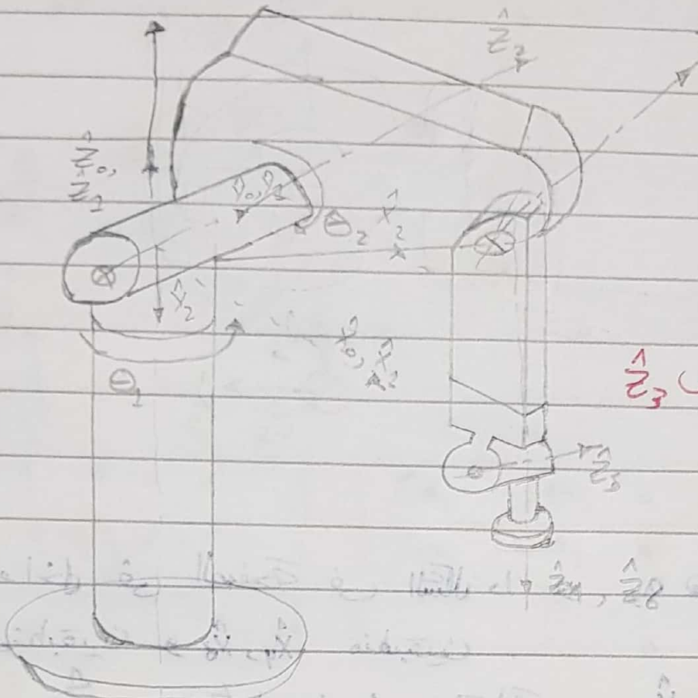
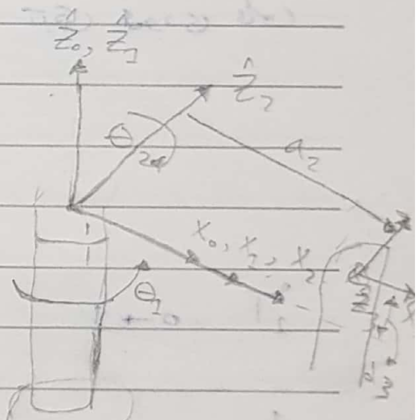
Robotic systems 3b: Forward Kinematics For the Puma 560

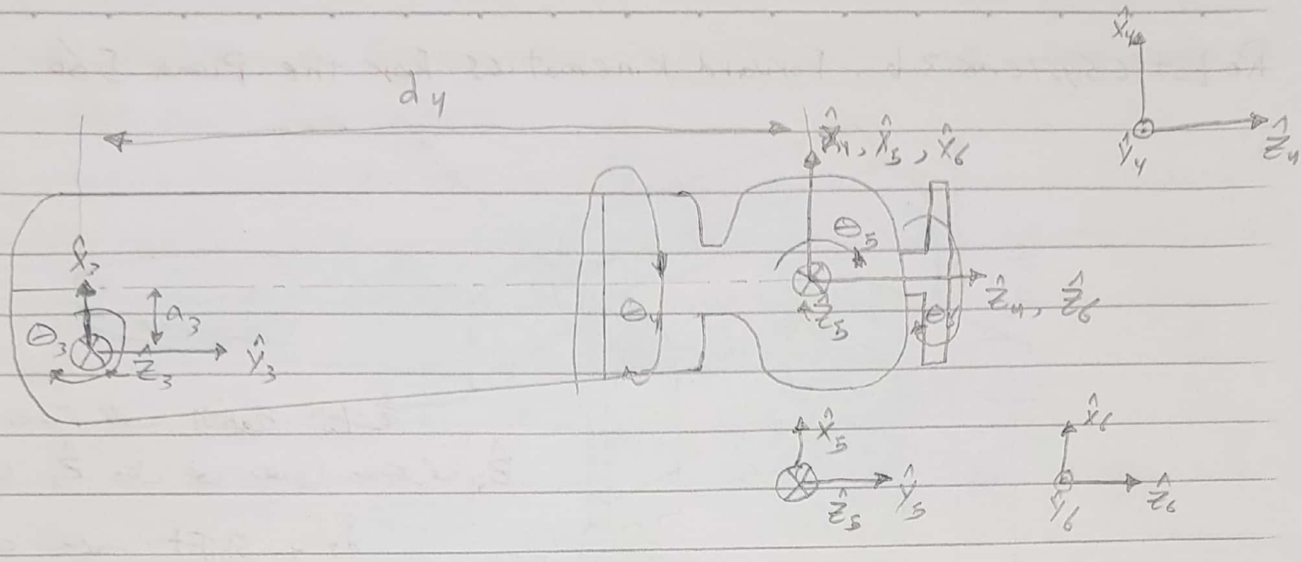


لو بصيت على القطعة التانية
لكن $\hat{Z}_2$ مش فى نفس مستوى $\hat{Z}_3$
فيه بينهم ← Shift d_3



