Aproximación de Stirling

J. Abellán

22 de octubre de 2017

Aproximación de Stirling

La aproximación de Stirling permite calcular de manera aproximada el factorial de un número N grande:

$N! \approx \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N$

La aproximación es muy buena incluso para valores de N del orden 10. Si tomamos logaritmos naturales en la expresión anterior, la aproximación queda:

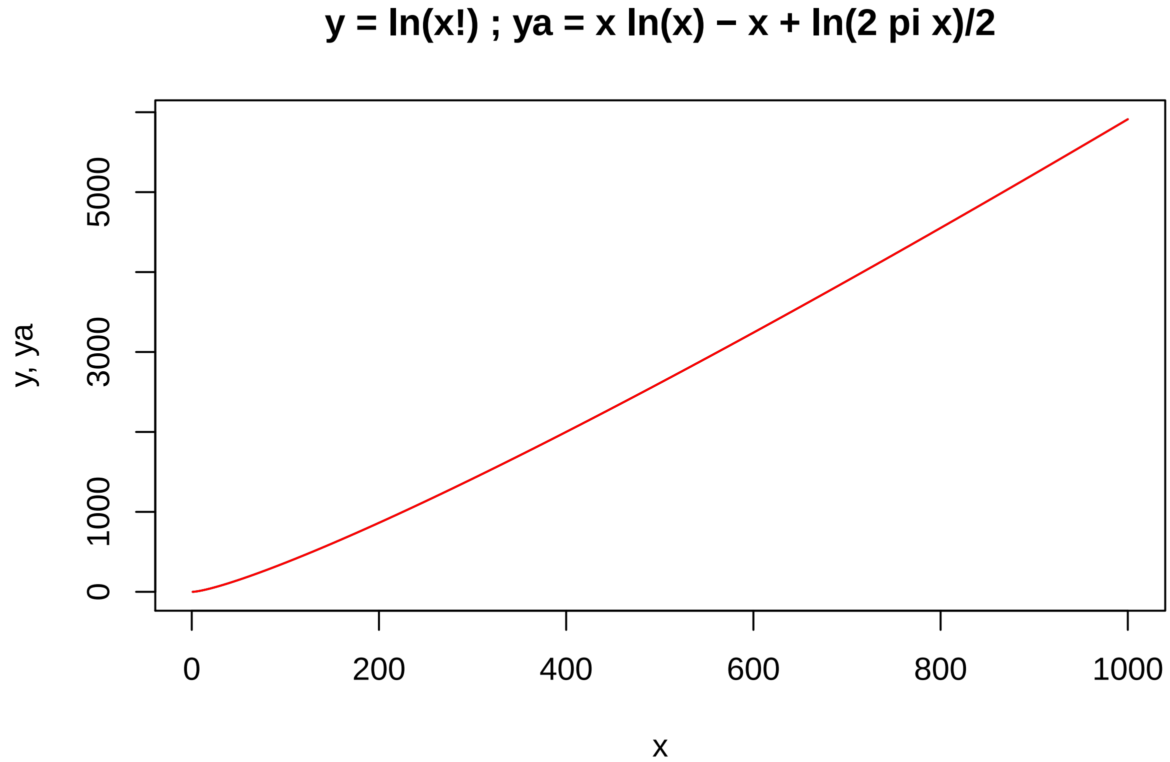
$\ln N! \approx N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln (2\pi N) = (N + \frac{1}{2}) \ln N - N + \frac{1}{2} \ln (2\pi) \approx N \ln N - N$

La segunda aproximación suele ser suficiente si N es muy grande.

