



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL**



**DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA COMPUTARIZADA PARA EL  
CONTROL ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE DE PROCESOS BASADA EN  
EL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO**

**Tutor:**  
Dr. García Teodoro.

**Autores:**  
Brea José C.I. 20.700.618  
Medina Ronald C.I. 16.291.029

**VALENCIA, ENERO 2015**



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL**



**DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA COMPUTARIZADA PARA EL  
CONTROL ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE DE PROCESOS BASADA EN  
EL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO**

**Trabajo Especial de Grado Presentado ante la Ilustre Universidad de  
Carabobo para optar al Título de Ingeniero Industrial**

**Línea de Investigación:** Métodos Estadísticos Multivariantes.

**Tutor:**  
Dr. García Teodoro.

**Autores:**  
Brea José C.I. 20.700.618  
Medina Ronald C.I. 16.291.029

**VALENCIA, ENERO 2015**



UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL



## CERTIFICADO DE APROBACIÓN

Quienes suscriben, Miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo, para examinar el Trabajo Especial de Grado titulado **“Desarrollo de una Herramienta Computarizada para el Control Estadístico Multivariante de Procesos Basada en el Análisis de Punto de Cambio”**, el cual está adscrito a la Línea de Investigación **“Métodos Estadísticos Multivariantes”** del Departamento de Investigación de Operaciones, presentado por el (los) Bachiller (es) Brea José, C.I. 20.700.618 y Medina Ronald, C.I. 16.291.029, a los fines de cumplir con el requisito académico exigido para optar al Título de Ingeniero Industrial, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho Trabajo Especial de Grado, por cada uno de los Miembros del Jurado, éste fijó el día jueves 29 de enero de 2015, a las 10:00 am, para que el autor (es) lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo, en el Salón de Doctorado, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el Jurado, todo ello conforme a lo dispuesto en el Reglamento del Trabajo Especial de Grado de la Universidad de Carabobo y a las Normas de elaboración de Trabajo Especial de Grado de la Facultad de Ingeniería de la misma Universidad.
2. Finalizada la defensa pública del Trabajo Especial de Grado, el Jurado decidió aprobarlo por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el precitado Reglamento, otorgándole una calificación de 20 puntos y mención Honorífica.

En fe de lo cual se levanta la presente acta, el lunes 02 de febrero de 2015, dejándose también constancia de que actuó como Coordinador del Jurado el Tutor, Dr. García Teodoro.

Firma del Jurado Examinador

Dr. García Teodoro  
Presidente del Jurado

Lic. José Parra  
Miembro del Jurado

MSc. Roselin Santamaría  
Miembro del Jurado

## **AGRADECIMIENTO**

Le agradezco a Dios por haberme permitido vivir hasta este día, haberme guiado a lo largo de mi vida, por ser mi apoyo, mi luz y mi camino. Por haberme dado la fortaleza para seguir adelante en aquellos momentos de debilidad.

Le doy gracias a mis padres Manuel y María por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A mi hermana Yeimy y Cuñado Deryu, por ser parte importante de mi vida y representar la unidad familiar.

A la Universidad de Carabobo por brindarme la oportunidad de crecer personal y académicamente.

Al tutor el Dr. Teodoro García, por ofrecernos su apoyo y por dedicarle su tiempo de manera incondicional en la búsqueda de cumplir satisfactoriamente con este objetivo.

Y a los familiares y amigos que ofrecieron su apoyo y compañía a lo largo de este camino, para alcanzar la meta establecida al inicio de esta carrera.

José Brea

## **AGRADECIMIENTO**

A primer lugar a Dios por el regalo de la vida, estar mi lado y guiar me a todo momento. Por darme la sabiduría, fortaleza, tenacidad para lograr esta meta.

A San Judas Tadeo, por ayudarme a superar los distintos a obstáculos y momentos difíciles.

A mi Madre por apoyarme en todo instante, por tenerme como el centro de su vida, por darme la educación, y ser un ejemplo de vida.

A la Universidad de Carabobo por otorgarme la oportunidad de formarme académicamente.

