El péndulo

J. Abellán

12 de noviembre de 2019

El péndulo simple

Un péndulo, de masa $m = 1\ kg$ y de longitud $l = 1\ m$, oscila con una amplitud pequeña, $A = 0.01\ m$, alrededor de su posición de equilibrio, $x = 0$, en el campo gravitatorio de la Tierra ($g = 9.8\ m/s^2$).

- Resuelva numéricamente el problema mecánico con las condiciones iniciales $x(t = 0) = A$ y $v(t = 0) = 0$, donde $v \equiv \frac{dx}{dt}$ es la velocidad:

$$m\ \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -\ m\ g\ \frac{x}{l}$$

y obtenga $x_n = x_n(t)$ para todo $t > 0$.

- Superponga a la solución numérica $x_n = x_n(t)$ la solución teórica $x = x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t)$ (en color rojo).
- ¿Dónde se encontrará con seguridad el péndulo al cabo de un tiempo $10 < t < 10.001\ s$?
- Si no conozco el momento exacto $t = 0$ en el que el péndulo se puso a oscilar y decido observarlo en un instante cualquiera ¿cuál será la probabilidad de encontrarlo en la posición $-0.001 < x < 0.001$?
- ¿Y en la posición $x = 0.01\ m$?
- ¿Cuál será la probabilidad de encontrarlo con una velocidad $|v| < 0.001\ m/s$
- Dibuje la gráfica de la energía total (cinética mas potencial) en función del tiempo.

Ayuda

- Calcule y dibuje el histograma de las variables *'aleatorias'* $x, v, |v|$.
- Superponga a dichos histogramas la solución teórica, es decir, la función de distribución de las variables aleatorias $x, v, |v|$.

Con fricción

Presentamos la solución para el caso del péndulo simple con fricción:

$$m\ \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -\ m\ g\ \frac{x}{l} - b\ \frac{dx}{dt}$$

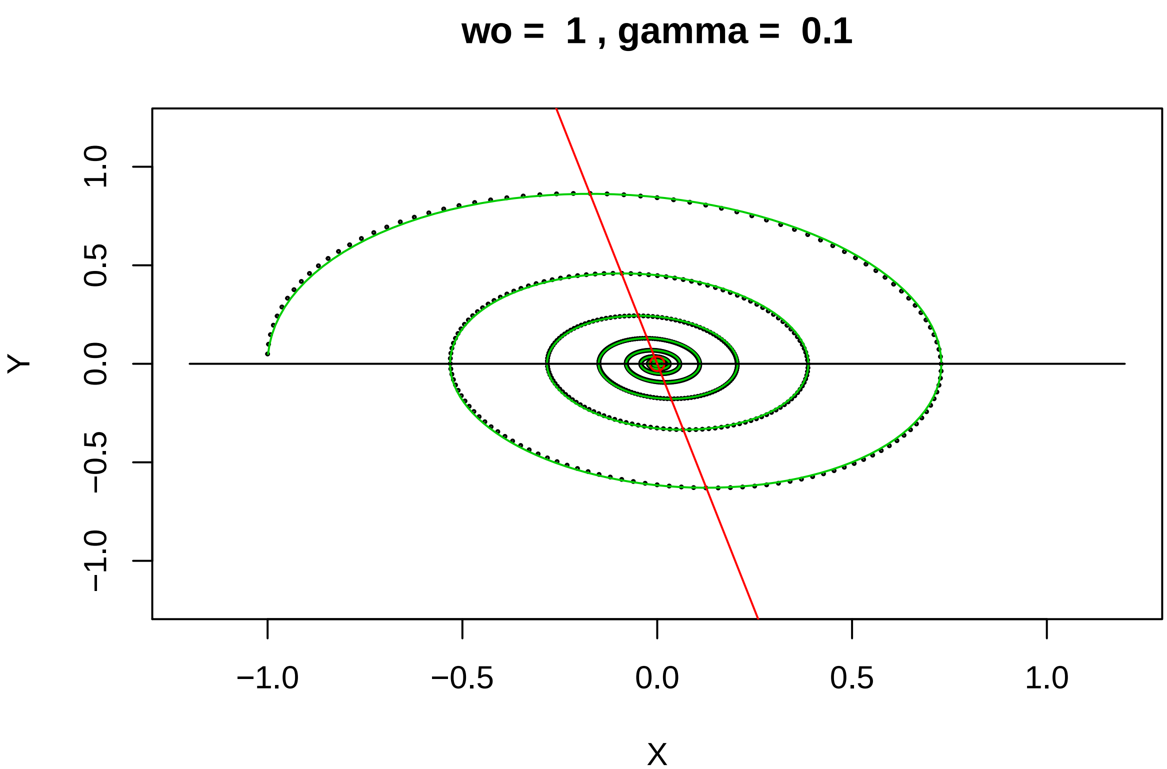
Que se puede poner como un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= y \\ \tfrac{dy}{dt} &= -\ \omega_o^2\ x - \gamma\ y \end{aligned}$$

