# Deducción de la distribución de Boltzman

*J. Abellán*

*09/11/2015*

Blundell-DistribucionBoltzman. Epígrafe 4.6, figura 4.8, página 41.

El juego es sencillo aparentemente.

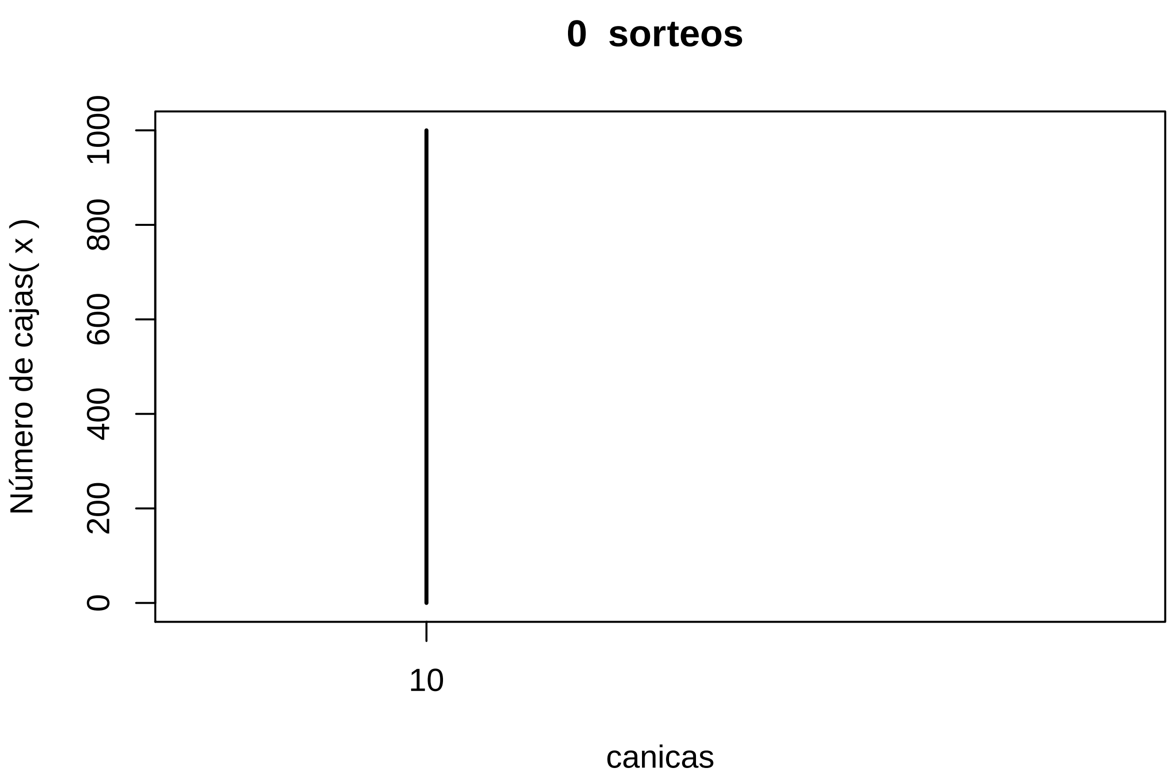
Dadas $N_c$ cajas, se ditribuyen entre ellas $NQ$ canicas. El juego consiste en elegir al azar dos cajas. La primera, si tiene canicas, dará una canica a la segunda. Este proceso se repite muchas veces.

