

Formule e tabelle per l'esame scritto di Laboratorio

Alberto Zaghini

Febbraio 2023

1 Esercizio 1: Misure indirette

1.1 Valore Medio

$$q(x, y, z, \dots) \rightarrow \bar{q} = q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad // \quad q_{best} = q(x_{best}, y_{best}, z_{best}, \dots)$$

1.2 Propagazione incertezze

Passo passo

Se $q = c \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma \dots$ con c costante numerica:

$$\frac{\Delta q}{q_{best}} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x_{best}} + |\beta| \frac{\Delta y}{y_{best}} + |\gamma| \frac{\Delta z}{z_{best}} + \dots \rightarrow \Delta q = \left(\frac{\Delta q}{q_{best}} \right) \cdot q_{best}$$

Derivate (linearmente)

Se $q = q(x, y, z, \dots)$, ovvero in generale sussiste relazione funzionale:

$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x_{best}, y_b, z_b, \dots} \Delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{x_b, \dots} \Delta y + \left| \frac{\partial q}{\partial z} \right|_{x_b, \dots} \Delta z + \dots$$

Nota: se q è espresso da un monomio e una grandezza è presente più volte (es: numeratore e denominatore) non si può usare Passo Passo ma si usano DP.

Derivate (in quadratura)

Se le variabili sono di tipo casuale e indipendenti (non correlate) è anche q di tipo casuale:

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x_b, \dots}^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_{x_b, \dots}^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{x_b, \dots}^2 \sigma_z^2 + \dots}$$

Nota: in caso una misura sia presente come argomento di una funzione trascendente (trigonometrica, logaritmica, esponenziale) ricordarsi della regola per la derivata di f. composta:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

1.3 Minimizzare inc. relativa

Si determina $\frac{\Delta q}{q_{best}}$ in funzione della data misura x e si pone (per trovare punto di minimo secondo Fermat):

$$\frac{\partial \left(\frac{\Delta q}{q_{best}} \right)}{\partial x} = 0$$

1.4 Variare errore relativo per grandezza casuale

(Mantenendo inalterata la media, ovvero \hat{x} , con grandezza iniziale campione N_1 e finale - da determinarsi - N_2)

Determinare innanzitutto il fattore di copertura: $\Delta x = k \cdot \sigma_{\bar{x}}$, noto

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N_1}} \quad \text{si ha} \quad k \cdot \sigma_x = \Delta x \cdot \sqrt{N_1}$$

Assumendo invariata $x_{best} = \bar{x}$ si determina $\Delta x'$ soddisfacente la condizione sull'errore relativo. Assunti costanti la deviazione campionaria (stessa popolazione) e il fattore di copertura:

$$\Delta x' = k \cdot \sigma'_{\bar{x}} = \frac{k \sigma_x}{\sqrt{N_2}} \rightarrow \sqrt{N_2} = \frac{k \sigma_x}{\Delta x'} = \frac{\Delta x \cdot \sqrt{N_1}}{\Delta x'} \quad \text{dunque}$$
$$N_2 = N_1 \left(\frac{\Delta x}{\Delta x'} \right)^2$$

2 Esercizio 2: Miscellanea probabilistica

2.1 Probabilità

Dati due eventi A e $B \subseteq S$ (spazio campionario):

□ **Verificarsi di almeno uno dei due** | **Somma logica = unione** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (caso limite: se mutualmente escludenti/ disgiunti, ovvero $A \cap B = \emptyset$ si ha $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$)

□ **Verificarsi di entrambi** | **Prodotto logico = intersezione** (= 0 se incompatibili, altrimenti:)
Se indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{o più in generale per } N \text{ eventi} \quad P\left(\bigcap_{i=1}^N A_i\right) = \prod_{i=1}^N P(A_i)$$

se dipendenti

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Teorema di Bayes (!)

