Kepler

J. Abellán

15 de diciembre de 2016

El problema de Kepler

Resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales del problema de *Kepler*, un planeta orbitando alrededor del sol, con el método de *Euler*.

Utilizamos un sistema de unidades $GM_s = 1$.

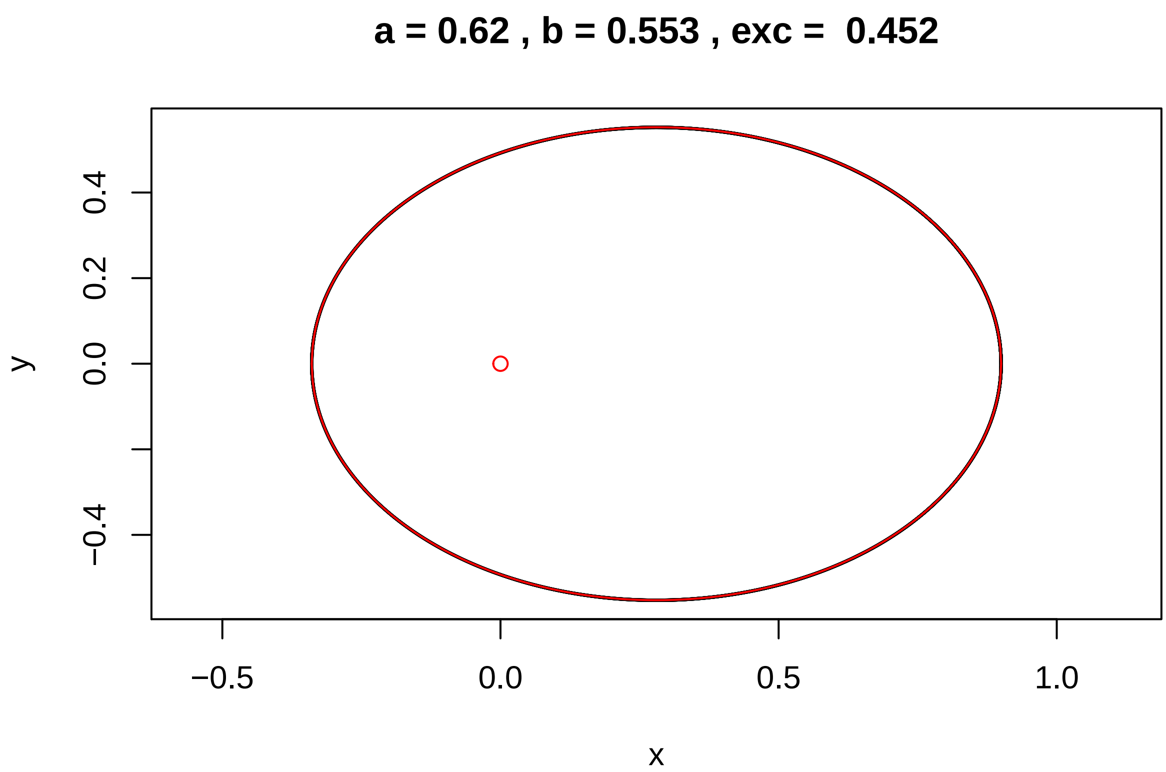
$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{X}{(X^2+Y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{Y}{(X^2+Y^2)^{3/2}}$$

```
# Cálculo del ángulo en función de las coordenadas cartesianas
arco <- function( x, y ){

  N <- length( x )

  angulo <- rep( 0, N )

  for( i in 1 : N ) {

    if ( x[i]>0 & y[i]>0) angulo[i] <- atan( y[i] / x[i] )

    if ( x[i]<0 & y[i]>0) angulo[i] <- pi / 2 + atan( - x[i] / y[i] )

    if ( x[i]<0 & y[i]<0) angulo[i] <- pi + atan( y[i] / x[i] )

    if ( x[i]>0 & y[i]<0) angulo[i] <- 3*pi/2 + atan( - x[i] / y[i] )

  }

  return( angulo )

}

# Condiciones iniciales
X <- .9; Y <- 0

Vx <- 0; Vy <- 0.78

# energía potencial (m = 1)
U0 <- 1 / sqrt( X^2 + Y^2 )

# energía cinética
K0 <- 0.5 * ( Vx^2 + Vy^2 )

# Energía total
```

```
ET <- U0 + K0

# Tiempo de integración: n*dt
dt <- .001

n <- 13000

# guardamos toda la información en M
M <- matrix( c( X, Y, Vx, Vy, 0, 0 ), ncol = 6  )

for ( i in 1 : n ){

  # La fuerza (aceleración) en x,y
  r3 <- ( X^2 + Y^2 )^1.5

  Fx <- - X / r3

  Fy <- - Y / r3

  # Newton: cambio en la velocidad
  dVx <- Fx * dt

  dVy <- Fy * dt

  # Cambio de velocidad
  Vx <- Vx + dVx

  Vy <- Vy + dVy

  # cambio de posición
  dX <- Vx * dt

  dY <- Vy * dt

  X <- X + dX

  Y <- Y + dY

  # guardamos en memoria: una fila para cada instante
  M <- rbind( M, c( X, Y, Vx, Vy, Fx, Fy) )

}

# Dibujamos el resultado numérico
plot( M[, 1], M[, 2],

      cex= .1,

      #xlim = c( - 1, 1 ),

      #ylim = c( - 1, 1 ),

      xlab = "x",
```

