Densidades y distancias promedio de grafos ciclos a completos

José Alberto Benavides Vázquez

22 de abril de 2018

Esta práctica se realizó a partir de un programa en desarrollo para flujo en redes alojado en `https://github.com/jbenavidesv87/FlujoRedes`. El código de esta práctica puede consultarse en `https://github.com/jbenavidesv87/FlujoRedes/tree/master/ejemplos/07Densidad` [1].

1. Introducción

Un **grafo ciclo** es un grafo en el que sus n nodos están conectados uno tras otro, sin repeticiones, salvo por el úlitmo nodo que se conecta al primero para formar una figura que se asemeja a un polígono de n lados. Por su parte, un **grafo completo** es un grafo ciclo en el que sus n nodos están conectados con los restantes $n-1$ nodos. En cuanto a las aristas, los grafos ciclo tienen la mínima cantidad de aristas necesarias para cumplir su definición y formar un ciclo, esto es $a = n$ aristas; mientras que los grafos completos poseen todas las aristas posibles que pueden establecerse sin repetir pares de nodos entre sí, a saber $a = n \cdot (n-1)/2$ aristas. A partir de estas descripciones, se puede definir un valor k que especifique la cantidad de nodos vecinos con los que se conectará cada nodo de este tipo de grafos por cada uno de sus costado. Este valor k puede tomar valores enteros del intervalo $[1, \lfloor n/2 \rfloor]$. Por ejemplo, un grafo con seis nodos podría tener $k = \{1, 2, 3\}$ que corresponden a $\{6, 12, 15\}$ aristas en un polígono de 6 lados, como se puede constatar en la figura 1 (p.2).

Para esta práctica se ha desarrollado un programa que genera grafos de este tipo a partir de la definición de la cantidad de nodos y del valor k. A manera de ejemplo, se creó una animación de un grafo de cuarenta nodos al que se incrementa el valor de k cada iteración una unidad, desde uno hasta veinte. Esta animación puede consultarse en `FALTA` y algunas de las imágenes que la componen en la figura 2 (p. 3).

Se implementaron dos algoritmos al código, uno para medir la distancia promedio entre nodos de un grafo y el otro para medir la densidad promedio de un grafo. La **distancia promedio** se calcula como media de las distancias entre todos los pares de nodos, obtenidas por un algoritmo de Floyd-Warshall. Esta distancia promedio se calcula para cada k y se divide entre $k = 1$ para normalizar

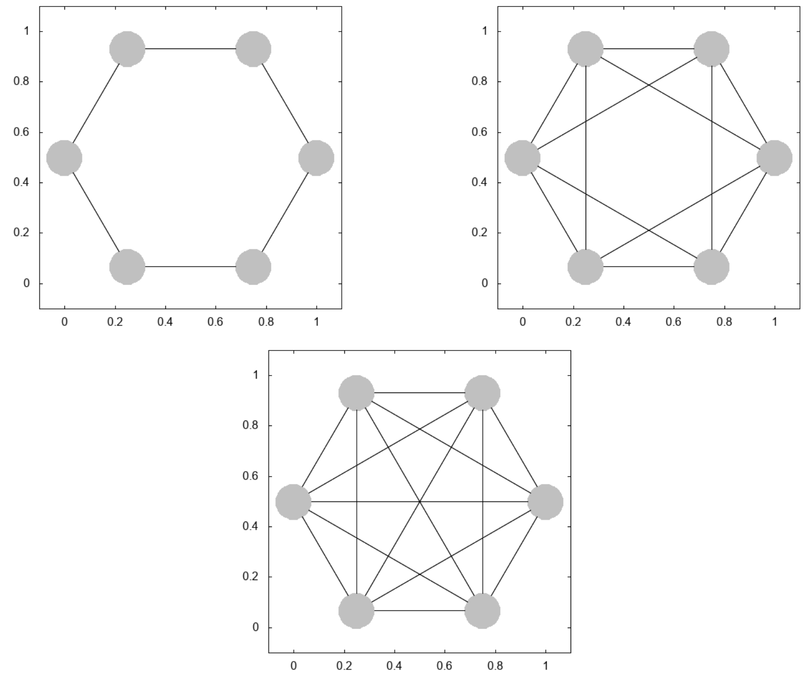

Figura 1: En orden izquierda, derecha y abajo, grafos de seis nodos con $k = \{1, 2, 3\}$ y $\{6, 12, 15\}$ aristas.

la salida, debido a que en $k = 1$ se tiene el promedio de las distancias más largas para cada grafo de este tipo. A su vez, la **densidad promedio** para cada nodo se calcula a partir de la cantidad de arcos entre sus vecinos entre el total de arcos que podrían establecerse entre sus vecinos, a saber $n(n-1)$ arcos en total. La densidad promedio para el grafo se calcula sumando todas las densidades promedio de los nodos y divididas entre el número de nodos.

