

Función de distribución Cauchy

J. Abellán

22/10/2017

Vamos a estudiar una función de distribución a la que no se puede aplicar el teorema del límite central.

Sumaremos n variables aleatorias X_i tipo *cauchy* de parámetros a, b (posición y escala) cuya función de distribución es de la forma:

$$f_X(x | a, b) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + (x - a)^2}$$

Aparentemente la variable aleatoria *cauchy* no parece rara. Sin embargo, vamos a dibujarla y compararla con la normal estándar:

```
#Parámetros de la distribución de Cauchy: a, b
a <- 0 ; b <- 1

x <- seq( - 4 * b, 4 * b, len = 1000 )

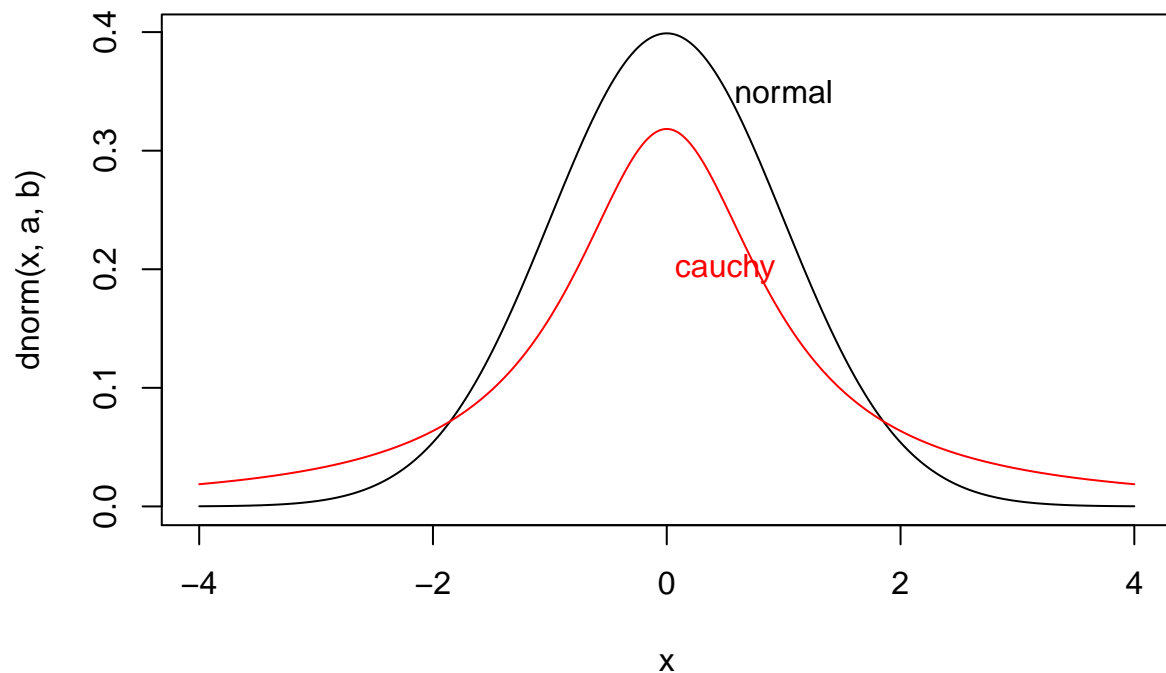
plot( x, dnorm( x, a, b ),
      type = "l",
      main = " Cauchy vs. Gauss " )

lines( x, dcauchy( x, a, b ), col = 2 )

text( 1, 0.35, " normal " )

text( 0.5, 0.2, " cauchy ", col = 2 )
```

Cauchy vs. Gauss



Simplemente la *cauchy* decae más despacio que la *gaussiana*.

Generamos ahora una variable aleatoria que es la suma de n variables aleatorias cauchy X_i :

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

¿Cómo será la función de distribución de X ?