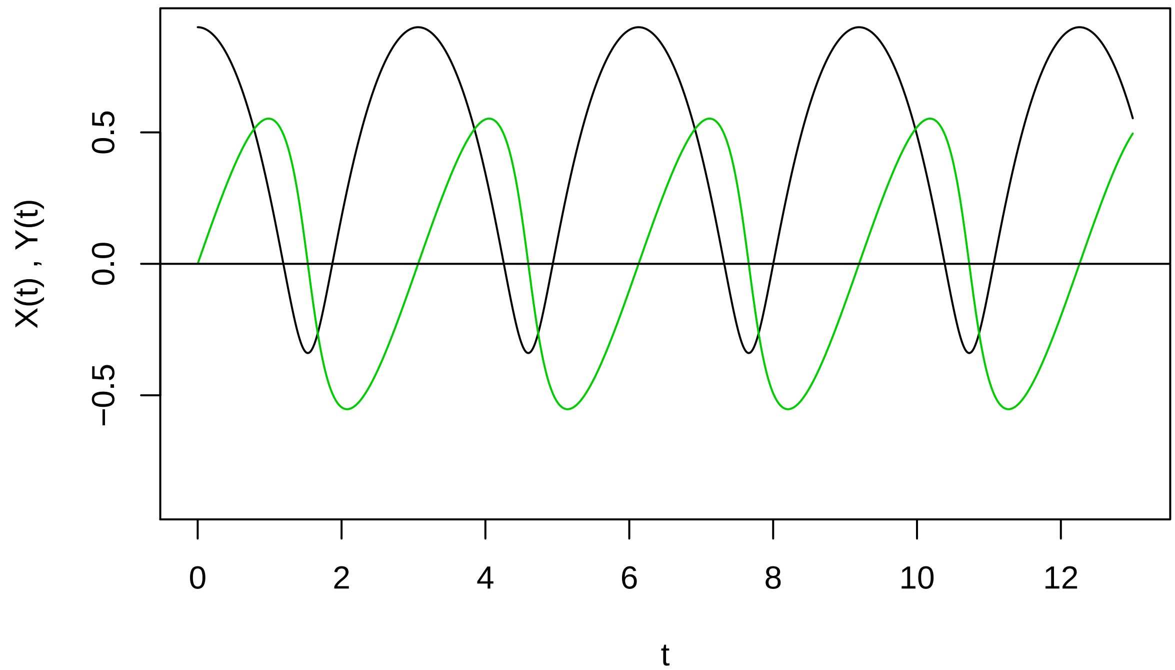
```
      ylab = "y",

      asp = 1 / 1.3

    )

points( 0, 0, col = 2 )

# cálculo de los parámetros de una elipse
# semiejes mayor y menor
xmax <- max( M[ , 1 ] ) ; xmin <- min( M[ , 1 ] )
ymax <- max( M[ , 2 ] ) ; ymin <- min( M[ , 2 ] )

a <- ( xmax - xmin )  / 2

b <- ( ymax - ymin ) / 2

# por tanto, la excentricidad es
exc <- sqrt( 1 - ( b / a )^2 )

# y la distancia focal (ojo con el signo)
dfocal <- a + xmin

# ecuación (en cartesianas!) de la elipse con semiejes a,b
xt <- seq( - a, a, len = 1000 )

# dos ramas
yt1 <- b * sqrt( 1 - ( xt / a )^2 )
yt2 <- - yt1

lines( dfocal + xt, yt1, col = 2 )

lines( dfocal + xt, yt2, col = 2 )

title( paste( "a =", round( a, 3 ) , ", b =", round( b, 3 ), ", exc = ", round( exc, 3 ) ) )
```



