

Несимметричная проблема собственных значений

Игорь Лобанов

апрель 2021

Случай квадратных комплексных матриц общего вида:
 $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

- ▶ Собственные числа λ_k суть нули характеристического многочлена:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda) = 0.$$

- ▶ Спектр образован n собственными значениями $\text{спес}(A) = \{\lambda_k : k = 1 \dots n\} \subset \mathbb{C}$.
- ▶ Правый собственный вектор $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$.
- ▶ Левый собственный вектор $y^T A = \lambda y^T$, $y \neq 0$.
- ▶ Вообще говоря $x \neq y$.

- ▶ Пространство S называют инвариантным для A , если $x \in S \Rightarrow Ax \in S$.
- ▶ Правое собственные подпространства инвариантно для A , левое для A^T .
- ▶ Число собственных векторов вообще говоря меньше $n = \dim A$.
- ▶ Алгебраическая кратность λ - такое d , что $p(z) = (z - \lambda)^d \tilde{p}(z)$, $p(\lambda) \neq 0$.
- ▶ Геометрическая кратность λ равна $\dim \ker(A - \lambda)$.

- ▶ Матрицы A и B подобны, если найдется невырожденное X , такое что $B = X^{-1}AX$. Для подобных матриц $\text{spec}(A) = \text{spec}(B)$.
- ▶ Если для матриц $A \in \text{Mat}(n \times n)$, $B \in \text{Mat}(k \times k)$ найдется $X \in \text{Mat}(n \times k)$, то $\text{Ran } X$ инвариантно для A и B . Если $\text{ran } X = k$, то $\text{spec } B \subset \text{spec } A$.

Теорема (Разложение Шура). Если $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, то существует унитарная матрица Q , такая что

$$Q^* A Q = T = D + N,$$

где $D = \text{diag}_k \lambda_k$, N – строго верхняя треугольная матрица. Выбором Q собственные значения λ_k можно расположить в любом порядке.

- ▶ Если $Q = (q_1 | \dots | q_n)$, q_k - вектора Шура. q_k - правый собственный вектор \Leftrightarrow столбец $N_{\cdot,k}$ равен нулю.
- ▶ Матрица нормальна, если $A^*A = AA^*$. Матрица нормальна \Leftrightarrow найдется такое Q , что в разложении Шура $N = 0$.
- ▶ Разложение Шура не единственно. Отклонение от нормальности $\|N\|_F^2$ не зависит от Q :

$$\|N\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|D\|_F^2.$$

Неунитарные преобразования

Теорема (Блочно-диагональное разложение). Пусть дано разложение Шура с квадратными блоками T_{kk} :

$$Q^*AQ = T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $\text{spes } T_{kk} \cap \text{spes } T_{jj} = \emptyset$ для всех $k \neq j$, то существует невырожденная матрица Y , такая что

$$(QY)^{-1}A(QY) = \text{diag}_k T_{kk}.$$

- ▶ Если все собственные числа матрицы A простые, то матрица A подобна диагональной матрице, но матрица подобия общего вида.
- ▶ Блоки T_{kk} можно выбрать так, что все элементы диагонали равны, а сами T_{kk} верхнетреугольные.
- ▶ Жорданова нормальная форма дает такое разложение, где T_{kk} - Жордановы клетки.

Теория возмущений.

Теорема (О кругах Гершгорина). Если $X^{-1}AX = D + F$, где $D = \text{diag}_k d_k$ и все элементы диагонали F равны нулю, то

$$\text{spec } A \subset \bigcup_{k=1}^N D_k, \quad D_k = \{z \in \mathbb{C}: |z - d_k| \leq \sum_{j=1}^n |f_{kj}|\}.$$

Теорема (Бауэр-Файк). Если μ – собственное значение матрицы $A + E \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ и $X^{-1}AX = \text{diag}_k \lambda_k$, то

$$\min_{\lambda \in \text{spec}(A)} |\lambda - \mu| \leq \kappa_p(X) \|E\|_p,$$

в любой выбранной p -норме с подходящей константой $\kappa_p(X)$..

Обусловленность собственного значения.

Пусть λ – простое собственное значение матрицы $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ с нормированными собственными векторами $Ax = \lambda x$, $A^T y = \lambda y$, $x^2 = y^2 = 1$. Пусть F некоторая матрица возмущения с $\|F\|_2 = 1$. Тогда для малого параметра $\epsilon \rightarrow 0$ собственное число $\lambda(\epsilon)$ и правый собственный вектор $x(\epsilon)$ возмущенной матрицы аналитически зависят от ϵ :

$$(A + \epsilon F)x(\epsilon) = \lambda(\epsilon)x(\epsilon), \quad x(0) = x, \quad \lambda(0) = \lambda$$

Тогда $\frac{d}{d\epsilon} \lambda(0) \leq \frac{1}{y \cdot x}$. Правую часть неравенства называют обусловленностью собственного значения λ .

- ▶ Собственные значения плохо обусловлены, если левые и правые вектора почти ортогональны. Так часто бывает, когда матрица A близка к имеющей кратные собственные значения.
- ▶ Чувствительность собственных вектор к возмущению тем больше, чем ближе собственные значения:

$$x_k(\epsilon) = x_k + \sum_{k \neq j} \frac{y_j \cdot F x_k}{(\lambda_k - \lambda_j) y_j \cdot x_k} x_j(0) + O(\epsilon^2),$$

где $Ax_k = \lambda_k x_k$, а $x_k(\epsilon)$ собственные вектора возмущения $A + \epsilon F$.

Степенной метод.

```
for  $k = 1, 2, \dots$  do  
   $z^{(k)} = Aq^{(k-1)}$   
   $q^{(k)} = z^{(k)} / \|z^{(k)}\|$   
   $\lambda^{(k)} = q^{(k)} \cdot Aq^{(k)}$   
end for
```

Алгоритм генерирует последовательность чисел $\lambda^{(k)}$,
сходящихся к $|\lambda_1| = \max |\operatorname{spec} A|$. Если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ второе по
величине модуля собственное значение A , то скорость
сходимости

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = O\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k.$$

Ортогональные итерации.

Пусть $Q_0 \in \text{Mat}(n \times p)$ для $p \neq n$.

```
for  $k = 1, 2, \dots$  do  
     $Z_k = AQ_{k-1}$   
     $Q_k R_k = Z_k$  (QR-разложение).  
end for
```

Упорядочим собственные значения по абсолютной величине:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Матрицы Q_k сходятся к собственному базису в собственном подпространстве, отвечающему числам $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Скорость сходимости пропорциональна $|\lambda_{p+1}/\lambda_p|^k$.