Formule e tabelle per l'esame scritto di Laboratorio

Alberto Zaghini

Febbraio 2023

1 Esercizio 1: Misure indirette

1.1 Valore Medio

$$q(x, y, z, ...) \;\rightarrow\; \overline{q} = q(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, ...) \;//\; q_{best} = q(x_{best}, y_{best}, z_{best}, ...)$$

1.2 Propagazione incertezze

Passo passo

Se $q = c \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot z^{\gamma} \cdots$ con c costante numerica:

$$\frac{\Delta q}{q_{best}} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x_{best}} + |\beta| \frac{\Delta y}{y_{best}} + |\gamma| \frac{\Delta z}{z_{best}} + \cdots \;\rightarrow\; \Delta q = (\frac{\Delta q}{q_{best}}) \cdot q_{best}$$

Derivate (linearmente)

Se $q = q(x, y, z, ...)$, ovvero in generale sussiste relazione funzionale:

$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x_{best}, y_b, z_b, ...} \Delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{x_b, ...} \Delta y + \left| \frac{\partial q}{\partial z} \right|_{x_b, ...} \Delta z + ...$$

Nota: se q è espresso da un monomio e una grandezza è presente più volte (es: numeratore e denominatore) non si può usare Passo Passo ma si usano DP.

Derivate (in quadratura)

Se le variabili sono di tipo casuale e indipendenti (non correlate) è anche q è di tipo casuale:

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2_{x_b, ...} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2_{x_b, ...} \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2_{x_b, ...} \sigma_z^2 + ...}$$

Nota: in caso una misura sia presente come argomento di una funzione trascendente (trigonometrica, logaritmica, esponenziale) ricordarsi della regola per la derivata di f. composta:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d} f(x)}{\mathrm{d} x}$$

1.3 Minimizzare inc. relativa

Si determina $\frac{\Delta q}{q_{best}}$ in funzione della data misura x e si pone (per trovare punto di minimo secondo Fermat):

$$\frac{\partial (\frac{\Delta q}{q_{best}})}{\partial x} = 0$$

1.4 Variare errore relativo per grandezza casuale

(Mantenendo inalterata la media, ovvero $\hat{x}$, con grandezza iniziale campione N_1 e finale - da determinarsi - N_2)
Determinare innanzitutto il fattore di copertura: $\Delta x = k \cdot \sigma_{\overline{x}}$, noto

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N_1}} \quad \text{si ha} \quad k \cdot \sigma_x = \Delta x \cdot \sqrt{N_1}$$

Assumendo invariata $x_{best} = \overline{x}$ si determina $\Delta x'$ soddisfacente la condizione sull'errore relativo. Assunti costanti la deviazione campionaria (stessa popolazione) e il fattore di copertura:

$$\Delta x' = k \cdot \sigma'_{\overline{x}} = \frac{k\sigma_x}{\sqrt{N_2}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{N_2} = \frac{k\sigma_x}{\Delta x'} = \frac{\Delta x \cdot \sqrt{N_1}}{\Delta x'} \quad \text{dunque}$$

$$N_2 = N_1 \left(\frac{\Delta x}{\Delta x'} \right)^2$$

2 Esercizio 2: Miscellanea probabilistica

2.1 Probabilità

Dati due eventi A e $B \subseteq S$ (spazio campionario):

☐ **Verificarsi di almeno uno dei due | Somma logica = unione** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (caso limite: se mutualmente escludenti/ disgiunti, ovvero $A \cap B = \emptyset$ si ha $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

☐ **Verificarsi di entrambi | Prodotto logico = intersezione** (= 0 se incompatibili, altrimenti:)
Se indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{o più in generale per } N \text{ eventi} \quad P(\bigcap_{i=1}^{N} A_i) = \prod_{i=1}^{N} P(A_i)$$

se dipendenti

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Teorema di Bayes (!)

