

# Densidades y distancias promedio de grafos ciclos a completos

José Alberto Benavides Vázquez

22 de abril de 2018

Esta práctica se realizó a partir de un programa en desarrollo para flujo en redes alojado en <https://github.com/jbenavidesv87/FlujoRedes>. El código de esta práctica puede consultarse en <https://github.com/jbenavidesv87/FlujoRedes/tree/master/ejemplos/07Densidad> [1].

## 1. Introducción

Un **grafo ciclo** es un grafo en el que sus  $n$  nodos están conectados uno tras otro, sin repeticiones, salvo por el último nodo que se conecta al primero para formar una figura que se asemeja a un polígono de  $n$  lados. Por su parte, un **grafo completo** es un grafo ciclo en el que sus  $n$  nodos están conectados con los restantes  $n - 1$  nodos. En cuanto a las aristas, los grafos ciclo tienen la mínima cantidad de aristas necesarias para cumplir su definición y formar un ciclo, esto es  $a = n$  aristas; mientras que los grafos completos poseen todas las aristas posibles que pueden establecerse sin repetir pares de nodos entre sí, a saber  $a = n \cdot (n - 1)/2$  aristas. A partir de estas descripciones, se puede definir un valor  $k$  que especifique la cantidad de nodos vecinos con los que se conectará cada nodo de este tipo de grafos por cada uno de sus costado. Este valor  $k$  puede tomar valores enteros del intervalo  $[1, \lfloor n/2 \rfloor]$ . Por ejemplo, un grafo con seis nodos podría tener  $k = \{1, 2, 3\}$  que corresponden a  $\{6, 12, 15\}$  aristas en un polígono de 6 lados, como se puede constatar en la figura 1 (p.2).

Para esta práctica se ha desarrollado un programa que genera grafos de este tipo a partir de la definición de la cantidad de nodos y del valor  $k$ . A manera de ejemplo, se creó una animación de un grafo de cuarenta nodos al que se incrementa el valor de  $k$  cada iteración una unidad, desde uno hasta veinte. Esta animación puede consultarse en <https://goo.gl/DNngNi> y algunas de las imágenes que la componen en la figura 2 (p. 3).

Se implementaron dos algoritmos al código, uno para medir la distancia promedio entre nodos de un grafo y el otro para medir la densidad promedio de un grafo. La **distancia promedio** se calcula como media de las distancias entre todos los pares de nodos, obtenidas por un algoritmo de Floyd-Warshall. Esta distancia promedio se calcula para cada  $k$  y se divide entre  $k = 1$  para normalizar

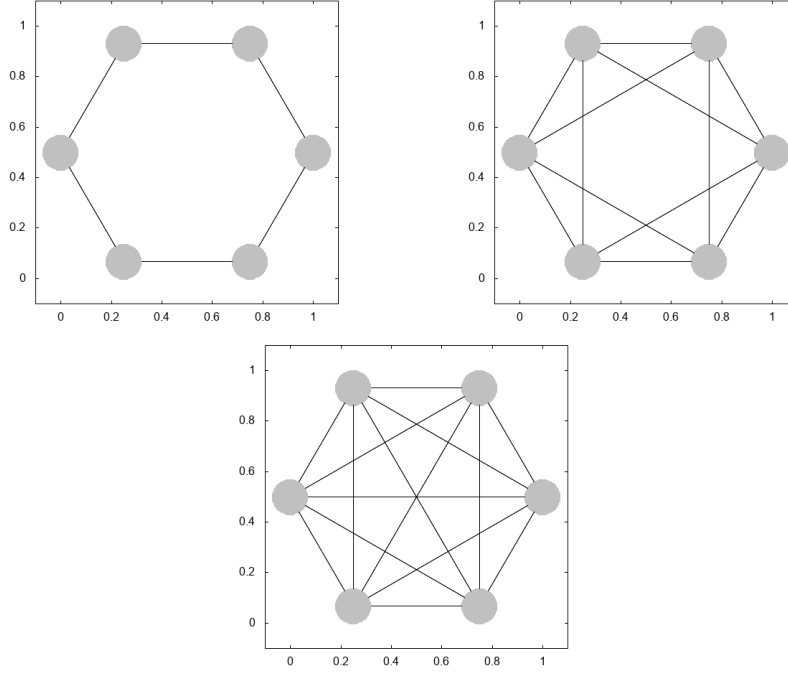


Figura 1: En orden izquierda, derecha y abajo, grafos de seis nodos con  $k = \{1, 2, 3\}$  y  $\{6, 12, 15\}$  aristas.

la salida, debido a que en  $k = 1$  se tiene el promedio de las distancias más largas para cada grafo de este tipo. A su vez, la **densidad promedio** para cada nodo se calcula a partir de la cantidad de arcos entre sus vecinos entre el total de arcos que podrían establecerse entre sus vecinos, a saber  $n(n-1)$  arcos en total. La densidad promedio para el grafo se calcula sumando todas las densidades promedio de los nodos y divididas entre el número de nodos.