Adicionalmente, se agregó al programa una variable p que representa la probabilidad de que cada nodo se conecte con otro disponible.

2. Simulación y resultados

Se crearon grafos y se corrieron los algoritmos de distancia promedio y densidad promedio de cada grafo variando $N = \{8, 16, 32, 64, 128\}$ nodos, $k = [1, \lfloor n/2 \rfloor]$ con $k \in \mathbb{N}$, y $p = (0.2i)_{i=0}^{25}$ con $p \in \mathbb{R}$. Los resultados se graficaron en una imagen que muestra el comportamiento de la distancia promedio y densidad promedio del grafo frente al incremento de la probabilidad de que se unan los nodos no unidos dado k. Se generó una animación que muestra todas las gráficas generadas de esta forma que puede consultarse en `FALTA`. Se muestran, además, las figuras de algunas imágenes para discutirlas.

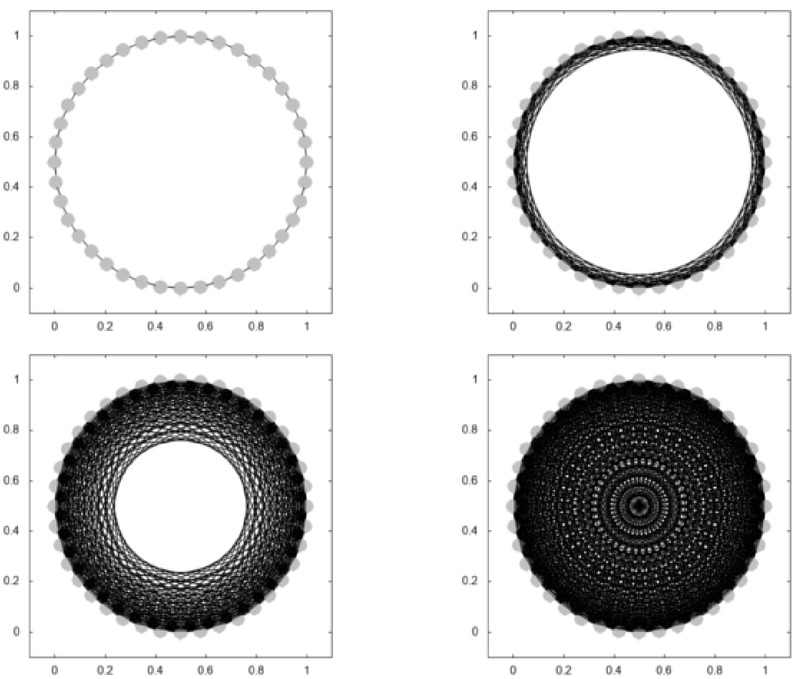

Figura 2: Imágenes correspondientes a $k = \{1, 6, 13, 20\}$ en un grafo de cuarenta nodos que forma un polígono regular de cuarenta lados.

En las gráficas correspondientes a $N = \{16, 32, 64y128\}$, mostradas en la figura 3 (p. 4), muestran una tendencia de las distancias promedio de disminuir de manera exponencial de uno hasta que se alcanzan distancias promedio cercanas a cero cuando la probabilidad de conexión entre nodos no conectados por k es 0.5. Las densidades promedio siguen una relación lineal que tiende al alza, desde valores cercanos a cero hasta valores cercanos a 1, 0.5, 0.25, 0.125 respectivamente.

Al aumentar la k hasta $N/4$, es decir, la mitad de los valores de k posibles por N nodos, se obtienen las gráficas de la figura 4 (p. 5). En dichas gráficas se puede apreciar que las distancias promedio se reducen conforme crece el número de nodos y que las densidades dejan de incrementar para estabilizarse en rangos de 0.6 y 0.8. Esto parece deberse a que mientras más nodos hay y más conexiones existen, las distancias entre nodos se minimizan por la cantidad de vecinos que se establecen tanto entre nodos adyacentes como entre nodos situados frente a otros. La densidad, por su cuenta, también se estabiliza pues al crecer el número de nodos, la probabilidad de que se conecten los no conectados por k resulta suavizar la curva.

