Prontuario algoritmico per la prova di esercizi - Analisi II

Alberto Zaghini

2023

1 Esercizio derivata direzionale

Sono dati $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, un insieme $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$, un punto $P \equiv (x_P, y_P, z_P) \in \Gamma$ ed una condizione sul versore normale $\hat{\nu}$ in P.

1. Si calcola $\boldsymbol{\nabla} g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$
2. Si verifica che Γ è una varietà regolare, ovvero che $\nexists (x, y, z) \in \Gamma$ t.c. $\boldsymbol{\nabla} g(x, y, z) = \mathbf{0}$
3. Si calcola il versore normale normalizzando il gradiente e imponendo la condizione data: $\hat{\nu} = \pm \frac{\boldsymbol{\nabla} g(P)}{\|\boldsymbol{\nabla} g(P)\|}$
4. Si calcola il gradiente di f in P: $\boldsymbol{\nabla} f(P) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})(P)$
5. Si calcola la derivata direzionale rispetto a $\hat{\nu}$ secondo $\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}} = \langle \boldsymbol{\nabla} f(P), \hat{\nu} \rangle$

2 Esercizio punti critici

É data una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

1. Si determina $\boldsymbol{\nabla} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ e $H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

   (verifica: simmetrico se $f \in C^2$)
2. Si impone $\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{0}$ e si determinano i punti (gli insiemi di pp.) che sono soluzione del sistema
3. Si studia la segnatura dell'Hessiano nei punti (siano λ_i gli autovalori)
   Si può applicare il criterio di Sylvester

Segnatura	Autovalori	punto critico
Definita positiva	$\lambda_i > 0 \quad \forall \lambda_i$	di **minimo** locale
Definita negativa	$\lambda_i < 0 \quad \forall \lambda_i$	di **massimo** locale
Indefinita	$\exists \lambda_i, \lambda_j : \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$	di **sella**
Semidefinita positiva	$\lambda_i \geq 0 \forall \lambda_i \wedge \exists \lambda_j = 0$	di **minimo** locale o **sella**
Semidefinita negativa	$\lambda_i \leq 0 \forall \lambda_i \wedge \exists \lambda_j = 0$	di **massimo** locale o **sella**

Criterio di Sylvester (caso 2x2)
Sia

$$\mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R}) \ni A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora

- $\det A > 0 \Leftrightarrow A$ definita (positiva o negativa)
- $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ semidefinita (positiva o negativa)
- $\det A < 0 \Leftrightarrow A$ indefinita
- A definita positiva $\Leftrightarrow \det A > 0$ e $a_{11} > 0$
- A definita negativa $\Leftrightarrow \det A > 0$ e $a_{11} < 0$
- A semidefinita positiva $\Leftrightarrow \det A = 0$ e $a_{11}, a_{22} \geq 0$
- A semidefinita negativa $\Leftrightarrow \det A = 0$ e $a_{11}, a_{22} \leq 0$

Criterio di Sylvester (generale)
Sia $A \in \mathrm{Mat}_{nxn}(\mathbb{R})$ e sia A_k il determinante del minore principale di ordine k $(0 < k \leq n)$

$$A_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Allora

- A definita positiva $\Leftrightarrow A_k > 0 \ \forall k = 1, ..., n$
- A definita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k A_k > 0 \ \forall k = 1, ..., n$

4. Nel caso di Hessiano semidefinito, si verifica la natura del punto critico (o di un certo insieme di pp. cc.) dalla definizione

Punto di minimo $\big[$massimo$\big]$ locale
$\mathbf{x}_0$ se

$$\exists \delta > 0 \,:\, f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \ \big[\, f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \,\big] \quad \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$$

Punto critico di sella
$\mathbf{x}_0$ se è punto critico (grad nullo) e

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \,:\, f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}_2)$$

3 Esercizio estremanti vincolati

É data una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e un insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = 0\}$

1. Si calcola ∇g e si verifica che A è varietà regolare (formalmente anche che sia compatto e dunque per Weierstrass $f(A)$ intervallo chiuso e limitato)

2. Si costruisce la Lagrangiana $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ e si impone $\nabla F = \mathbf{0} \implies \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$

3. Si calcola f nei punti e si determina $f(A) = \left[\min_A f, \max_A f\right]$

4 Esercizio volume: teoremi di riduzione

É dato un compatto (dunque misurabile con misura finita) $A \subseteq \mathbb{R}^3$.

