Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Робототехники и комплексной автоматизации

КАФЕДРА Системы автоматизированного проектирования (РК-6)

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Студент	Лубянов Александр Дмитриевич
Группа	РК6-62Б
Тип задания	лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Интерполяция Лагранжа и интерполяция кубическими сплайнами

Студент ____________________ **А. Д. Лубянов**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ____________________ **А. П. Соколов**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Оценка ____________________________________

Москва, 2019 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу

Задача 1 (интерполирование полиномами Лагранжа)

Дана рациональная функция, известная как аппроксимация Паде:

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1+\sum_{k=1}^{n} b_k x^k}, \quad (1)$$

где $x \in [-1; 1]$.

Требуется:

1. Разработать функцию l_i(i, x, x_nodes), которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes, в точке x.
2. Написать функцию L(x, x_nodes, y_nodes), которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x.
3. Сгенерировать 100 функции $f_{n,m}(x)$, где целые степени n, $m \in [7; 15]$ и вещественные коэффициенты a_j , $b_k \in [0; 1]$ генерируются случайным образом для каждой из функции.
4. Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики $f_{n,m}(x)$ и соответствующего интерполяционного полинома $L(x)$, построенного по N равномерно расположенным узлам, где N выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведите $L(x)$, построенного по N чебышевским узлам.
5. Для каждой из функции, сгенерированных в предыдущем пункте, найдите интерполяционные полиномы $L(x)$, построенные по $N \in \{1, 2, . . . , 30\}$ равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого N рассчитайте расстояние между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^{∞}. Рассмотрите несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от N и сделайте по ним вывод. Добавьте в отчет один характерный график, который наглядно демонстрирует верность вашего вывода.
6. Объясните, что такое аппроксимация Паде и почему предложенный метод генерации случайных функций $f_{n,m}(x)$ позволяет до некоторой степени обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции.

Задача 2 (интерполяция кубическими сплайнами)

Требуется:

1. Разработать функцию qubic_spline_coeff(x_nodes, y_nodes), которая посредством решения матричного уравнения вычисляет коэффициенты естественного кубического сплайна. Для простоты, решение матричного

уравнения можно производить с помощью вычисления обратной матрицы с использованием функции numpy.linalg.inv().

2. Написать функции qubic_spline(x, qs_coeff) и d_qubic_spline(x, qs_coeff), которые вычисляют соответственно значение кубического сплайна и его производной в точке x (qs_coeff обозначает матрицу коэффициентов).
3. На интернет-ресурсе https://rp5.ru найдите данные о температуре за один произвольный календарный месяц в произвольном городе, первая буква которого совпадает с первой буквой вашей фамилии. Проведите интерполяцию кубическими сплайнами по полученным данным и выведите результат на экран.
4. Из текущей выборки удалите половину узлов таким образом, что в выборке остаются измерения только в 03:00, 09:00, 15:00, 21:00. Проведите интерполяцию кубическими сплайнами по новой выборке и выведите результаты на экран.
5. Из последней выборки снова удалите половину узлов таким образом, что в выборке остаются измерения только в 03:00, 15:00, и проведите аналогичную интерполяцию кубическими сплайнами.
6. Сравните три полученные аппроксимации эволюции температуры. Оцените, насколько хорошо аппроксимации во втором и третьем случае предсказывают температуру в известные моменты времени, которые были отброшены при фильтрации узлов интерполяции. Также оцените, насколько хорошо эти аппроксимации предсказывают температуру, усредненную в течение дня (усредненная температура получается путем вычисления среднего арифметического известных значений температуры в течение каждого из дней). [1]

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – овладеть основами языка Python, а также его библиотеками matplotlib и numpy; реализовать интерполяцию Лагранжа и интерполяцию кубическими сплайнами; проанализировать полученные результаты

Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы

1. Разработаны функции l_i(i, x, x_nodes) и L(x, x_nodes, y_nodes), которые возвращают значения базисного и интерполяционного полиномов Лагранжа соответственно.
2. Выведены на экран графики функции аппроксимации Паде, соответствующего интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по равномерным и чебышевским узлам.
3. Рассчитана и выведена на экран зависимость расстояния между L(x) и $fn,m(x)$ от кол-ва узлов.
4. Разработана функция qubic_spline_coeff(x_nodes, y_nodes), которая вычисляет коэффициенты естественного кубического сплайна, функции qubic_spline(x, qs_coeff) и d_qubic_spline(x, qs_coeff), которые вычисляют соответственно значение кубического сплайна и его производной в точке x.
5. Проведена интерполяция кубическими сплайнами по данным, полученным на интернет-ресурсе https://rp5.ru, результат выведен на экран.
6. Произведено сравнение полученных аппроксимаций эволюции температуры.

