- Enunciado

Si $(a, b, a, 0)$ es solución del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases}$

La única opción que muestra los valores de a y de b es:

A) $a = -2$ y $b = 1$.
B) $a = 1$ y $b = -2$.
C) $a = 0$ y $b = 0$.
D) No existen valores de a y b para la solución indicada.

Opción correcta: B)
Rsolución
Si triangulás el sistema y encontrás que es compatible determinado, igualando coordenada a coordenada la solución obtenida con $(a, b, a, 0)$ te permitirá obtener los valores de a y de b.

- Enunciado

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ La única opción que muestra el determinante de la matriz $3A^2$ es:

A) 5
B) 25
C) 75
D) 675

Opción correcta: D)
Resolución
Conociendo las propiedades de los determinantes, podrás calcular el determinante de la matriz A y luego elevarlo al cuadrado y multiplicarlo por 3^3, para obtener la respuesta al problema.

- Enunciado

Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con expresión funcional: $T(x_1; x_2; x_3) = (px_1; x_2 - x_3; -2x_1 + px_3)$ Indicá la opción que muestra todos los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que $T(p; 2; -1) = (9; 3; 9)$

A) $p = 3$
B) $p = 3$ ó $p = -3$
C) $p = -3$
D) No existen valores de p para que se cumpla lo pedido.

Opción correcta: C)
Resolución
Usando la forma funcional de la transformación lineal, planteamos lo siguiente para hallar $T(p; 2; -1)$: $T(p; 2; -1) = (p \cdot p; 2-(-1); -2p+p\cdot(-1)) = (p^2; 3; -3p)$. Luego, para que se cumpla que $T(p; 2; -1) = (9; 3; 9)$ tiene que cumplirse que $(p^2; 3; -3p) = (9; 3; 9)$. Igualando coordenada a coordenada, se deduce que el único valor posible para p es -3.

- Enunciado

Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con expresión matricial: $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única verdadera:

A) El núcleo de T es un conjunto vacío.
B) T es monomorfismo.
C) El núcleo de T tiene dimensión 1.
D) La imagen de T tiene dimensión 2.

Opción correcta: C)
Resolución
Para analizar las afirmaciones alcanza con hallar el núcleo o la imagen de T para luego, apoyándonos en el Teorema de la dimensión, poder deducir la dimensión de imagen o núcleo. Si optamos por analizar el núcleo, debemos plantear De allí, nos quedan tres igualdades de donde, el conjunto solución de ese sistema es el núcleo de T. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ De allí, nos quedan tres igualdades de donde, el conjunto solución de ese sistema lineal es el núcleo de T. $Nu(T) = \langle (1; -1; 1; -1) \rangle$ por lo que la dimensión del núcleo es 1. Observemos que esto ya descarta las primeras dos opciones y además también el última, puesto que si la dimensión del núcleo es 1 por Teorema de la dimensión tenemos que $4 = 1 + dim(Im(T))$

- Enunciado

Sean los complejos $w = 10 - 5i$ y $z = -4 + 3i$. La raíz cuadrada del módulo de $\overline{(\frac{w^2}{z})}$ es

A) 25

B) 5

C) -25

D) -5

Opción correcta: B)
Resolución
Para hallar módulo, primero debemos realizar la cuenta propuesta. Al realizar las operaciones obtenemos que el resultado es $-24-7i$. Calculamos el módulo. Para eso debemos calcular la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las partes imaginarias y reales. Esto da 25. La raíz cuadrada de 25 es 5.

- Enunciado

Dado el complejo $z = \sqrt{6} \cdot (-cos(\frac{\pi}{4}) + sen(\frac{\pi}{4})i)$, la única opción que muestra su forma exponencial es:

A) $6 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

B) $6 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$

C) $\sqrt{6} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

D) $\sqrt{6} \cdot e^{3\frac{\pi}{4}i}$

Opción correcta: D)
Resolución
Observemos que z no está dado en forma exponencial. Si lo pasamos a su forma binómica obtenemos el complejo $-\sqrt{3} + \sqrt{3}i$. Este complejo tiene módulo $\sqrt{6}$ y argumento $\frac{3\pi}{4}$. Luego la forma exponencial es $\sqrt{6} \cdot e^{3\frac{\pi}{4}i}$.

- Enunciado

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, un polinomio de grado mínimo que cumple simultáneamente:

- $P(3) = 26$.
- P es divisible por $(x + 2i)$.
- P tiene a 2 como raíz simple.

A) $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x - 16$

B) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 16$

C) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x + 16$

D) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x - 16$

Opción correcta: B)
Resolución
En este problema se trabaja con la construcción de polinomios conociendo sus raíces y su valor al evaluarlo en un número dado. Entonces, como $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, tenemos que $P(x) = a(x+2i)(x-2i)(x-2) = a(x^2+4)(x-2)$ entonces de $P(3) = 26$ encontramos el a.

- Enunciado

Si $P(x) = x^6 + 3x^5 + 9x^4 + 27x^3$. Indicá cuál es la única opción que muestra la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{C}[x]$.

A) $P(x) = x^3(x - 3i)(x - 3i)(x - 3)$

B) $P(x) = x^3(x + 3i)(x + 3i)(x - 3)$

C) $P(x) = x^3(x - 3i)(x + 3i)(x + 3)$

D) $P(x) = x^3(x - 3i)(x + 3i)(x - 3)$

Opción correcta: C)
Resolución
Primero $P(x) = x^6 + 3x^5 + 9x^4 + 27x^3 = x^3(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$ y una forma sencilla de factorizar esto en notar que $x^3 + 3x^2 = x^2(x + 3)$ y $9x + 27 = 9(x + 3)$ entonces $x^3 + 3x^2 + 9x + 27 = x^2(x + 3) + 9(x + 3) = (x^2 + 9)(x + 3)$ es decir $x^3(x^2 + 9)(x + 3)$. Finalmente $x^2 + 9 = (x - 3i)(x + 3i)$.