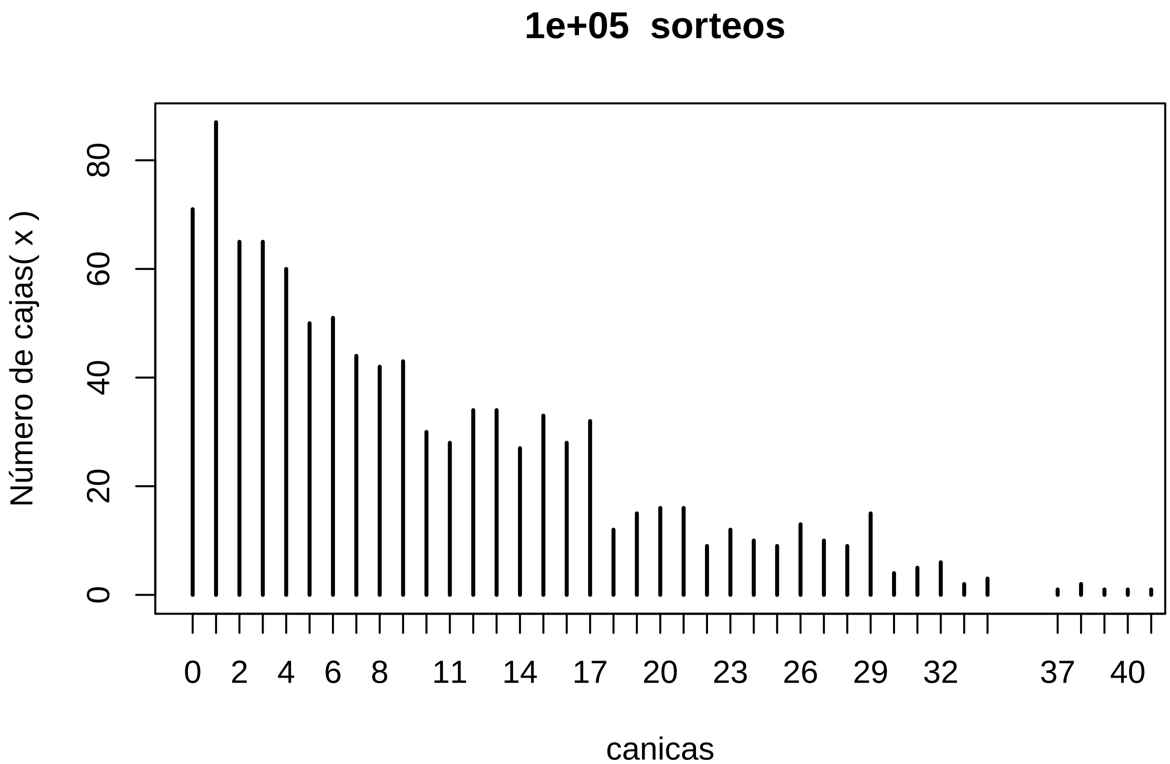
La pregunta es ¿cuál será la distribución final? Es decir, ¿cuántas cajas habrá con cero canicas, una canica, etc..?