1. Интерполяция Лагранжа

С помощью библиотеки NumPy были реализованы функции, вычисляющие значения базового и интерполяционного полиномов Лагранжа. Сгенерированы 100 функций $f_{n,m}(x)$ со случайными коэффициентами a, b, m и n. Построены графики некоторых из них, соответствующих им интерполяционных полиномов Лагранжа по N равномерно расположенным и чебышевским узлам.

Ниже представлены графики для N = 5 (рис. 1) и N = 7 (рис. 2) для двух из сгенерированных функций:

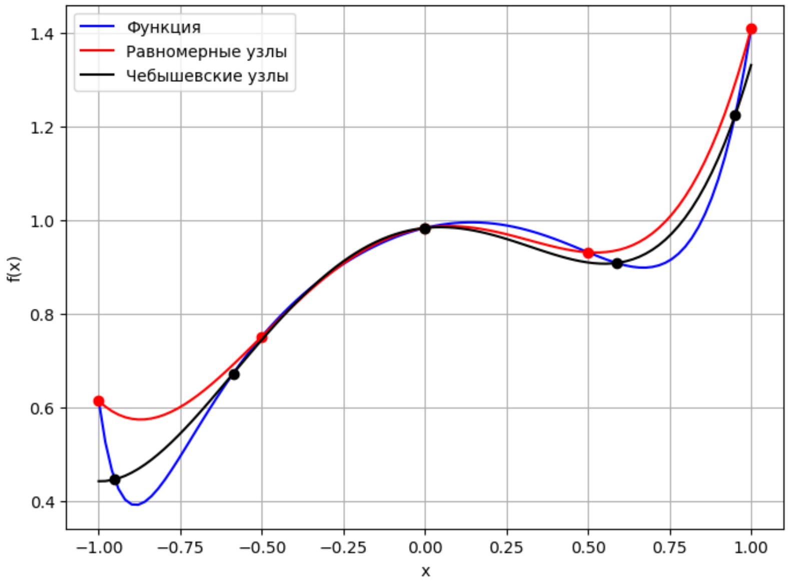

Рисунок 1. Графики исходной функции и полинома Лагранжа на основе 5 равномерных и чебышевских узлов

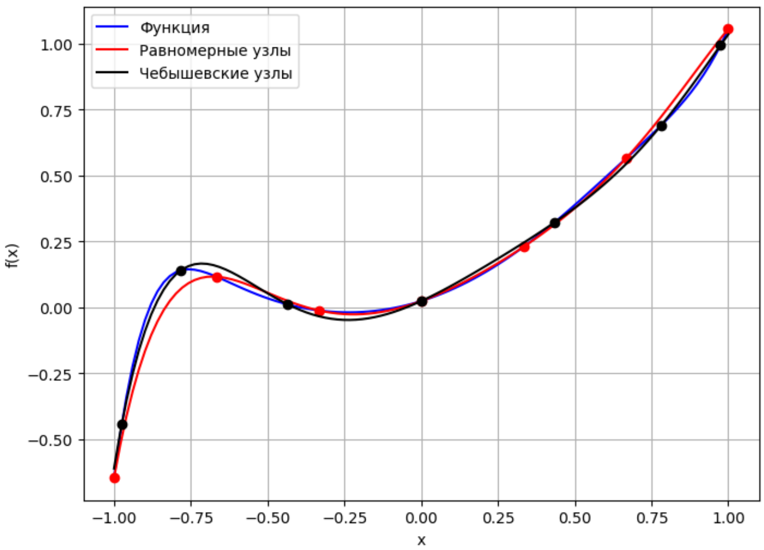

Рисунок 2. Графики исходной функции и полинома Лагранжа на основе 7 равномерных и чебышевских узлов

Как видно из графиков, при увеличении количества узлов возрастает точность аппроксимации.