* عند أول Joint وتانى أخدت $\hat{Z}_0, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3$ فى نفس الاتجاه
و $\hat{X}_0, \hat{X}_1$ نفس الاتجاه عشان يبقوا مع $\hat{X}_2$ والرسمة
دى كدا فى حالة البداية لسه θ_1 بصفر لو ال Joint
لفت الشرطتين اللى راسمهم بين الجزء الفكس وال Joint
مش هيبقوا فوق بعض و $\hat{X}_2$ هتلف بزاوية θ_2
عن $\hat{X}_0$ وحددت اتجاه الزاوية الموجب بقاعدة اليد
اليمنى

* تانى [redacted] Joint هتلف ب θ_2 حوالين $\hat{Z}_2$ وحددت
اتجاهها الموجب وفيه مسافة بين Frame{2} و
Frame{3} $\boxed{a_2 = \hat{X}_2}$ وفيه $Shift = d_3$



* $\hat{Z}_3$ داخل فى الصفحة فى الشكل دا و a_3 هى $\hat{X}_3$ و جيبا θ_3 و $\hat{Y}_3$

* $\hat{Z}_4, \hat{Z}_6$ منطبقين و $\hat{X}_4, \hat{X}_6$ منطبقين

* $\hat{Z}_4$ و $\hat{Z}_5$ بيتقاطعوا فى نقطة و $\hat{X}_4$ لازم تبقى عمودى على المستوى اللى بيعملوه مع بعض

* $\hat{X}_5$ نفس الكلام بسبب تقاطع $\hat{Z}_5$ و Z_6

${}^{0}_{1}T$ $0 \to 1$	α_0 0	a_0 0	θ_1 θ_1	d_1 0
${}^{1}_{2}T$ $1 \to 2$	α_1 -90	a_1 0	θ_2 θ_2	d_2 0
${}^{2}_{3}T$ $2 \to 3$	α_2 0	a_2 a_2	θ_3 θ_3	d_3 d_3
${}^{3}_{4}T$ $3 \to 4$	α_3 $-90°$	a_3 a_3	θ_4 θ_4	d_4 d_4
${}^{4}_{5}T$ $4 \to 5$	α_4 $90°$	a_4 0	θ_5 θ_5	d_5 0
${}^{5}_{6}T$ $5 \to 6$	α_5 $-90°$	a_5 0	θ_6 θ_6	d_6 0

* الزوايا θ_n كلهم متغيرات هحطهم في الـ matlab أما $\boxed{a_2, a_3, d_2, d_3}$ Constant Parameters لازم أكون عارفهم لأنهم حاجة بتعتمد على أبعاد الروبوت

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(-90^\circ) & -s(-90^\circ) & 0 \\ 0 & s(-90^\circ) & c(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

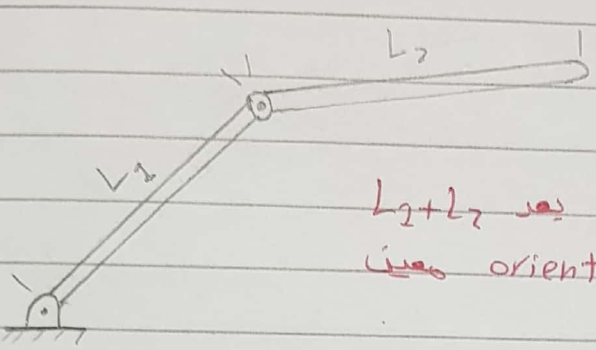
$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & c(-90^\circ) & -s(-90^\circ) & 0 \\ 0 & s(-90^\circ) & c(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^4_5T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c90^\circ & -s90^\circ & 0 \\ 0 & s90^\circ & c90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^5_6T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(-90^\circ) & -s(-90^\circ) & 0 \\ 0 & s(-90^\circ) & c(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

~~Robotics systems 4: Inverse Kinematics~~

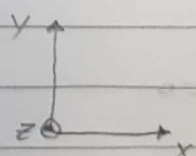


* أقدر أوصل لكل النقط اللى على بعد L_1+L_2 لكن محدود وملزم بـ orientation معين لأن بس معايا (2 D.o.F)