Al tutor el Dr. Teodoro García, por darnos la oportunidad de desarrollar este trabajo de grado.

Y mi familia y amistades que dieron su incondicional su apoyo, durante el transcurso de mi carrera universitaria.

Ronald Medina

## **DEDICATORIA**

Este trabajo especial de grado, se lo dedico en primer lugar a Dios por iluminarme en mi camino, por permitirme alcanzar este objetivo.

A mis Padres y toda mi familia por el apoyo incondicional brindado durante toda mi carrera.

A mis amigas y amigos quienes que me apoyaron a no perder el ánimo de seguir adelante.

José Brea

## **DEDICATORIA**

A la memoria de mi padre, que observa desde el cielo con alegría la obtención de mi logro.

A mi Madre que siempre me ha apoyado en todas mis aspiraciones y metas, y ser un ejemplo a seguir en la vida.

A mi familia, por estar siempre a mi lado para aconsejarme y apoyarme en todo momento durante mi carrera.

A mis amigas y amigos, de la universidad con especial cariño a Anto y a Javier por tener la fortuna de compartir el tesoro de la amistad.

Ronald Medina



**UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA**



**DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA COMPUTARIZADA PARA EL  
CONTROL ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE DE PROCESOS BASADA EN  
EL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO**

**Autores:** Brea, José  
Medina, Ronald

**Tutor:** Dr. Teodoro García

**Fecha:** Enero, 2015

### RESUMEN

Desde la perspectiva de la aplicabilidad industrial, es vital conocer el momento a partir de cual, se hace presente la causa assignable y se producen los cambios en los parámetros del proceso. El monitoreo de procesos productivos mediante gráficos de control estadístico multivariante, produce alertas cuando hay cambios en los parámetros, pero deja al analista la tarea de estimar el momento del cambio. En este trabajo especial de grado, se diseña un programa computarizado, que permite monitorear procesos y estimar el momento del cambio, utilizando la herramienta estadística Análisis de Punto de Cambio para el caso multivariante. Para lograr esto, se estudió el modelo que monitorea simultáneamente la media y la matriz de varianza covarianza, posteriormente, se revisaron y estudiaron las distintas pruebas estadísticas necesarias para la validación de los supuestos del modelo. Con ésta información, se construyó una secuencia lógica en el lenguaje de programación MATLAB. Finalmente, el programa se aplicó a ejemplos reales y teóricos, que corroboraron su correcto funcionamiento y que además demostraron su aplicabilidad en el control estadístico multivariante de procesos.

**Palabras Claves:** Control estadístico multivariante de procesos, análisis de punto de cambio, series de tiempo multivariantes, herramienta computarizada.

## INDICE GENERAL

	p.p
AGRADECIMIENTOS.....	iv
DEDICATORIA.....	vi
RESUMEN.....	x
LISTADO DE FIGURAS .....	xiii
LISTADO DE TABLAS .....	xv
 <b>INTRODUCCIÓN.....</b>	 1
 <b>CAPÍTULO</b>	
 <b>I      EL PROBLEMA</b>	
1. Planteamiento del Problema.....	3
1.1. Objetivos de la Investigación	
1.1.1 Objetivo General.....	7
1.1.2 Objetivos Específicos.....	7
1.2. Justificación de la Investigación.....	7
1.3. Alcances de la Investigación.....	8
 <b>II     MARCO TEÓRICO</b>	
2.1 Antecedentes de la Investigación.....	9
2.2 Bases Teóricas.....	13
2.2.1 Proceso de desarrollo de Software .....	14
2.2.2 Control Estadístico de Procesos (SPC).....	15
2.2.3 Gráficos de Control.....	15
2.2.4 Fase I y Fase II (SPC).....	17
2.2.5 Variable Aleatoria Vectorial.....	18
2.2.6 Vector de Medias .....	19
2.2.7 Matriz de Covarianzas.....	20
2.2.8 Proceso Estocástico.....	20
2.2.9 Serie de Tiempo Multivariante .....	21
2.2.10 Análisis Multivariante.....	22
2.2.10.1 Muestra.....	23
2.2.10.2 Valores Atípicos ( <i>OUTLIERS</i> ).....	23
2.2.10.3 Densidad Normal Multivariante.....	24
2.2.10.4 Estacionariedad.....	25
2.2.10.5 Dependencia Serial.....	26