Adicionalmente, se agregó al programa una variable  $p$  que representa la probabilidad de que cada nodo se conecte con otro disponible.

## 2. Simulación y resultados

Se crearon grafos y se corrieron los algoritmos de distancia promedio y densidad promedio de cada grafo variando  $N = \{8, 16, 32, 64, 128\}$  nodos,  $k = [1, \lfloor n/2 \rfloor]$  con  $k \in \mathbb{N}$ , y  $p = (0.2i)_{i=0}^{25}$  con  $p \in \mathbb{R}$ . Los resultados se graficaron en una imagen que muestra el comportamiento de la distancia promedio y densidad promedio del grafo frente al incremento de la probabilidad de que se unan los nodos no unidos dado  $k$ . Se generó una animación que muestra todas las gráficas generadas de esta forma que puede consultarse en <https://goo.gl/djPb1X>. Se muestran, además, las figuras de algunas imágenes para discutir las.

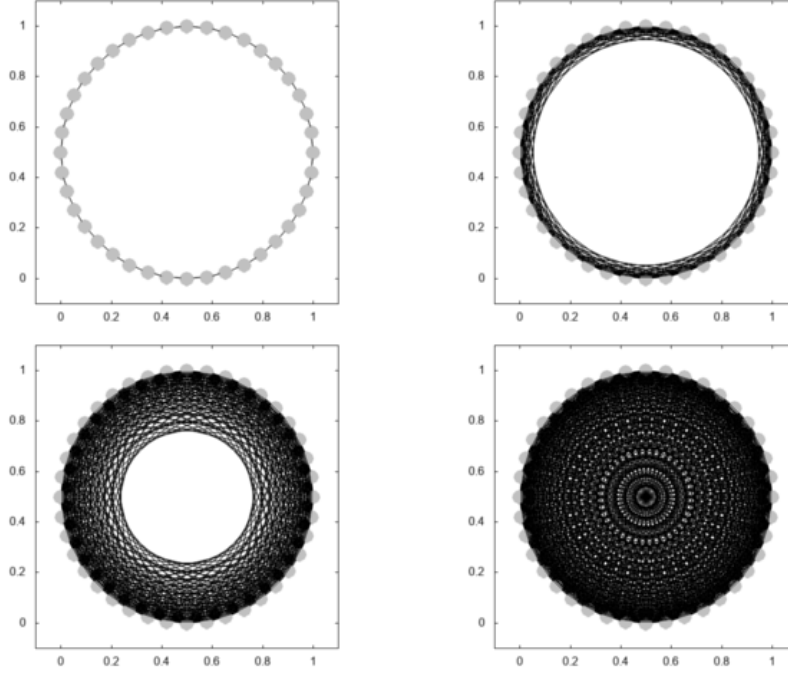


Figura 2: Imágenes correspondientes a  $k = \{1, 6, 13, 20\}$  en un grafo de cuarenta nodos que forma un polígono regular de cuarenta lados.

En las gráficas correspondientes a  $N = \{16, 32, 64, 128\}$ , mostradas en la figura 3 (p. 4), muestran una tendencia de las distancias promedio de disminuir de manera exponencial de uno hasta que se alcanzan distancias promedio cercanas a cero cuando la probabilidad de conexión entre nodos no conectados por  $k$  es 0.5. Las densidades promedio siguen una relación lineal que tiende al alza, desde valores cercanos a cero hasta valores cercanos a 1, 0.5, 0.25, 0.125 respectivamente.

Al aumentar la  $k$  hasta  $N/4$ , es decir, la mitad de los valores de  $k$  posibles por  $N$  nodos, se obtienen las gráficas de la figura 4 (p. 5). En dichas gráficas se puede apreciar que las distancias promedio se reducen conforme crece el número de nodos y que las densidades dejan de incrementar para estabilizarse en rangos de 0.6 y 0.8. Esto parece deberse a que mientras más nodos hay y más conexiones existen, las distancias entre nodos se minimizan por la cantidad de vecinos que se establecen tanto entre nodos adyacentes como entre nodos situados frente a otros. La densidad, por su cuenta, también se estabiliza pues al crecer el número de nodos, la probabilidad de que se conecten los no conectados por  $k$  resulta suavizar la curva.

