Compendio algoritmico

Albi

Rette e piani nello spazio

Retta per due punti

$$\vec{OP} \equiv \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} ;\ \vec{OQ} \equiv \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} \ \rightarrow\ vettore\ direzione:\ \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} \equiv \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} \ \rightarrow\ r : \{\vec{OQ} + t\vec{PQ} : t \in \mathbb{R}\}$$

$$forma\ parametrica\ r : \begin{cases} x = x_P + t(x_Q - x_P) \\ y = y_P + t(y_Q - y_P) \\ z = z_P + t(z_Q - z_P) \end{cases} \ \longleftrightarrow\ t(x) \vee t(y) \vee t(z) \ \longleftrightarrow\ forma\ cartesiana\ r : \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

Incidenti, parallele, sghembe

$$r : \vec{v_0} + t\vec{v}\ \ s : \vec{w_0} + k\vec{w} \ \rightarrow\ \begin{cases} \text{(1) Parallele} & \exists\lambda\ :\ \vec{v} = \lambda\vec{w} \\ \text{(2) (se non (1)) Incidenti} & \exists! t', k'\ :\ \vec{v_0} + t'\vec{v} = \vec{w_0} + k'\vec{w} \iff \begin{cases} y_r(x) = y_s(x) \\ z_r(x) = z_s(x) \end{cases} \text{ ha sol} \\ \text{(3) se non (1) nè (2) Sghembe} & \\ \text{(4) Perpendicolari} & \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 = \begin{pmatrix} x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \iff \vec{v} \perp \vec{w} \end{cases}$$

Piani **Per tre punti** $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$; $Q \equiv (x_Q, y_Q, z_Q)$; $M \equiv (x_M, y_M, z_M) \rightarrow \Pi : \vec{OP} + t\vec{PQ} + s\vec{PM}$

Intersezioni e distanze $\nexists$ piani sghembi in $\mathbb{R}^3$: se $\|$ si riconduce a distanza tra punto e piano — se incidenti: sistema di 3 eq. scalari in 4 inc: $\begin{pmatrix} x_0 + \mathbf{t}x_1 + \mathbf{s}x_2 \\ y_0 + \mathbf{t}y_1 + \mathbf{s}y_2 \\ z_0 + \mathbf{t}z_1 + \mathbf{s}z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 + \tau x'_1 + \sigma x'_2 \\ y'_0 + \tau y'_1 + \sigma y'_2 \\ z'_0 + \tau z'_1 + \sigma z'_2 \end{pmatrix} \rightarrow \dim Sol = 1 \Leftrightarrow$ l'int. è una retta con 1 par. In cart: $\begin{cases} \Pi_1(x,y,z) = 0 \\ \Pi_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (analogo)

Distanza

Punto - retta $r : \vec{v_0} + t\vec{v}$; $P \equiv (x_P, y_P, z_P) \rightarrow$ punto $Q \in r \rightarrow \vec{PQ}(t)$ impongo $\perp$: $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow d(P, r) = \|\vec{PQ}\|$ [in cartesiane: determinare minimo per $d(x)$]

Rette $r : \vec{v_0} + t\vec{v}$; $s : \vec{w_0} + k\vec{w} \rightarrow$ punti $Q \in r,\ P \in s \rightarrow \vec{PQ}(t, k)$ impongo : $\begin{cases} \perp r & \vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \\ \perp s & \vec{PQ} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \rightarrow d(r, s) = \|\vec{PQ}\|$ [in cartesiane: determinare minimo per $d(x)$]

Punto - Piano $P \equiv \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$; $\Pi : \vec{v_0} + t\vec{v_1} + s\vec{v_2} \rightarrow \vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} \rightarrow$ Retta $\perp$ per P: $r : \vec{OP} + k\vec{n} \rightarrow$ impongo $r \cap \Pi = Q \equiv \begin{pmatrix} x_Q(t,s,k) \\ y_Q(t,s,k) \\ z_Q(t,s,k) \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x_0 + \mathbf{t}x_1 + \mathbf{s}x_2 = x_p + \mathbf{k}x_n \\ y_0 + \mathbf{t}y_1 + \mathbf{s}y_2 = y_p + \mathbf{k}y_n \\ z_0 + \mathbf{t}z_1 + \mathbf{s}z_2 = z_p + \mathbf{k}z_n \end{cases} \rightarrow d(P, \Pi) = \|\vec{PQ}\| = \frac{|k|}{\|\vec{n}\|}$ — Dalla cartesiana: $\vec{n} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow$ Retta per P: $\vec{OP} + k\vec{n}$

Sostituisco nell'equazione per l'int: $a(x_P + a\mathbf{k} - x_0) + b(y_P + b\mathbf{k} - y_0) + c(z_P + c\mathbf{k} - z_0) = 0 \rightarrow d(P, \Pi) = \frac{|k|}{\|\vec{n}\|}$

Retta - Piano $r : \vec{w_0} + k\vec{w}$; $\Pi : \vec{v_0} + t\vec{v_1} + s\vec{v_2}$ Caso triviale: $r \cap \Pi \neq \emptyset \vee r \subset \Pi$. Altrimenti $r \| \Pi$, ovvero $\vec{w} \perp \vec{n}$: sufficiente considerare un qualsiasi $P \in r$ e si riconduce al caso precedente.

