t-Student

J. Abellán

16/11/2015

Teorema

- Sea X una variable aleatoria normal estándar, es decir, de media $\mu = 0$ y desviación $\sigma = 1$.
- Sea V una variable aleatoria χ^2_ν, es decir, una *ji-cuadrado* con ν grados de libertad.
- Sea T una nueva variable aleatoria definida así:

$$T \equiv \frac{X}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}$$

¿Cómo será su función de distribución?

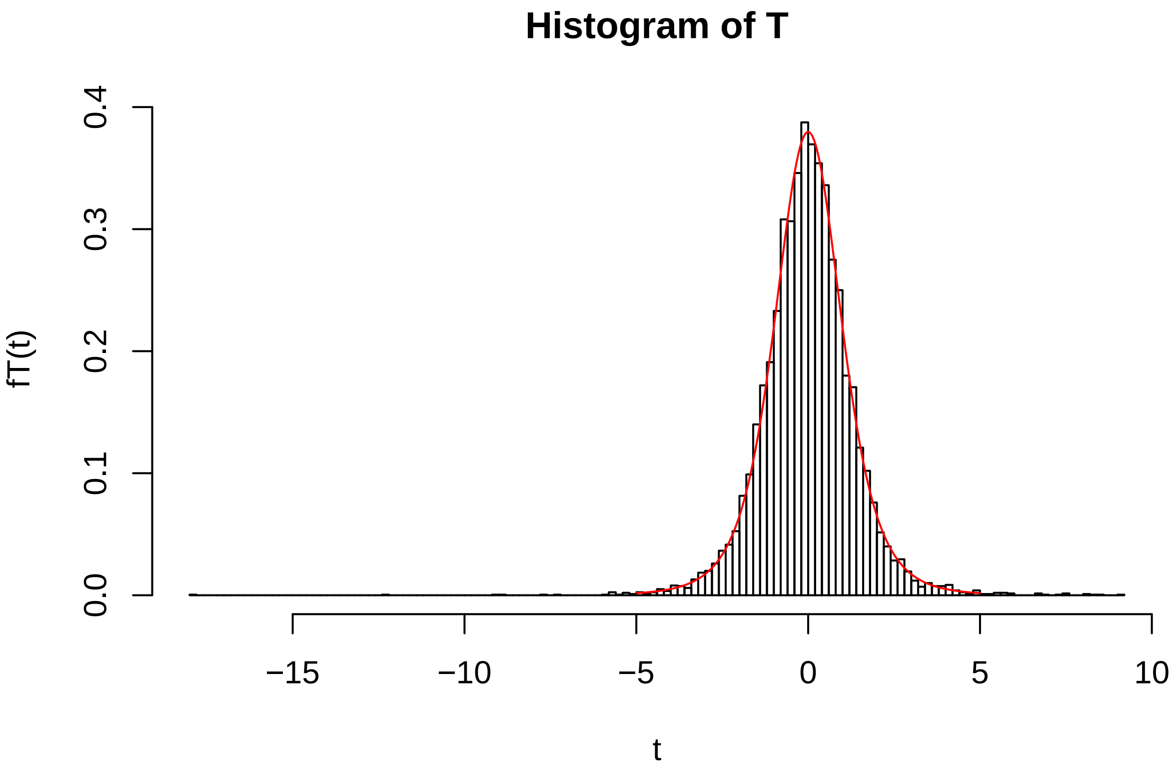
La respuesta es que $T \sim t_\nu$, es decir, *t-Student* con ν grados de libertad.

Vamos a comprobarlo con el método habitual.

```
N <- 1e4

# Normal estándar
Z <- rnorm( N )

# ji-cuadrado con nu grados de libertad
nu <- 5

V <- rchisq( N, nu )

# Definición de T
T <- Z / sqrt( V / nu )

# Histograma
hist( T, 100,

      prob = T,

      ylab = "fT(t)",

      xlab = "t"

    )
```

```
## Warning in if (freq) x$counts else x$density: la condición tiene longitud >
## 1 y sólo el primer elemento será usado
```

```
# Curva teórica
t <- seq( -5, 5, len = 1000 )

lines( t, dt( t, nu ), col = 2 )
```



Teorema II

- Sea X una variable aleatoria normal de media μ y desviación σ.
- Sea $\overline{X}$ la variable aleatoria:

$$\overline{X} \equiv \frac{1}{n}\Sigma_i X_i$$

con las $v.a$ X_i normales μ, σ idénticas e independientes.

