תרגיל 7 – אינפי 1 – האינטגרל המסוים

התרגילים להגשה : 1-א,ד,   2-ג,ו,ט,יב,יג,   3-ב,ה,   4-ב,ד,ז   6,   7-ב,ג-(2),(3),   8,   11,   13-א,ג,ו,ז,ט,י,   15-א,ג,
16 – א. סעיפים 2, 4, 6, 7, 11, ב. סעיפים 2, 5

1. חשב את האינטגרלים הבאים – א. לפי ההגדרה, כלומר כגבול של סכום רימן. (די בביצוע חלוקה של הקטע לתתי קטעים השווים באורכם ובחירה אחידה של הנקודות בכל תת קטע.)
ב. ע"י נוסחת ניוטון-לייבניץ.

א. $\int_{2}^{5}\left(3x^{2}-4x\right)dx$ ב $\int_{-1}^{4}\left(x^{3}-x\right)dx$ ג. $\int_{-2}^{3}\left(2x^{2}-3x-4\right)dx$ ד. $\int_{3}^{7}e^{x}dx$

ניתן להשתמש בנוסחאות לסכום סדרה חשבונית וסדרה הנדסית ובנוסף בנוסחאות :

$$\sum_{i=1}^{k}i^{2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\qquad \sum_{i=1}^{k}i^{3}=\frac{k^{2}(k+1)^{2}}{4}\qquad \sum_{i=1}^{k}i^{4}=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^{2}+3k-1)}{30}$$

2. חשב את האינטגרלים המסוימים הבאים ע"י שימוש בנוסחת ניוטון-ליבניץ.

א. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ ב. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin 2x\,dx$ ג. $\int_{1}^{5}\left(x^{2}-6x+8\right)dx$

ד. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{0}\tan^{2}3x\,dx$ ה. $\int_{-4}^{4}|x|\,dx$ ו. $\int_{1}^{5}\left|x^{2}-6x+8\right|dx$

ז. $\int_{1}^{2}\frac{x^{7}-2x+1}{4x^{3}}dx$ ח. $\int_{1}^{1.5}(4x-5)^{9}dx$ ט. $\int_{1}^{4}\sqrt{x^{2}-6x+9}\,dx$

י. $\int_{0}^{8}\frac{x}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}dx$ יא. $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^{2}}dx$ יב. $\int_{e}^{e^{3}}\frac{dx}{x\ln^{2}x}$

יג. $\int_{1}^{16}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ יד. $\int_{0}^{1}\frac{5+e^{x}}{5+5x+e^{x}}dx$ טו. $\int_{0}^{1}\frac{20}{(2x+1)(x-2)}dx$

3. חשב את האינטגרלים הבאים ע"י שימוש בשיטת "אינטגרציה בחלקים" של האינטגרל המסוים.

א. $\int_{1}^{e}\ln x\,dx$ ב. $\int_{1}^{e}x^{2}\ln x\,dx$ ג. $\int_{0}^{\ln 2}xe^{3x}dx$

ד. $\int_{0}^{\pi}t^{2}\sin 2t\,dt$ ה. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{x}{\cos^{2}x}dx$ ו. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\arctan x\,dx$

4. חשב את האינטגרלים הבאים ע"י שימוש בשיטת ההצבה של האינטגרל המסוים.

א. $\int_{1}^{3}(3x-4)^{4}dx$ ב. $\int_{0}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}+4}$ ג. $\int_{1}^{5}\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ ד. $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$

ה. $\int_{0}^{0.5\pi}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx$ ו. $\int_{0}^{8}e^{\sqrt[3]{x}}dx$ ז. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(2\sin x+1)(\sin x+2)}dx$

5. נתונה הסדרה: $\mathrm{I}_\mathrm{n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ $\quad (n \in N)$.

א. חשב את I_0 ו- I_1 ובטא את I_{n+2} באמצעות I_n.

ב. חשב את I_9 ו- I_{10} באמצעות הנוסחה שקיבלת בסעיף א.

6. נתונה הסדרה: $\mathrm{I}_\mathrm{n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ $\quad (n \in N)$.

א. חשב את I_0 ו- I_1 ובטא את I_{n+2} באמצעות I_n.