Probabilità condizionale: dati eventi H_i con $i = 1, \dots, N$ mutualmente escludenti e tali da saturare lo spazio campionario ($\bigcup_{i=1}^N H_i = S \leftrightarrow P(\bigcup_{i=1}^N H_i) = 1$) e il verificarsi di un evento E si ha per la probabilità a posteriori di ciascun H_i :

$$P(H_i|E) = \frac{P(E \cap H_i)}{P(E)} = \frac{P(E|H_i) \cdot P(H_i)}{P(E)}$$

Con $P(H_i)$ probabilità a priori di H_i e analogamente $P(E)$. Poiché gli H_i definiscono una partizione di S , si ha $P(E) = \sum_{i=1}^N P(E|H_i) \cdot P(H_i)$

2.2 Media Pesata

Date due misure della medesima grandezza $x_1 = (x_{1_{best}} \pm \Delta x_1)$ e $x_2 = (x_{2_{best}} \pm \Delta x_2)$ - nel caso di migliori stime da campioni gaussiani si ha $x_{i_{best}} = \bar{x}_i$, $\Delta x_i = \sigma_{\bar{x}_i}$ (fattore di copertura $k = 1$) si calcola la media pesata con relativa incertezza secondo:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_i}^2} \Rightarrow x_p = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}$$

É possibile poi dimostrare per l'incertezza:

$$\sigma_{x_p} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}$$

2.3 Regressione Lineare

Caso generale: $y = A + Bx$ con σ_y uniforme

Parametri

$$A = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\Delta}$$

con $\Delta = N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2$

Incertezze sui parametri

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}} \quad \left| \quad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \right.$$

□ Qualora non fosse nota l'incertezza sulle y_i :

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

□ Se σ_x non neglignibile, si considera incertezza equivalente $\sigma_{y_{eq}} = B \cdot \sigma_x \implies$ sommando in quadratura:

$$\sigma_{y_{tot}} = \sqrt{(B \cdot \sigma_x)^2 + \sigma_y^2}$$

Caso $A = 0$ (retta per l'origine)

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \quad \left| \quad \sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sum_i x_i^2} \quad \left| \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - Bx_i)^2} \quad (1 \text{ DoF in più}) \right.$$

Regressione pesata

Se l'incertezza sulle y_i non è uniforme si considerano i pesi $w_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}$ e per ML si ottiene:

$$A = \frac{\sum_i w_i x_i^2 \sum_i w_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i x_i y_i}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{\sum_i w_i x_i^2 \sum_i w_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i x_i y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i y_i}{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i y_i}{\Delta}$$

con $\Delta = \sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2$

Linearizzazione e regressione per funzioni non lineari

Polinomiali

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^k$$

Assumendo y_i governate da distribuzioni normali, si applica il minimo chi quadro (vd. sez 3) e si determinano le equazioni normali (vd. appunti di algebra) imponendo l'annullamento delle derivate parziali:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - (A + Bx_i + Cx_i^2 + \dots + Hx_i^k)}{\sigma_{y_i}} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0 ; \dots ; \frac{\partial \chi^2}{\partial H} = 0 \right.$$

Trigonometriche Un procedimento analogo può essere applicato per combinazioni lineari di funzioni trigonometriche (es: $y = A \sin x + B \cos x$) oppure, generalizzando:

$$\text{da } y = Af(x) + Bg(x) \quad \text{si ottengono per ML le equazioni} \quad \begin{cases} A \sum_i [f(x_i)]^2 + B \sum_i f(x_i)g(x_i) = \sum_i y_i f(x_i) \\ A \sum_i f(x_i)g(x_i) + B \sum_i [g(x_i)]^2 = \sum_i y_i g(x_i) \end{cases}$$

Esponenziale È possibile linearizzare una relazione funzionale esponenziale applicando il logaritmo e costruendo una variabile ausiliaria:

$$y(x) = y_0 e^{-\mu x} \implies z(x) = \ln(y(x)) \rightarrow z = \ln(y_0) - \mu x$$

Dunque considerando $\ln(y_0) = A$ e $-\mu = B$ ci si riconduce alla trattazione precedente ($z_i = \ln(y_i)$, per le incertezze si tiene conto della propagazione per relazione funzionale)

2.4 Costruzione di nuove variabili casuali

Vedi sezione 1: per la media si calcola in corrispondenza dei valori medi delle variabili date, per la varianza se indipendenti si somma in quadratura.