2.2.11 Estimador de Máxima Verosimilitud (MLE).....	27
2.2.12 Prueba de Razón Verosimilitud Generalizada (GLRT).....	28
2.2.13 Análisis de Punto de Cambio (CPA).....	30
2.2.13.1 Problema General de Análisis de Punto de Cambio (CPA)....	31
2.2.13.2 Orígenes del Análisis de Punto de Cambio.....	33
2.2.13.3 Clasificaciones en el Análisis de Punto de Cambio.....	33
2.2.13.4 Detección de un Cambio en Línea ( <i>on-line</i> ).....	35
2.2.13.5 Prueba de Hipótesis fuera de línea ( <i>off-line</i> ).....	36
2.2.13.6 Ccaracterística de las Metodologías de CPA.....	37
2.2.14 Matlab.....	37
2.2.15 Definición de Términos Básicos.....	38

### **III MARCO METODOLÓGICO**

3.1. Tipo de Investigación.....	41
3.2 Diseño de Investigación .....	41
3.3 Metodología Específica.....	42
3.3.1 Análisis de Fase I.....	42
3.3.1.1 Detección de Valores Atípicos ( <i>outliers</i> ).....	45
3.3.1.1.1 Prueba de Schwager y Margolin.....	45
3.3.1.1.2 Estudio de Normalidad Multivariante.....	50
3.3.1.1.2.1 Prueba de Normalidad Multivariante de Mardia.....	50
3.3.1.1.2.2 Estudio de Estacionariedad.....	54
3.3.1.1.2.2.1 Modelo Autorregresivo Vectorial de Orden $p$ .....	54
3.3.1.1.2.2.2 Prueba Secuencial para la Determinación del Orden VAR.....	56
3.3.1.1.2.2.3 Prueba de Raíz Unitaria de Fountis-Dickey.....	57
3.3.1.1.2.3 Estudio de Independencia.....	61
3.3.1.1.2.3.1 Independencia Categoría I.....	62
3.3.1.1.2.3.2 Independencia categoría II.....	66
3.3.1.1.2.4 Análisis de Fase II.....	71
3.3.1.1.2.4.1 Modelo general para la Detección de un Punto de Cambio.....	71
3.3.1.1.2.4.2 Monitoreo de un Proceso a través del Análisis de Punto.....	71
de Cambio.....	73
3.3.1.1.2.4.3 Modelo de Análisis de Punto de Cambio para un cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianza.....	74

<b>IV</b>	<b>DISEÑO DE LA HERRAMIENTA</b>	
4.1.	Presentación.....	80
4.2	Diseño general de la Herramienta.....	80
4.2.1	Entrada de Base de Datos. ....	81
4.2.2	Análisis de Fase I del SPC .....	82
4.2.2.1	Detección de Valores Atípicos .....	83
4.2.2.2	Estudio de Normalidad Multivariante.....	85
4.2.2.3	Estudio de Estacionariedad.....	87
4.2.2.4	Estudio de Independencia .....	90
4.2.3.	Construcción del Gráfico de Control.....	95
<b>V</b>	<b>APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA</b>	100
5.1	Ejemplo 1 Corroborando la capacidad de monitoreo.....	100
5.2	Ejemplo 2 Ilustrando la capacidad de detección contra las cartas. MCUSUM y MEWMA.....	105
5.3	Ejemplo 3 Proceso de clarificación del agua.....	109
5.4	Ejemplo 4 Proceso de fabricación del papel higiénico.....	116
<b>CONCLUSIONES.....</b>		123
<b>RECOMENDACIONES.....</b>		125
<b>APENDICE I</b> Tablas de límite de control.....		128
<b>APENDICE II</b> Funciones y subprogramas.....		164
<b>APENDICE III</b> Manual del usuario.....		218
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>		239