При большом количестве узлов аппроксимации (N = 30) использование равномерных узлов приводит к появлению осцилляций на краях интерполяционного интервала. На рисунке 3 представлен соответствующий график.

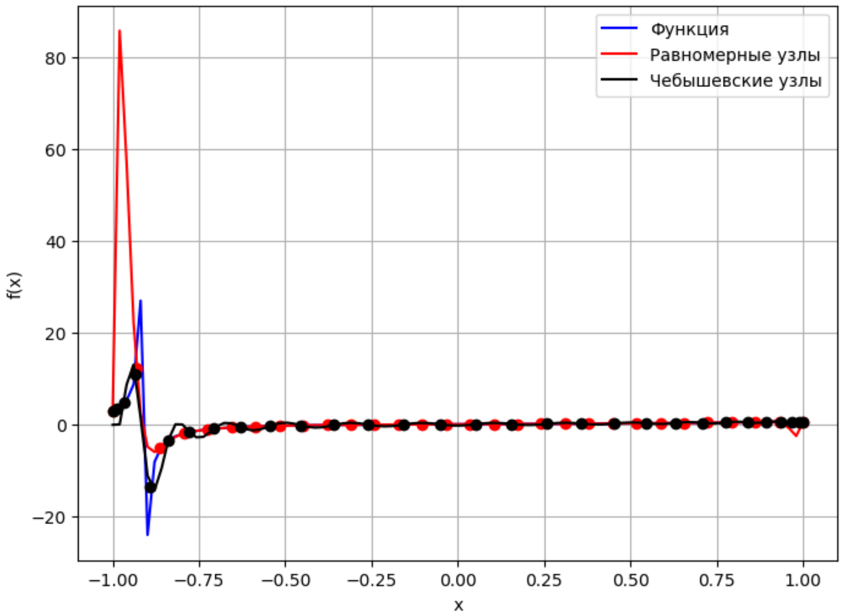

Рисунок 3. Графики исходной функции и полинома Лагранжа на основе 30 равномерных и чебышевских узлов

Для каждой из функций, сгенерированных для вывода, при $N \in \{1, 2, \dots, 30\}$ рассчитаны расстояния между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^{∞}. Для одной из них построен график зависимости этого расстояния от N при равномерном и чебышевским распределении узлов. Результат, представленный в логарифмической шкале, показан на рисунке 4.

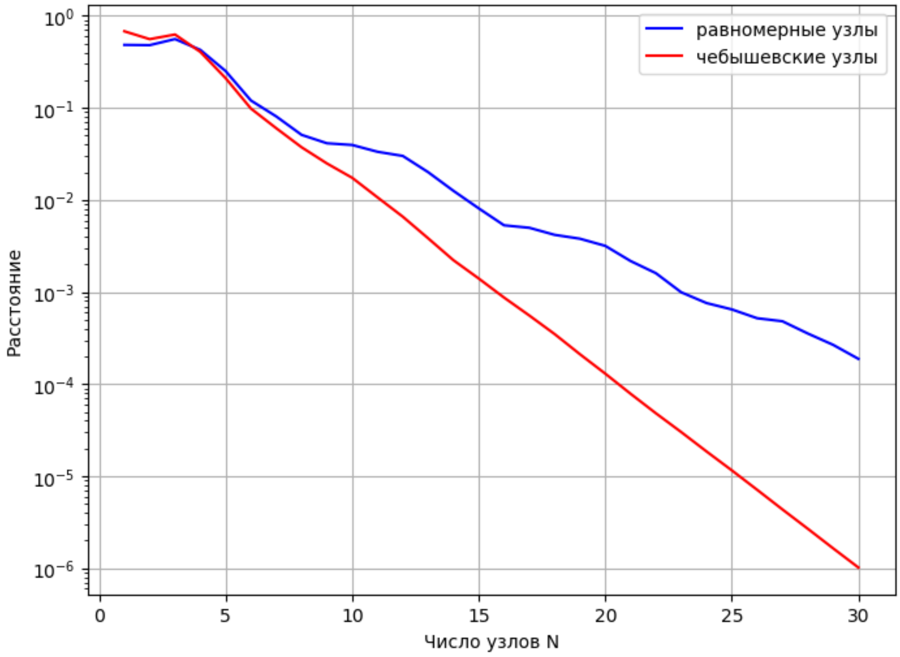

Рисунок 4. Зависимость расстояния между функцией и полиномом Лагранжа от кол-ва узлов при равномерных и чебышевских узлах

График показывает, что использование чебышевских узлов увеличивает точность аппроксимации.