ב. חשב את I_9 ו- I_{10} באמצעות הנוסחה שקיבלת בסעיף א.

ג. התבונן בגרף של הפונקציה $f(x) = \tan^n x$ בקטע $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ עבור ערכים גדולים של n,
הסק מה צפוי להיות הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}_n$ ללא הוכחה פורמלית
והסק בעזרת סעיף א דרך לחישוב מקורב של π ושל $\ln 2$.

7. א. הוכח: אם f פונקציה זוגית ואינטגרבילית בקטע $[-a,a]$ אז $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

ב. הוכח: אם f פונקציה אי-זוגית ואינטגרבילית בקטע $[-a,a]$ אז $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

ג. הוכח: 1) $\int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8} x^{10} \sin^9 x dx = 0$ $\qquad$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x} dx = 0$

3) $\int\limits_{-1}^{1} e^{\cos x} dx = 2\int\limits_0^1 e^{\cos x} dx$ $\qquad$ 4) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x} dx = 0$

8. פונקציה f רציפה ב- $\Re$ ומחזורית בעלת מחזור T.
הוכח שהאינטגרל $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx$ לא תלוי בערך של a.

9. נתונה פונקציה f אינטגרבילית בקטע $[0,c]$.

א. הסבר מדוע מהנתון ניתן להסיק שגם $\int_0^c f(c-x)\,dx$ קיים.

ב. הוכח ש- $\int_0^c f(c-x)\,dx = \int_0^c f(x)\,dx$.

ג. הסק מסעיף ב $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ לכל $n \in N$.

ד. הוכח מסעיף ג (ללא חישוב מפורש של האינטגרלים): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$.

10. א. נתונה פונקציה f הרציפה בקטע [-1,1].

הוכח שמתקיים השוויון : $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

שים לב שעליך להסביר גם מדוע כל אחד מהאגפים של השוויון קיים.

ב. בעזרת הסעיף הקודם, חשב את $\int_0^{\pi/2} \cos^2 xdx$ ו $\int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$.

הערה : שאלה זו דומה לשאלה 9.

11. נתונה פונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

א. הסבר מדוע שני האינטגרלים $\int_a^b f(x)\,dx$ ו- $\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ קיימים.

ב. הוכח ש- $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$. שים לב שסעיף זה הוא הכללה של שאלה 9 ב.

ג. השתמש בסעיף הקודם כדי לחשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx$.

ד. לכל מספר ממשי r מגדירים $I_r = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^r x}{\cos^r x + \sin^r x}dx$. הוכח שלכל r ממשי $I_r = \frac{\pi}{4}$.

12. א. הוכח : $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$

ב. נתון $f(0) = g(0) = 0$.

הוכח את השוויון : $\int_0^a f''(x)g(x)dx + f'(a)g(a) - f(a)g'(a) = \int_0^a f(x)g''(x)dx$

ג. נתון f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$ ו- g הופכית ל- f בקטע זה.

הוכח: $\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$.

ד. חשב את האינטגרל $\int_1^e \ln xdx$ על ידי שימוש בסעיף ג.

ה. למקרה בו $0 < a < b$ ו- f ו- g חיוביות, הסבר באופן גיאומטרי את השוויון שבסעיף ג.

יישומים של האינטגרל המסוים

13. חשב את השטחים של התחומים החסומים ע"י הקווים הבאים. שרטט סקיצה של כל תחום (במערכת צירים) תוך ציון הפרטים המשמעותיים לצורך החישוב ודיוק בהם. שים לב שלעתים התחום נחלק למספר חלקים. שים לב האם עדיפה אינטגרציה לפי x או לפי y (בפרט, בסעיפים ו-ט) .

א. $y=\sqrt{4-x}$, $y=2-\sqrt{x}$.

ב. $y=x^3-6x^2+8x$, $y=0$.

ג. $y=x^3+2x^2-4x+5$, $y=5x^2-3x+2$

ד. $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\left(x^2+1\right)^{-1}$

ה. $y=\cos x$, $y=\sin 2x$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. $y=x^3+1$, ציר ה- x והמשיק לגרף הפונקציה $y=x^3+1$ בנקודה $(1,2)$.
1) התחום שמעל ציר ה- x . 2) התחום שמתחת ציר ה- x .
חשב כל אחד מהשטחים ע"י אינטגרל אחד בלבד.

