Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Робототехники и комплексной автоматизации

КАФЕДРА Системы автоматизированного проектирования (РК-6)

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Студент	Лубянов Александр Дмитриевич
Группа	РК6-62Б
Тип задания	лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Многошаговые методы численного решения задачи Коши

Студент	________________	**Лубянов А. Д.**
	подпись, дата	*фамилия, и.о.*
Преподаватель	________________	**Першин А. Ю.**
	подпись, дата	*фамилия, и.о.*
Преподаватель	________________	**Соколов А. П.**
	подпись, дата	*фамилия, и.о.*

Оценка ____________________________________

Москва, 2019 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу

Задача 13 (Многошаговые методы численного решения задачи Коши)
Дано нестационарное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \quad (1)$$

где T = T (x, y, t) – температура в точке (x, y) в момент времени t, f (x, y) = 1 – функция тепловых источников, описывающая в данном случае равномерный нагрев. Рассматривается пространство (x, y) ∈ [0; 1] × [0; 1], однородные (т.е. нулевые) граничные условия: $\mathrm{T}(\mathrm{x}, 0, \mathrm{t}) = \mathrm{T}(0, \mathrm{y}, \mathrm{t}) = \mathrm{T}(\mathrm{x}, 1, \mathrm{t}) = \mathrm{T}(1, \mathrm{y}, \mathrm{t}) = 0$.
и нулевые начальные условия $\mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 0) = 0$.

Требуется:

1. Используя результаты лабораторной работы 3 (вариант 2), провести дискретизацию пространства с N = 18 узлами вдоль каждого направления и дискретизацию по времени с шагом Δt, используя метод Адамса-Башфорта 4-го порядка и метод Рунге–Кутты 4-го порядка. Например, для метода Адамса–Башфорта 4-го порядка результатом дискретизации должен быть итерационный метод вида
$$\mathrm{T}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{T}_{\mathrm{n}} + \Delta\mathrm{t} \sum_{\mathrm{k}=1}^{4} \mathrm{a}_{\mathrm{k}} (\mathbf{A}\mathbf{T}_{\mathrm{n}-\mathrm{k}+1} + \mathbf{f}), \quad (2)$$
где **A** и **f** были выведены в лабораторной работе 3 (вариант 2).
2. Написать функцию *ab4()*, которая проводит одну итерацию метода Адамса–Башфорта 4-го порядка, используя решения системы ОДУ на трех предыдущих итерациях. Аргументы функции следует определить самостоятельно.
3. Написать функцию *rk4()*, которая проводит одну итерацию метода Рунге–Кутты, используя решение системы ОДУ на предыдущей итерации. Аргументы функции следует определить самостоятельно.
4. Написать функцию *ode_solve(f, t_final, delta_t)*, которая находит решение ОДУ с правой частью, выраженной функцией f, до момента времени *t_final* с шагом по времени *delta_t*, используя метод Рунге–Кутты 4-го порядка для инициализации первых трех шагов и метод Адамса–Башфорта 4-го порядка для дальнейших итераций.
5. Проведя несколько вычислительных экспериментов с помощью функции *ode_solve()*, определить с точностью до порядка максимальное значение $\Delta\mathrm{t}$, обозначаемое $\Delta\mathrm{t}_{\max}$, при котором решение заданного дифференциального уравнения является неустойчивым. Требуется продемонстрировать неустойчивость решения с помощью графика

зависимости температуры, усредненной по области [0; 1] × [0; 1], от времени.

6. Используя Δt на порядок меньшее, чем Δt_{max}, построить:
    - линии уровня функции T(x,y,t) для нескольких моментов времени, демонстрирующих сходимость решения;
    - график зависимости температуры, усредненной по области [0; 1] × [0; 1], от времени.
7. Сравнить решение, к которому сходится численное решение заданного дифференциального уравнения, с решением, полученным в лабораторной работе 3 (вариант 2). Сравнив их дополнительно с решением, полученным при шаге Δt_{max}, сделать вывод об устойчивости решения и устойчивости метода. [1]

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – овладеть методами Адамса-Башфорта 4 порядка и Рунге-Кутты 4 порядка.

Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы

1. Написана функция *ab4()*, которая проводит одну итерацию метода Адамса–Башфорта 4-го порядка.
2. Написана функция *rk4()*, которая проводит одну итерацию метода Рунге–Кутты 4-го порядка.
3. Написана функция *ode_solve(f, t_final, delta_t)*, которая находит решение ОДУ с правой частью, выраженной функцией f, до момента времени *t_final* с шагом по времени *delta_t*, используя функции *ab4()* и *rk4()*.
4. Проведены расчеты и сделаны выводы об устойчивости метода.

Многошаговые методы численного решения задачи Коши

В лабораторной работе №3 была проведена дискретизация по пространству:

$$-\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2}-\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2}=-\frac{T\left(x_{i-1},y_j\right)-2T\left(x_i,y_j\right)+T\left(x_{i+1},y_j\right)}{(\Delta x)^2}-\frac{T\left(x_i,y_{j-1}\right)-2T\left(x_i,y_j\right)+T\left(x_i,y_{j+1}\right)}{(\Delta y)^2}. \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1), получим:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}=1+\frac{T\left(x_{i-1},y_j\right)-2T\left(x_i,y_j\right)+T\left(x_{i+1},y_j\right)}{(\Delta x)^2}+\frac{T\left(x_i,y_{j-1}\right)-2T\left(x_i,y_j\right)+T\left(x_i,y_{j+1}\right)}{(\Delta y)^2}. \quad (4)$$

Разработана функция *ab4(h, f, T, i)*, которая проводит одну итерацию метода Адамса–Башфорта 4-го порядка, где h – шаг по времени, f – функция, выражающая правую часть ОДУ, T – матрица со значениями температур. Она возвращает значение, полученное по формуле (2), где коэффициенты $\mathrm{a_k}$ равны[2]:

$$\mathrm{a}_1=\frac{55}{24}, \qquad \mathrm{a}_2=\frac{-59}{24}, \qquad \mathrm{a}_3=\frac{37}{24}, \qquad \mathrm{a}_4=\frac{-9}{24}. \qquad (5)$$

Разработана функция *rk4(alpha, h, f)*, которая проводит одну итерацию метода Рунге–Кутты 4-го порядка, где alpha – начальное значение для результирующего вектора, h – шаг по времени, f – функция, выражающая правую часть ОДУ. Она возвращает значение, рассчитанное по формуле (6):

$$w_{i+1}=w_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \quad (6)$$

где коэффициенты k_i рассчитываются по формулам:

$$k_1=h\,f(w_n), \quad (7)$$

$$k_2=h\,f(w_n+k_1/2), \quad (8)$$

$$k_3=h\,f(w_n+k_2/2), \quad (9)$$

$$k_4=h\,f(w_n+k_3). \quad (10)$$

Разработана функция *ode_solve(f, t_final, delta_t)*, которая находит решение ОДУ с правой частью, выраженной функцией f, до момента времени *t_final* с шагом по времени *delta_t.* Для первых трех шагов использовался метод Рунге-Кутты, для последующих – Адамса-Башфорта.

После проведения нескольких вычислительных экспериментов с помощью функции *ode_solve(f, t_final, delta_t)* определено максимальное значение $\Delta\mathrm{t}$, при котором решение заданного дифференциального уравнения является неустойчивым: $\Delta t_{max} = 10^{-3}$. Линии уровня функции T(x, y, t) для $\Delta t = 10^{-3}$ и t_final = 0.3 изображены на рисунке 1. Соответствующий график зависимости температуры, усредненной по области [0; 1] × [0; 1], от времени представлен на рисунке 2.