La figura 5 (p. 6) contiene la gráfica de la simulación con  $N = 128$  y  $k = 2$ , en la que se puede ver la manera en que la probabilidad de establecer vecindades

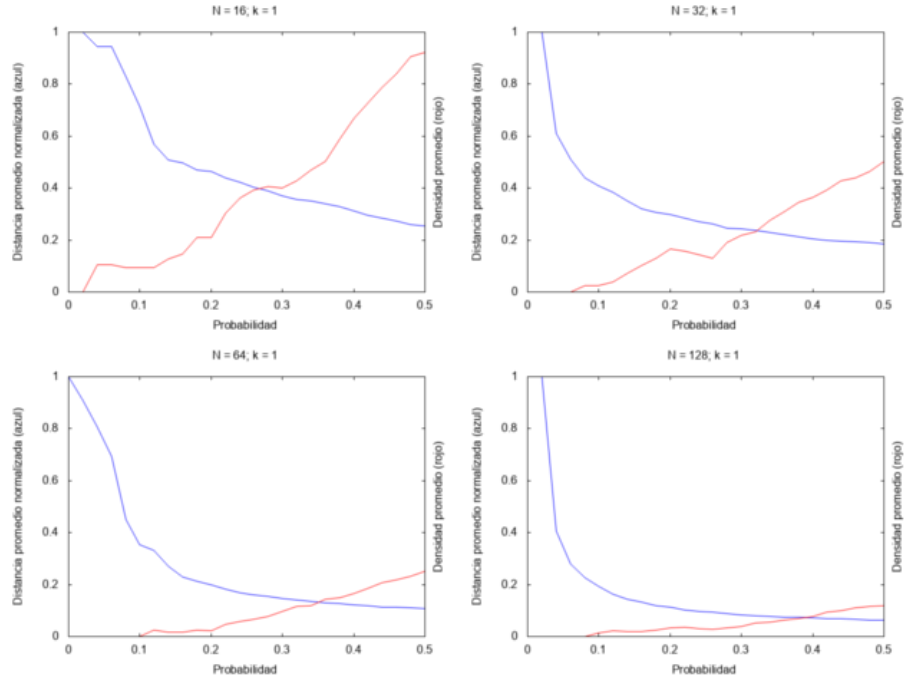


Figura 3: Gráficas de distancia promedio (azul) y densidad promedio (rojo) frente a la probabilidad de conexión para grafos con  $N = \{16, 32, 64, 128\}$  nodos y  $k = 1$ .

modifica de manera inversa la distancia promedio y la densidad promedio del grafo.

Finalmente, se comprueba que los tiempos de corrida de las simulaciones crecen de manera exponencial en la figura 6 (p. 6).

## Referencias

- [1] José Alberto Benavides Vázquez. Grafos con python para flujo en redes. <https://github.com/jbenavidesv87/FlujoRedes>.

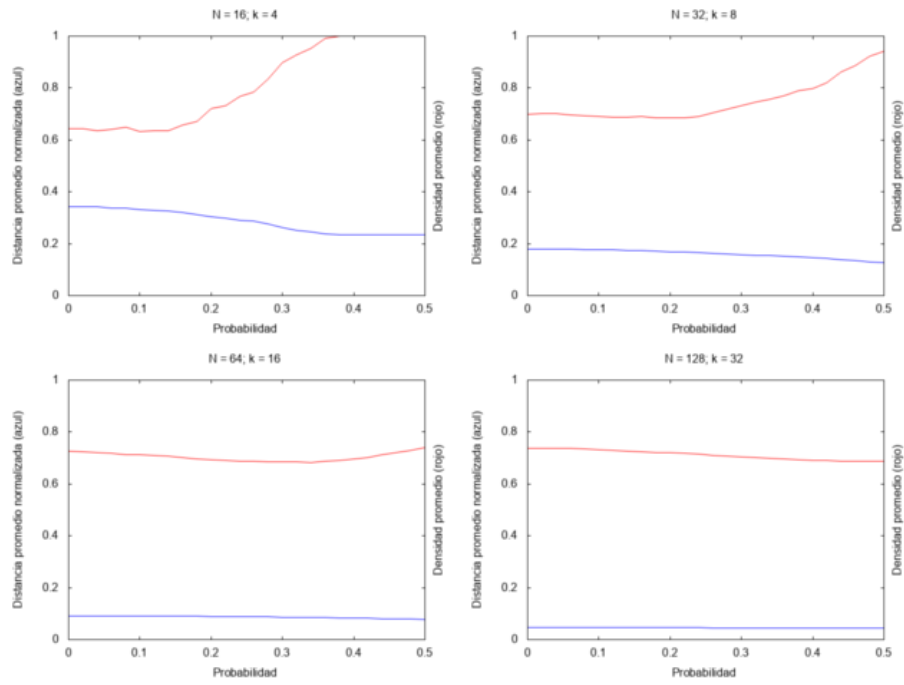


Figura 4: Gráficas de distancia promedio (azul) y densidad promedio (rojo) frente a la probabilidad de conexión para grafos con  $N = \{16, 32, 64, 128\}$  nodos y  $k = N/4$ .

