Exponencial-Poisson

J. Abellán

30/10/2019

Vamos a ver como la función de distribución exponencial se obtiene de un proceso *poisson*.

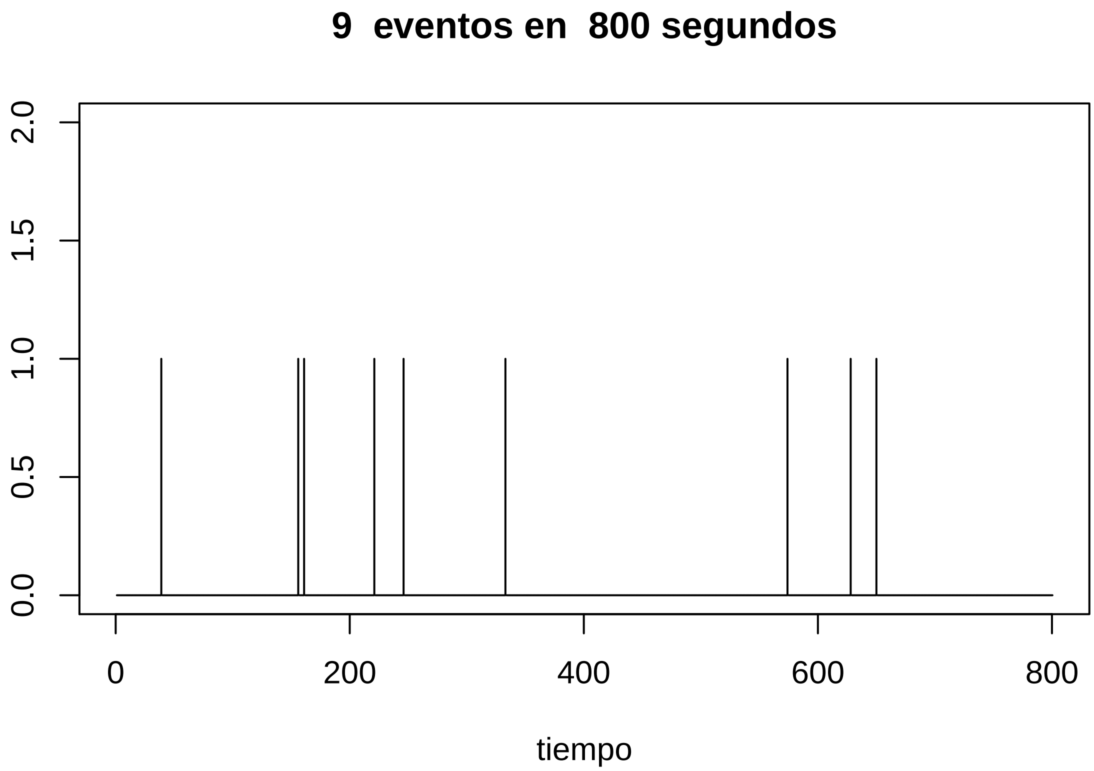
Consideremos una moneda *trucada*: la probabilidad de cara (o éxito) es $p.exito = 0.01$.

```
# Intervalo de tiempo y número de intervalos
Intervalo <- 200  #segundos

N.intervalos <- 10000

# Lanzamientos de la moneda = tiempo total
N <- N.intervalos * Intervalo  #segundos

# Teoría: X es poisson con media xm
# xm = promedio de sucesos por intervalo
xm <- Intervalo * p.exito
```

Consideremos intervalos de 200 de longitud. Y un número 10^{4} grande de esos intervalos para hacer una buena estadística.

De acuerdo con la teoría (y la intuición), el número promedio de *caras* o éxitos en cada intervalo será $x_m = p.exito \times intervalo = 2$.

```
# Hacemos el experimento: lanzamos la moneda N = N.intervalos * Intervalo veces
Muestra <- sample( moneda, N, replace = TRUE, prob = p.suceso )

# Dibujamos (para muestra, un botón o dos)
nIntervalos <- 4

# tiempo
n <- nIntervalos * Intervalo

# eventos ocurridos en ese tiempo
n.eventos <- sum( Muestra[ 1 : n ] )

plot( Muestra[ 1 : n ],

      type = "h",

      xlab = " tiempo ",

      ylab = "",

      ylim = c( 0, 2 ),

      main = paste( n.eventos, " eventos en ", n, "segundos" )

    )
```