De acuerdo con el teorema del límite central, sería una gaussiana de anchura cada vez menor.

```
#Número de variables aleatorias a sumar
n <- c( 5, 10, 20, 100, 600 )

nn <- length( n )

#Para una buena estadística
N <- 10000

#Parámetros de la distribución cauchy: a, b
a <- 0 ; b <- 1 ; x1 <- 5 * b

#Cajas para el histograma
cajas <- c( - 1e7, seq( - x1, x1, len = 100 ), 1e7 )

for (j in 1 : nn ) {

  X <- rep( 0, N )

  for (i in 1 : n[ j ] ) { X <- X + rcauchy( N, a, b ) }
```

```

# La media
X <- X / n[ j ]

hX <- hist( X, breaks = cajas, plot = FALSE )

fX <- hX$density

x <- hX$mids

# La normal correspondiente
deX <- b / sqrt( n[ j ] )
fXN <- dnorm( x, a, deX )

ymax <- max( fXN )

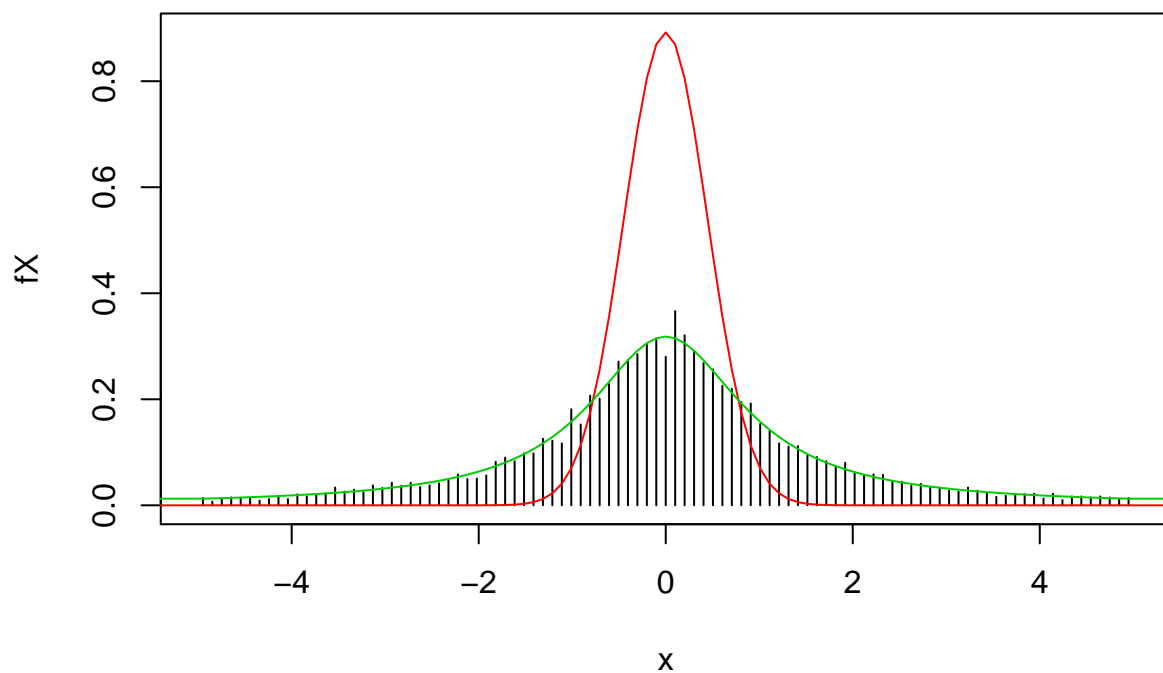
plot( x, fX,
      type = "h",
      xlim = c( - x1, x1 ),
      ylim = c( 0, ymax ),
      main = paste("Suma de", n[ j ], "v.a. Cauchy" ) )

# la normal
lines( x, fXN, col = 2 )

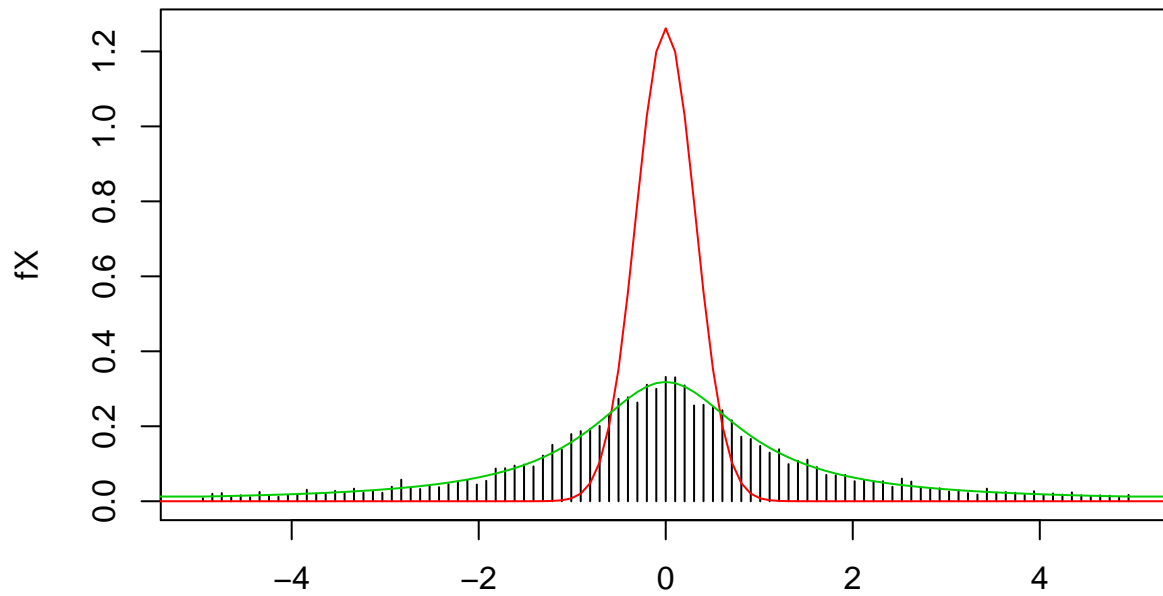
# La cauchy
lines( x, dcauchy( x, a, b ) , col = 3 )
}

