Zoccoli, Spighi, Rinaldi - Classical Electrodynamics

Pocket reference for 2st year course - BSc Physics, Unibo

2023

1 Elettrostatica nel vuoto

Esperimento di Coulomb - bilancia di torsione $|\vec{F}| = \dfrac{2c\theta}{L\sin\varphi}$ con $|\vec{m}| = c\theta$

Legge di Coulomb

$\vec{F}_e = k\dfrac{Q \cdot q}{R_{AB}^2}\hat{R}_{AB}$ in MKS: $\vec{F}_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q \cdot q}{R_{AB}^2}\hat{R}_{AB}$

Principio di sovrapposizione (discreto) $\vec{F}_T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_P\sum_{i=1}^{N}\dfrac{q_i}{R_{iP}^2}\hat{R}_{iP}$

Densità di carica

Volumetrica $\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta\tau} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$

Superficiale $\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta S} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$

Lineare $\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta l} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$

Sovrapposizione in forma continua $\vec{F}_T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_P\int_\tau \rho(\vec{r})\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\Delta R^2}\hat{\Delta R}$ con $\vec{\Delta R} = \vec{r}_P - \vec{r}$

Campo elettrostatico generato da una carica $\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{R}$

Sovrapposizione (discreto e continuo) $\vec{E}_T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$ — $\vec{E}_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\vec{r})\frac{\mathrm{d}\tau}{\Delta R^2}\hat{\Delta R}$

Momento di dipolo elettrico $\vec{P} = qd\hat{k}$ (diretto verso la carica +)

Campo di un dipolo lungo l'asse $\vec{E} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{P}}{r^3}$

Energia potenziale di Coulomb $U(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r} + cost$

Potenziale elettrostatico $V(\vec{r}) \equiv \dfrac{U(\vec{r})}{q} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + cost$

Sovrapposizione (distribuzione discreta e continua) $V(P) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{Q_i}{r_i}$ — $V(\vec{r}_P) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\dfrac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{\Delta r}$

Legge di Gauss (I eq di Maxwell) in forma integrale $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Per distribuzioni continue $$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(\Sigma)} \rho \, \mathrm{d}\tau$$

Applicazione Σ con campo di **modulo ($|\vec{E}|$) e orientazione relativa (θ) costanti** $$|\vec{E}| = \frac{Q_T}{\cos\theta \varepsilon_0 \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

Legge di Gauss in forma differenziale $$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Distribuzione lineare indefinita (λ costante) $$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{R} \hat{n}$$

Distribuzione piana indefinita (σ costante) $$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{n}$$

Discontinuità del campo attraverso superficie carica $$\Delta\vec{E}_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n} \quad — \quad \Delta\vec{E}_\tau = 0\hat{\tau}$$

Proprietà dei conduttori immersi in campo elettrico esterno (all'equilibrio)

1. Campo totale all'interno **nullo**; cariche disposte in modo da **schermare** campo esterno
2. In ogni punto interno la carica è **nulla**
3. Spostamento per schermare si risolve in riarrangiamento cariche **solo superficiali**
4. Immersione del conduttore nel campo ne altera le linee a seconda della propria geometria; sulla superficie il campo è normale e vale $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$
5. La superficie del conduttore è equipotenziale, così come il suo interno
6. Il campo all'interno di una cavità nel conduttore è nullo e non vi sono cariche indotte sulla superficie di questa

Analoghe per conduttore carico

Dispersione delle punte $$Q_i \propto R_i \implies \sigma_i \propto \frac{1}{R_i}$$

Capacità di un condensatore $$C \equiv \frac{1}{{}_{L_i}\!\int_A^B \frac{\mathrm{d}r_i}{\varepsilon_0 \mathrm{d}S_i}}$$

Relazione tra carica e ddp (proprietà fondamentale condensatori) $$Q = C\Delta V$$

Campo in condensatore piano a facce parallele $$|\vec{E}_{int}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad — \quad |\vec{E}_{est}| = 0 \text{ con } \sigma = \tfrac{Q}{S}$$

Capacità cond. piano a facce p. $$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Condensatori in parallelo (stessa ddp) $$C_{eq}^{par} = \sum_i C_i$$

Condensatori in serie (facce di carica opposta a due collegate) $$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Energia elettrostatica sistema di cariche $$U_T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i^T \quad — \quad U_T = \frac{1}{2} \iiint_\tau \rho V_T \, \mathrm{d}\tau$$

Energia immagazzinata nel condensatore $$U_E = \frac{1}{2} C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Densità energetica nello spazio (vuoto) $$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Potenziale del dipolo (origine a metà della distanza) $$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\mathrm{P}} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Campo del dipolo $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{P}}{r^3}\big(\cos^2\theta - \frac{1}{3}, \cos\theta\sin\theta\big)$ con $\theta = \arccos\big(\frac{\vec{\mathrm{P}}\cdot\vec{r}}{\mathrm{P}r}\big)$