La figura 5 (p. 6) contiene la gráfica de la simulación con $N = 128$ y $k = 2$, en la que se puede ver la manera en que la probabilidad de establecer vecindades

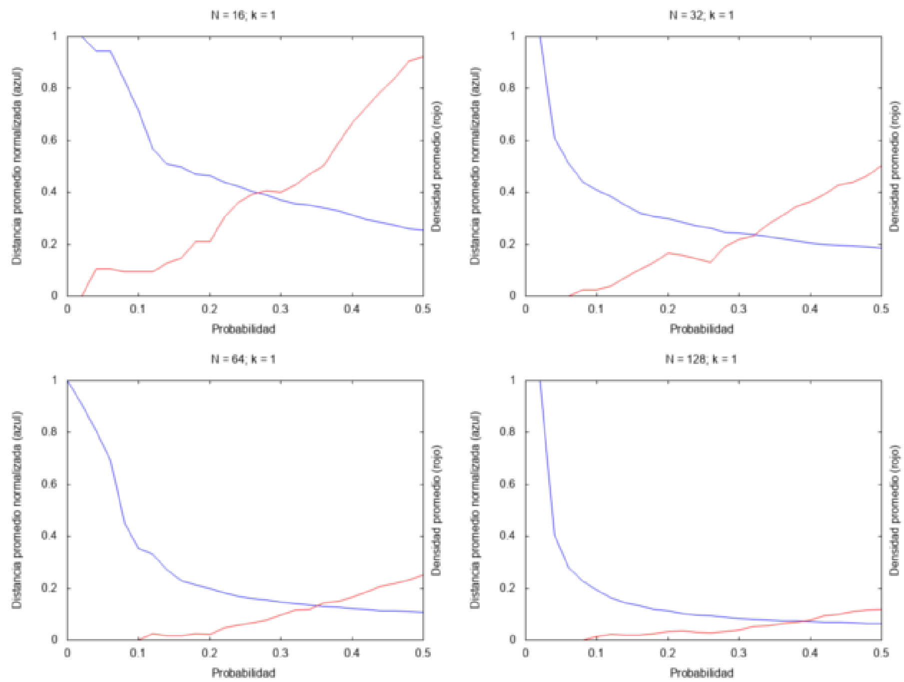

Figura 3: Gráficas de distancia promedio (azul) y densidad promedio (rojo) frente a la probabilidad de conexión para grafos con $N = \{16, 32, 64, 128\}$ nodos y $k = 1$.

modifica de manera inversa la distancia promedio y la densidad promedio del grafo.

Finalmente, se comprueba que los tiempos de corrida de las simulaciones crecen de manera exponencial en la figura 6 (p. 6).

Referencias

[1] José Alberto Benavides Vázquez. Grafos con python para flujo en redes. https://github.com/jbenavidesv87/FlujoRedes.

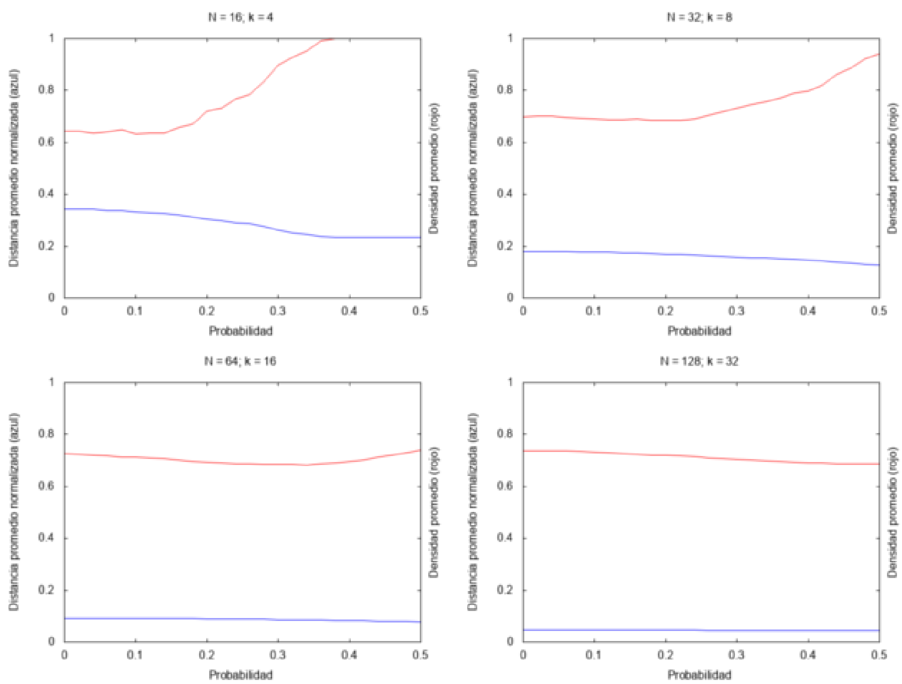

Figura 4: Gráficas de distancia promedio (azul) y densidad promedio (rojo) frente a la probabilidad de conexión para grafos con $N = \{16, 32, 64, 128\}$ nodos y $k = N/4$.