## LISTADO DE FIGURAS

	p.p
1      Gráfico de control típico. Fuente: Montgomery (2009).....	16
2      Procedimiento desarrollado por Cromwell .....	43
3      Procedimiento implementado en esta investigación para la construcción del gráfico de control.....	44
4      Diagrama de flujo: prueba de valores atípicos de Schwager y Margolin.....	49
5      Diagrama de flujo: prueba de normalidad multivariante de Mardia....	53
6      Diagrama de flujo: prueba de Estacionariedad de Fountis y Dickey....	60
7      Diagrama de flujo: estudio de independencia propuesto por Cromwell	61
8      Diagrama de flujo: prueba de independencia categoría I de Ljung y Box.....	65
9      Diagrama de flujo: prueba de independencia categoría II de Chitturi y Hosking.....	70
10     Diagrama de flujo: estudio de análisis de punto de cambio desarrollado por Zamba y Hawkins (2009).....	79
11     Procedimiento implementado en esta investigación para la construcción del gráfico de control.....	82
12     Secuencia lógica de la prueba de Schwager y Margolin en el programa.....	84
13     Secuencia lógica de la prueba de Normalidad Multivariante de Mardia en el programa.....	86
14     Secuencia lógica de la prueba de Fountis y Dickey en el programa.....	89

15	Secuencia lógica de la prueba de Ljung y Box (Independencia categoría I) en el programa.....	92
16	Secuencia lógica de la prueba de Chitturi y Hosking (Independencia categoría II) en el programa.....	93
17	Secuencia lógica de la decisión conjunta con respecto a la independencia de los datos en el programa.....	94
18	Secuencia lógica de la del inicio del estudio de la Fase II en el programa.....	96
19	Secuencia lógica de la construcción del grafico de control en el programa.....	98
20	Secuencia lógica de la estimación del punto de cambio y conclusión del análisis Fase II en el programa.....	99
21	Gráfico de control CPD. Fuente: <i>Introduction to Statistical Process</i> , Qiu (2013).....	102
22	Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, ejemplo 2.....	103
23	Gráfico de control MCUSUM, Ejemplo 2.....	107
24	Gráfico de control MEWMA, Ejemplo 2.....	107
25	Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, ejemplo 2.....	108
26	Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, (datos estandarizados), Ejemplo 3.....	113
27	Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, datos no estandarizados, Ejemplo 3.....	115
28	Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, datos estandarizados, Ejemplo 4.....	121
29	Carpeta de trabajo con los programas y elementos de CEPM.....	220

30	Organización en Excel de datos tanto para la Fase I como la Fase II del programa CEPM.....	221
31	Búsqueda en MATLAB de carpeta de trabajo del programa CEPM....	222
32	Selección de carpeta de trabajo del programa CEPM en MATLAB....	223
33	Pantalla inicial del estudio Fase I del ejemplo 1.....	223
34	Lectura de datos de la Fase I del ejemplo 1.....	224
35	Pantalla inicial prueba de outliers, Fase I del ejemplo 1.....	225
36	Resumen de la prueba valores atípicos, Fase I del ejemplo 1.....	226
37	Presentación prueba de Mardia, Fase I del ejemplo 1.....	227
38	Resumen de la prueba de Mardia, Fase I del ejemplo 1.....	227
39	Presentación y solicitud de significancia de la prueba de Estacionariedad, Fase I del ejemplo 1.....	228
40	Resumen de la prueba de Fountis Dickey, Fase I del ejemplo 1.....	228
41	Aplicación de la prueba de Ljung y Box, Fase I del ejemplo 1.....	230
42	Aplicación de la versión multivariante de Chitturi y Hosking de la prueba de Portmanteau Fase I del ejemplo 1.....	231
43	Pantalla inicial del estudio Fase II del ejemplo 1.....	232
44	Lectura de datos y solicitud de nivel de significancia para realizar el estudio Fase II Ejemplo 1.....	233
45	Monitoreo del proceso multivariante, estudio Fase II, ejemplo1.....	234
46	Resumen del análisis Fase II, Ejemplo 1.....	236
47	Monitoreo del proceso multivariante, estudio Fase II, ejemplo donde no ocurre ningún cambio.....	237
48	Resumen del análisis Fase II, ejemplo donde no ocurre ningún cambio.....	238