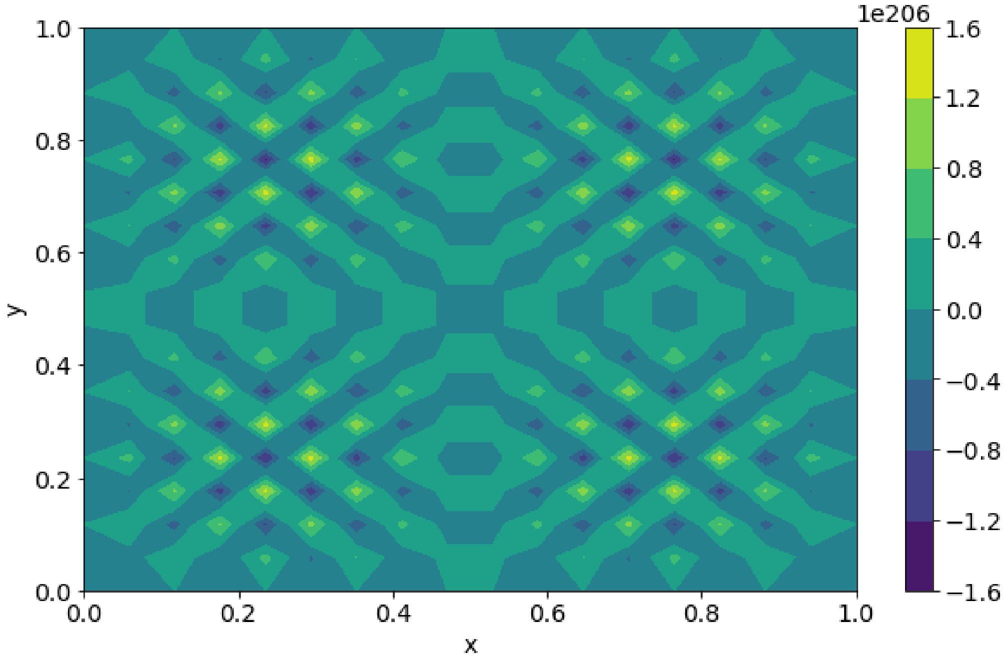

Рисунок 1. Линии уровня функции T(x, y, t) для $\Delta t = 10^{-3}$

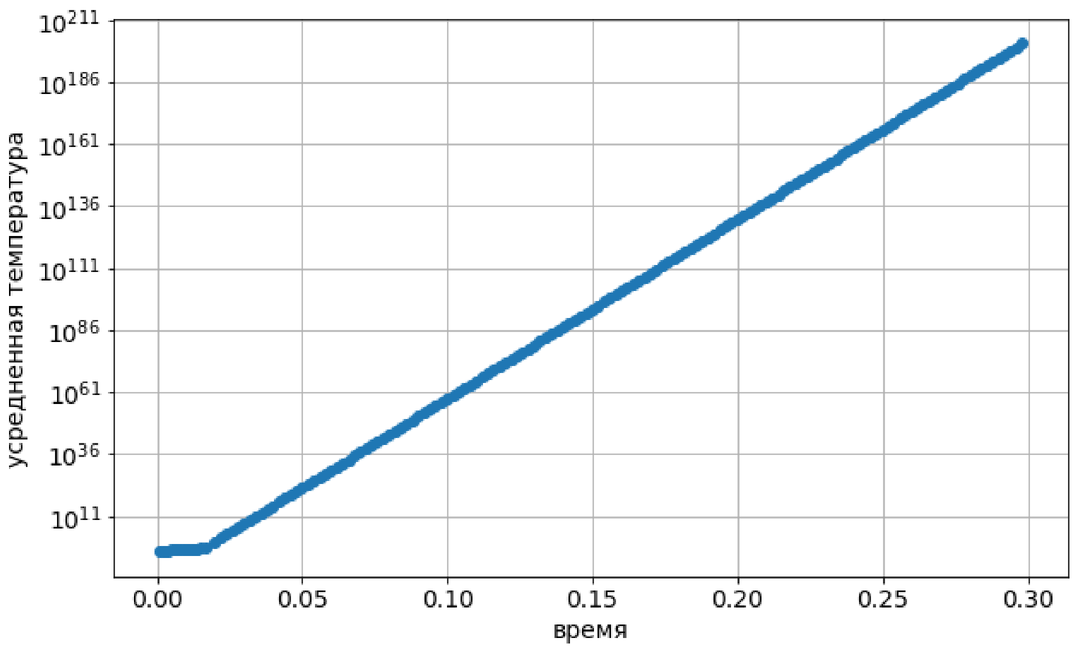

Рисунок 2. График зависимости температуры, усредненной по области [0; 1] × [0; 1], от времени для $\Delta t = 10^{-3}$

Аналогичные линии уровня при $\Delta t = 10^{-4}$ в некоторые моменты времени представлены на рисунках 3-5. Соответствующий график зависимости усредненной температуры от времени – на рисунке 6.