Dexterity: هى القدرة على الوصول لأى Position وبأى orientation أنا عايز أوصله

* فى الـ Manipulator دا لو افترضنا $L_1 = L_2$ هيكون عندى نقطة واحدة dexterous هى الـ origin هقدر أحط الـ wrist عند الـ origin وهغير الـ orientation عن طريق θ_2 لكن مش هقدر أعمل كدا مع كل النقط علشان كدا هيكون فيه اسئلة ملهاش إجابة فى الجزء دا

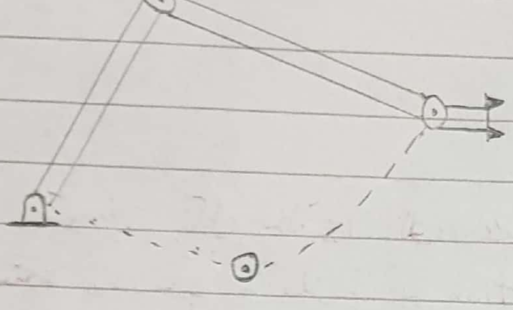
Subspace: هو البلان أو السبيس اللى أقدر أتحرك فيه بالروبوت وفى المثال دا هو الـ Plan (x-y) لو افترضنا الـ z جوا الصفحة آخره يتحرك فى البلان. دا الـ subspace



Workspace: صحيح ليه حرية فى الـ Plan (x-y) لكنه ميقدرش يوصل لكل النقط فى البلان لأن البلان ممتد لما لا نهاية وحتى لو وصل لنقط معينة فمش هيقدر يحقق كل الـ orientation اللى ممكن أحتاجها فدا هو الـ Workspace بتاعه

Workspace ⊂ Subspace ⊂ Space

*Three link manipulator



فى المثال دا لسا الـ subspace زى بلان برضو لكن الـ Work space
أكبر و هيبدأ يظهرلى أكتر من حل

* فى حالة الـ Puma 560 عندى ٨ حلول لمعظم النقط فى الـ Work space
بتاعه

* فى الـ inverse kine أوقات بيكون مفيش حل و أوقات بيكون
فيه أكتر من حل لأنى بحاول أوصل لنقطة فبشوف الزوايا
عكس الـ Forward أنا بس كنت بشوف أنا وصلت فين لما عملت
زوايا معينة

a_i	Number of Solutions
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
All $a_i \neq 0$	≤ 16

PAGE
DATE

Transcendental equations:

- معادلات مبقدرش أحلها مباشر و أطلع قيمة المتغير و مبقدرش أحلهم analytical لازم أحلهم numerical

Ex on Algebraic equation:

- $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}}$

- دا كدا Closed Form أقدر أجيب بيه قيمة المتغير مباشر

Ex on Transcendental equation:

- $a \cos\theta + b \sin\theta = c$

- مبقدرش أحلها مباشر ، لكن فيه ٣ طرق بحولها بيها من Transcendental ل Algebraic

PAGE
DATE

Solving Transcendental equations: Method 1 (Quadratic equation)

$\because \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

* بالتعويض

$\therefore a\sqrt{1-\sin^2\theta} + b\sin\theta = c$

$\therefore a\sqrt{1-\sin^2\theta} = c - b\sin\theta$

$\therefore a^2 - a^2\sin^2\theta = c^2 + b^2\sin^2\theta - 2cb\sin\theta$

$$\boxed{\therefore (a^2+b^2)\sin^2\theta - 2cb\sin\theta + (c^2-a^2) = 0}$$

* كدا حولت شكلها ل Algebraic eq أقدر أحلها بسهولة

$$\boxed{\therefore \sin\theta = \frac{-(-\cancel{2}bc) \pm \sqrt{4b^2c^2 - 4(a^2+b^2)(c^2-a^2)}}{\cancel{2}(a^2+b^2)}}$$

Method 2: introducing an angle γ

- by dividing by $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\therefore \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

let $\sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

* دا فرض لكن منطقي و كأن عندي
مثلث ضلعين فيه a, b و الوتر $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\therefore \sin\gamma \cos\theta + \cos\gamma \sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B}$$

$$\therefore \sin(\gamma+\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore \gamma + \theta = \sin^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \gamma$$

$$\boxed{\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}$$

Method 3: Variable substitution

- Put $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$u^2 = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\therefore \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\theta + 1}{2}$$

$$\therefore u^2 = \frac{1 - \frac{\cos\theta + 1}{2}}{\frac{\cos\theta + 1}{2}} \quad * \frac{2}{2}$$

$$\therefore u^2 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$

$$\therefore u^2 + u^2\cos\theta = 1 - \cos\theta$$

$$\therefore (u^2 + 1)\cos\theta = 1 - u^2$$

$$\boxed{\therefore \cos\theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+u^2)^2 - (1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}} = \sqrt{\frac{\cancel{1} + \cancel{u^4} + 2u^2 - \cancel{1} - \cancel{u^4} + 2u^2}{(1+u^2)^2}}$$

$$\boxed{\therefore \sin\theta = \frac{2u}{1 + u^2}}$$

$$* \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

when $A = B$

$$\therefore \cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$$

$$\therefore \cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\therefore \cos^2 A = \frac{\cos 2A + 1}{2}$$