Аппроксимация Паде представляет собой рациональную функцию вида

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1+\sum_{k=1}^{n} b_k x^k},$$

Функция такого вида имеет m+1 коэффициентов в числителе и n+1 - в знаменателе. Весь набор коэффициентов определяется с точностью до общего множителя. [2]

Предложенный метод генерации случайных функций $f_{n,m}(x)$ позволяет получить почти любую функцию, а вид графика зависимости расстояния между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ меняется незначительно (и имеет вид как на рисунке 4).

2. Интерполяция кубическими сплайнами

В ходе работы были разработаны функция для вычисления коэффициентов кубических сплайнов, функции для получения значения кубического сплайна и его производной в заданной точке. Они были использованы для интерполяции данных, взятых с ресурса https://rp5.ru.

В качестве исследуемого города был выбран Ла-Пас, а месяца, в котором измерялась температура - июнь 2018г. Чтение данных из файла производилось с помощью функций библиотеки Pandas. Т.к. в скачанном файле были представлены измерения за каждый час, массив данных был сокращён в 3 раза.

Ниже представлены результаты интерполирования кубическими сплайнами при шаге в 3 часа (рис. 5), 6 часов (рис. 6) и 12 часов (рис. 7). Также для наглядности было произведена интерполяция при шаге 24 часа (рис. 8).

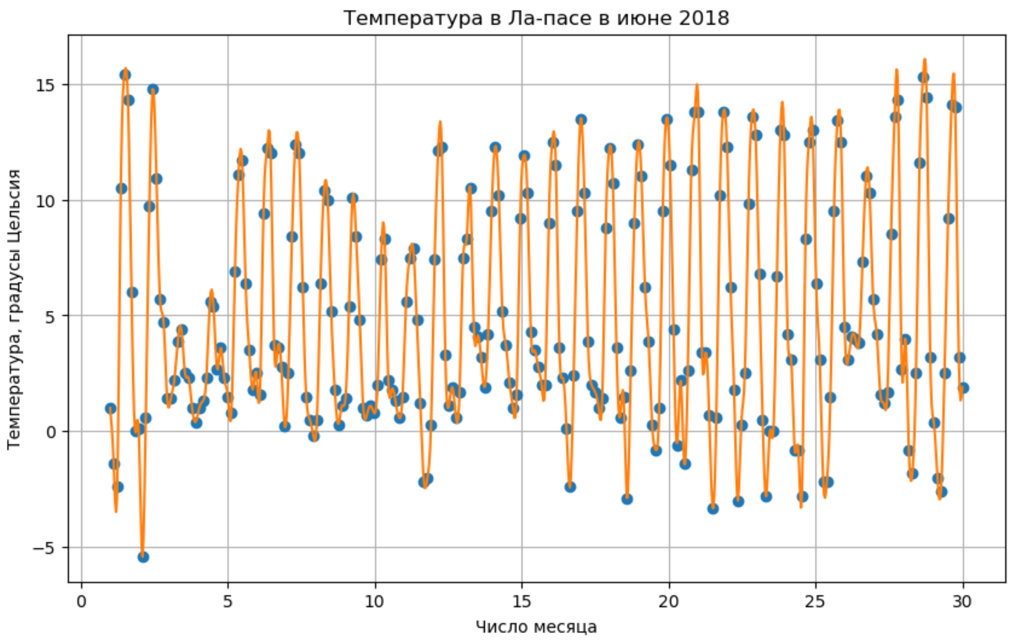

Рисунок 5. Интерполяция кубическими сплайнами при шаге измерений температуры 3 часа