Nota: combinazione lineare di gaussiane è gaussiana

Ricondurre a variabile standard

Data q con media \bar{q} e SD σ_q (campionaria, indice di dispersione/ampiezza curva), dato un particolare valore q_{mis} si costruisce:

$$z_{mis} = \frac{q_{mis} - \bar{q}}{\sigma_q}$$

Da cui, per la normalizzazione della gaussiana:

$$\text{A due code } P(|q| > q_{mis}) = P(|z| > z_{mis}) = 2 \cdot \int_{|z_{mis}|}^{\infty} G(z) dz = 1 - 2 \cdot \int_0^{|z_{mis}|} G(z) dz$$

$$\text{A una coda (dx)} \quad P(q > q_{mis}) = P(z > z_{mis}) = \int_{z_{mis}}^{\infty} G(z) dz$$

$$\text{Se } z_{mis} > 0 : \quad P(z > z_{mis}) = 0.5 - \int_0^{z_{mis}} G(z) dz \quad \left| \quad \text{Se } z_{mis} < 0 : \quad P(z > z_{mis}) = 0.5 + \int_0^{|z_{mis}|} G(z) dz$$

$$\text{A una coda (sx)} \quad P(q < q_{mis}) = P(z < z_{mis}) = \int_{-\infty}^{z_{mis}} G(z) dz$$

$$\text{Se } z_{mis} > 0 : \quad P(z < z_{mis}) = 0.5 + \int_0^{z_{mis}} G(z) dz \quad \left| \quad \text{Se } z_{mis} < 0 : \quad P(z < z_{mis}) = 0.5 - \int_0^{|z_{mis}|} G(z) dz$$

2.5 Intervalli di confidenza e fattore di copertura

Incertezza sullo stimatore del parametro di posizione:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{\overline{x^2} - \bar{x}^2}{(N-1)}}$$

\Rightarrow Intervallo di Confidenza: $[\bar{x} \pm k \cdot \sigma_{\bar{x}}]$. Se è richiesto minimo **Confidence Level**: si riporta a t di Student:

$$t = \frac{\bar{x} - X}{\sigma_{\bar{x}}} \Rightarrow C.L.(k) = P(|t| < k) = \int_{-k}^k S_{\nu}(t) dt = 2 \cdot \int_0^k S_{\nu}(t) dt$$

Per i DoF della distribuzione: $\nu = N - 1$. Si noti che per $N \rightarrow \infty$ la distribuzione di Student tende alla gaussiana.

Per 2.3 e 2.4 si rimanda alle tabelle in appendice.

2.6 Confronto tra misure e con valori accettati

Valore noto

Si riporta alla variabile standard (la SDOM è il parametro di ampiezza della distribuzione dello stimatore, centrata nel valore vero), considerando $\nu = N - 1$:

$$t_{mis} = \frac{|\bar{x} - X|}{\sigma_{\bar{x}}} \Rightarrow \text{Test a due code: } P(|t| > t_{mis}) = 1 - 2 \cdot \int_0^{|t_{mis}|} S_{\nu}(t) dt$$

Se N elevato (> 40) è possibile far uso della Gaussiana standard ($G(z)$).

Compatibilità misure

Date $x_1 = (\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1})$ e $x_2 = (\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2})$ con $n_1, n_2 > 40$ si verifica la compatibilità della differenza con il valore noto 0. Assumendo le misure indipendenti, l'incertezza associata alla variabile gaussiana differenza (casuale in quanto c.l.) si ottiene per quadratura:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2} \rightarrow z_{mis} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\hat{\sigma}} \Rightarrow \text{Test a due code: } P(|z| > z_{mis}) = 1 - 2 \cdot \int_0^{z_{mis}} G(z) dz$$

Per campioni ridotti è possibile seguire una procedura agevole solo se le rispettive popolazioni hanno la medesima SD campionaria (es: stessa pop. gaussiana).

Nel qual caso, considerando le stime delle deviazioni standard campionarie $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$:

$$t_{mis} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}\hat{\sigma}_1^2 + \frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}\hat{\sigma}_2^2\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Tale t_{mis} segue una distribuzione di student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Soglie convenzionali per le discrepanze (1) $P > 5\%$ non significativa; (2) $P < 5\%$ significativa; (3) $P < 1\%$ altamente significativa. Un'ipotesi di compatibilità è **rigettata** negli ultimi due casi, accettata nel primo.