Sui rettangoli

Sia $K = [a,b] \times [c,d]$ e $f \in C^0(K, \mathbb{R})$. Allora $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ e $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ sono continue e

$$\iint_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Se si può esprimere $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ allora

$$\iint_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

Doppio su dominio normale rispetto ad un asse

Se $\phi, \psi \in C^0([c,d], \mathbb{R})$ t.c. $\phi(y) \leq \psi(y)\ \forall y \in [c,d]$,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] \mid \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

è normale rispetto all'asse x e vale

$$\mu_2(A) = \int_c^d [\psi(y) - \phi(y)]\,\mathrm{d}y$$

Se $f \in C^0(A, \mathbb{R})$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \left[\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]$$

Triplo su dominio normale rispetto ad un asse
Se $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto misurabile e $\phi, \psi \in C^0(K, \mathbb{R})$ t.c. $\phi(x,y) \leq \psi(x,y)\ \forall (x,y) \in K$,

$$A = \{(x,y,z) \in K \times \mathbb{R} \,|\, \phi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

A è normale rispetto all'asse z e vale

$$\mu_3(A) = \int\limits_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,[\psi(x,y) - \phi(x,y)]$$

Se $f \in C^0(A, \mathbb{R})$

$$\iint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left[\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]$$

Se K a sua volta normale rispetto a y, ovvero esistono $g, h \in C^0([a,b], \mathbb{R}$ t.c. $g(x) \leq h(x)\ \forall x \in [a,b]$ e $K = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \,|\, g(x) \leq yh(x)\}$ applicando nuovamente si ha

$$\iint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \mathrm{d}y \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\right]$$

Teorema di Cavalieri
Se $K \subset \mathbb{R}^3$ compatto solido di Cavalieri rispetto all'asse z, ovvero

$$sez_z(K) \in \mathbb{J}(\mathbb{R}^3)\,\forall z \in [a,b] \quad \text{e} \quad sez_z(K) = 0\,\forall z \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$$

allora

$$\mu_3(K) = \int_a^b \mathrm{d}z\,\mu_2\big(sez_z(K)\big) = \int_a^b \mathrm{d}z \left[\iint\limits_{sez_z(K)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

Inoltre se $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ vale

$$\iiint\limits_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \left[\iint\limits_{sez_z(K)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

Cambiamento di variabile
Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\Phi \in C^1(A, \mathbb{R})$ iniettiva e t.c. $\det J_\Phi(\mathbf{u}) \neq 0\ \forall \mathbf{u} \in A$ (o solamente su sottoinsiemi a misura nulla!). Allora se $K \subseteq A$ compatto misurabile lo è anche $\phi(K)$ e

$$\mu_n(\Phi(K)) = \iint\limits_K \cdots \int \big|\det J_\Phi(\mathbf{u})\big|\,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n$$

Se $f \in C^0(\Phi(K), \mathbb{R})$ vale

$$\iint\limits_{\Phi(K)} \cdots \int f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \iint\limits_K \cdots \int (f \circ \Phi)(\mathbf{u})\big|\det J_\Phi(\mathbf{u})\big|\,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n$$

Coordinate polari piane con riscalamento

$$\begin{cases} x = \dfrac{\rho}{a}\cos\theta \\ \\ y = \dfrac{\rho}{b}\sin\theta \end{cases} \qquad (\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi]$$

Si ha perdita di iniettività su $\{(0,\theta) : \theta \in [0,2\pi]\}$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta}{a} & -\dfrac{\rho}{a}\sin\theta \\ \dfrac{\sin\theta}{b} & \dfrac{\rho}{b}\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \det J_\Phi = \frac{\rho}{ab}$$

Coordinate cilindriche con riscalamento

$$\begin{cases} x = \dfrac{\rho}{a}\cos\theta \\ \\ y = \dfrac{\rho}{b}\sin\theta \\ \\ z = h \end{cases} \qquad (\rho,h,\theta) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R} \times [0,2\pi]$$

Si ha perdita di iniettività su $\{(0,h,\theta) : (h,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]\}$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta}{a} & -\dfrac{\rho}{a}\sin\theta & 0 \\ \dfrac{\sin\theta}{b} & \dfrac{\rho}{b}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det J_\Phi = \frac{\rho}{ab}$$

Coordinate sferiche con riscalamento

$$\begin{cases} x = \dfrac{\rho}{a}\sin\theta\cos\varphi \\ \\ y = \dfrac{\rho}{b}\sin\theta\sin\varphi \\ \\ z = \dfrac{\rho}{c}\cos\theta \end{cases} \qquad (\rho,\theta,\phi) \in [0,+\infty[\times [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

Si ha perdita di iniettività su $\{(0,\theta,\varphi) : (\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]\}$, su $\{(\rho,0,\varphi) : (\rho,\varphi) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi]\}$ e $\{(\rho,\pi,\varphi) : (\rho,\varphi) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi]\}$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a}\sin\theta\cos\varphi & \dfrac{\rho}{a}\cos\theta\cos\varphi & -\dfrac{\rho}{a}\sin\theta\sin\varphi \\ \dfrac{1}{b}\sin\theta\sin\varphi & \dfrac{\rho}{b}\cos\theta\sin\varphi & \dfrac{\rho}{b}\sin\theta\cos\varphi \\ \dfrac{\cos\theta}{c} & -\dfrac{\rho}{c}\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad \det J_\Phi = \frac{\rho^2}{abc}\sin\theta$$

5 Esercizio rotore

É data una funzione $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ ed una superficie regolare Σ orientata con una condizione sull'orientamento $\hat{\nu}$