Probabilità condizionale: dati eventi H_i con $i = 1, ..., N$ mutualmente escludenti e tali da saturare lo spazio campionario ($\bigcup_{i=1}^{N} H_i = S \quad \leftrightarrow \quad P(\bigcup_{i=1}^{N} H_i) = 1$) e il verificarsi di un evento E si ha per la probabilità a posteriori di ciascun H_i:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E \cap H_i)}{P(E)} = \frac{P(E|H_i) \cdot P(H_i)}{P(E)}$$

Con $P(H_i)$ probabilità a priori di H_i e analogamente $P(E)$. Poiché gli H_i definiscono una partizione di S, si ha $P(E) = \sum_{i=1}^{N} P(E|H_i) \cdot P(H_i)$

2.2 Media Pesata

Date due misure della medesima grandezza $x_1 = (x_{1_{best}} \pm \Delta x_1)$ e $x_2 = (x_{2_{best}} \pm \Delta x_2)$ - nel caso di migliori stime da campioni gaussiani si ha $x_{i_{best}} = \overline{x}_i$, $\Delta x_i = \sigma_{\overline{x}_i}$ (fattore di copertura $k = 1$) si calcola la media pesata con relativa incertezza secondo:

$$w_i = \frac{1}{\sigma^2_{\overline{x}_i}} \quad \Rightarrow \quad x_p = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}$$

É possibile poi dimostrare per l'incertezza:

$$\sigma_{x_p} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}$$

2.3 Regressione Lineare

Caso generale: $y = A + Bx$ con σ_y uniforme

Parametri

$$A = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{\Delta}$$
$$B = \frac{N\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \frac{N\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\Delta}$$
$$con \quad \Delta = N\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2$$

Incertezze sui parametri

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}} \quad \Bigg| \quad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

□ Qualora non fosse nota l'incertezza sulle y_i:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - A - Bx_i)^2}$$

□ Se σ_x non negligibile, si considera incertezza equivalente $\sigma_{y_{eq}} = B \cdot \sigma_x \Longrightarrow$ sommando in quadratura:

$$\sigma_{y_{tot}} = \sqrt{(B \cdot \sigma_x)^2 + \sigma_y^2}$$

Caso $A = 0$ (retta per l'origine)

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \quad \Bigg| \quad \sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} \quad \Bigg| \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - Bx_i)^2} \quad \text{(1 DoF in più)}$$

Regressione pesata

Se l'incertezza sulle y_i non è uniforme si considerano i pesi $w_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}$ e per ML si ottiene:

$$A = \frac{\sum_i w_i x_i^2 \sum_i w_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i x_i y_i}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{\sum_i w_i x_i^2 \sum_i w_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i x_i y_i}{\Delta}$$
$$B = \frac{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i y_i}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i y_i}{\Delta}$$
$$con \quad \Delta = \sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2$$

Linearizzazione e regressione per funzioni non lineari

Polinomiali

$$y = A + Bx + Cx^2 + ... + Hx^k$$

Assumendo y_i governate da distribuzioni normali, si applica il minimo chi quadro (vd. sez 3) e si determinano le equazioni normali (vd. appunti di algebra) imponendo l'annullamento delle derivate parziali:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - (A + Bx_i + Cx_i^2 ... + Hx_i^k)}{\sigma_{y_i}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0 \ ; \ \cdots \ ; \ \frac{\partial \chi^2}{\partial H} = 0 \end{cases}$$

Trigonometriche Un procedimento analogo può essere applicato per combinazioni lineari di funzioni trigonometriche (es: $y = A\sin x + B\cos x$) oppure, generalizzando:

da $y = Af(x){+}Bg(x)$ si ottengono per ML le equazioni $\begin{cases} A\sum_i [f(x_i)]^2 + B\sum_i f(x_i)g(x_i) = \sum_i y_i f(x_i) \\ \\ A\sum_i f(x_i)g(x_i) + b\sum_i [g(x_i)]^2 = \sum_i y_i g(x_i) \end{cases}$

Esponenziale É possibile linearizzare una relazione funzionale esponenziale applicando il logaritmo e costruendo una variabile ausiliaria:

$$y(x) = y_0 e^{-\mu x} \implies z(x) = ln(y(x)) \;\; \rightarrow \;\; z = ln(y_0) - \mu x$$

Dunque considerando $ln(y_0) = A$ e $-\mu = B$ ci si riconduce alla trattazione precedente ($z_i = ln(y_i)$, per le incertezze si tiene conto della propagazione per relazione funzionale)

2.4 Costruzione di nuove variabili casuali

Vedi sezione 1: per la media si calcola in corrispondenza dei valori medi delle variabili date, per la varianza se indipendenti si somma in quadratura.
Nota: combinazione lineare di gaussiane è gaussiana