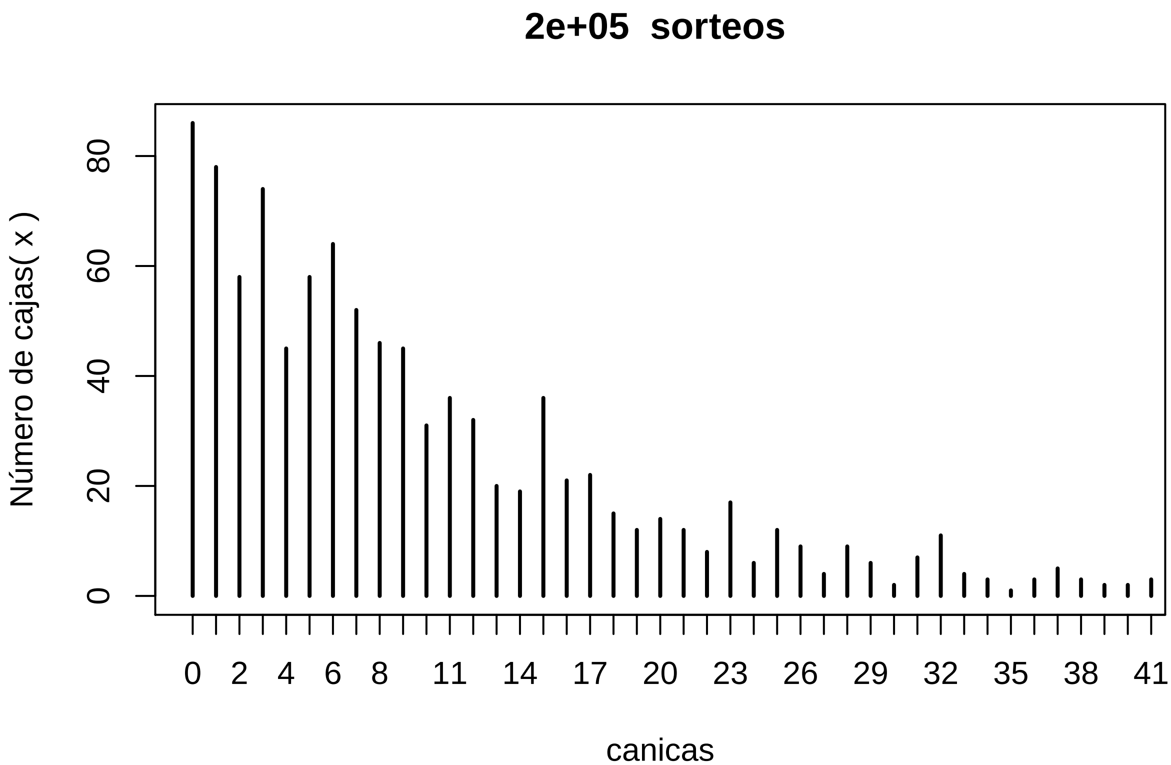
La respuesta, un tanto sorprendente, es la distribución de *Boltzman*, que tiene una importancia capital en *Física Estadística*.