* بعد كدا أرجع أعوض في قيمة $\cos\theta$, $\sin\theta$

$$\therefore a\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right) + b\left(\frac{2u}{1+u^2}\right) = c \quad * \; 1+u^2$$

$$\therefore a(1-u^2) + 2bu = c(1+u^2)$$

$$\therefore a - au^2 + 2bu = c + cu^2$$

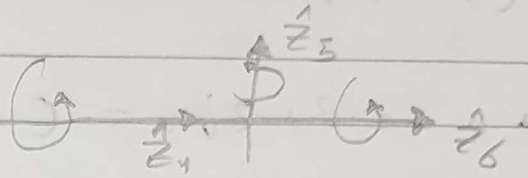
$$\therefore (a+c)u^2 - 2bu + (c-a) = 0$$

$$\boxed{u = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4(c^2-a^2)}}{2(a+c)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

* Spherical wrist

Three Revolute joints with intersecting Z - axis

(e.g Puma 560 {4}, {5}, {6})



regardless of $\theta_4, \theta_5, \theta_6$

no change in (P_4 org = P_5 org = P_6 org)

* كلهم محطوطين على نفس الأوريجين

* الفكرة دى حطها عالم اسمه Pieper فى ستانفورد 1968

عبارة عن لو عندى (6 D.o.F manipulator arm with a spherical wrist)

- يبقى عندى (Closed Form solution For inverse kinematics) يعنى كأن فيه صيغة مباشرة أقدر أجيب بيها الـ inverse kine

* وطالما آخر ٣ فريم فى نفس الأوريجين

- يبقى كأن أول ٣ بيحددولى الـ Position of wrist
- و آخر ٣ بيحددولى الـ orientation

$[\theta_1, \theta_2, \theta_3] \rightarrow$ Position of the wrist

$[\theta_4, \theta_5, \theta_6] \rightarrow$ orientation

Space, subspace and workspace

IF D.o.F = 6 — يبقى أنا كدا شغال في ال space

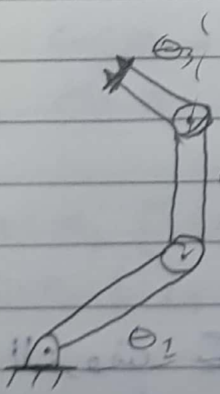
* لكن في حالة ال manipulator 2 links مثلا هو محدود بـ subspace
بس plan(x-y) وال z دايما zero وكمان مبيقدرش يوصل لكل
مكان في ال subspace فبيشتغل في work space محدودة

workspace $\subset$ subspace $\subset$ space

Forward Kinematics — general Form

$$\begin{bmatrix} & & & (\ ) \\ & & & (\ ) \\ & & & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & x \\ & & & y \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

في (x,y) الحالة دي هيكونوا ليهم قيم بدلالة $(\theta_1, \theta_2, ...)$
ودي حالة عامة

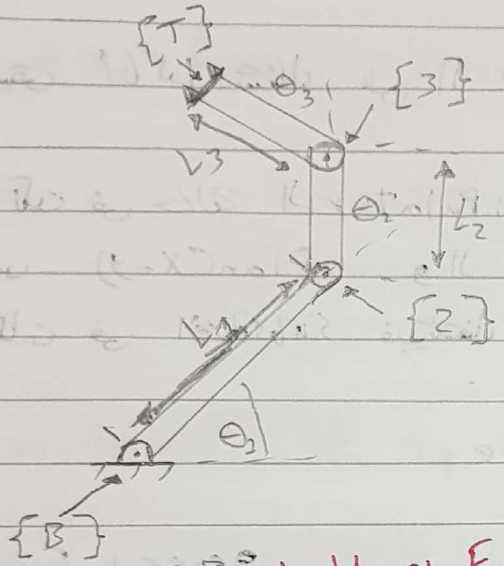


أطوال اللينكات معروفة

$$\begin{bmatrix} F.K \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & x \\ S\phi & C\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* في ال inverse أنا معلوم عندي ال ϕ النهائية و ال x, y ودي Closed Form
لل RRR Planar و بيدأ أشتغل ال Forward عادي و أجيب قيم ال $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