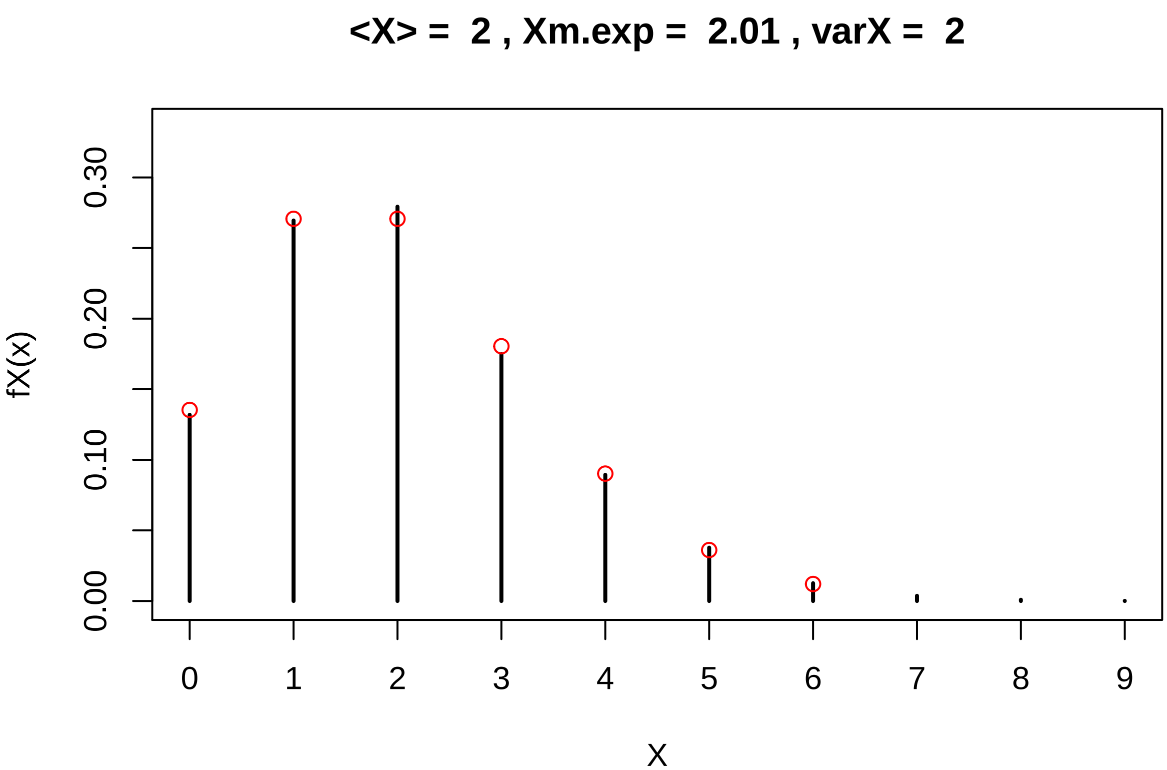


Hecho el experimento, dibujamos el número de éxitos en el primer intervalo y hacemos la estadística de la variable X, número de *caras* en cada intervalo. Si X es *poisson* la media y la varianza deben coincidir y, por supuesto, su histograma debe seguir la función de distribución *Poisson*:

$$p(X = x \mid \lambda) = e^{-x} \, \frac{\lambda^x}{x!}$$

```r
# Ponemos los resultados en forma conveniente
M <- matrix( Muestra, nrow = N.intervalos, ncol = Intervalo )

# La variable poisson: sumamos los sucesos de cada fila o intervalo
X <- apply( M, 1, sum )

# Valor experimental de la media
xm.experimental <- mean( X )

# Valor experimental de la varianza
varX.exp <- var( X )

# Es poisson X?
tabla <- table( X )

# Frecuencias relativas
tabla <- tabla / sum( tabla )

plot( tabla,

      ylim = c( 0, 1.2 * max( tabla ) ),

      ylab = "fX(x)",
```

```
      main = paste("<X> = ", xm,

                   ", Xm.exp = ", round( xm.experimental, 2 ),

                   ", varX = ", round( varX.exp, 2 )

                 )
    )

#Valores posibles
x <- 0 : ( 3 * xm)

points( x, dpois( x, xm ), col = 2 )
```