Algoritmo di Gauss

Trovare base per span

$$span(\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_m}) \subseteq \mathbb{K}^n \ \rightarrow\ A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \vdots \\ \mathbf{v_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \ \rightarrow\ \text{porto a scala} \ \rightarrow A' = \begin{pmatrix} * & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & * & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

righe con pivot = base span; $rk(A') = rk(A) = dim_{\mathbb{K}} span(\{v_i\})$

Completare insieme l.i. a base

$$\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\} \subseteq \mathbb{K}^n \to A_{k\times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \vdots \\ \mathbf{v_k} \end{pmatrix} \to \text{porto a scala } \to \text{per completare (da t. del c.) aggiungo } n - rk(A) = n - n_{pivot} \text{ vettori l.i}$$

$$e \notin span(v_i) \to \text{se colonne di indici } j_1, \ ... \ , j_k \text{ con pivot (l.i.)} \implies \text{aggiungo } \{e_i : i \in \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_k\}\} \text{ da canonica}$$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1_n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \to A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \ (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

$$\to \text{compatibile } (Sol(A|b) = L_A^{-1}(\mathbf{b}) \neq \emptyset) \iff rk(A) = rk(A|b) \begin{cases} \text{I) determinato } (\#Sol(A|b) = \#L_A^{-1}(\mathbf{b}) = 1) \iff rk(A) = rk(A|b) = n \\ \text{II) indeterminato } (\#Sol(A|b) = \#L_A^{-1}(\mathbf{b}) = \infty) \iff rk(A) = rk(A|b) < n \\ \hookrightarrow \dim Sol(A|b) = n - rk(A) = \#\{x_j\}\text{parametri} \end{cases}$$

Laplace

Determinante

$$M_n(\mathbb{K}) \ni A \to M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cancel{\cdots} & \ddots & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{\cdots} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \cancel{\cdots} & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij} \to \begin{cases} \text{Sviluppo lungo riga } i & det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij} \\ \text{Sviluppo lungo colonna } j & det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij} \end{cases}$$

Inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \cdots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix}^{\top} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1n} & \cdots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

Cambio di base

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}) \ \ \mathcal{C} = (\mathbf{w_1}, ..., \mathbf{w_n}) \to I_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = I_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{v_1})_{\mathcal{C}}| & \cdots & |(\mathbf{v_n})_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \to I_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = I_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = I_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = I_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{w_1})_{\mathcal{B}}| & \cdots & |(\mathbf{w_n})_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \ \textbf{Nota:} \text{ se } \mathcal{B} = \mathcal{C}, \ I_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = I_n$$

$f : V \to W$f.g., con $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V e $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ di W: $A_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = A_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}(f) = I_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) I_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \implies A_{\mathcal{B}'}(f) = I_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{B}}(f) I_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

Autovettori, autovalori, diagonalizzazione

1.
$$\mathbb{K}[\lambda] \ni p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots - \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \to Spec(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{K} \ : \ p_A(\lambda_i) = 0\}$$

2.
$$\mathbb{V}_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I_n) = \ker(\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots - \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda_i \end{pmatrix}) \to mg(\lambda_i) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_{\lambda_i} = n - rk(A - \lambda_i I_n)$$

3.
$$M_n(\mathbb{K}) \ni A \text{ diag } \begin{cases} \iff \sum_{\lambda_i \in Spec(A)} mg(\lambda_i) = n \\ \iff mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i) \ \ \forall \lambda_i \in Spec(A) \\ \Longleftarrow \#Spec(A) = n \text{ (ha } n \text{ autovalori distinti)} \end{cases}$$

4.
$$\mathcal{B}_{\lambda_i} = (\mathbf{v_i^1}, ..., \mathbf{v_i^{mg_i}}) \text{ base di } \mathbb{V}_{\lambda_i} \to \text{se diag: } \mathcal{B}_s = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \mathcal{B}_{\lambda_2} \cup ... \cup \mathcal{B}_{\lambda_k} \text{ con } k = \#Spec(A)$$

5.

$$A = A_{\mathcal{E}}(f) \to P = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1^1} | & \cdots & |\mathbf{v_1^{mg_1}}| & \cdots & |\mathbf{v_k^{mg_k}} \end{pmatrix} \to D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Jordan