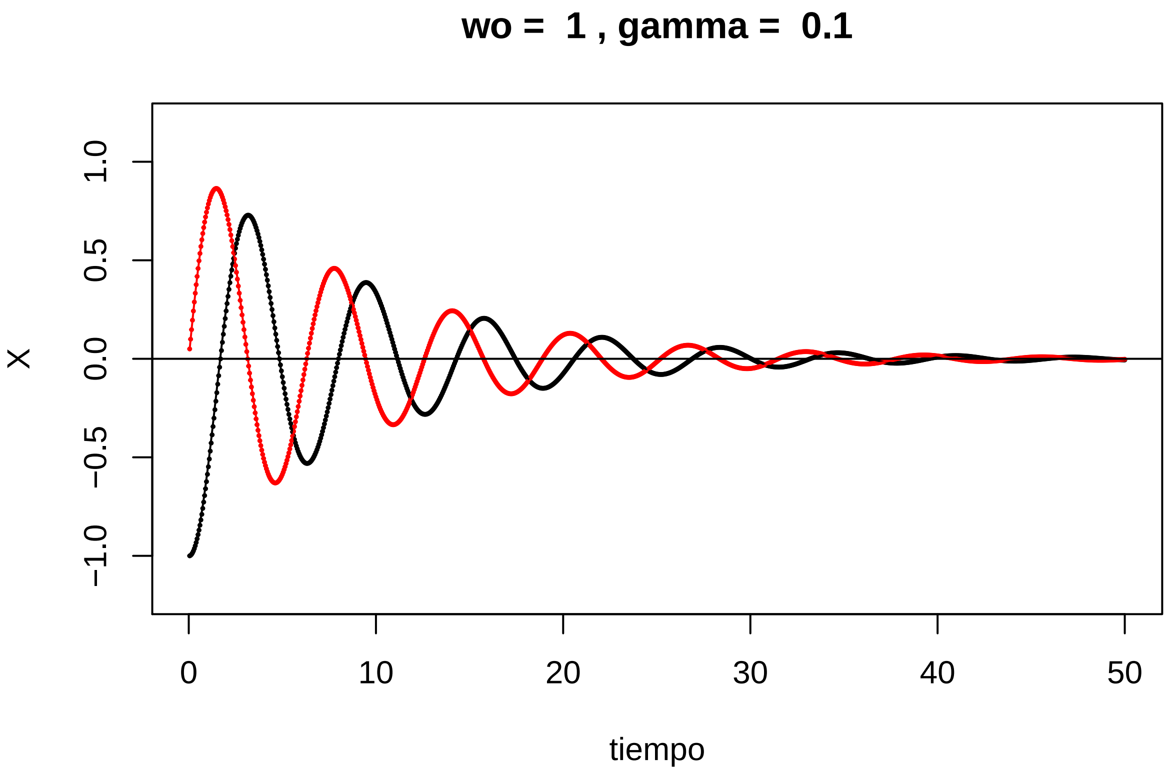
donde se ha definido el coeficiente de amortiguamiento como $\gamma \equiv b/m$ y la frecuencia propia como $\omega_o^2 \equiv \frac{g}{l}$

```r
# Dinámica del péndulo
fx <- function( y ) y

fy <- function( x, y ) - 2 * gamma * y - w0^2 * x

# Isolíneas
fx0 <- function( x ) 0 * x

fy0 <- function( x ) - w0^2 * x / ( 2 * gamma )

# Parámetros w0, gamma, w
w0 <- 1

gamma <- 0.1

if ( gamma < w0 ) w <- sqrt( w0^2 - gamma^2)

# Estado estacionario
X0 <- 0; Y0 <- 0

# Condiciones iniciales
xi <- - 1; yi <- 0

# Solución analítica
xt <- function( t ) {

  xi * exp( - gamma * t ) * ( cos( w * t ) + ( gamma / w ) * sin( w * t ) )

}

yt <- function( t ) - xi * exp( - gamma * t ) * ( w0^2 / w ) * sin( w * t )

# Tiempo de integración
dt <- .05; n <- 1000

tiempo <- ( 1 : n ) * dt

# declaro los contenedores para x, y
X <- Y <- rep( 0, n )

# Ventana de dibujo
xm <- 1.2 ; ym <- 1.2

# Empezamos el proceso de cálculo
x <- xi ; y <- yi

for ( i in 1 : n ){

  # Método de Euler
  dX <- fx( y ) * dt

  x <- x + dX
```

```r
  dY <- fy( x, y ) * dt

  y <- y + dY

  # Guardamos en memoria posición y velocidad
  X[ i ] <- x; Y[ i ] <- y

}

# Solución numérica
plot( X, Y, cex = 0.2,

      xlim = c( - xm, xm ),

      ylim = c( - ym, ym),

      main = paste("wo = ", w0,", gamma = ", gamma )

    )

# Solución analítica
lines( xt( tiempo ), yt( tiempo ), col = 3 )

# Estado estacionario
points( X0, Y0, col = 2 )

# Isolíneas
z <- seq( - xm, xm, len = 100)

lines( z, fx0( z ), col = 1 )

lines( z, fy0( z ), col = 2 )
```




```
# Otras gráficas
plot( tiempo, X,

      cex = 0.2,

      ylim = c( - xm, xm ),

      main = paste("wo = ", w0,", gamma = ", gamma )

    )

points( tiempo, Y, cex = .2, col = 2 )

# Teoría
lines( tiempo, xt( tiempo ) )

lines( tiempo, yt( tiempo ), col = 2 )

abline( h = 0 )
```


wo = 1 , gamma = 0.1
X
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
10
20
30
40
50
tiempo