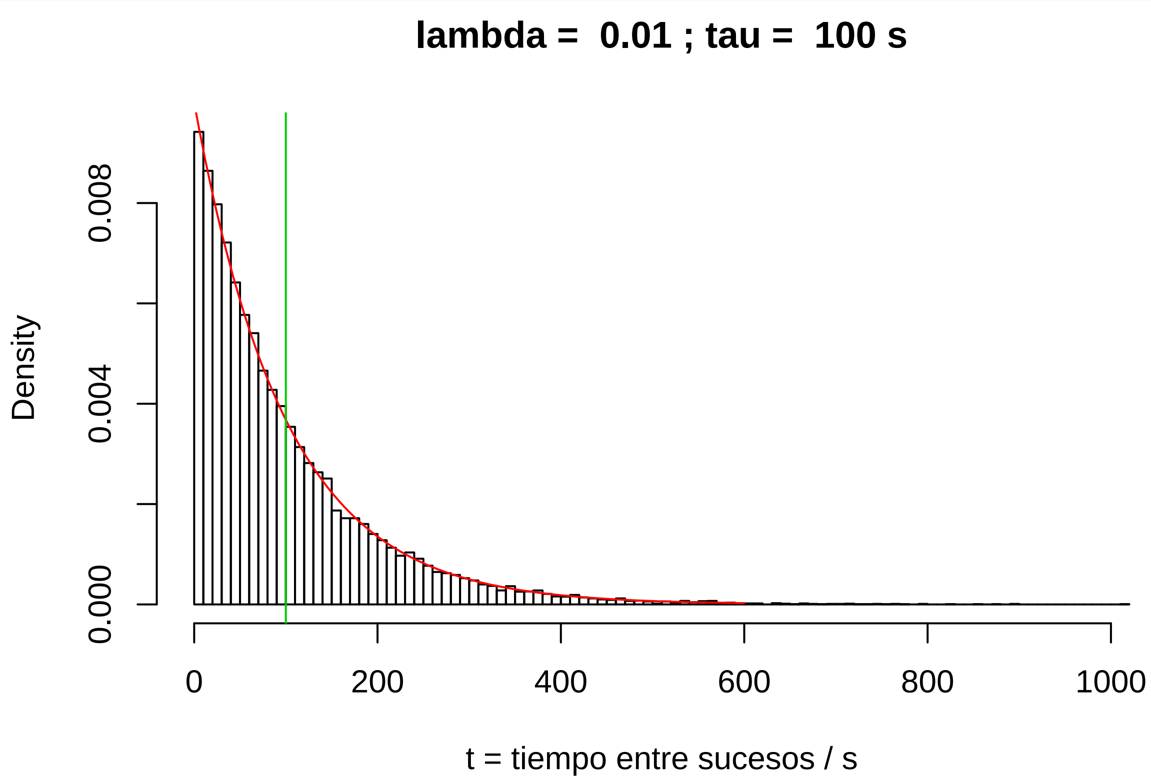
Comprobado que $X \sim Poisson$, nuestro interés es otro: la nueva variable T, el tiempo entre sucesos.

Para hacer la nueva estadística, tomamos nota de los instantes en que ocurrió el suceso (salió cara) y luego calculamos la distancia o diferencia entre esos tiempos.

$$p(t \mid \lambda) = \lambda \; e^{\lambda t}$$

```
# Teoría: el tiempo entre sucesos es una variable aleatoria que sigue una exponencial
# Parámetro lambda
lambda <- xm / Intervalo

# tiempo medio entre sucesos
tau <- 1 / lambda

# Instantes en los que ocurren los sucesos
```

```r
t.eventos <- which( Muestra == 1 )

# La nueva variable aleatoria (continua): tiempo entre sucesos
t.entre.eventos <- diff( t.eventos )

hist( t.entre.eventos, 100,

      prob = T,

      xlab = " t = tiempo entre sucesos / s ",

      #ylab = latex2exp("$f_t( t | \\lambda )$"),

      main = paste("lambda = ", lambda, "; tau = ", tau, "s" )

    )


# Valores continuos
tiempo <- seq( 0, 6 * tau, len = 100 )

lines( tiempo, dexp( tiempo, lambda ), col = 2 )

abline( v = 1 / lambda,col = 3 )
```



Como puede verse, el ajuste del histograma a una exponencial de parámetro λ es total.