Ricondurre a variabile standard

Data q con media $\overline{q}$ e SD σ_q (campionaria, indice di dispersione/ampiezza curva), dato un particolare valore q_{mis} si costruisce:

$$z_{mis} = \frac{q_{mis} - \overline{q}}{\sigma_q}$$

Da cui, per la normalizzazione della gaussiana:

$$\textbf{A due code} \;\; P(|q| > q_{mis}) = P(|z| > z_{mis}) = 2 \cdot \int_{|z_{mis}|}^{\infty} G(z)\mathrm{d}z = 1 - 2 \cdot \int_0^{|z_{mis}|} G(z)\mathrm{d}z$$

$$\textbf{A una coda (dx)} \;\; P(q > q_{mis}) = P(z > z_{mis}) = \int_{z_{mis}}^{\infty} G(z)\mathrm{d}z$$

Se $z_{mis} > 0$: $P(z > z_{mis}) = 0.5 - \int_0^{z_{mis}} G(z)\mathrm{d}z$ | Se $z_{mis} < 0$: $P(z > z_{mis}) = 0.5 + \int_0^{|z_{mis}|} G(z)\mathrm{d}z$

$$\textbf{A una coda (sx)} \;\; P(q < q_{mis}) = P(z < z_{mis}) = \int_{-\infty}^{z_{mis}} G(z)\mathrm{d}z$$

Se $z_{mis} > 0$: $P(z < z_{mis}) = 0.5 + \int_0^{z_{mis}} G(z)\mathrm{d}z$ | Se $z_{mis} < 0$: $P(z < z_{mis}) = 0.5 - \int_0^{|z_{mis}|} G(z)\mathrm{d}z$

2.5 Intervalli di confidenza e fattore di copertura

Incertezza sullo stimatore del parametro di posizione:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{\overline{x^2} - \overline{x}^2}{(N-1)}}$$

$\Rightarrow$ Intervallo di Confidenza: $[\overline{x} \pm k \cdot \sigma_{\overline{x}}]$. Se è richiesto minimo **Confidence Level**: si riporta a t di Student:

$$t = \frac{\overline{x} - X}{\sigma_{\overline{x}}} \;\; \Rightarrow \;\; C.L.(k) = P(|t| < k) = \int_{-k}^{k} S_\nu(t)dt = 2 \cdot \int_0^k S_\nu(t)\mathrm{d}t$$

Per i DoF della distribuzione: $\nu = N - 1$. Si noti che per $N \to \infty$ la distribuzione di Student tende alla gaussiana.

*Per **2.3** e **2.4** si rimanda alle tabelle in appendice.*

2.6 Confronto tra misure e con valori accettati

Valore noto

Si riporta alla variabile standard (la SDOM è il parametro di ampiezza della distribuzione dello stimatore, centrata nel valore vero), considerando $\nu = N - 1$:

$$t_{mis} = \frac{|\overline{x} - X|}{\sigma_{\overline{x}}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Test a due code: } P(|t| > t_{mis}) = 1 - 2 \cdot \int_0^{|t_{mis}|} S_\nu(t)\mathrm{d}t$$

Se N elevato (> 40) è possibile far uso della Gaussiana standard ($G(z)$).

Compatibilità misure

Date $x_1 = (\overline{x}_1 \pm \sigma_{\overline{x}_1})$ e $x_2 = (\overline{x}_2 \pm \sigma_{\overline{x}_2})$ con $n_1, n_2 > 40$ si verifica la compatibilità della differenza con il valore noto 0. Assumendo le misure indipendenti, l'incertezza associata alla variabile gaussiana differenza (casuale in quanto c.l.) si ottiene per quadratura:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_{\overline{x}_1}^2 + \sigma_{\overline{x}_2}^2} \quad \rightarrow \quad z_{mis} = \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\hat{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Test a due code: } P(|z| > z_{mis}) = 1 - 2 \cdot \int_0^{z_{mis}} G(z)\mathrm{d}z$$

Per campioni ridotti è possibile seguire una procedura agevole solo se le rispettive popolazioni hanno la medesima SD campionaria (es: stessa pop. gaussiana).
Nel qual caso, considerando le stime delle deviazioni standard campionarie $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$:

$$t_{mis} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}\hat{\sigma}_1 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}\hat{\sigma}_2\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Tale t_{mis} segue una distribuzione di student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Soglie convenzionali per le discrepanze (1) $P > 5\%$ non significativa; (2) $P < 5\%$ significativa; (3) $P < 1\%$ altamente significativa. Un'ipotesi di compatibilità e **rigettata** negli ultimi due casi, accettata nel primo.