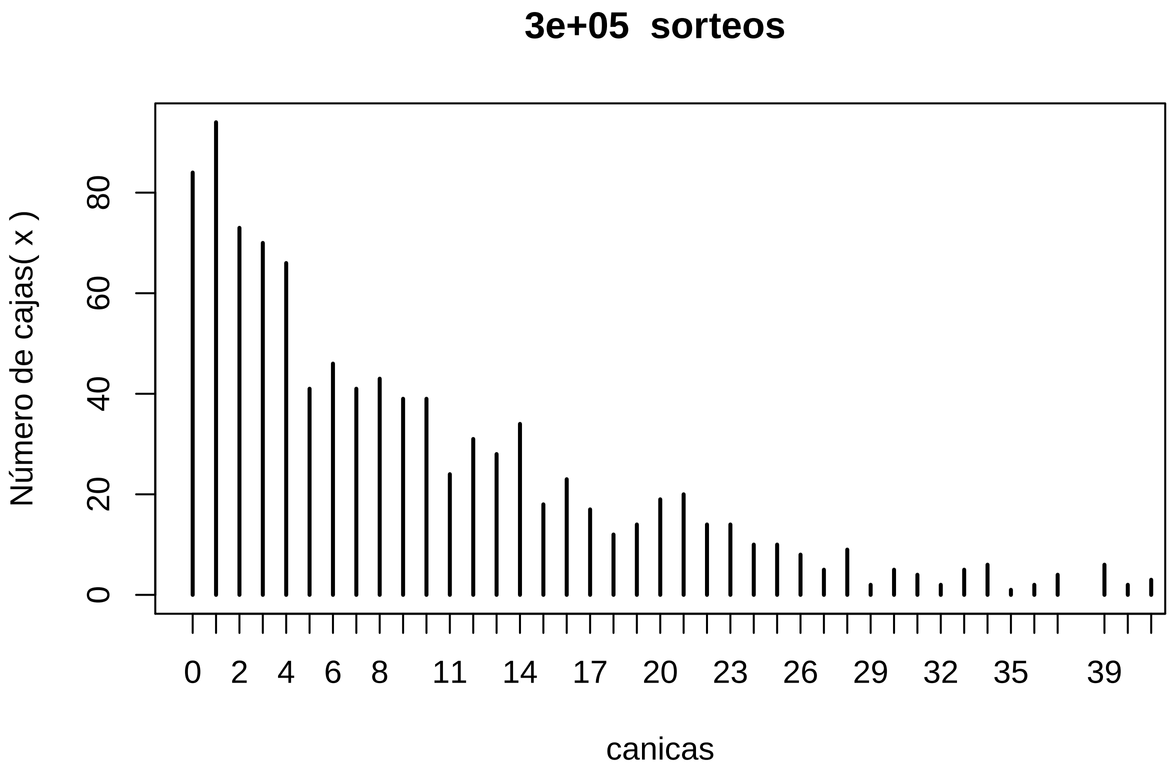
```
# Número de cajas
Nc <- 1000

# Número de canicas a repartir
NQ <- 10000

#Indice de cada caja
k <- 1 : Nc

#Declaro los contadores de canicas de cada caja.
#Los pongo inicialmente a cero.
C.ini <- rep( 0, Nc )

#Si hay más canicas que cajas, coloco en cada caja el número medio de canicas nq.
nq <- NQ / Nc

if ( nq >= 1 ) C.ini[] <- nq

#Si hay menos canicas que cajas, elijo al azar las NQ cajas afortunadas.
# Sus índices serán ke. Las otras seguirán teniendo cero canicas.
if ( nq < 1 )  { ke <- sample( k, NQ ) ; C.ini[ ke ] <- 1 }

#Comenzamos el juego
# NF = número de 'fotos' en el proceso
# NBSF = número de bucles sin 'foto'
NF <- 10

NBSF <- 100000

C <- C.ini

for (l in 1 : NF ) {

  #Dibujo la tabla (histograma) de contigencia, es decir,
  #el número de cajas N(c) que tiene c 'cuantos', con c=0, 1, 2, ...
  plot( table( C ),
```