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \implies \sum_i ma(\lambda_i) = n \to \forall \lambda_i \in Spec(A) \quad :$$

1. Determina ordine massimo s_i dell'autosp. generalizzato = ordine max blocchi ass.: $dim(ker(A - \lambda_i I_n)^{s_i}) = ma(\lambda_i)$
2. Si scelgono $\mathbf{v_i^1}, ..., \mathbf{v_i^k}$ l.i $\in \ker(A - \lambda_i I_n)^{s_i} \setminus \ker(A - \lambda_i I_n)^{s_i - 1}$ $(\dim((\cdots)^{s_i}) - \dim((\cdots)^{s_i-1}) = k)$
3. Da ognuno, iterando, si ottengono i vettori relativi ad un blocco di ordine max: $\{\mathbf{v_i^j}, (A - \lambda_i I_n)\mathbf{v_i^j}, ..., (A - \lambda_i I_n)^{s_i-1}\mathbf{v_i^j}\}$ (elevando alla 0 si ha l'identità; solo l'ultimo è autovettore propriamente detto, ovvero $\in \mathbb{V}_{\lambda_i}$)
4. Se $s_i \cdot k = ma(\lambda_i)$, si sono trovati tutti i vettori della b. di Jordan rel. a λ_i. Altrimenti:
5. Ogniqualvolta $\dim(\ker(A-\lambda_i I_n)^l) - \dim(\ker(A-\lambda_i I_n)^{l-1}) > \dim(\ker(A-\lambda_i I_n)^{l+1}) - \dim(\ker(A-\lambda_i I_n)^l)$ con $1 < l < s_i$ (ovvero 'salta' più del precedente, partendo dall'alto") si ha un nuovo blocco di ordine non massimo l: si aggiungono dunque vettori l.i. $\in \ker(A - \lambda_i I_n)^l \setminus \ker(A - \lambda_i I_n)^{l-1}$ e si itera (3.) per ognuno.
6. Una volta ottenuti $ma(\lambda_i)$ vettori, ovvero determinato il numero $= mg(\lambda_i)$ e gli ordini dei blocchi associati (t.c. $\sum = ma(\lambda_i)$) si è determinata la parte della base di Jordan relativa a λ_i, sia $\mathcal{B}_i$

Gli autospazi gen. sono in $\oplus \to \mathcal{B}_J = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k \to J(f) = I^{-1}_{\mathcal{B}_J,\mathcal{E}} A_{\mathcal{E}}(f) I_{\mathcal{B}_J,\mathcal{E}}$

Complemento ortogonale

$$W = span(\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_m}) \subseteq V \text{ con prodotto interno su V } \langle , \rangle \quad \to \quad W^\perp = \{\mathbf{w} \in V : \begin{cases} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v_1} \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{v_m} \rangle = 0 \end{cases} \}$$

$$\text{se } (\text{V}, \langle , \rangle) = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_e) : W^\perp = \ker \begin{pmatrix} v_{1_1} & \cdots & v_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m_1} & \cdots & v_{m_n} \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{v_1} \to \mathbf{w_2} = \mathbf{v_2} - \frac{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{w_1} \rangle}{\langle \mathbf{w_1}, \mathbf{w_1} \rangle} \mathbf{w_1} \to \mathbf{w_i} = \mathbf{v_i} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\langle \mathbf{v_i}, \mathbf{w_j} \rangle}{\langle \mathbf{w_j}, \mathbf{w_j} \rangle} \mathbf{w_j}$$

Normalizzazione

$$\text{se è possibile definire norma} \Leftrightarrow \langle , \rangle \text{ DP:} \quad \hat{\mathbf{w_i}} = \frac{1}{\|\mathbf{w_i}\|} \mathbf{w_i} = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{w_i}, \mathbf{w_i} \rangle}} \mathbf{w_i}$$

Diagonalizzare matrici simmetriche

$$A \in S_n(\mathbb{R}) \ \to \text{Diagonalizzabile per t.spettrale (!)}$$

1) Determinare gli autovalori: $\overline{\lambda} \in Spec(A) \iff \det(A - xI_n)|_{x=\overline{\lambda}} = p_A(\overline{\lambda}) = 0$
2) Determinare gli autovettori di base relativi a ciascun autovalore
3) Ottenere la base spettrale
4) Applicare l'algoritrmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt
5) Normalizzare
6) Ottenuta $\hat{\mathcal{B}'}_s = \{\hat{\mathbf{u_1}}, ..., \hat{\mathbf{u_n}}\}$ ON si ha $P = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u_1}} & | & \cdots & | & \hat{\mathbf{u_n}} \end{pmatrix} \in O(n) \to P^{-1} = P^\top \to D = P^\top AP$

