

# Introducción al caos

*J. Abellán*

*23 de noviembre de 2015*

## Introducción

Vamos a considerar un juego matemático en apariencia sencillo: la iteración de funciones.

Consideraremos una función bien simple, la parábola:

$$f(x) = \lambda x (1 - x)$$

El *juego* consiste en elegir un valor de  $x_o$  que cumpla  $0 < x_o < 1$ , la semilla, e iniciar el proceso iterativo  $x_o \rightarrow x_1 = f(x_o)$  y vuelta a empezar. Al final habremos generado una serie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en la que cada término es el transformado del anterior:

$$x_{i+1} = \lambda x_i (1 - x_i)$$

El objetivo es entender las curiosas propiedades de esa serie.

```
fx <- function( x ) lambda * x * ( 1 - x )

fxn <- function( x, n ) {

  for ( j in 1 : n ) { x <- fx( x ) }

  return( x )

}

Ixn <- function( x, n ) {

  X <- rep( 0, n )
  for ( j in 1 : n ) {x <- fx( x ); X[ j ] <- x}

  return( X )

}
```

Empecemos dibujando la función  $f(x)$  y sus funciones *iteradas*

```
# parámetro lambda
lambda <- 3.6

# número de iterada
GI <- c(1, 2, 4, 8 )
n <- length( GI )

dx <- .001
x <- seq( 0, 1, by = dx )

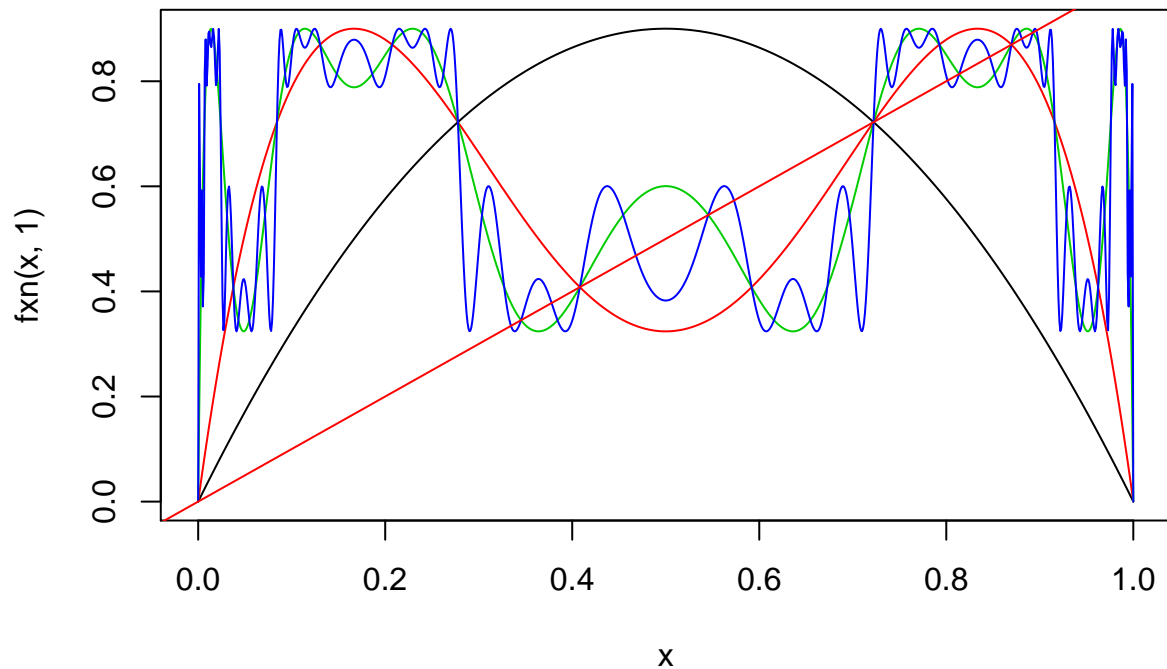
plot( x, fxn( x, 1 ), type = "l" )
```

```

for( i in 2:n ){

  lines( x, fxn( x, GI[ i ] ), col=i )
}
# Bisectriz
abline( 0, 1, col = 2 )

```



## Diagrama de bifurcación

Para mejor visualizar el proceso iterativo, iremos variando el parámetro  $\lambda$ .

Así, para cada valor de  $\lambda$  realizamos, a partir de la misma semilla, unas cuantas iteraciones sin dibujarlas: se trata de llegar al *conjunto límite*.

A continuación, seguimos el proceso iterativo unas cuantas iteraciones más pero ya dibujando la serie obtenida y ver así si hay un proceso periódico o no. Dicho de otro modo, podemos ver la estructura del *conjunto límite* para ese valor del parámetro  $\lambda$ .

En el eje  $x$  colocamos el parámetro  $\lambda$  y en el eje  $y$  los puntos del conjunto límite, que puede contener un único punto, o dos, o tres, o etc...

```

# El proceso
# iteraciones
M <- 250

X <- rep( 0, M )

# Rango de variación del parámetro lambda
nL <- 200
l1 <- 3.83 ; l2 <- 3.96
LAMBDA <- seq( l1, l2, len = nL )

```

```

# Ventana de dibujo
y1 <- 0 ; y2 <- 1

plot( 0, 0,
      cex = .1,
      xlim = c( 11, 12 ),
      ylim = c( y1, y2 ),
      xlab = expression( lambda ),
      ylab = " Xi " )

# Semilla inicial
xi <- 0.134545

# Comenzamos el proceso iterativo
x <- xi

# barriendo en lambda
for ( i in 1 : nL ) {

  lambda <- LAMBDA[ i ]

  # iteramos sin dibujar
  x <- fxn( x, 2 * M )

  # iteramos pero guardando en memoria
  X <- lxn( x, M )

  points( rep( lambda , M ), X, cex = .01 )
}

```