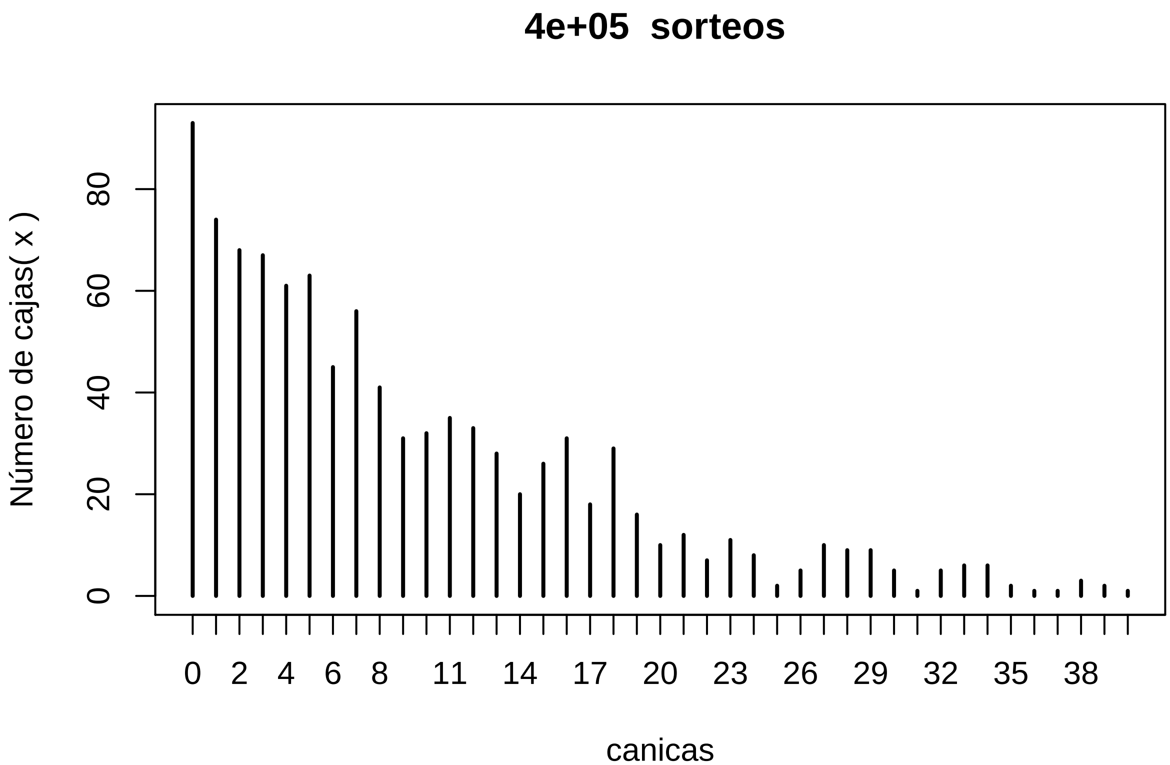
```
        xlim = c( 0, 4 * nq ),
        xlab = " canicas ",
        ylab = " Número de cajas( x ) ",
        main = paste( ( l - 1 ) * NBSF, " sorteos " ) )

  #Bucle para calcular sin dibujar
  for (s in 1 : NBSF ) {

    #Elejimos al azar dos cajas: muestreo sin remplazar
    m <- sample( k, 2 )

    #Caja i dadora, caja j receptora
    i <- m[ 1 ] ; j <- m[ 2 ]

    #Si hay cuantos en la caja i le quito uno
    #y se lo doy a la caja j
    if ( C[ i ] > 0 ) {
      C[ i ] <- C[ i ] - 1
      C[ j ] <- C[ j ] + 1
    }

  }

}
```