2.7 Rigetto di Dati | Chauvenet

Data una misura sospetta x_s in campione gaussiano con media $\overline{x}$ e SD campionaria σ_x:

$$z_{mis} = \frac{x_s - \overline{x}}{\sigma_x} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Test a due code: } P(|z| > z_{mis}) = 1 - 2 \cdot \int_0^{|z_{mis}|} G(z)\mathrm{d}z$$

Si determina $N_{attesi} = N \cdot P(|z| > z_{mis}) \rightarrow \boxed{\text{RIGETTO se } \; N_{attesi} < 0.5}$ Per campioni ridotti si utilizza Student con $\nu = N - 1$.

2.8 Distribuzioni notevoli: continue

Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \;\; x \leq a \vee x \geq b \\ \frac{1}{b-a} & se \;\; a \leq x \leq b \end{cases}$$

Media e Varianza:

$$\overline{x} = \frac{a+b}{2} \quad \Bigg| \quad s_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Esponenziale

$$\Phi(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \;\; \text{con } \hat{\tau} = \text{vita media} \quad \Bigg| \quad \overline{t} = \tau \;\; ; \;\; s_t = \tau$$

2.9 Discrete

Uniforme

$$k_i \;\; con \;\; i = 1, ..., N \;\; \Rightarrow \;\; P(k_i) = \frac{1}{N} \;\; \rightarrow \;\; \overline{k} = P \sum_i k_i = \frac{1}{N} \sum_i k_i \;\; ; \;\; s_k = \frac{\sqrt{N \sum_i k_i^2 - (\sum_i k_i)^2}}{N}$$

Processi di tipo bernoulliano (2 possibili esiti: successo/ins.):

Binomiale

$$P(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \Big| \quad \overline{k} = n \cdot p \;\; ; \;\; \sigma_k = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Geometrica

$$P(k; p) = p(1-p)^{k-1} \quad \Big| \quad \overline{k} = \frac{1}{p} \;\; ; \;\; \sigma_k = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

Poissoniana

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad \Big| \quad \overline{k} = \mu \;\; ; \;\; \sigma_k = \sqrt{\mu}$$

2.10 Complementi di combinatorio

Permutazioni $P_n = n!$

Disposizioni senza ripetizione: $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ || con ripetizione: $D^*_{n,k} = n^k$

Combinazioni senza ripetizione: $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ || con ripetizione: $C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

2.11 Efficienza di conteggio

$$\varepsilon = \frac{n}{N} \text{ con } n \text{ elementi rilevati su } N \text{ totali esaminati } \;\; \Rightarrow \;\; \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot (1-\varepsilon)}{N}}$$

3 Esercizio 3: Chi Quadro

3.1 Condizione di normalizzazione, media e varianza per PDF continue

Data una PDF continua $\phi(x)$ definita su intervallo $[a, b]$ (anche su tutta la retta, $]-\infty, +\infty[$)

$$\textbf{Normalizzazione} \quad \int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x = 1$$

Nota: se funzione composta $\phi(g(x))$ $\rightarrow \mathrm{d}g(x) = g'(x)\mathrm{d}x \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^b \phi(g(x))\mathrm{d}g(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \phi(x)g'(x)\mathrm{d}x$

$$\textbf{Media} \;\; \overline{x} = \int_a^b x\phi(x)\mathrm{d}x \quad \Big| \quad \textbf{Varianza} \;\; \sigma_x^2 = \int_a^b (x - \overline{x})^2 \phi(x)\mathrm{d}x$$

3.2 Chi #1 : Distribuzione attesa

Data PDF $\phi(x)$, campione con N misure totali.

1. Se N non dato, calcolarlo come somma degli osservati per ciascun bin $N = \sum_i O_i$
2. Suddividere in bin / Verificare se necessario accorpare bin:

$$\begin{cases} \text{Ampiezza di ciascun bin } \Delta x_i \geq \text{ risoluzione dell'apparato di misura} \\ \text{Almeno 4-5 misure per bin} \\ N_{BINS} \text{ tale per cui } \nu > 0 \text{ ovvero almeno superiore ai vincoli / parametri da stimarsi} \end{cases}$$

3. Si calcola per ogni bin, con **valor medio** x_i e **ampiezza** Δx_i :

$$E_i = N \cdot \int_{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} \phi(x)\mathrm{d}x = N \cdot \left[\int_0^{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} \phi(x)\mathrm{d}x - \int_0^{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}} \phi(x)\mathrm{d}x \right]$$