Inverse Kinematics of RRR Planar manipulator



{0} , {1}

كدا دي F.K بعد ما اتعمل

حسابات كل ال T matrices

$$ {}^{B}_{W}T = {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{1+2+3} & -s_{1+2+3} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{1,2} \\ s_{1+2+3} & c_{1+2+3} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{1+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

sub space

$$ = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & x \\ s\phi & c\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

المفروض يكون 16 معادلة عشان أجيب المجاهيل وا نظرياً

لكن عملياً هما 4 بس

$* \cos\phi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \rightarrow (1)$

$* \sin\phi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \rightarrow (2)$

$* L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = x \rightarrow (3)$

$* L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = y \rightarrow (4)$

$$x^2 = L_1^2 \cos^2\theta_1 + L_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + 2L_1 L_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y^2 = L_1^2 \sin^2\theta_1 + L_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + 2L_1 L_2 \sin(\theta) \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \left(\cos\left(\cancel{\theta_1} + \theta_2\right) - \cancel{\theta_1} \right)$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 L_1 L_2}$$

$$\therefore \sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}$$

بعد كدا هاخد الحلين لـ θ_2 و أبنى عليهم θ_1, θ_3

هنا هاخد معادلة ٣ , ٤ و هفككهم

$$L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - L_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 = x$$

$$L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + L_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 = y$$

$$\cos\theta_1 [L_1 + L_2 \cos\theta_2] - \sin\theta_1 [L_2 \sin\theta_2] = x$$

$$\sin\theta_1 [L_1 + L_2 \cos\theta_2] + \cos\theta_1 [L_2 \sin\theta_2] = y$$

Take: $[L_1 + L_2 \cos\theta_2] = k_1$

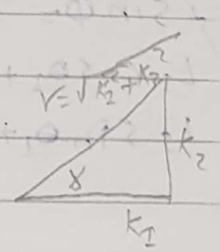
$[L_2 \sin\theta_2] = k_2$

$\therefore K_1 \cos\theta_1 - K_2 \sin\theta_1 = x$

$K_1 \sin\theta_1 + K_2 \cos\theta_1 = y$

$\therefore r\cos\gamma \cos\theta_1 - r\sin\gamma \sin\theta_1 = x$

$r\cos\gamma \sin\theta_1 + r\sin\gamma \cos\theta_1 = y$



$K_2 = r\sin\gamma$

$K_1 = r\cos\gamma$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(\theta_1+\gamma) \\ \frac{y}{r} &= \sin(\theta_1+\gamma) \end{aligned}\right] \quad \boxed{\theta_1 + \gamma = ATAN2(y\ \ x)}$$

هطلع معايا قيمتين لل θ_2 من $\sin\theta_2$ ف K_2 هتديني
قيمتين لـ θ_2

$$\gamma = ATAN2(K_2\ \ K_1)$$

Solution 1: $\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3$

Solution 2: $\theta_1' \quad \theta_2' \quad \theta_3'$

PAGE

DATE

Numerical Example on Planar RRR Inverse Kinematics:

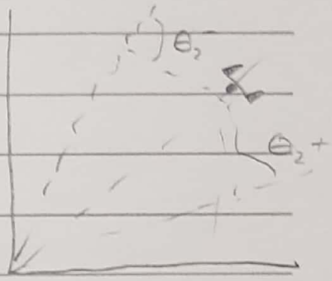
نفس المثال اللى شرحنا عليه

required: T

given: $\phi = 45^\circ$, $x = \sqrt{1.5}$, $y = \sqrt{1.5}$

$L_1 = L_2 = 1\ m$

$\cos\theta_2 = \dfrac{1.5 + 1.5 - 1 - 1}{2} = 0.5$



$\therefore \theta_2 = 60 \rightarrow$ First solution

$\therefore \sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - (0.5)^2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta_2 = 60^\circ, -60^\circ$

$k_1 = 1 + (1)(0.5) = 1.5$

$k_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\gamma = \text{ATAN2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ 1.5\right)$

$\gamma = \pm 30^\circ$

$(\theta_1 + \gamma) = \text{ATAN2}\left(\sqrt{1.5}\ \sqrt{1.5}\right)$

$\theta_1 + \gamma = 45^\circ$

$\theta_1 \pm 30 = 45^\circ$

$\theta_1 = 15^\circ, 75^\circ$

	Solution 1	Solution 2
θ_1	15°	75°
θ_2	60°	-60°
θ_3	-30°	30°