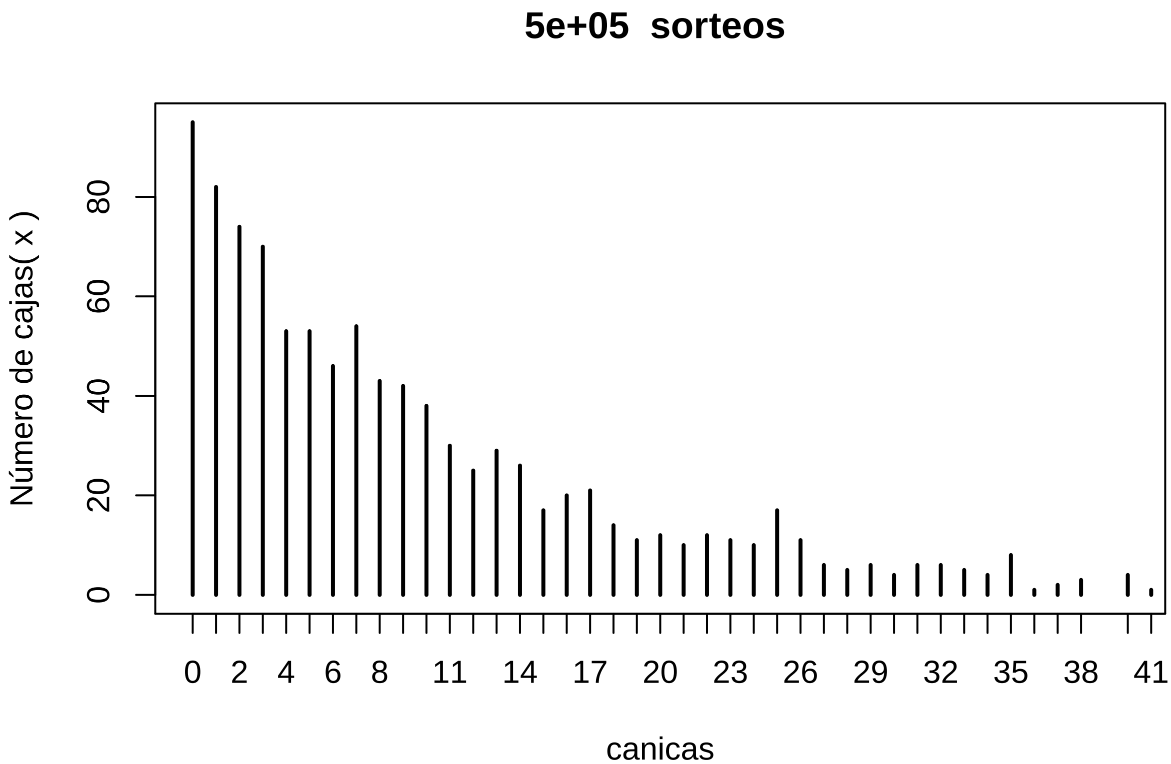


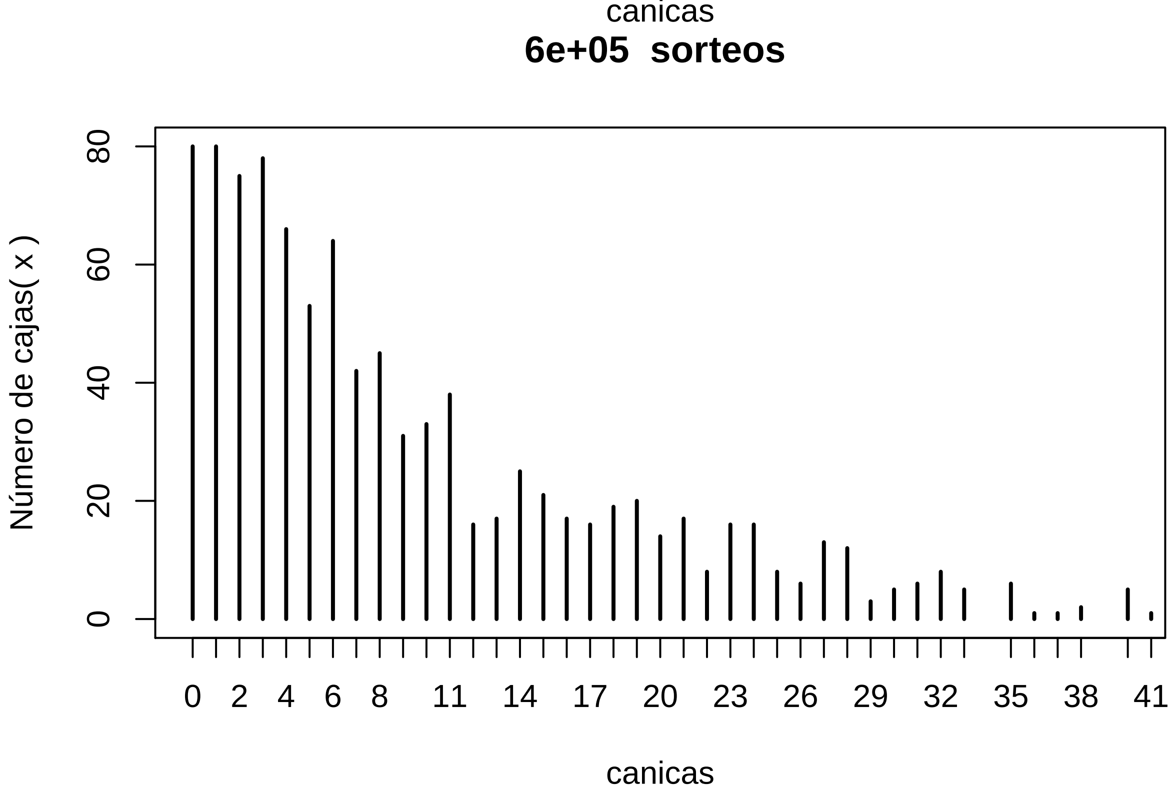

1e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0
2
4
6
8
11
14
17
20
23
26
29
32
37
40
canicas