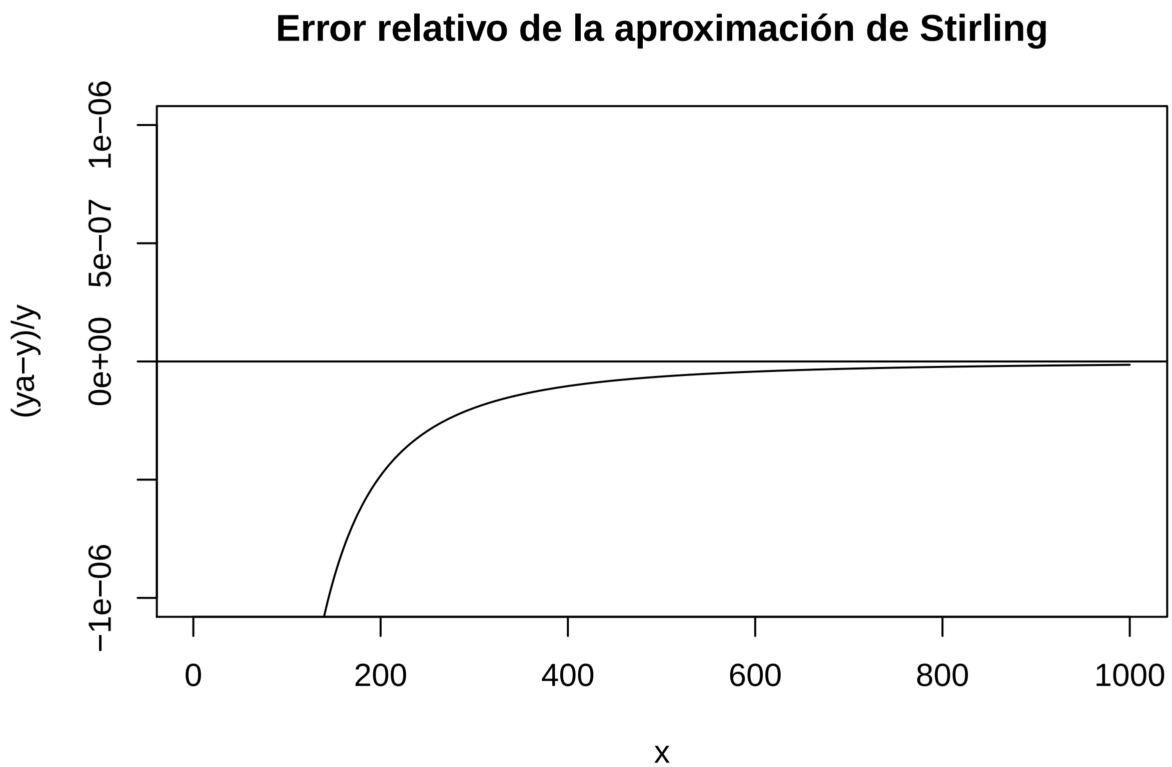
Para ver la bondad de la aproximación es mejor calcular el error relativo, es decir, la diferencia entre el valor exacto y el aproximado dividido por el valor exacto, en función del número. Dibujaremos el error relativo en función del número:

```
#Número grande N >> 1
N <- 1000

x <- 1:N

cte <- log( 2 * pi ) / 2

# Valor exacto: y = ln(i!) = ln((i-1)!) + ln(i)
# Valor aprox:  ya= ln(i!) = (i+1/2)*ln(i)-i + log(2*pi)/2
y <- ya <- rep( 0, N )

for ( i in 2 : N ){

    y[ i ] <- y[ i - 1 ] + log( i )

    ya[ i ] <- ( i + .5 ) * log( i ) - i + cte

}

#Error relativo
ery <- ( ya - y ) / y

#Dibujo las dos funciones
plot( x ,y,

      ylab = "y, ya",

      type = "l",

      main = "y = ln(x!) ; ya = x ln(x) - x + ln(2 pi x)/2"

    )
```

```r
lines( x, ya, col = 2 )
```




```r
#Y el error relativo
ym <- 1e-6

plot( x, ery,

      type = "l",

      ylab = "(ya-y)/y",

      ylim = c( - ym, ym ),

      main = "Error relativo de la aproximación de Stirling"

    )

abline( h = 0 )
```



Como puede verse, la función exacta y la aproximada son indistinguibles. El error decae a cero muy rápidamente.