- Sea la variable aleatoria

$$S^2 \equiv \frac{1}{n-1}\Sigma_i (X_i - \overline{X})^2$$

- Sea T una nueva variable aleatoria definida así:

$$T \equiv \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

¿Cómo será su función de distribución?

La respuesta es que $T \sim t_{n-1}$, es decir, *t-Student* con $n-1$ grados de libertad.

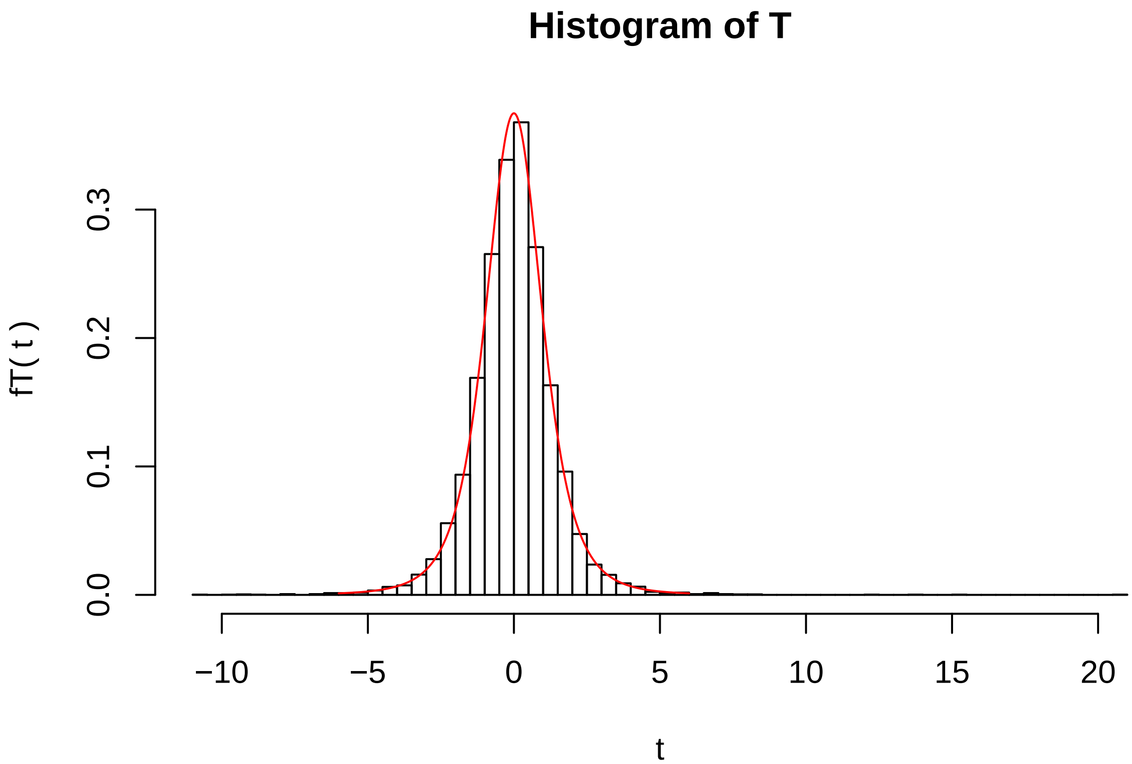
Vamos a comprobarlo con el método habitual.

```
# N grande para una buena estadística
N <- 1e4
```

```r
#La nueva variable aleatoria: media muestral
XM <- S <- rep( 0, N )

# Parámetros de la población
mu <- 10

sigma <- 2

# Número de medidas
n <- 5

for (i in 1 : N ) {

    # Tomamos una muestra de n elementos
    muestra <- rnorm( n, mu, sigma )

    # Media muestral
    XM[ i ] <- mean( muestra )

    # Desviación estándar de la muestra
    S[ i ] <- sd( muestra )

}

# La nueva variable
T = ( XM - mu ) / ( S / sqrt( n ) )

# Resultado
hist( T, 100,

      prob = T,

      xlab = " t ",

      ylab = " fT( t ) "

    )
```

```
## Warning in if (freq) x$counts else x$density: la condición tiene longitud >
## 1 y sólo el primer elemento será usado
```

```r
# Teorema
t <- seq( - 6, 6, len = 1000 )

lines( t, dt( t, n - 1 ), col = 2 )
```


Histogram of T
fT(t)
0.0
0.1
0.2
0.3
−10
−5
0
5
10
15
20
t