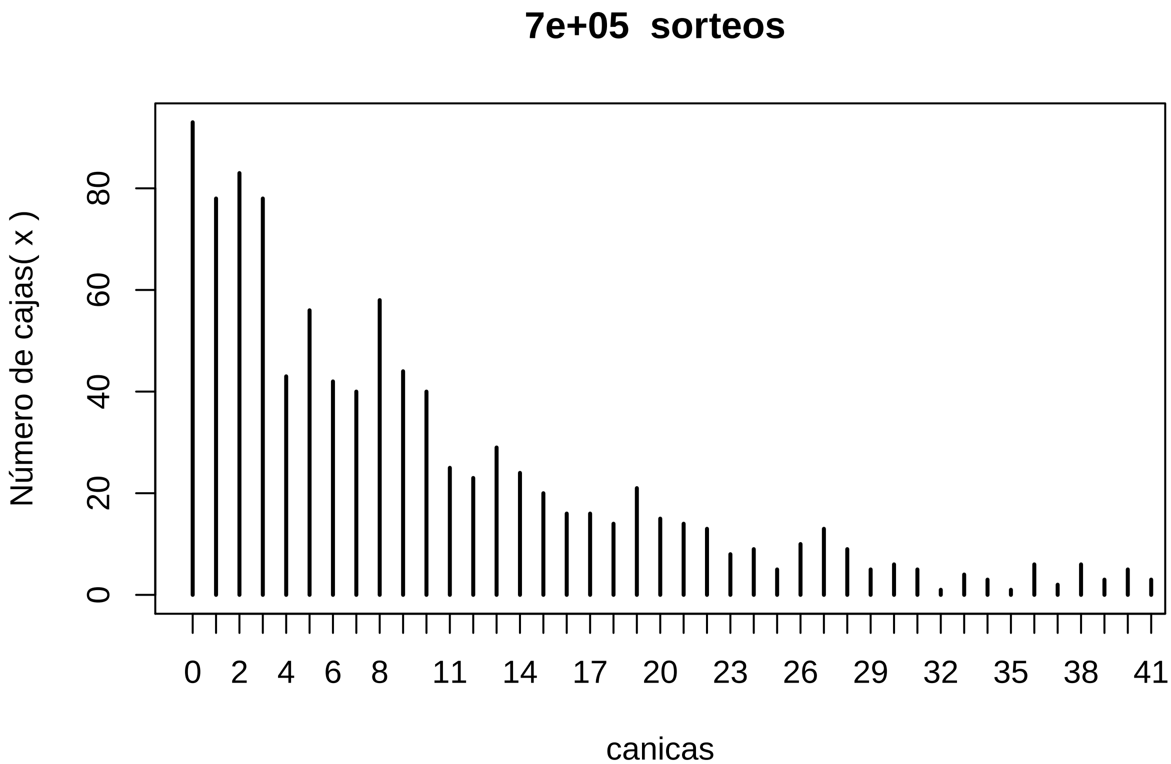

2e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0
2
4
6
8
11
14
17
20
23
26
29
32
35
38
41
canicas

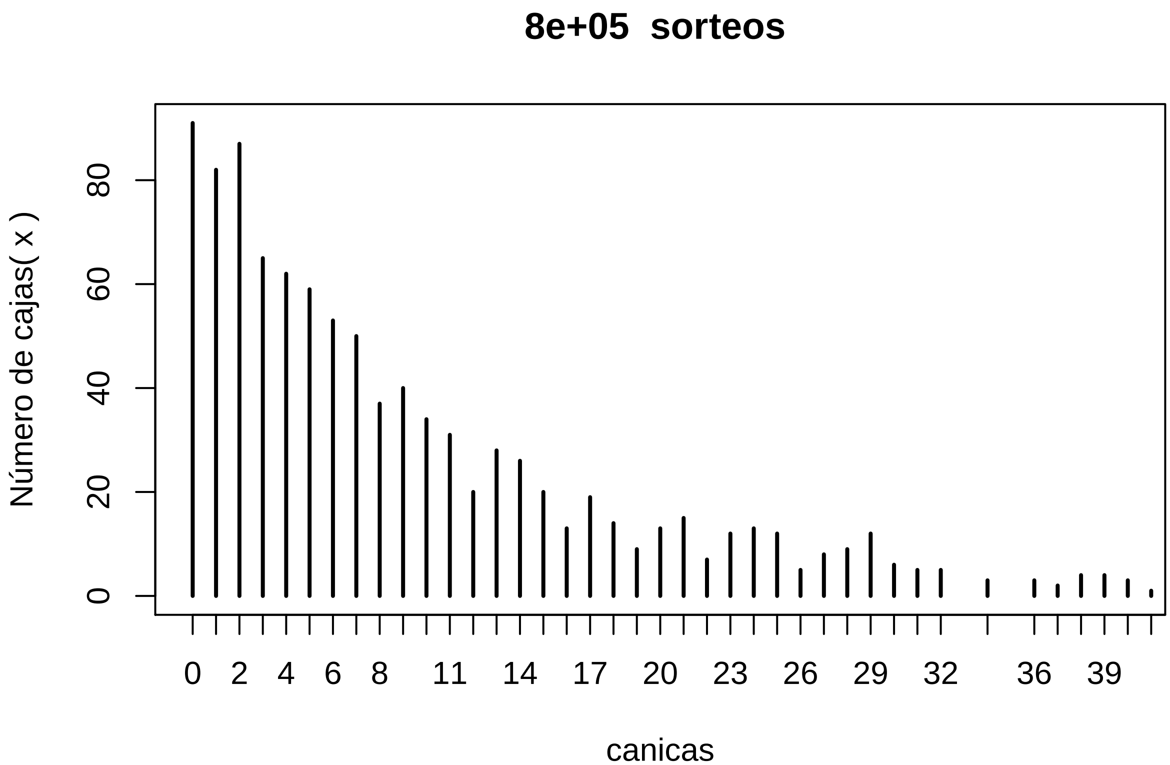

3e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0 2 4 6 8 11 14 17 20 23 26 29 32 35 39
canicas