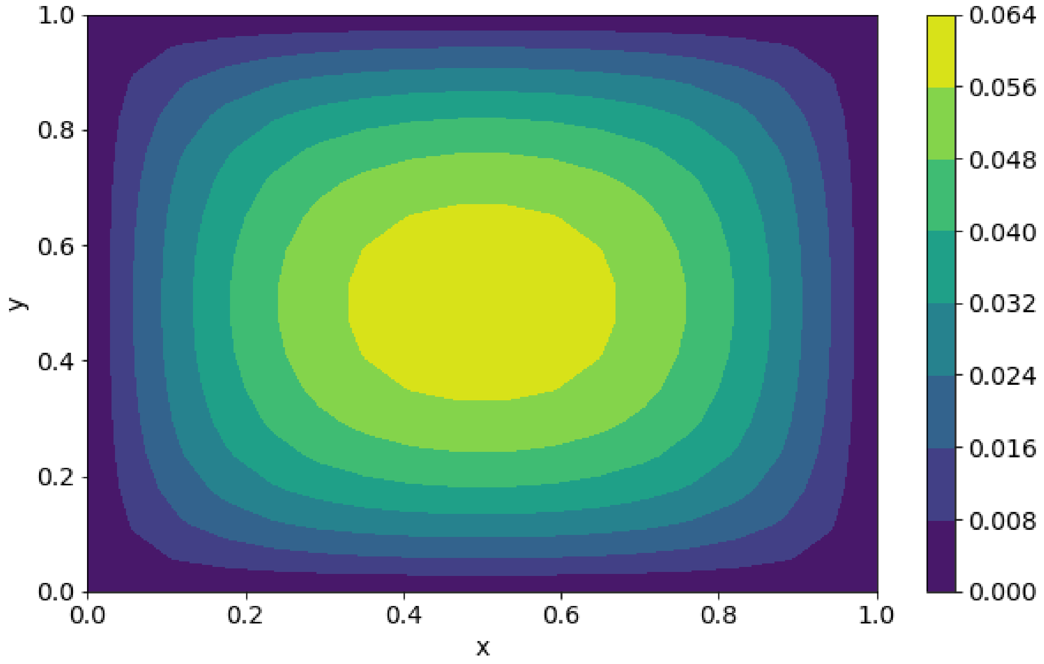

Рисунок 3. Линии уровня функции T(x, y, t) для $\Delta t = 10^{-4}$ *на 1000 из 2998 итераций*

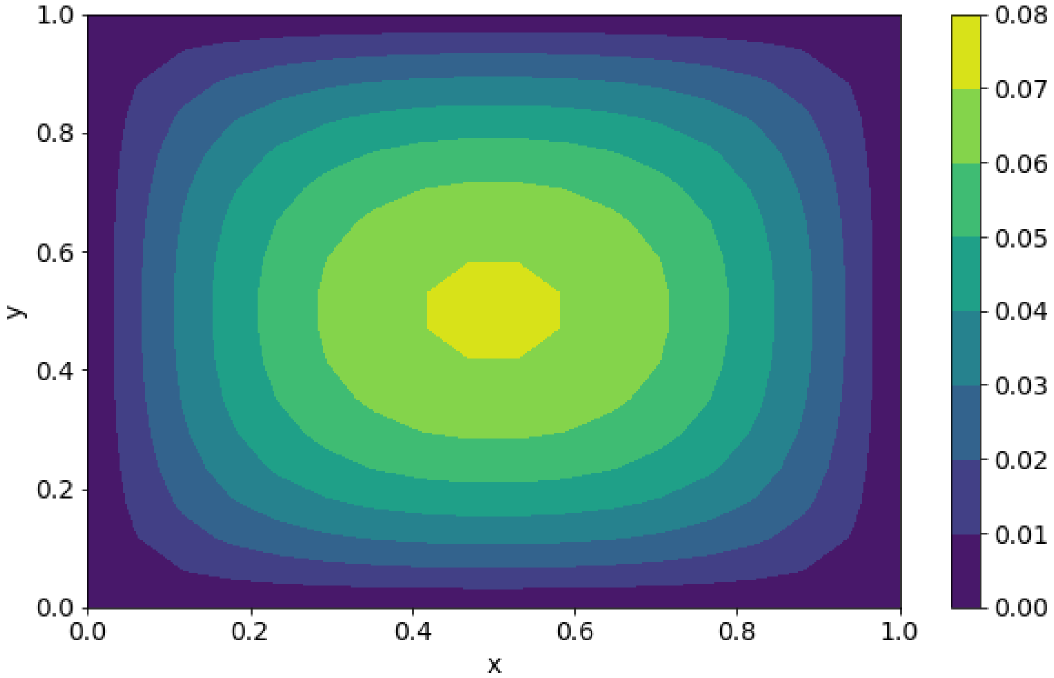

Рисунок 4. Линии уровня функции T(x, y, t) для $\Delta t = 10^{-4}$ *на 2000 из 2998 итераций*