ז. $y=0$, $x=1$, $y=\arcsin x$.

ח. $y=0$, $x=1$, $y=\arctan x$.

ט. $y^2=4x$, $y=2x-4$.

י. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ [זו משוואת אליפסה קנונית].

14. א. הוכח: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\,(\sqrt{n+1}-1)$.

ב. הוכח: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$.

הדרכה: שרטט את הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=\frac{1}{x}$ ובנה מלבנים שבסיסיהם [i,i+1] (i=1..n).

15. בעיות קצב/מהירות

א. המהירות של גוף t שניות לאחר תחילת תנועתו שווה ל- $v(t)=30-2t$ מ'/שני'.
מהי הדרך שיעבור הגוף במשך 10 שניות מתחילת התנועה?

ב. גוף נע בקו ישר בתאוצה השווה ל- $a(t)=12t^2$ מ' שני' בריבוע, כעבור t שניות מתחילת התנועה.
בתחילת התנועה, מהירות הגוף הייתה שווה לאפס.
מהי הדרך שיעבור הגוף במשך 10 השניות הראשונות מתחילת התנועה?
הדרכה: אם תאוצת התנועה קבועה וערכה שווה ל- a מ'/שני' בריבוע, אז במשך t שניות המהירות של הגוף תגדל ב- at מ'/שני'.

ג. מים מוזרמים למיכל. קצב זרימת המים למיכל כעבור t שניות מרגע תחילת המילוי הינו $100-3t$ ליטר לשנייה. מהי כמות המים המוזרמת למיכל במשך הזמן בין t = 10 ל- t = 20 שניות?

ד. סטודנט קורא ספר לימוד. קצב הקריאה כעבור t שעות מרגע תחילת הקריאה הינו $10-t$ עמודים בשעה. כמה עמודים יקרא הסטודנט -
1) במשך שלוש שעות הקריאה הראשונות? 2) במשך שלוש שעות הקריאה השניות?

ה. גוף נע 10 מטר תחת השפעה של כוח שערכו $0.2(x-5)^2$ ניוטון, כאשר x מתאר את המרחק במטרים מתחילת התנועה. חשב את עבודת הכוח.
הדרכה: אם גוף נע s מטרים תחת השפעה של כוח קבוע שערכו f ניוטון (זו יחידת כוח) אז עבודת הכוח שווה ל- fs דז'אול (זו יחידת עבודה).

16. בתרגיל זה תלמד על מושג האינטגרל הלא אמיתי בכמה מקרים.

<u>אינטגרלים לא אמיתיים</u>

האינטגרל המסוים של פונקציה (לפי רימן) בקטע התייחס רק למצבים הבאים -

א. הקטע הוא סגור.

ב. הפונקציה רציפה בקטע סגור או רציפה למקוטעין בקטע סגור כלומר הפונקציה מוגדרת בקטע סגור ויש לה אי רציפות בקבוצה סופית של מספרים בקטע ובכולם אי הרציפות סליקה או מסוג ראשון.

נרצה לעסוק כעת גם במצבים -

א. הקטע הוא מהצורה $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$ ו- $(-\infty,+\infty)$.

ב. לפונקציה יש אי רציפות מסוג שני בקטע.

במצבים אלו האינטגרל יוגדר ע"י גבולות כפי שנראה להלן:

מקרה א:

א.1. תהי f פונקציה רציפה או רציפה למקוטעין בקטע $[a,+\infty)$.

אם קיים הגבול $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ כגבול ממשי אז נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתכנס

ונגדיר את האינטגרל: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ להיות שווה לערך של הגבול.

א.2. באופן דומה, כאשר f פונקציה רציפה או רציפה למקוטעין בקטע $(-\infty,a]$

אם קיים הגבול $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$ כגבול ממשי אז נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ מתכנס

ונגדיר את האינטגרל: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ להיות שווה לערך של הגבול.

א.3. כאשר f פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ או רציפה למקוטעין ב- $\mathbb{R}$, נקח a ממשי כלשהו.