## LISTADO DE TABLAS

	p.p
5.1 Datos del proceso de producción tridimensional, (estandarizados), Ejemplo I.....	101
5.2 Datos del proceso de producción tridimensional, (estandarizados), Ejemplo 2.....	106
5.3 Datos del proceso de clarificación del agua, (no estandarizados), Fase II .....	109
5.4 Datos del proceso de clarificación del agua, (no estandarizados), Fase I	110
5.5 Datos del proceso de clarificación del agua, (estandarizados), Fase II...	111
5.6 Datos del proceso de clarificación del agua, estandarizados, Fase I.....	111
5.7 Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (no estandarizados), Fase II, Ejemplo 4.....	117
5.8 Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (no estandarizados), Fase I, Ejemplo 4.....	117
5.9 Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (estandarizados), Fase II.....	118
5.10 Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (estandarizado), Fase I.....	119
AI.1 Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 2$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	128
AI.2 Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 3$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	133
AI.3 Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 4$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	138
AI.4 Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 5$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	143

AI.5	Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 10$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	148
AI.6	Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 15$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	152
AI.7	Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 20$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	156
AI.8	Límite de Control $h_{n,p,\alpha}$ para un tamaño de muestra $n$ , variables $p = 25$ y nivel de significancia $\alpha$ .....	160
AIII.1	Requerimientos de hardware de Matlab 2012a para Windows.....	218
AIII.2	Programas realizados en MATLAB que se deben agregar para hacer funcionar CEPM.....	219
AIII.3	Libros de Excel que se deben agregar para hacer funcionar CEPM.....	219
AIII.4	Observación de primera señal de cambio y estimación del punto de cambio.....	236



## INTRODUCCIÓN

El control estadístico de procesos (SPC) es un conjunto de herramientas útiles para conseguir la estabilidad de un proceso mediante la reducción de la variabilidad. Entre este conjunto de herramientas, el gráfico de control es una de las técnicas más empleadas. Estas gráficas son utilizadas en el monitoreo de procesos en línea, con el objeto principal de detectar con rapidez la ocurrencia de causas asignables en los cambios del proceso a fin de reducir la producción de unidades no satisfactorias.

En el control estadístico multivariante de procesos, se conoce que las características o variables del proceso están relacionadas entre sí, formando así un conjunto correlacionado. Dado que estas no se comportan de manera independiente entre ellas, deben ser examinadas en conjunto como un grupo y no por separado. Asimismo, una realidad de los gráficos de control es que esta herramienta gráfica señala el punto donde el proceso está fuera de control, sin embargo, este cambio pudo haber ocurrido antes de la aparición de esta señal y una parte considerable del producto podría no cumplir con la calidad requerida por el consumidor.

El análisis de punto de cambio (CPA) es una herramienta estadística que se ha desarrollado para mejorar estas deficiencias, ésta permite detectar cambios que no sean detectados por los gráficos de control, y además proporciona una estimación del momento en donde el cambio en el proceso ocurre, con lo cual se logra emprender acciones correctivas rápidamente antes de que se fabriquen muchas unidades disconformes.

Antes de aplicar la herramienta de monitoreo, es necesario realizar un estudio previo a los datos multivariantes del proceso, para verificar el cumplimiento de los supuestos estadísticos requeridos por la herramienta de control considerada en este trabajo especial de grado. Este análisis de datos llamado en la literatura del SPC como análisis de Fase I, comienza con un estudio de valores atípicos (*outliers*), continua

con el estudio de normalidad multivariante, a continuación se estudia la estacionariedad y finaliza, con el estudio de independencia o autocorrelación de los datos. El objetivo general de esta investigación, es el desarrollo de un programa computarizado que permita monitorear procesos utilizando la herramienta de análisis de punto de cambio para el caso multivariante. Con el uso de este programa, se facilita la tarea de encontrar el momento en donde ocurre el cambio en el proceso, y así se mejoran los tiempos de respuesta ante la presencia de una causa assignable de variación.