```

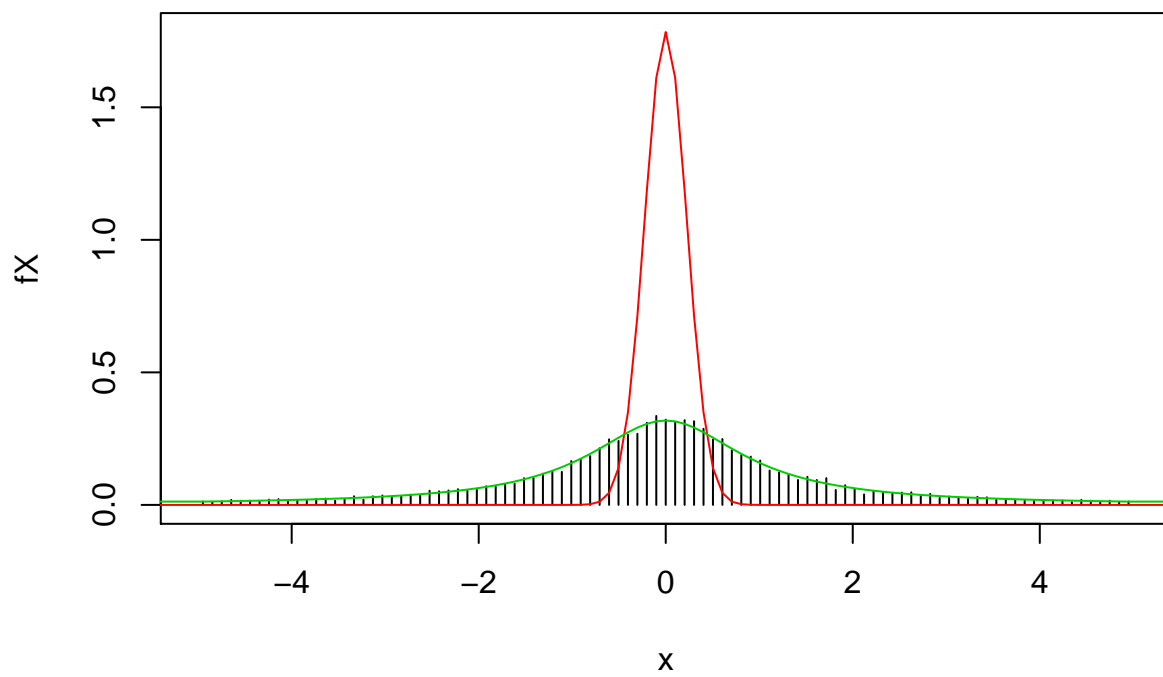
Suma de 5 v.a. Cauchy



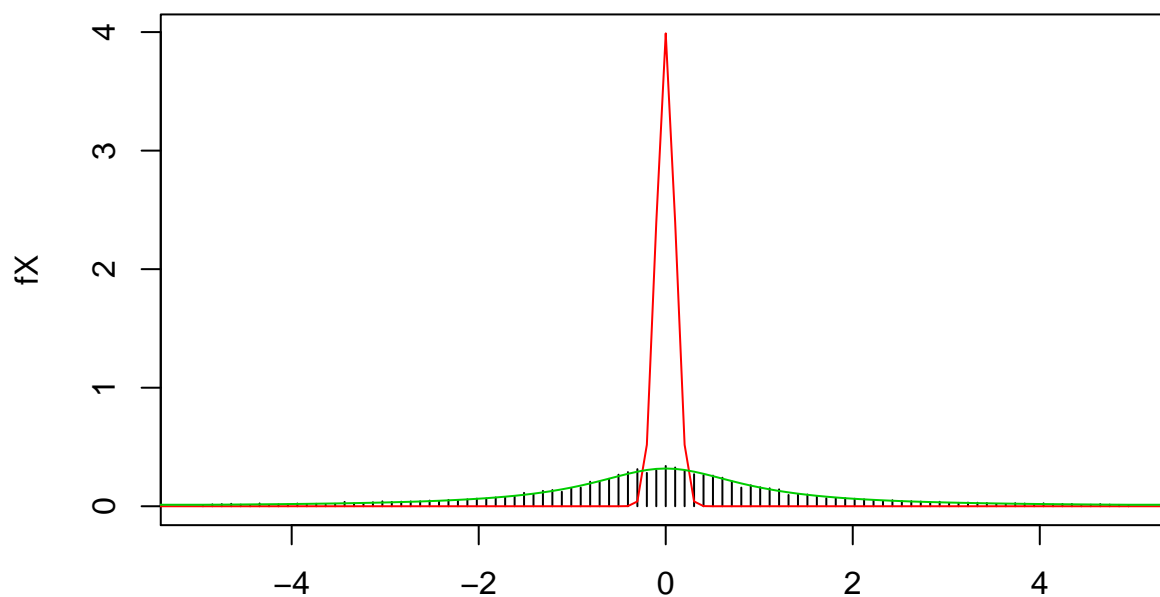
Suma de 10 v.a. Cauchy



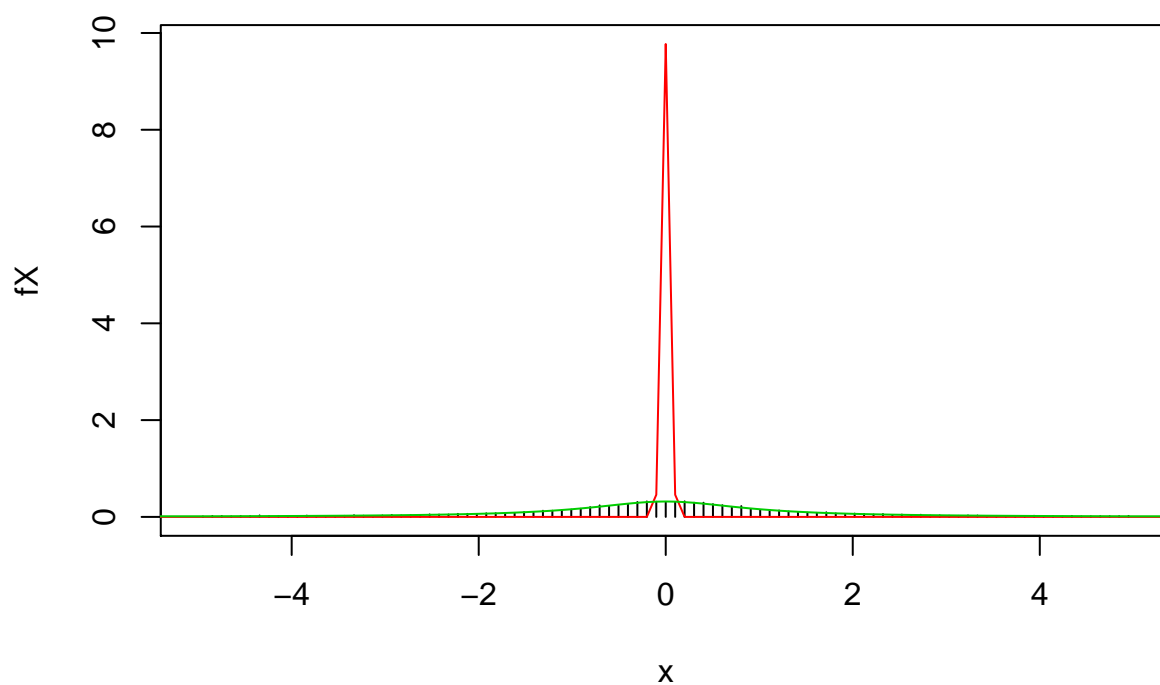
Suma de 20^x v.a. Cauchy



Suma de 100 v.a. Cauchy



Suma de 600^x v.a. Cauchy



Como puede verse, la función de distribución de la variable aleatoria suma de variables aleatorias *cauchy* sigue siendo cauchy del mismo ancho:

¿Por qué ocurre esto?