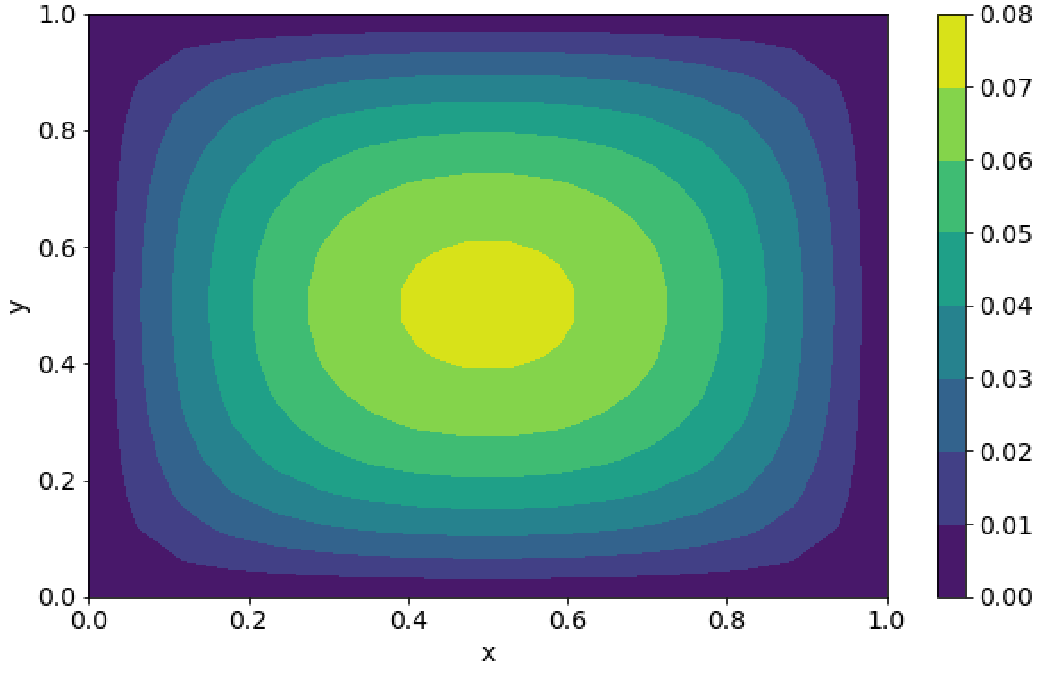

Рисунок 5. Линии уровня функции T(x, y, t) для $\Delta t = 10^{-4}$ *на 2998 из 2998 итераций*