En este trabajo se lleva a cabo una metodología que comprende: la exploración de los antecedentes bibliográficos, la construcción de un procedimiento para las distintas pruebas estadísticas realizadas en la Fase I del SPC y para el modelo de análisis de punto de cambio desarrollado, el uso del lenguaje de programación MATLAB para la elaboración de la herramienta computacional, la comprobación de la viabilidad del programa, mediante el uso de diversos ejemplos de la literatura y la ilustración de su aplicabilidad, utilizando datos históricos provenientes de empresas ubicadas en Venezuela.

El presente trabajo especial de grado está estructurado en cinco capítulos: En el capítulo I se plasman los objetivos, el planteamiento del problema, el alcance y la justificación de la investigación. El capítulo II expone los fundamentos teóricos, y hace referencia de los antecedentes. En el capítulo III se explica la metodología implementada durante la investigación para lograr cumplir con los objetivos, especificando también el tipo de investigación y eventualmente las técnicas estadísticas utilizadas en este trabajo. En el capítulo IV se presenta de manera detallada la estructura y lógica formal de la herramienta computacional desarrollada en MATLAB. En el capítulo V a través de una serie de ejemplos teóricos y reales se aplica la herramienta, con lo cual se ilustra su aplicabilidad y se finaliza con la presentación de las conclusiones y recomendaciones.

## **CAPÍTULO I**

### **EL PROBLEMA**

#### **1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En el mundo actual, la competencia que existe en los mercados hace que las empresas se vean en la necesidad de mejorar continuamente la calidad de los servicios y tienen como objetivo fundamental satisfacer las necesidades y exigencias de los clientes, de la manera más eficiente, lo que origina un mejoramiento continuo de los procesos, con la finalidad de aprovechar eficientemente los recursos físicos y humanos en la producción de bienes y servicios.

Así pues, el crecimiento y sostenimiento de las empresas en el mercado, forma parte importante de la fuente de riqueza de un país, debido a que la producción ofrecida genera empleos y, permite incrementar la calidad de vida de sus habitantes, a través de productos hechos competitivamente, siendo esta última una tarea difícil de llevar a cabo. Por consiguiente, se requiere de una producción que genere excelentes resultados, y para lograr esto, en muchos casos es necesario el uso de herramientas estadísticas que permitan en los procesos, la detección de problemas que puedan afectar la calidad de los productos y así, tomar las decisiones que permitan lograr una mejora continua en el desempeño industrial, reduciendo desperdicios y evitando que lleguen al mercado los productos que no cumplen con las necesidades del cliente.

En este contexto, el análisis de punto de cambio es una nueva y poderosa herramienta para determinar si un cambio ha tenido lugar en el proceso productivo, con esta herramienta se pueden detectar cambios que no son detectados por los gráficos de control, también caracteriza mejor los cambios, controla la tasa de error global, es robusto a los valores atípicos, es más flexible y es más fácil de usar (Taylor, 2000a).

Igualmente, el análisis de punto de cambio puede ser aplicado en muchas disciplinas. Chen y Gupta (2011) enuncian algunos ejemplos prácticos: en el análisis bursátil, donde la fluctuación del precio de las acciones, según la teoría económica, sigue una distribución normal, hay cambios que son anormales y son dignos de especial atención del inversionista; en el análisis de datos en la genética, el número de variaciones en las copias de ADN son muy importantes en la investigación del cáncer y la identificación de estas variaciones a menudo exige el establecimiento de un modelo de punto de cambio apropiado.

Al respecto, Alippi *et al.* (2011), señalan que la pronta detección de fallas y, más en general, cambios en la estacionalidad en los sistemas en red, es un tema clave para garantizar robustez y adaptabilidad en aplicaciones que trabajan en entornos de la vida real, en su trabajo, estos autores sugieren una prueba no paramétrica para la detección de cambios, basados en un enfoque de análisis de punto de cambio.