2.7 Rigetto di Dati | Chauvenet

Data una misura sospetta x_s in campione gaussiano con media \bar{x} e SD campionaria σ_x :

$$z_{mis} = \frac{x_s - \bar{x}}{\sigma_x} \Rightarrow \text{Test a due code: } P(|z| > z_{mis}) = 1 - 2 \cdot \int_0^{|z_{mis}|} G(z) dz$$

Si determina $N_{attesi} = N \cdot P(|z| > z_{mis}) \rightarrow \boxed{\text{RIGETTO se } N_{attesi} < 0.5}$ Per campioni ridotti si utilizza Student con $\nu = N - 1$.

2.8 Distribuzioni notevoli: continue

Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \vee x \geq b \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \end{cases}$$

Media e Varianza:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \quad \left| \quad s_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \right.$$

Esponenziale

$$\Phi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ con } \hat{\tau} = \text{vita media} \quad \left| \quad \bar{t} = \tau ; s_t = \tau \right.$$

2.9 Discrete

Uniforme

$$k_i \text{ con } i = 1, \dots, N \Rightarrow P(k_i) = \frac{1}{N} \rightarrow \bar{k} = P \sum_i k_i = \frac{1}{N} \sum_i k_i ; s_k = \frac{\sqrt{N \sum_i k_i^2 - (\sum_i k_i)^2}}{N}$$

Processi di tipo bernoulliano (2 possibili esiti: successo/ins.):

Binomiale

$$P(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \left| \quad \bar{k} = n \cdot p ; \sigma_k = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \right.$$

Geometrica

$$P(k; p) = p(1-p)^{k-1} \quad \left| \quad \bar{k} = \frac{1}{p} ; \sigma_k = \frac{\sqrt{1-p}}{p} \right.$$

Poissoniana

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad \left| \quad \bar{k} = \mu ; \sigma_k = \sqrt{\mu} \right.$$

2.10 Complementi di combinatorio

Permutazioni $P_n = n!$

Disposizioni senza ripetizione: $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ || con ripetizione: $D_{n,k}^* = n^k$

Combinazioni senza ripetizione: $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ || con ripetizione: $C_{n,k}^* = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

2.11 Efficienza di conteggio

$$\varepsilon = \frac{n}{N} \text{ con } n \text{ elementi rilevati su } N \text{ totali esaminati} \Rightarrow \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot (1-\varepsilon)}{N}}$$

3 Esercizio 3: Chi Quadro

3.1 Condizione di normalizzazione, media e varianza per PDF continue

Data una PDF continua $\phi(x)$ definita su intervallo $[a, b]$ (anche su tutta la retta, $]-\infty, +\infty[$)

$$\text{Normalizzazione} \quad \int_a^b \phi(x) dx = 1$$

Nota: se funzione composta $\phi(g(x)) \rightarrow dg(x) = g'(x)dx \Rightarrow \int_a^b \phi(g(x)) dg(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \phi(x) g'(x) dx$

$$\text{Media} \quad \bar{x} = \int_a^b x \phi(x) dx \quad \left| \quad \text{Varianza} \quad \sigma_x^2 = \int_a^b (x - \bar{x})^2 \phi(x) dx \right.$$

3.2 Chi #1 : Distribuzione attesa

Data PDF $\phi(x)$, campione con N misure totali.

1. Se N non dato, calcolarlo come somma degli osservati per ciascun bin $N = \sum_i O_i$
2. Suddividere in bin / Verificare se necessario accorpare bin:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ampiezza di ciascun bin } \Delta x_i \geq \text{risoluzione dell'apparato di misura} \\ \text{Almeno 4-5 misure per bin} \\ N_{BINS} \text{ tale per cui } \nu > 0 \text{ ovvero almeno superiore ai vincoli / parametri da stimarsi} \end{array} \right.$
3. Si calcola per ogni bin, con **valor medio** x_i e **ampiezza** Δx_i :

$$E_i = N \cdot \int_{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} \phi(x) dx = N \cdot \left[\int_0^{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} \phi(x) dx - \int_0^{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}} \phi(x) dx \right]$$