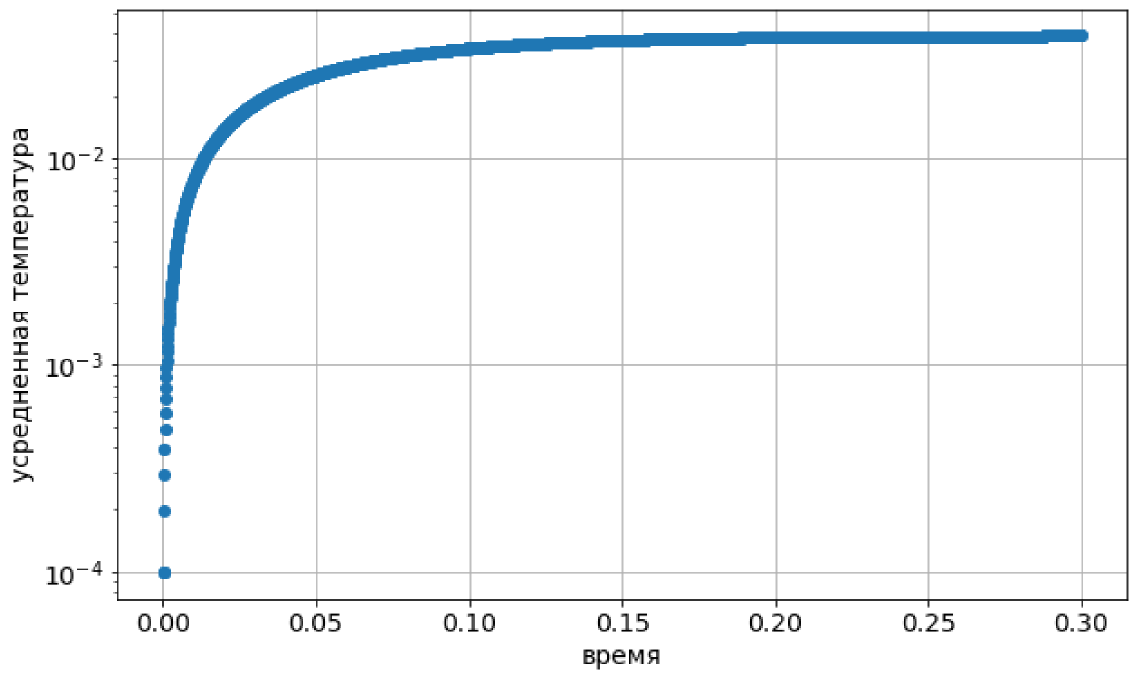

Рисунок 6. График зависимости температуры, усредненной по области [0; 1] × [0; 1], от времени для $\Delta t = 10^{-4}$

Решение стационарной задачи, полученное в Лабораторной работе №3, показано на рисунке 7.

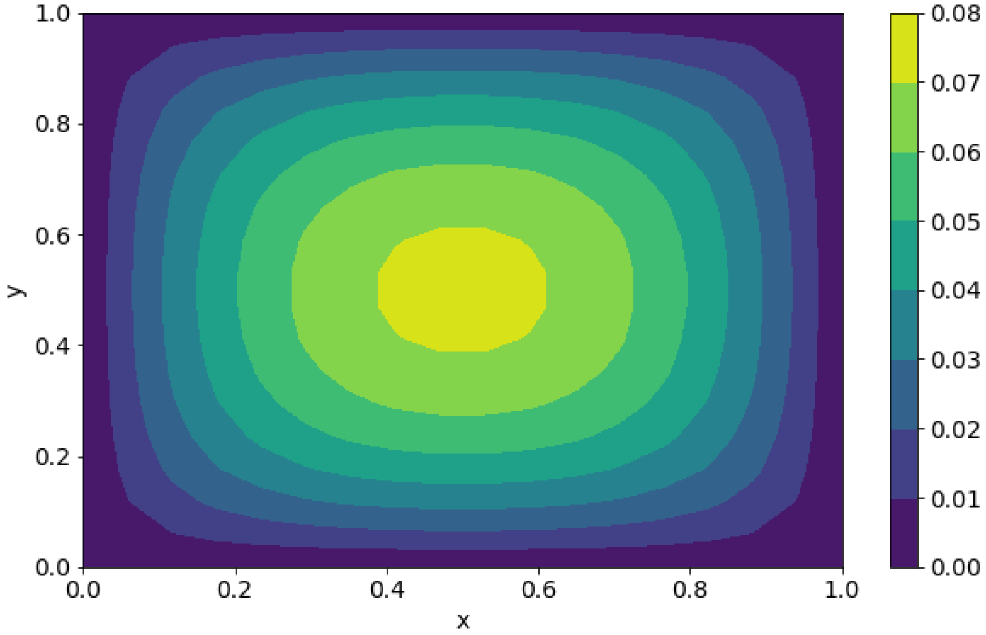

Рисунок 7. Решение стационарной задачи, полученное в Л. р. №3

Графики, представленные на рисунках 5 и 7, идентичны. По графику на рисунке 6 видно, что решение нестационарной задачи с течением времени сходится к решению нестационарной при $\Delta t < \Delta t_{max}$. При использовании шага по времени больше максимально допустимого решение является неустойчивым.

Заключение

Решение задачи методами Адамса-Башфорта 4 порядка и Рунге-Кутты 4 порядка устойчиво только при $\Delta t < \Delta t_{max}$, т.е. устойчивость зависит от шага дискретизации. Значит, данный метод решения системы ОДУ является условно устойчивым.

Список использованных источников

[1] Соколов, А.П., Першин, А.Ю. Инструкция по выполнению лабораторной работы (общая). Соколов, А.П., Першин, А.Ю., Москва, 2018.

[2] Першин, А.Ю. Лекции по вычислительной математике. Першин А.Ю., Москва, 2019.