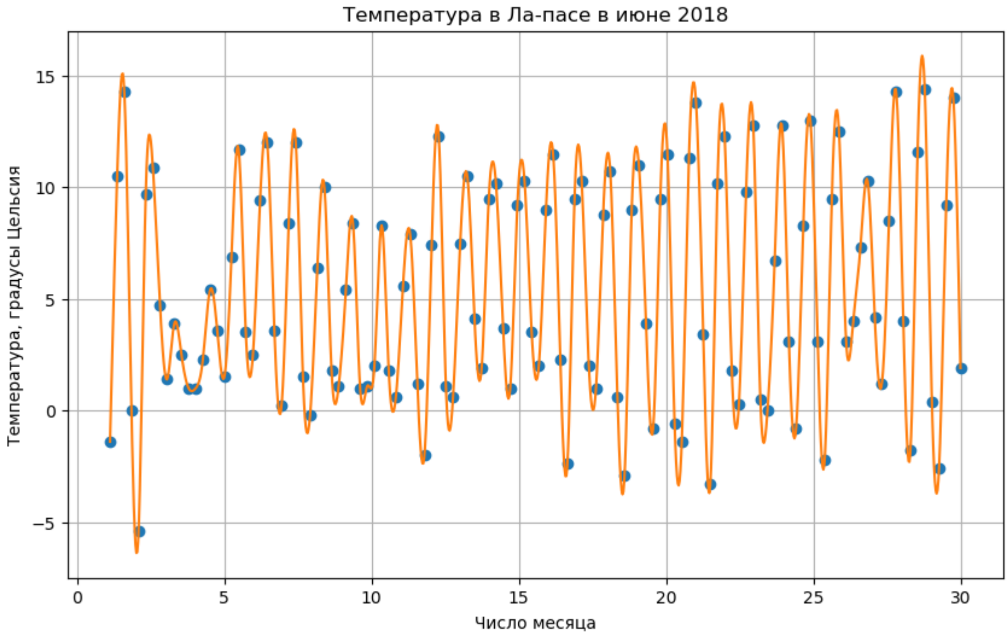

Рисунок 6. Интерполяция кубическими сплайнами при шаге измерений температуры 6 часов

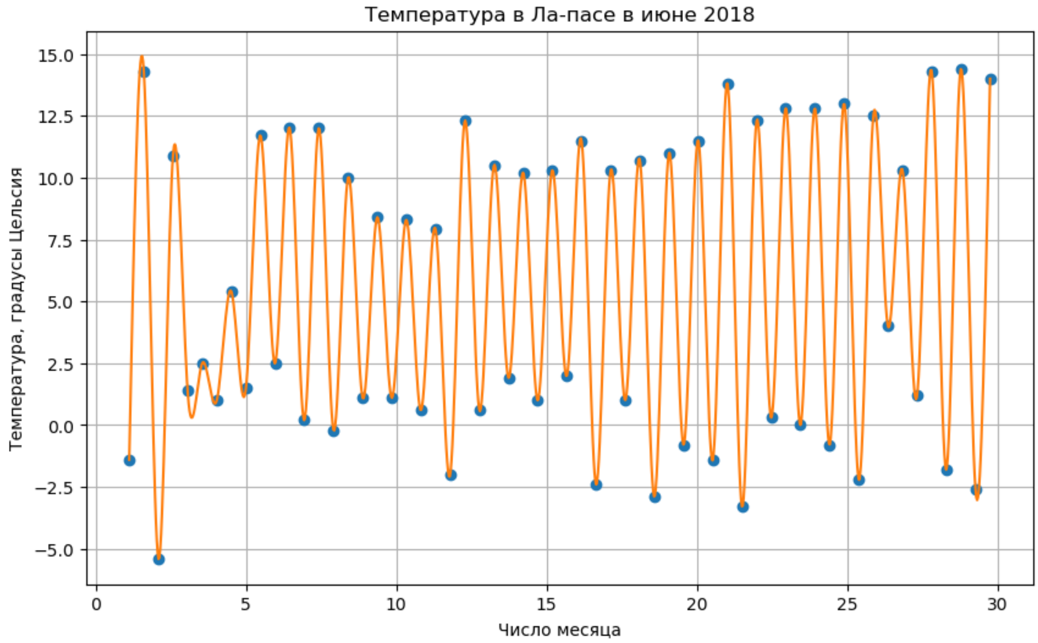

Рисунок 7. Интерполяция кубическими сплайнами при шаге измерений температуры 12 часов