אם קיימים הגבולות $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ ו- $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$ כגבולות ממשיים אז נאמר

שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ מתכנס

ונגדיר את האינטגרל: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ להיות שווה לסכום שני הגבולות.

טענה: בתנאים הנ"ל, התכנסות האינטגרל וערכו (וכן התבדרות האינטגרל) אינם תלויים בערכו של a .

מקרה ב:

ב.1. תהי f פונקציה רציפה או רציפה למקוטעין בקטע $[a,b)$ ובעלת אי רציפות מסוג שני משמאל ב- b.

אם קיים הגבול $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ כגבול ממשי אז נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס

ונגדיר את האינטגרל: $\int_a^b f(x)dx$ להיות שווה לערך של הגבול.

ב.2. תהי f פונקציה רציפה או רציפה למקוטעין בקטע $(a,b]$ ובעלת אי רציפות מסוג שני מימין ב- a.

אם קיים הגבול $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ כגבול ממשי אז נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס

ונגדיר את האינטגרל: $\int_a^b f(x)dx$ להיות שווה לערך של הגבול.

ב.3. תהי f פונקציה רציפה או רציפה למקוטעין בקטעים $[a,c)$ ו- $(c,b]$ ובעלת אי רציפות מסוג שני ב- c.

אם קיים הגבולות $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ ו- $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ כגבולות ממשיים

אז נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס

ונגדיר את האינטגרל : $\int_a^b f(x)dx$ להיות שווה לסכום שני הגבולות.

מקרה ג – שילוב של מקרים א ו- ב או כמה מקרים מסוג ב -

בכל מצב כזה נחלק את הקטע לתתי קטעים זרים והאינטגרל יוגדר להיות סכום האינטגרלים בתתי הקטעים.

בכל המקרים הנ"ל, אם לא קיים הגבול המגדיר את האינטגרל (ובמקרה שנדרשים שני גבולות – כאשר לפחות אחד הגבולות אינו קיים) כגבול ממשי אז נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי מתבדר ולא נגדיר עבורו ערך.

דוגמה : האינטגרל הלא אמיתי $I_p=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.

הוכחה : נסמן : $I_p(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{dx}{x^p}$.

עבור $p\neq 1$: $I_p(\lambda)=\left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_1^{\lambda}=\frac{1}{1-p}\lambda^{1-p}-\frac{1}{1-p}$.

עבור $p>1$: $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{1-p}=0$ ולכן $I_p=\lim_{\lambda\to+\infty}I_p(\lambda)=\frac{1}{p-1}$ ונקבל שהאינטגרל הלא אמיתי הזה מתכנס.

עבור $p<1$: $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{1-p}=+\infty$ ולכן האינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

עבור $p=1$ נחשב : $I_{p=1}(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{1}{x}dx=lnx|_{x=1}^{\lambda}=ln\lambda$ ו- $\lim_{\lambda\to+\infty}ln\lambda=+\infty$ לכן האינטגרל מתבדר.

סיכום : האינטגרל הלא אמיתי $I_p=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ מתכנס אםם $p>1$ ואז ערכו $\frac{1}{p-1}$.

תרגול -

א. בדוק התכנסות / התבדרות של האינטגרלים הבאים. בכל מקרה שהאינטגרל מתכנס חשב את ערכו.

1. $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 2. $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$ 3. $\int_0^{\infty}xe^{-x}dx$ 4. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+16}$

5. $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ 6. $\int_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ 7. $\int_1^{3}\frac{dx}{x-2}$ 8. $\int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$

9. $\int_0^{\ln 2}\frac{e^{1/x}dx}{x^2}$ 10. $\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 11. $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2-4x}$ 12. $\int_{-1}^{1}\ln|x|\,dx$

ב. בדוק לגבי כל אחד מהאינטגרלים הבאים עבור אילו ערכים של p הוא מתכנס ועבור אילו הוא מתבדר.
כאשר האינטגרל מתכנס בטא את ערכו באמצעות p.

1. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 2. $\int_0^{1}\frac{1}{x^p}dx$ 3. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 4. $\int_1^{2}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 5. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$