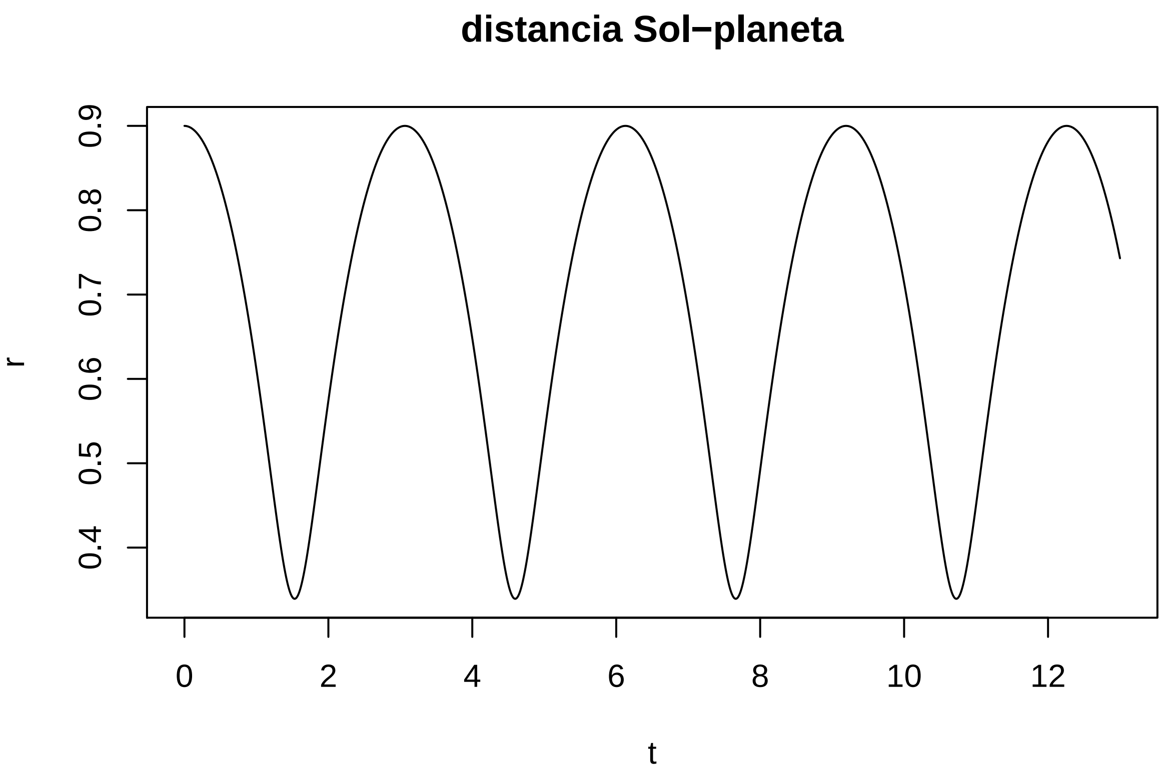
Preguntas obligadas:

- **¿Es una elipse?**
- ¿Cuánto valen los semiejes mayor y menor?
- ¿Cuánto vale la excentricidad?