5.1 Calcolo diretto

1. Si calcola il rotore di $\mathbf{f}$ secondo

$$\mathrm{rot}\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}) + \hat{j}(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}) + \hat{k}(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$$

2. Si definisce una parametrizzazione $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \supseteq \overline{\Omega} \to \Sigma$ e si esprime il rotore in funzione delle nuove variabili

3. Si determina l'orientamento indotto

$$\mathbf{n}(u,v) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial u} & \dfrac{\partial r_2}{\partial u} & \dfrac{\partial r_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial v} & \dfrac{\partial r_2}{\partial v} & \dfrac{\partial r_3}{\partial v} \end{vmatrix} = \hat{i}(\frac{\partial r_2}{\partial u}\frac{\partial r_3}{\partial v} - \frac{\partial r_3}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v}) + \hat{j}(\frac{\partial r_3}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_3}{\partial v}) + \hat{k}(\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_2}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v})$$

   e si verifica la compatibilità con $\hat{\nu}$

4. A seconda della compatibilità (ok o opposto) si calcola il flusso secondo:

$$\iint\limits_{\Sigma} \langle \mathrm{rot}\mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \pm \iint\limits_{\overline{\Omega}} \langle \mathrm{rot}\mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big), \mathbf{n}(u,v) \rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

5.2 Teorema di Stokes

Teorema

Sia A aperto di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{f} \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ e sia $\Sigma \subseteq A$ superficie regolare con bordo con orientamento $\hat{\nu}$. Se $(\partial\Sigma, \hat{\tau})$ è il suo bordo con orientamento indotto canonicamente vale

$$\iint\limits_{\Sigma} \langle \mathrm{rot}\mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\partial\Sigma} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle \,\mathrm{d}s$$

1. Si determina il bordo di Σ e l'orientamento indotto $\hat{\tau}$

2. Per ogni componente connessa $\partial\Sigma_i$ si definisce una parametrizzazione $\boldsymbol{\rho}^i \in C^1([a_i, b_i], \mathbb{R}^3)$

3. Si determina l'orientamento indotto da ciascuna sul rispettivo sostegno

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^i}{\mathrm{d}t} = (\frac{\mathrm{d}\rho_1^i}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\rho_2^i}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\rho_3^i}{\mathrm{d}t})$$

4. In base alla compatibilità con $\hat{\tau}$, si calcola il lavoro su ogni curva

$$\int\limits_{\partial\Sigma_i} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle \,\mathrm{d}s = \pm \int_{a_i}^{b_i} \langle \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}^i(t), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^i}{\mathrm{d}t} \rangle \,\mathrm{d}t$$

5. Il lavoro complessivo dà quindi il flusso secondo

$$\iint\limits_{\Sigma} \langle \mathrm{rot}\mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\partial\Sigma} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle \,\mathrm{d}s = \sum_i \int\limits_{\partial\Sigma_i} \langle \mathbf{f}, \hat{\tau} \rangle \,\mathrm{d}s = \sum_i \pm \int_{a_i}^{b_i} \langle \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}^i(t), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^i}{\mathrm{d}t} \rangle \,\mathrm{d}t$$

6 Esercizio divergenza

É data una funzione $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ed alternativamente un insieme A (con misura μ_3 non nulla) o una superficie regolare Σ con un dato orientamento.

6.1 Calcolo diretto

1. Se si richiede il flusso di f attraverso Σ il procedimento è analogo a quanto visto per il rotore.
   Senza ripetere i passaggi si arriva a:

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \pm \iint_{\overline{\Omega}} \langle \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big), \mathbf{n}(u,v) \rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

2. Se è richiesto l'integrale della divergenza si può applicare il Teorema e calcolare il flusso di $\mathbf{f}$ attraverso opportune superfici regolari orientabili che unite a Σ diano una superficie regolare a tratti chiusa (per praticità denotata con ∂A).
   Tenere conto della compatibilità degli orientamenti indotti dalle parametrizzazioni con quello **esterno**!

6.2 Teorema della Divergenza

Teorema
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto regolare e $\mathbf{f} \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$ e sia $(\partial A, \hat{\nu})$ la frontiera di A orientata canonicamente. Allora

$$\iiint_A \operatorname{div}\mathbf{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_{\partial A} \langle \mathbf{f}, \hat{\nu} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$$

1. Se necessario, si effettua un opportuno cambiamento di variabile:

$$\iiint_A \operatorname{div}\mathbf{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_{\Phi^{-1}(A)} \operatorname{div}\mathbf{f}(\Phi(u,v,t)) \big| \det J_\Phi(u,v,t) \big| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t$$

2. Si applicano i teoremi di riduzione
3. Se è richiesto il flusso attraverso una componente della frontiera ∂A (con un certo dato orientamento) si calcola il flusso attraverso le altre componenti regolari orientate **verso l'esterno** e si ottiene quello cercato per differenza - a meno del segno **da determinarsi secondo la compatibilità**.