Gauss deduce la gaussiana

Tratamos de encontrar la función $\varphi(x,\mu,\sigma)$ que describe cuantitativamente el hecho bien conocido de que al medir cierta magnitud μ constante un número n de veces obtenemos n medidas diferentes $D=(x_1,x_2,...,x_n)$ aunque más o menos agrupadas.

El modelo general es pues:

$$x_i = xt_i(a,b,...) + \epsilon_i(h) \quad i=1,2,...,n$$

donde $xt_i(a,b,..)$ es el valor que deberíamos medir según la teoría, de parámetros $a,b,...$, y ϵ_i es el ruido, de parámetro h, responsable de que obtengamos medidas diferentes cada vez que medimos. La probabilidad de cometer cierto *error*, o mejor, la **incertidumbre** al medir es:

$$p(\epsilon_i) = \varphi(x_i;\mu,h) \quad \forall i=1,...,n$$

Para poder inferir a partir de las medidas las magnitudes μ y h necesitaremos conocer precisamente esa función.

Como es lógico, la función φ que buscamos debe ser función de la distancia de la medida x al valor de la magnitud $\mu : \varphi = \varphi(x-\mu)$. Si suponemos independencia de las n medidas, la probabilidad de encontrar esas medidas es el producto de las probabilidades individuales, es decir, la función de verosimilitud $f_n(\mu)$:

$$f_n(\mu) = \varphi(x_1-\mu)...\varphi(x_{n-1}-\mu)\varphi(x_n-\mu) = f_{n-1}(\mu)\varphi(x_n-\mu)$$

El cálculo de la derivada de la verosimilitud es bien sencillo:

$$f'_n(\mu) \equiv \tfrac{df_n}{d\mu}(\mu) = f'_{n-1}\varphi(x_n-\mu) + f_{n-1}\varphi'(x_n-\mu) = f'_{n-1}(\mu)\tfrac{f_n(\mu)}{f_{n-1}(\mu)} +$$

$$+ f_n(\mu)\tfrac{\varphi'(x_n-\mu)}{\varphi(x_n-\mu)} = f_n(\mu)[\tfrac{f'_{n-1}(\mu)}{f_{n-1}(\mu)} + \tfrac{\varphi'(x_n-\mu)}{\varphi(x_n-\mu)}]$$

Si aplicamos repetidamente esta recurrencia obtendremos:

$$\tfrac{f'_n}{f_n} = \tfrac{f'_{n-1}}{f_{n-1}} + \tfrac{\varphi'(x_n-\mu)}{\varphi(x_n-\mu)} = [\tfrac{f'_{n-2}}{f_{n-2}} + \tfrac{\varphi'(x_{n-1}-\mu)}{\varphi(x_{n-1}-\mu)}] + \tfrac{\varphi'(x_n-\mu)}{\varphi(x_n-\mu)} = ... =$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varphi'(x_i-\mu)}{\varphi(x_i-\mu)}$$

Si admitimos, como dicta la intuición, que la función de verosimilitud será máxima precisamente para la media, $\mu=\bar{x}$, la condición a cumplir por la función φ será:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi'(x_i-\bar{x})}{\varphi(x_i-\bar{x})} = \sum_{i=1}^{n} \phi(z_i) = 0$$

donde hemos definido $\phi(z_i) = \frac{\varphi'(z_i)}{\varphi(z_i)}$, $z_i = x_i - \bar{x}$. De esta definición se deduce $\sum_i z_i = \sum_i (x_i - \bar{x}) = \sum_i x_i - \sum_i \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$ y obtenemos una pista para encontrar la función $\phi(z_i)$. La propuesta inmediata es:

$$\phi(z) \equiv \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = kz \quad , \forall z$$

que tiene una integración fácil:

$$\ln \varphi(z) = \frac{1}{2}kz^2 + c$$

Por tanto,

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{2}kz^2 + c} = e^{\frac{1}{2}kz^2} e^c = Ae^{\frac{1}{2}kz^2}$$

Es trivial ver que k debe ser negativo $k = -h, h > 0$, y que $A = \sqrt{\frac{h}{2\pi}}$ ya que debe cumplirse $\int_{-\infty}^{\infty} dz \ \varphi(z) = 1$.

En resumen, la función que nos da la probabilidad de medir x, conocido el verdadero valor μ de la magnitud y la precisión h de dicha medida, es decir, la probabilidad del *'error'*, es:

$$p(\epsilon) \equiv p(x|\mu h) \equiv \varphi(x; \mu \ h) = \sqrt{\frac{h}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}h(x-\mu)^2}$$

El problema siguiente es el problema *inverso* o de inferencia:

Una vez adquiridos los datos $D = (x_1, x_2, ..., x_n)$ **¿cómo inferimos los parámetros de la teoría** $a, b, ...,$ **y del ruido** h**?**.