Independencia de la media y varianza

J. Abellán

7/11/2019

Independencia de la media y varianza muestrales

Los objetivos de esta simulación son comprobar:

1. La independencia de la media y de la varianza muestrales.
2. El teorema 8.2 del Walpole:

Si $\overline{X}$ es la media muestral de tamaño n de una población de media μ y varianza σ^2, entonces

$$Z = (\overline{X} - \mu)/\sigma^2$$

será normal estándar cuando $n \to \infty$.

3. El teorema 8.4 del Walpole:

Si S^2 es la varianza muestral de tamaño n de una población normal de varianza σ^2, entonces el estadístico:

$$Y \equiv \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

tiene una distribución χ^2_{n-1} con $n-1$ grados de libertad.

4. El teorema 8.5 del Walpole:

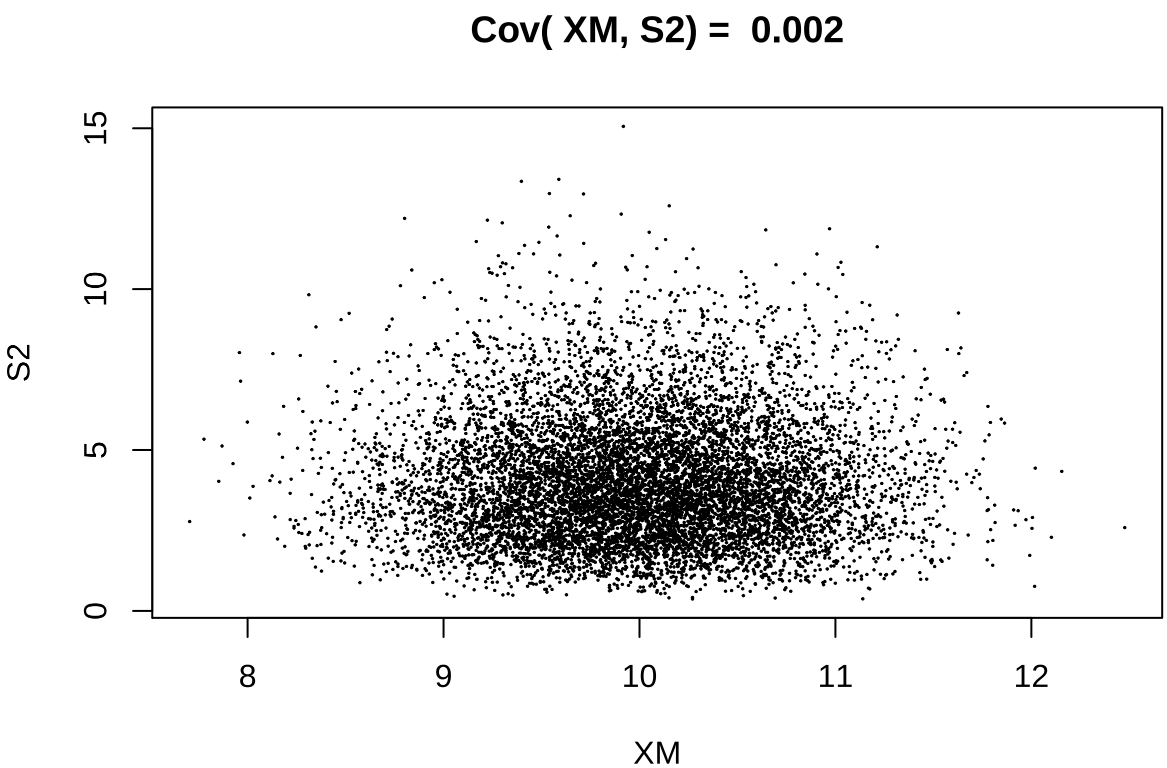
Si Z es una variable aleatoria normal estándar y V es una variable aleatoria χ^2 con ν grados de libertad entonces la variable aleatoria

