sucesión comienza a partir del $n = 2$.

También, a veces, nos interesará agregar el valor 0. Por lo tanto, el dominio serán los naturales más el cero. Muchas veces, en este caso, el primer término se indica como a_0 en lugar de a_1.

Por otro lado, también podríamos tener sucesiones definidas en forma partida, como lo hacíamos con las funciones. Por ejemplo:

$$a_n = \begin{cases} n+1 & si\ n \leq 5 \\ \frac{3}{n-5} & si\ n \geq 6 \end{cases}$$

Por supuesto que en el ejemplo anterior, la función que está en la primera línea no nos interesará cuando veamos el límite al infinito.