4. La SD per ogni bin corrisponde a quella di una binomiale di media E_i (conteggio!):
   $\sigma_i = \sqrt{N \cdot p_i \cdot (1 - p_i)} = \sqrt{E_i(1 - \int_{BIN_i} \phi(x)\mathrm{d}x)}$
   Se il numero di bin è elevato si utilizza la poissoniana: $\sigma_i = \sqrt{E_i}$
5. Si calcola il χ^2:

$$\textbf{Binomiale: } \chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{BINS}} \left(\frac{O_i - E_i}{\sqrt{E_i(1 - p_i)}} \right)^2 \quad \Bigg| \quad \textbf{Poisson: } \chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{BINS}} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

6. Si determina il numero di vincoli, e dunque i gradi di libertà della distribuzione χ^2 secondo

$$\boxed{\nu = N_{BINS} - N_{VINCOLI}}$$

   Sono da conteggiarsi come vincoli:
   a) Il numero complessivo di misure, se non dato e calcolato per somma degli O_i
   b) I parametri della PDF non noti a priori e ottenuti come migliori stime dal campione
7. Si calcola il chi ridotto secondo l'eq. e si valuta la probabilità a una coda (è DP) dalla tabella

$$\tilde{\chi}^2_{MIS} = \frac{\chi^2_{MIS}}{\nu} \quad \Rightarrow \quad P(\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}^2_{MIS}) = \int_{\tilde{\chi}^2_{MIS}}^{\infty} \Phi_\nu(\tilde{\chi}^2)\mathrm{d}\tilde{\chi}^2 = 1 - \int_0^{\tilde{\chi}^2_{MIS}} \Phi_\nu(\tilde{\chi}^2)\mathrm{d}\tilde{\chi}^2 = 1 - P(\tilde{\chi}^2 < \tilde{\chi}^2_{MIS})$$

3.3 Chi #2 : Relazione funzionale

Dato un campione di coppie di dati (x_i, y_i) e ipotizzata una relazione funzionale $y = f(x; a_J)$ con a_J parametri della funzione.

1. La SD da considerare per il calcolo di χ^2_i per ogni coppia è:
   * La deviazione standard campionaria delle y, σ_y se uniforme
   * L'incertezza su ogni y_i, se è data l'incertezza relativa uniforme, calcolata secondo $\sigma_i = (\frac{\sigma_y}{y}) \cdot y_i$

   In generale, nel caso di σ_y non uniforme si segue la procedura del chi pesato
2. Si calcola il chi:

$$\textbf{Unif: } \chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i; a_J)}{\sigma_y} \right)^2 \quad \Bigg| \quad \textbf{Pesato: } \chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i; a_J)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i (y_i - f(x_i; a_J))^2$$

3. Si determina il numero di gradi di libertà, considerando $N_{VINCOLI}$ = numero di parametri della funzione stimati dal campione e non stabiliti a priori (vd. anche Minimo chi quadro)
4. Si calcola il chi ridotto e si segue procedura analoga al caso #1.

Soglie convenzionali Per le valutazioni sull'accettabilità dell'ipotesi di compatibilità (in ambo i casi) si considerano i consueti valori di probabilità: $< \mathbf{0.05} \;\; \Leftrightarrow \; < \mathbf{5}\%$ = rigetto con discrepanza <u>significativa</u>, $< \mathbf{0.01} \;\; \Leftrightarrow \; < \mathbf{1}\%$ = rigetto con discr. <u>altamente significativa</u>

3.4 Minimo Chi

Per determinare i valori dei parametri che minimizzano il chi (e al contempo il valore per il test), noto il valore delle σ_i si impone

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_J} = 0 \;\; \forall J = 1, ..., N_{PARAMETRI}$$

Se σ_x trascurabili, $\sigma_i \neq 0 \; \forall y_i$ e y_i distribuite normalmente (gaussiane), allora il metodo si riconduce alla ML.

Metodo parabola Se il parametro incognito è uno (sia B), si possono calcolare differenti valori del χ^2 in prossimità del minimo e determinare χ^2_{min} interpolando il grafico $\chi^2(B)$ con una parabola e trovando il vertice.

3.5 Covarianza e coefficiente di corr. lineare

$$\textbf{Covarianza} \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}) = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\textbf{Coeff. di correlazione lineare} \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \;\; \in [-1, 1] \quad \text{con } \sigma_x, \, \sigma_y \text{ SD campionarie}$$

Appendice: tabelle integrali

Allega files