Energia e momento dipolo in campo esterno $U_{\mathrm{P}} = -\vec{\mathrm{P}}\cdot\vec{E}$ — $\vec{F}_T = \vec{0}$ — $\vec{m}_T = \vec{\mathrm{P}}\wedge\vec{E}$

Primi termini sviluppo in multipolo $V(P) = V_0 + V_{DIP} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\mathrm{P}}\cdot\hat{R}}{R^2}$ con $\vec{\mathrm{P}} = Q(\vec{d}_+ - \vec{d}_-) = Q\vec{\delta}$

Conduttore nel condensatore $\Delta V_c = E(d - D_c)$

Costante dielettrica relativa e assoluta del mezzo $k \equiv \frac{\Delta V_0}{\Delta V_k} > 1$ $\varepsilon = k\varepsilon_0$

Capacità del condensatore riempito di dielettrico $C_k = kC_0 = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{k\varepsilon_0 S}{d}$

Carica di polarizzazione superficiale indotta $\sigma_{\mathbb{P}} = \sigma - \sigma_k$ $\sigma_{\mathbb{P}} = \big(\frac{k-1}{k}\big)\sigma$

Vettore polarizzazione $\vec{\mathbb{P}} = n\vec{\mathrm{P}} = nq\vec{\delta}$ $\sigma_{\mathbb{P}} = \vec{\mathbb{P}}\cdot\hat{n}$ $\mathbb{P} = \varepsilon_0(E_0 - E) = \varepsilon_0(k-1)\vec{E}$

Suscettività $\vec{\mathbb{P}} = \varepsilon_0(k-1)\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$ generale (anche anisotropi) con tensore di suscettività χ_{ij}

Relazione con carica di polarizzazione $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbb{P}} = -\rho_{\mathbb{P}}$

Spostamento elettrico definizione e relazioni $\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E} - \vec{\mathbb{P}}$ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_L \Leftrightarrow \oiint_\Sigma \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_L$

Ulteriori relazioni per isotropi $\vec{\mathbb{P}} = \frac{k-1}{k}\vec{D}$ per omogenei $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbb{P}} = \frac{k-1}{k}\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{D}$

Superficie tra dielettrici $\Delta D_n = 0$ $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{k_1}{k_2}$

Energia del condensatore con dielettrico $u_E^k = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ generalmente anche per anisotropi $u_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

2 Correnti e circuiti

Corrente elettrica $i \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

Densità di corrente $\vec{j} \equiv ne\vec{v}_d$ $i = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \Phi_\Sigma(\vec{j})$

Stima velocità di deriva per sezione sferica $|\vec{v}_d| = \frac{i}{ne\pi R^2}$

Equazione di continuità della carica $i = \oiint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q_{int}}{\mathrm{d}t}$

Equazione di continuità della corrente elettrica $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

Legge di Ohm con σ conduttività $\vec{j} = \frac{ne^2\tau_c}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}$ per semiconduttori $\vec{j} = ne^2\big(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-}\big)\vec{E}$

Resistività $\rho \equiv \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau_c}$ $\vec{E} = \rho\vec{j}$

Potenza per unità di volume $P_\tau = \vec{j}\cdot\vec{E} = \sigma|\vec{E}|^2 = \rho|\vec{j}|^2$

Resistenza elettrica e legge di Ohm per conduttori metallici $R \equiv \frac{\rho l}{S}$ — $V = R \cdot i$

Conduttanza $G \equiv \frac{1}{R} = \frac{\sigma S}{l}$ — $i = G \cdot V$

Agitazione termica $\rho = \rho_{20}\big(1 + \alpha \Delta T\big)$

Potenza dissipata $P_{diss} = R \cdot i^2 = i \cdot V$

Resistori (resistenze) in serie stessa corrente $R_{eq} = \sum_i R_i \qquad P = \big(\sum_i R_i\big) i^2$

Resistori in parallelo stessa ddp ai capi $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \qquad \frac{1}{\sum_i 1/R_i}$

Forza elettromotrice $\varepsilon = \oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$

Generatore con resistenza interna $\varepsilon = (R + r)i$

Campo elettromotore non conservativo $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = \int_B^A \vec{E^*} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} \qquad \varepsilon - r \cdot i = V_A - V_B$

Legge di Ohm generalizzata $V_A - V_B + \sum_k \varepsilon_k = i \cdot \sum_j R_j$

I Legge di Kirchhoff - legge dei nodi $\sum_A \pm i_j = \sum_{entranti} i_j - \sum_{uscenti} i_k = 0$

II Legge di Kirchhoff - legge delle maglie $\sum_k \varepsilon_k = \sum i_j R_j$

3 Costanti e proprietà

3.1 Costanti

- Costante dielettrica del vuoto ε_0 .... $8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2 N^{-1} m^{-2}}$
- Carica dell'elettrone e .... $1.6021766208 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$