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

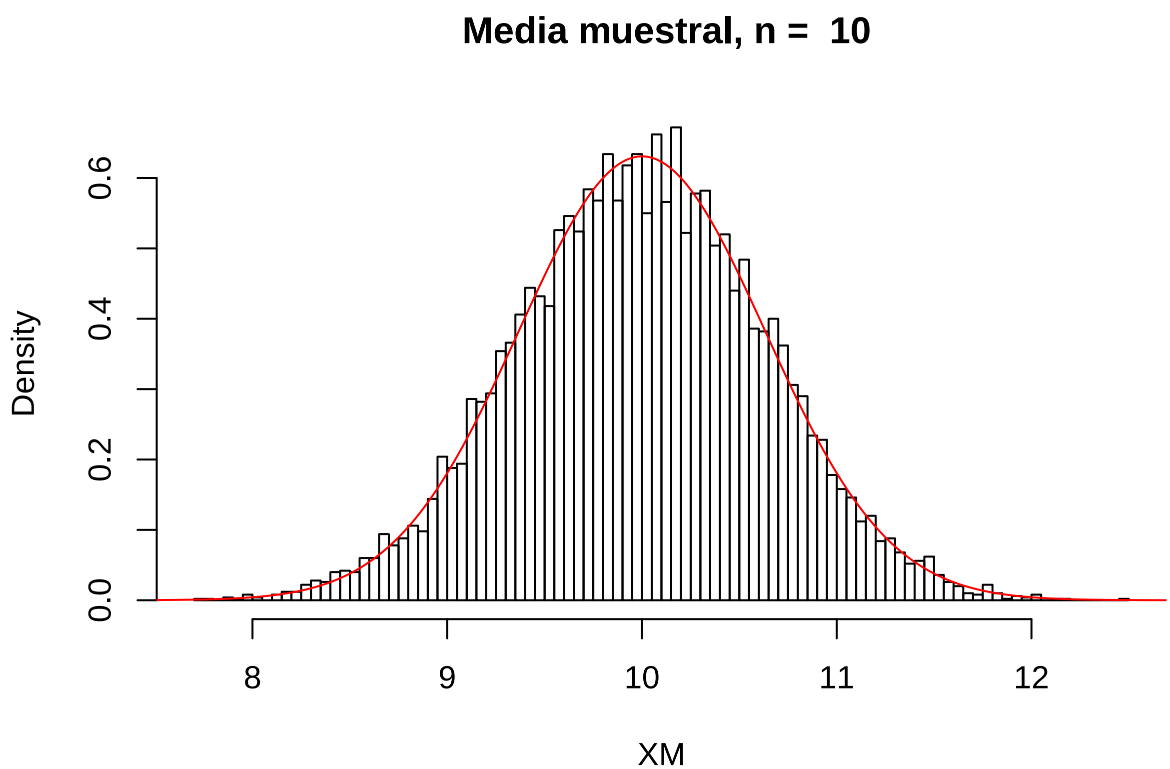
es $t - student$ con ν grados de libertad.

```r
#Consideremos una población normal de media mu y varianza sigma^2
mu <- 10 ; sigma <- 2

#Considero muestras de tamaño n
n <- 10

#Hago una buena estadística
nfilas <- 10000

# Simulación de los datos
X <- rnorm( nfilas * n, mu, sigma )

# los ponemos de forma de matriz
M <- matrix( X, ncol = n, nrow = nfilas )

# la media muestral
XM <- apply( M, 1, mean )
```

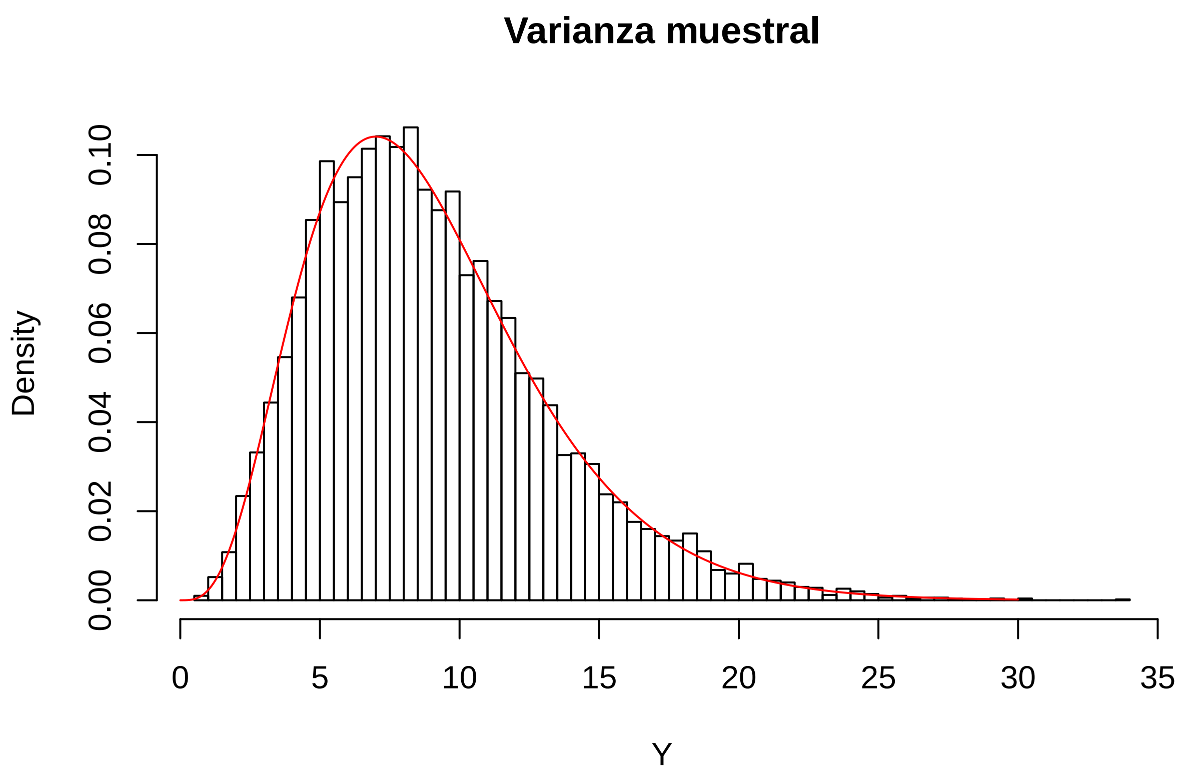
```
# la varianza muestral
S2 <- apply( M, 1, var )

#Compruebo que, en efecto, Xm y S2 son independientes: covarianza cero
covXMS2 <- cov( XM, S2 )

plot( XM, S2, cex = 0.1, main = paste( "Cov( XM, S2) = ", round( covXMS2, 3 ) ) )
```



