Симметричная проблема собственных значений

Игорь Лобанов

апрель 2021

Что дает симметричность.

- Собственные значения симметричных матриц вещественные числа.
- Левые и правые собственные вектора совпадают.
- Существует ортогональный базис из собственных векторов.

Теорема (Симметричное вещественное разложение Шура/спектральная теорема). Пусть A - вещественная симметричная матрица размера $n \times n$). Тогда существует вещественная ортогональная матрица Q, такая что

$$Q^T A Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Теорема (Куранта-Фишера о минимаксе). Пусть матрица $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ симметрична с собственными значениями $\lambda_k(A)$

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \ldots \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_1(A),$$

$$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_k(A) \colon k = 1 \ldots n\}.$$

Тогда

$$\lambda_k(A) = \max_{S \in \mathbb{R}^n \colon \dim S = k} \quad \min_{y \in S \colon y^2 = 1} \quad y \cdot Ay.$$

Одноранговые возмущения

Теорема. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$, $c^2 = 1$, $\tau \in \mathbb{R}$. Положим $B := A + \tau c c^T$. Тогда

$$\lambda_k(B) \in [\lambda_k(A), \lambda_{k-1}(A)], \text{ если } \tau \geq 0,$$

$$\lambda_k(B) \in [\lambda_{k+1}(A), \lambda_k(A)], \text{ если } \tau \leq 0$$

причем существуют $m_k \geq 0$, такие что:

$$\lambda_k(B) = \lambda_k(A) + m_k \tau, \quad \sum_{k=1}^{N} m_k = 1.$$

Теорема (Виландта-Хоффмана). Если $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ и $A + E$ – симметричные матрицы, то

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k(A + E) - \lambda_k(A))^2 \leq \|E\|_F^2.$$

Чувствительность инвариантных подпространств.

Теореме. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ и $A + E$ – симметричные матрицы, а $Q = (Q_1|Q_2) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ортогональная матрица, такая что

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad Q^T A Q = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда если

$$\delta = \mathrm{dist}(\mathrm{spec}\, A_{11}, \mathrm{spec}\, A_{22}) - \|E_{11}\|_2 - \|E_{22}\|_2 > 0,$$

и $\|E_{12}\|_2 \leq \delta/2$, то найдется матрица P, такая что столбцы матрицы $(Q_1 + Q_2 P)(1 + P^T P)^{-\frac{1}{2}}$ образуют базис в инвариантном для $A + E$ подпространстве, причем

$$\|P\|_2 \leq \frac{2}{\delta} \|E_{21}\|_2.$$

Как и в несимметричном случае задача вычисления собственных подпространств не обязательно хорошо обусловлена.

- Для хорошей обусловленности собственные числа должны быть хорошо отделены друг от друга.

Определение. Инерцией симметричной матрицы A называют тройку неотрицательных чисел (m, z, p), где m - число отрицательных, z - нулевых и p - положительных собственных значений.
Теорема (Закон инерции Сильвестра). Если матрица A симметрична, а X невырожденая, то матрица A и $X^T AX$ имеют одну и ту же инерцию.

Симметричных QR-алгоритм

- Нет необходимости в комплексных сдвигах, так как $\operatorname{spec} A \subset \mathbb{R}$.
- Симметричная хессенбергова матрица является трехдиагональной.
- Трехдиагональная структура сохраняется после QR-шага со сдвигом.

Вычисление SVD.

Сингулярное разложение для $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$, $m \geq n$:

$$U^T A V = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

связано с разложениями Шура для симметричных матриц:

$$V^T (A^T A) V = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}),$$

$$U^T (A A^T) U = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{Mat}(k \times k, \mathbb{R}).$$

Теорема. Если $A \in \mathrm{Mat}(m \times k, \mathbb{R})$, то для $k < n, m$ справедливо:

$$\sigma_k(A) = \max_{\substack{\dim S = k \\ \dim T = k}} \min_{\substack{x \in S \\ y \in T}} \frac{y^T A x}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \max_{\dim S = k} \min_{x \in S} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Следствие. Если $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, $m \geq n$, и $A + E$ – симметричные матрицы, то при $k \neq n$ справедливо:

$$|\sigma_k(A + E) - \sigma_k(A)| \leq \sigma_1(E) = \|E\|_2.$$

Теорема. Если $A, A+E \in \mathrm{Mat}(m \times k, \mathbb{R})$, то для $m \geq n$ справедливо:

$$\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k(A+E) - \sigma_k(A))^2 \leq \|E\|_F^2.$$