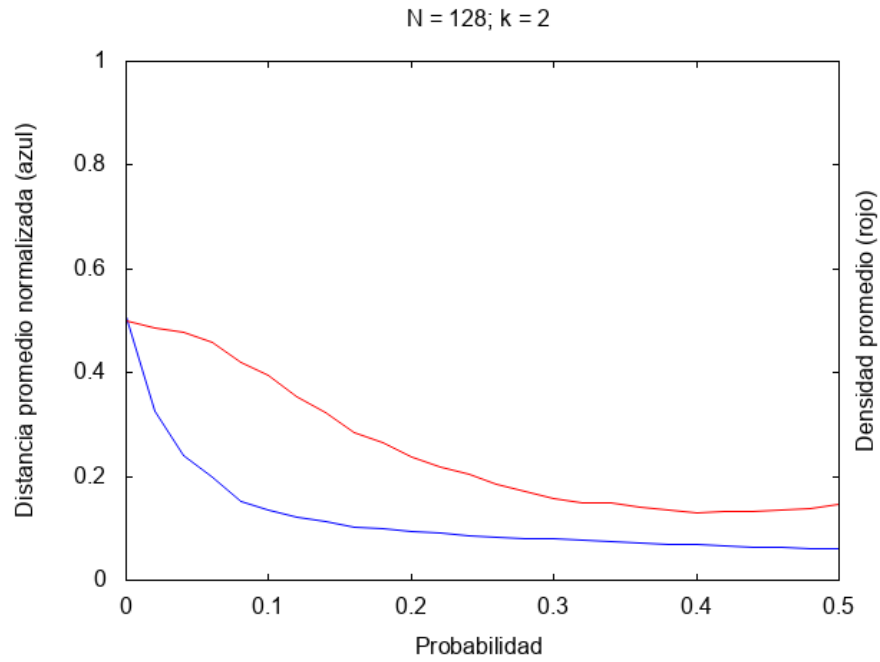


Figura 5: Gráfica de distancia promedio (azul) y densidad promedio (rojo) frente a la probabilidad de conexión para el grafo con  $N = 128$  nodos y  $k = N/4$ .

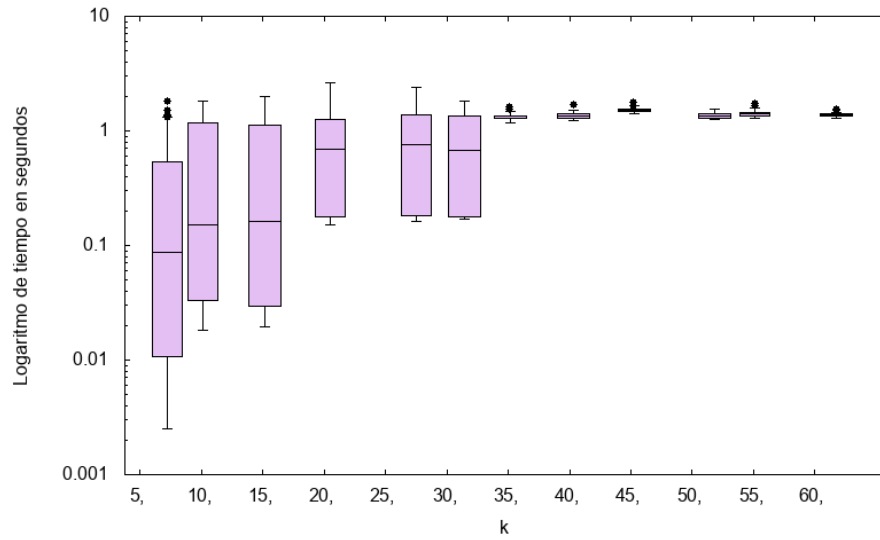


Figura 6: Gráfica de tiempos de corrida (en segundos) en escala logarítmica contra  $k$  para todos los grafos y probabilidades.