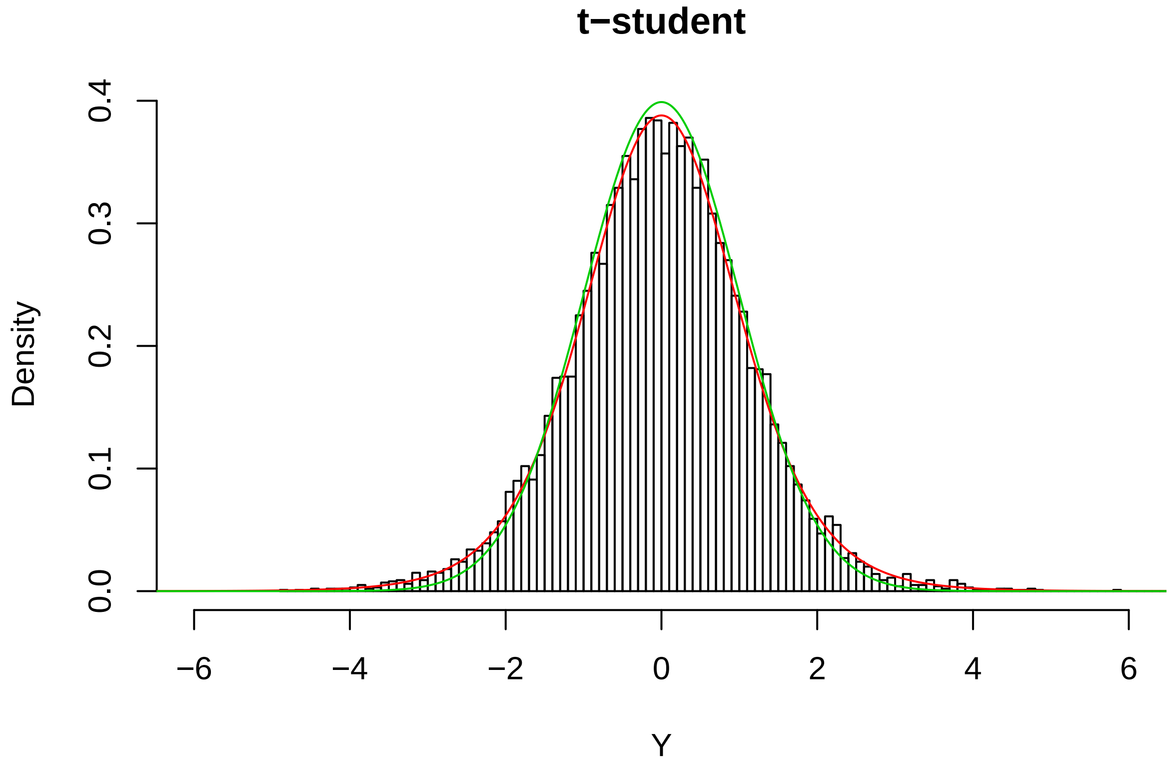

```
#Compruebo el teorema 8.2
hist( XM,

      breaks = 100,

      probability = T,

      main = paste( " Media muestral, n = ", n )

    )

# Rango de la variable
x1 <- mu - 2 * sigma

x2 <- mu + 2 * sigma

x <- seq( x1, x2, len = 1000 )

lines( x, dnorm( x, mu, sigma / sqrt( n ) ), col = 2 )
```




```
#Compruebo el teorema 8.4 del Walpole
Y <- ( n - 1 ) * S2 / sigma^2

hist( Y,

      breaks = 100,

      prob = T,

      main = " Varianza muestral "

    )

# Rango de la variable
y <-seq( 0, 3 * n, by = .01 )

lines( y, dchisq( y, n - 1 ), col = 2 )
```




```
#Compruebo el teorema 8.5 del Walpole
S <- sqrt( S2 )

Y <- ( XM - mu )  / ( S / sqrt( n ) )

hist( Y,

      breaks = 100,

      xlim = c( - 3 * sigma, 3 * sigma ),

      prob = T,

      main = " t-student "

    )

#La t de Student
y <- seq( - n, n, by = .01 )

lines( y, dt( y, n - 1 ), col = 2 )

#En el límite n grande, la t-student se convierte en normal
lines( y, dnorm( y ), col = 3 )
```


t−student
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−6
−4
−2
0
2
4
6
Y