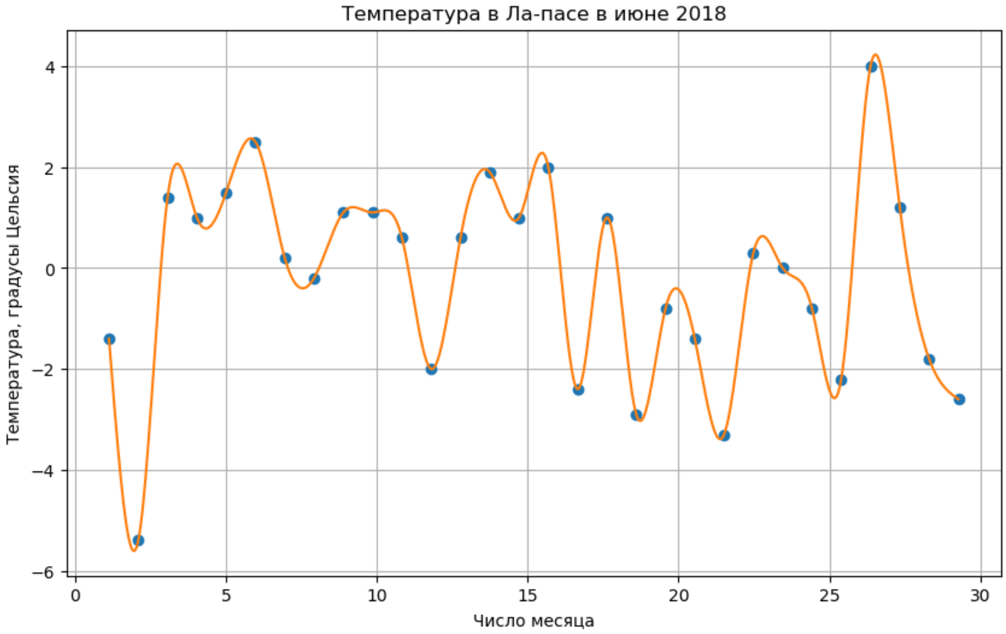

Рисунок 8. Интерполяция кубическими сплайнами при шаге измерений температуры 24 часа

Для того, чтобы оценить, насколько хорошо аппроксимации во втором и третьем случае предсказывают температуру в известные моменты времени, которые были отброшены при фильтрации узлов интерполяции, произведено сравнение полученных аппроксимаций графиков эволюции температуры. Для этого была разработана функция checking_dist (num), которая вычисляет максимальное расстояние между известными значениями температуры и полученными в результате аппроксимации. Для случаев с шагом 6 и 12 часов были получены значения 8.6581286 и 24.97401847 соответственно. Значит, меньшее количество узлов приводит к возрастанию неточности интерполяции.

Чтобы оценить, насколько хорошо эти аппроксимации предсказывают температуру, усредненную в течение дня, была разработана функция daily_temp (num). В результате проверки были получены значения максимального отклонения среднесуточной температуры от реальных данных. Для случаев с шагом 6 и 12 часов эти значения равны 0.80300397 и 1.96943923 соответственно. Как и прошлая проверка, данные значения показывают увеличение неточности интерполяции при уменьшении количества узлов. При этом значения среднесуточной температуры предсказываются заметно точнее, чем температура в конкретное время.

Заключение

Интерполяция полиномами Лагранжа позволяет получить приближенную функцию. Такой способ интерполирования является глобальным, т.е. кривая зависит от положения каждой конкретной точки. Также известно, что точность интерполяции Лагранжа сильно зависит от расположения узлов. Использование чебышевских узлов вместо равномерных заметно увеличивает точность и позволяет избежать осцилляций на краях интерполяционного отрезка.[3]

Интерполяция кубическими сплайнами – случай локальной интерполяции. Это значит, что значение аппроксимируемой функции в конкретной точке зависит лишь от значений функций её малой окрестности.

В обоих методах интерполяции увеличение количества узлов приводило к возрастанию точности аппроксимирования. Но при интерполяции полиномами Лагранжа в некоторых случаях это приводило к появлению паразитных осцилляций. Поэтому в задачах с большим объёмом аппроксимируемых данных следует применять способ интерполирования кубическими сплайнами.

Список использованных источников

[1] Соколов, А.П., Першин, А.Ю. Инструкция по выполнению лабораторной работы (общая). Соколов, А.П., Першин, А.Ю., Москва, 2018.

[2] Аппроксимация Паде [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Аппроксимация_Паде – (Дата обращения: 06.03.2019).

[3] Першин, А.Ю. Лекции по вычислительной математике. Першин А.Ю., Москва, 2019.