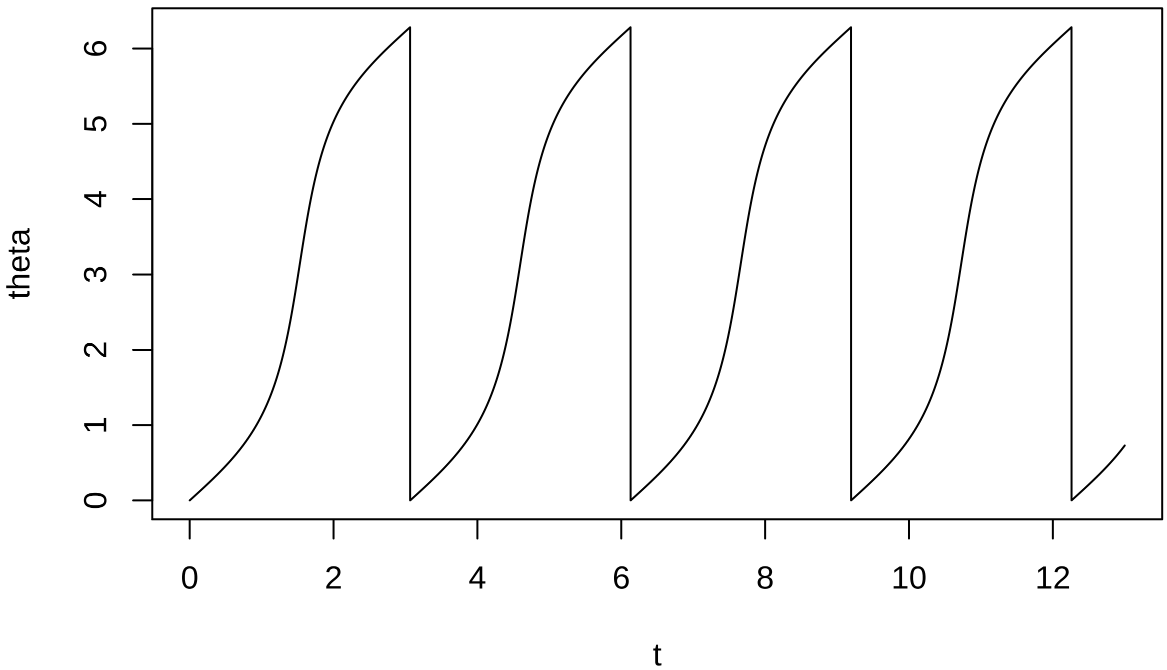
```
# en polares
r <- sqrt( M[ , 1 ]^2 + M[ , 2 ]^2 )

theta <- arco(  M[ , 1 ], M[ , 2 ] )

# tiempo
t <- ( 0 : n ) * dt

# en función del tiempo
plot( t, M[ , 1 ],

      ylab = "X(t)  , Y(t)",

      type = "l",

      ylim = c( - xmax, xmax )

    )

lines( t, M[, 2 ], col = 3 )

abline( h = 0 )
```




```r
# distancia sol-planeta
plot( t, r, type = "l", main = "distancia Sol-planeta"  )
```




```r
#ángulo formado con el eje x
plot( t, theta, type = "l" )
```




```
# Cálculo del periodo y  2ª ley de Kepler
dr <- diff( r )

dtheta <- diff( theta )

# los índices del paso por el origen
ipaso <- which( dtheta < 0 )

# el periodo de la órbita
Periodo <- ( ipaso[ 2 ] - ipaso[ 1 ] ) * dt

# vector r de longitud n-1
rn <- r[ 1 : n ]

# elemento de área barrida por el planeta
dA <- 0.5 * rn^2  * abs(dtheta) * ( 1 + abs(dr) / rn )

# elegimos un mes como intervalo de tiempo
dT <- Periodo / 12 ; ndT <- round( dT / dt )
i1 <- 1 ; i2 <- i1 + ndT

# seis meses después
i3 <- round( 6 * dT / dt ) ; i4 <- i3 + ndT

# área = suma de elementos de área
A1 <- sum( dA[ i1 : i2 ] )

A6 <- sum( dA[ i3 : i4 ] )

# ¿Es el momento cinético J constante?
# J = mu r^2 dtheta/dt
```