Forme quadratiche, quadriche e coniche

Forme omogenee

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad q(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 \iff [q]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$$

Determinare base spettrale ortonormale: $\hat{\mathcal{B}}_s = (\hat{\mathbf{v_1}}, \hat{\mathbf{v_2}}) \to span(\hat{\mathbf{v_1}}), span(\hat{\mathbf{v_2}})$ = assi principali della conica.

$$\text{Forma - equazione canonica metrica: } I^\top_{\hat{\mathcal{B}}_s,\mathcal{E}} [q]_{\mathcal{E}} I_{\hat{\mathcal{B}}_s,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v_1}}^\top \\ \hat{\mathbf{v_2}}^\top \end{pmatrix} [q]_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v_1}} & | & \hat{\mathbf{v_2}} \end{pmatrix} = [q]_{\hat{\mathcal{B}}_s} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \to$$

$\to \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})_{\hat{\mathcal{B}}_s} \to q(\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$ | **Coniche** Sia $q(x, y) = c \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} [q]_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ Si ha:

c	**sig(q)**	$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$	**Tipo di conica**	**Parametri**
>0	DP: (2,0) $\implies \det[q] > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	ELLISSE (CIRC. se $\lambda_1 = \lambda_2$)	$a = \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}},\ b = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}$
$\cdots$	Indefinita: (1,1) $\implies \det[q] < 0$	$\begin{cases} \lambda_1 > 0 & \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1 < 0 & \lambda_2 > 0 \end{cases}$	IPERBOLE $\begin{cases} \text{fuochi su x} \\ \text{fuochi su y} \end{cases}$	$a = \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}} \vee b = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}$
$\cdots$	Semi-DP: (1,0) $\Leftrightarrow \det[q] = 0$	$\begin{cases} \lambda_1 > 0 & \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 & \lambda_2 > 0 \end{cases}$	COPPIA DI RETTE	$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_1}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_2}} \end{cases}$
$\begin{cases} > 0 & Semi-DN: \ (0,1) \\ \cdots & DN: \ (0,2) \\ < 0 & Semi-DP: \ (1,0) \\ \cdots & DP: \ (2,0) \end{cases}$			$\emptyset$ in $\mathbb{R}^2$	

I restanti casi sono riconducibili ai precedenti

Forme affini (generalizzazione)

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \phi = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad | \quad Siano\ \ A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \phi \end{pmatrix} \quad e\ \ A_{33} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$$

Una matrice è DP ($\lambda_i > 0\ \forall i$) se tutti i suoi minori principali N-O hanno det > 0, se invece per gli ordini dispari risulta < 0, è DN ($\lambda_i < 0\ \forall i$). Se risultano ≥ 0 è semi-DP ($\lambda_i \geq 0\ \forall i$), ≤ 0 semi-DN ($\lambda_i \leq 0\ \forall i$). Se non rientra nella casistica è *indefinita*.

NON DEGENERI — $\det(A) \neq 0$				DEGENERI — $\det(A) = 0$
$\det(A_{33}) > 0$		$\det(A_{33}) < 0$	$\det(A_{33}) = 0$	
A DP o DN	A indefinita			
ELLISSE IMMAGINARIA ($\emptyset$)	ELLISSE REALE	IPERBOLE	PARABOLA	COPPIA DI RETTE ($\parallel \vee >\!\!\bullet\!\!<$), RETTA (DOPPIA), PUNTO
	Forma canonica metrica:			
	$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix}$	

Tensori

$$T_2 V \supset V \otimes V \ni \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_1\mathbf{e_1} + ... + a_n\mathbf{e_n}) \otimes (b_1\mathbf{e_1} + ... + b_n\mathbf{e_n}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j}$$

$$T^2 V \supset V^* \otimes V^* \ni \alpha \otimes \beta = (\alpha_1\mathbf{e_1} + ... + \alpha_n\mathbf{e_n}) \otimes (\beta_1\mathbf{e_1} + ... + b_n\mathbf{e_n}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j}$$

- $\tau \in T^p V$ decomponibile $\iff \exists \boldsymbol{\alpha_1}, ..., \boldsymbol{\alpha_p} \in V^* : \tau = \boldsymbol{\alpha_1} \otimes ... \otimes \boldsymbol{\alpha_p}$
- $\tau \in T_k V$ decomponibile $\iff \exists \mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_k} \in V : \tau = \mathbf{a_1} \otimes ... \otimes \mathbf{a_k}$

$\tau = \sum_{ij} c_{ij} \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j}$ DECOMPONIBILE se il sistema $\begin{cases} a_1 b_1 = c_{11} \\ \vdots \\ a_i b_j = c_{ij} \\ \vdots \end{cases}$ è compatibile, ovvero ammette almeno una soluzione $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$.

Analogamente nel caso covariante.