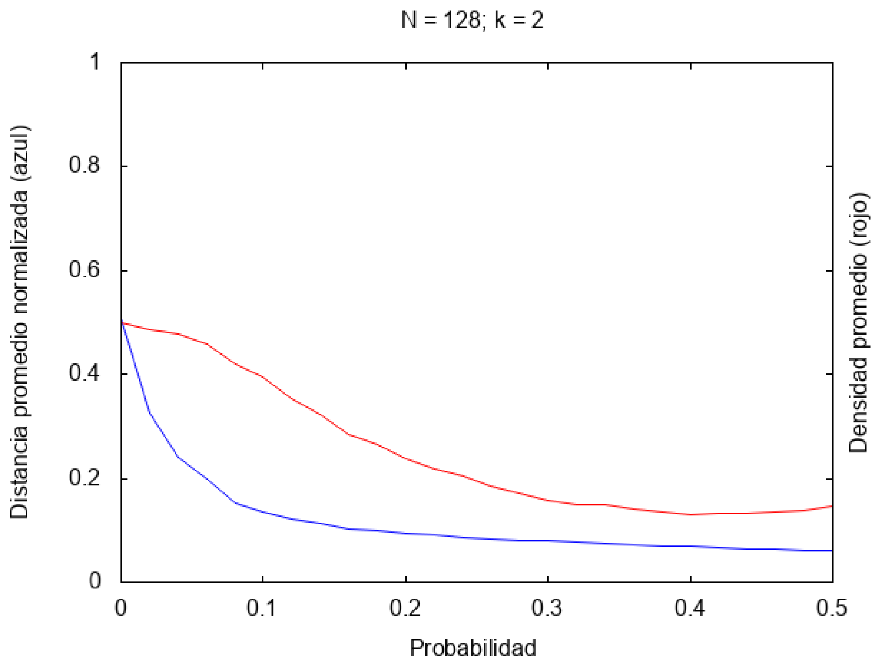

Figura 5: Gráfica de distancia promedio (azul) y densidad promedio (rojo) frente a la probabilidad de conexión para el grafo con $N = 128$ nodos y $k = N/4$.

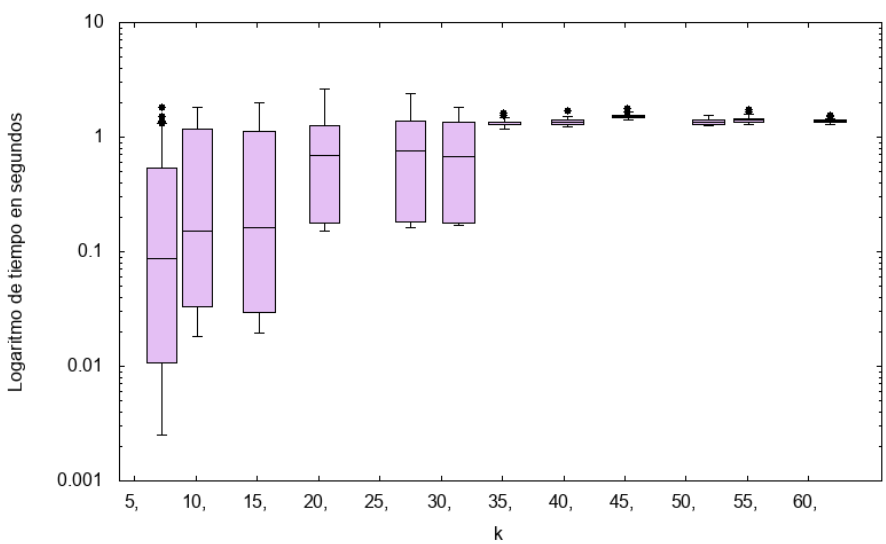

Figura 6: Gráfica de tiempos de corrida (en segundos) en escala logarítmica contra k para todos los grafos y probabilidades.