4. La SD per ogni bin corrisponde a quella di una binomiale di media E_i (conteggio!):
 $\sigma_i = \sqrt{N \cdot p_i \cdot (1 - p_i)} = \sqrt{E_i (1 - \int_{BIN_i} \phi(x) dx)}$
 Se il numero di bin è elevato si utilizza la poissoniana: $\sigma_i = \sqrt{E_i}$
5. Si calcola il χ^2 :

$$\text{Binomiale: } \chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{BINS}} \left(\frac{O_i - E_i}{\sqrt{E_i (1 - p_i)}} \right)^2 \quad \left| \quad \text{Poisson: } \chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{BINS}} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right.$$

6. Si determina il numero di vincoli, e dunque i gradi di libertà della distribuzione χ^2 secondo

$$\boxed{\nu = N_{BINS} - N_{VINCOLI}}$$

Sono da conteggiarsi come vincoli:

- a) Il numero complessivo di misure, se non dato e calcolato per somma degli O_i
- b) I parametri della PDF non noti a priori e ottenuti come migliori stime dal campione

7. Si calcola il chi ridotto secondo l'eq. e si valuta la probabilità a una coda (è DP) dalla tabella

$$\tilde{\chi}_{MIS}^2 = \frac{\chi_{MIS}^2}{\nu} \Rightarrow P(\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_{MIS}^2) = \int_{\tilde{\chi}_{MIS}^2}^{\infty} \Phi_{\nu}(\tilde{\chi}^2) d\tilde{\chi}^2 = 1 - \int_0^{\tilde{\chi}_{MIS}^2} \Phi_{\nu}(\tilde{\chi}^2) d\tilde{\chi}^2 = 1 - P(\tilde{\chi}^2 < \tilde{\chi}_{MIS}^2)$$

3.3 Chi #2 : Relazione funzionale

Dato un campione di coppie di dati (x_i, y_i) e ipotizzata una relazione funzionale $y = f(x; a_J)$ con a_J parametri della funzione.

1. La SD da considerare per il calcolo di χ_i^2 per ogni coppia è:
 - * La deviazione standard campionaria delle y , σ_y se uniforme
 - * L'incertezza su ogni y_i , se è data l'incertezza relativa uniforme, calcolata secondo $\sigma_i = \left(\frac{\sigma_y}{y}\right) \cdot y_i$

In generale, nel caso di σ_y non uniforme si segue la procedura del chi pesato

2. Si calcola il chi:

$$\text{Unif: } \chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i; a_J)}{\sigma_y} \right)^2 \quad \left| \quad \text{Pesato: } \chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i; a_J)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N w_i (y_i - f(x_i; a_J))^2 \right.$$

3. Si determina il numero di gradi di libertà, considerando $N_{VINCOLI}$ = numero di parametri della funzione stimati dal campione e non stabiliti a priori (vd. anche Minimo chi quadro)
4. Si calcola il chi ridotto e si segue procedura analoga al caso #1.

Soglie convenzionali Per le valutazioni sull'accettabilità dell'ipotesi di compatibilità (in ambo i casi) si considerano i consueti valori di probabilità: $< \mathbf{0.05} \Leftrightarrow < \mathbf{5\%}$ = rigetto con discrepanza significativa, $< \mathbf{0.01} \Leftrightarrow < \mathbf{1\%}$ = rigetto con discr. altamente significativa

3.4 Minimo Chi

Per determinare i valori dei parametri che minimizzano il chi (e al contempo il valore per il test), noto il valore delle σ_i si impone

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_J} = 0 \quad \forall J = 1, \dots, N_{PARAMETRI}$$

Se σ_x trascurabili, $\sigma_i \neq 0 \quad \forall y_i$ e y_i distribuite normalmente (gaussiane), allora il metodo si riconduce alla ML.

Metodo parabola Se il parametro incognito è uno (sia B), si possono calcolare differenti valori del χ^2 in prossimità del minimo e determinare χ_{min}^2 interpolando il grafico $\chi^2(B)$ con una parabola e trovando il vertice.

3.5 Covarianza e coefficiente di corr. lineare

$$\text{Covarianza} \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\text{Coeff. di correlazione lineare} \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \in [-1, 1] \quad \text{con } \sigma_x, \sigma_y \text{ SD campionarie}$$

Appendice: tabelle integrali

Allega files