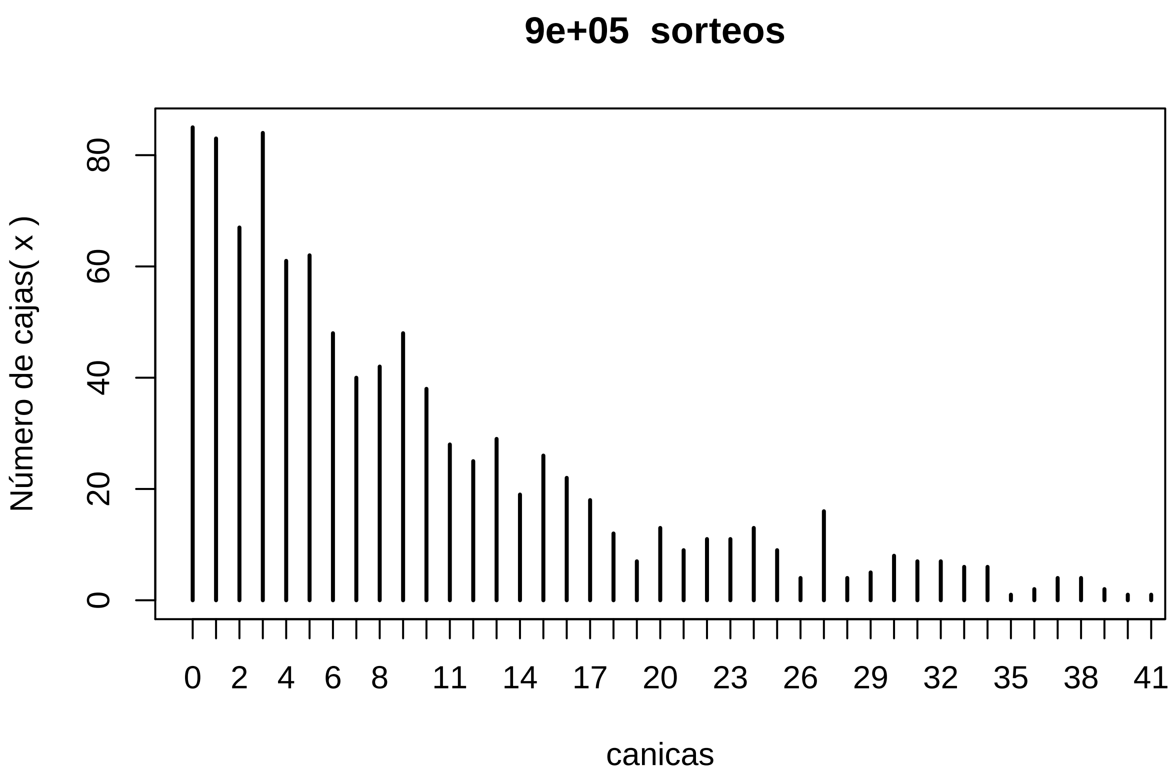

4e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0 2 4 6 8 11 14 17 20 23 26 29 32 35 38
canicas


5e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0
2
4
6
8
11
14
17
20
23
26
29
32
35
38
41
canicas


6e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0
2
4
6
8
11
14
17
20
23
26
29
32
35
38
41
canicas


7e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0 2 4 6 8 11 14 17 20 23 26 29 32 35 38 41
canicas


8e+05 sorteos
Número de cajas( x )
0
20
40
60
80
0 2 4 6 8 11 14 17 20 23 26 29 32 36 39
canicas




```r
#Extraigo la información de la tabla C.
#Comparo con la teoría de Boltzman

# Número de cajas con x canicas
Ncx <- array( table( C ) )

#Valores posibles de la variable x = número de canicas = 0, 1, 2,...
x <- 0 : ( length( Ncx ) - 1 )

# Frecuencias relativas
fX <- Ncx / sum( Ncx )

# Número medio de canicas por caja
xm <- sum( x * fX )

plot( x, fX,
      xlim = c( 0, 4 * nq),
      xlab = " x = canicas por caja",
      ylab = "Fracción de cajas ( x ) ",
      main = paste( Nc, " cajas; <xt> = " , nq, ", xm = ", xm ) )


#Distribución de Boltzman
fB <- exp( - x / xm ) / xm

fBt <- exp( - x / nq ) / nq

# Boltzman experimental
lines( x, fB, col = 2 )
```

```r
# Boltzman teórico
lines( x, fBt, col = 3)

# Número medio de canicas por caja
abline( v = nq, col = 3 )
```