Según Montgomery (2011), los procesos que operan en presencia de causas asignables están fuera de control. Dentro de los objetivos principales del control estadístico de proceso, está la detección con rapidez de la ocurrencia de causas asignables en los cambios del proceso a fin de hacer la investigación pertinente y emprender las acciones correctivas antes de que se fabriquen muchas unidades disconformes, pudiéndose utilizar dentro de la gama de herramientas, el gráfico de control, el cual es una técnica del monitoreo de procesos en línea que se usa ampliamente para este fin.

Igualmente, Marroquín, Rodríguez y Salas (2009), afirman que cuando un gráfico de control identifica una señal fuera de control, tradicionalmente se buscan las causas en el momento en que ésta se detecta, generando confusión y costos relacionados con la identificación de las causas, cuando en realidad el cambio pudo haberse iniciado antes de la señal y una parte considerable del producto podría no cumplir con la calidad dimensional o funcional requerida por el consumidor.

Por lo tanto, los gráficos de control identifican el punto donde el proceso está fuera de control, pero no determinan en qué punto o momento se inició el fuera de control.

En este orden de ideas, Pérez *et al.* (2013), aseguran que, el momento en que el cambio ocurre es llamado el punto de cambio o *Change Point* (CP) y el análisis de punto de cambio o *Change Point Analysis* (CPA) es la herramienta que estudia este fenómeno. Debido a que el punto de cambio es desconocido, el CPA se dedica a estimar este valor, puesto que esta estimación será utilizada para determinar las causas posibles que han provocado que el sistema esté fuera de control estadístico.

Dentro de este contexto, y específicamente dentro de la disciplina del control estadístico de procesos univariante, Hawkins, Qiu y Kang (2003), proponen un modelo de análisis de punto de cambio, el cual posee sólo la capacidad de detectar cambios en la media del proceso, es decir, asume que la varianza no se ve perturbada. Años más tarde Hawkins y Zamba (2005a), dan a conocer un modelo de análisis de punto de cambio aplicable sólo en la detección de cambios en la varianza. Posteriormente, Hawkins y Zamba (2005b), presentan un modelo de análisis de punto de cambio, que es capaz de monitorear simultáneamente la media y varianza de procesos univariantes.

Posteriormente, Zamba y Hawkins (2006), describen que los problemas en el control de calidad multivariante, ocurren debido a que en este ámbito se estudia un vector de características de calidad cuyos componentes se encuentran interrelacionados. En tales contextos, el monitoreo de estas características en forma individual, significaría ignorar la existencia de conjuntos de variables correlacionadas, además de sacrificar el aumento potencial de rendimiento que los métodos multivariantes suelen traer. Cuando las características de calidad están correlacionadas, las técnicas univariantes pueden ser insatisfactorias, ya que es posible que un vector de mediciones que parece estar bajo control en cada

componente por separado, puedan ser totalmente discordante en términos multivariantes.

De igual manera, Zamba y Hawkins (ob. cit), exponen un modelo para el control estadístico multivariante de procesos que es capaz solo de detectar cambios en el vector de medias, por lo tanto, se asume que la matriz de covarianzas permanece sin cambios. Posteriormente, Zamba y Hawkins (2009), considerando la necesidad de diseñar herramientas para el control estadístico multivariante de procesos que permitan detectar los posibles cambios en el proceso, presentan un modelo de análisis de punto de cambio capaz de controlar simultáneamente, tanto el vector de medias como la matriz de covarianza. Esto, con la finalidad que las organizaciones puedan agilizar la aplicación de las acciones correctivas cuando se presenten desviaciones en los procesos, reducir la producción no satisfactoria, disminuir los costos asociados, incrementar los beneficios y mejorar continuamente.

Así pues, esta investigación tiene como objetivo diseñar un programa computarizado, que permita monitorear simultáneamente tanto el vector de medias como la matriz de covarianza de procesos, utilizando la herramienta de análisis de punto de cambio. Basándose en la contextualización del estudio los investigadores se plantean la siguiente interrogante:

¿Sera posible diseñar una herramienta computarizada que permita controlar estadísticamente procesos, basado en el análisis de punto de cambio para el caso multivariante?

## **1.1 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.1.1 OBJETIVO GENERAL**

Diseñar un programa computarizado, que permita monitorear procesos, utilizando la herramienta de análisis de punto de cambio para el caso multivariante.

### **1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Estudiar el modelo de análisis de punto de cambio propuesto por Zamba y Hawkins (2009) para su aplicación en el control estadístico multivariante de procesos.
- Revisar las distintas pruebas a realizar para la comprobación de los supuestos que asume el modelo a desarrollar.
- Elaborar el programa computarizado en concordancia con la metodología propuesta por Zamba y Hawkins (ob.cit).
- Verificar el correcto funcionamiento del programa, contrastando sus resultados, con los obtenidos en papers previamente estudiados, al utilizar los mismos datos.
- Ilustrar la aplicabilidad de la herramienta computarizada mediante ejemplos reales.

### **1.2 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN**

De acuerdo con la ISO 9000:2006 el mejoramiento continuo de la calidad se basa en la actividad recurrente para aumentar la capacidad para cumplir con los requisitos. El análisis de punto de cambio es una herramienta estadística útil para el diagnóstico, permitiendo identificar el momento del cambio, facilitar la cuantificación de posibles pérdidas y ayudar a evaluar el grado de conformidad alcanzado con respecto a las especificaciones determinadas.

De este modo la presente investigación se justifica puesto que el diseño y puesta en marcha de un programa computarizado de gráfico de control bajo el enfoque del análisis de punto de cambio será de utilidad como herramienta para el control estadístico multivariante de procesos. El análisis de punto de cambio es

conocido por su capacidad de detectar pequeños cambios que generalmente los gráficos de control tradicionales suelen dejar pasar.

Desde el punto de vista técnico, la importancia de este programa computarizado radica, en el hecho que puede ser instalado en cualquier empresa que desee monitorear la calidad de su proceso productivo, puesto que debido a la sensibilidad de esta herramienta, la tarea de encontrar el momento en donde el cambio en el proceso ocurre se facilita, y de esta manera, se logran tomar acciones correctivas rápidamente, se dan respuestas efectivas sobre los costos asociados a los productos no conformes, y además, colabora como una herramienta de apoyo para la trazabilidad de los productos que no cumplan con las necesidades de los clientes.

Desde el punto de vista académico, la investigación proporcionará a otros investigadores, material de referencia para el desarrollo efectivo de estudios en la misma línea de investigación.

### **1.3 ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN**

El alcance de la investigación permite describir las propiedades y características e importancia del diseño de un programa computarizado, capaz de monitorear procesos, utilizando la herramienta de análisis de punto de cambio para el caso multivariante. Como primer paso, se estudia una data histórica del proceso a controlar a través de la aplicación de una serie de pruebas estadísticas, con el objetivo de validar los supuestos que asume el modelo de análisis de punto de cambio seleccionado. Esta herramienta será desarrollada en el lenguaje de programación MATLAB, por su facilidad para realizar cálculos matriciales, y tener la posibilidad de realizar gráficos en dos y tres dimensiones.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEORICO

Esta sección del trabajo de grado plantea los aspectos teóricos, conceptos, y elementos esenciales del tema. Balestrini (2007) expresa sobre el marco referencial lo siguiente: contiene la ubicación contextual del problema en una determinada situación histórico social, sus relaciones con otros hechos o problemas, las vinculaciones de los resultados para obtener con otras ya conseguidos. De allí que, se hace necesario ubicar el problema, en un referente teórico sólido, para guiar la búsqueda y brindar conceptos adecuados de los términos usados, a fin de hacer más operativos y concretos tales categorías.

Por lo expuesto se debe delimitar los parámetros conceptuales que son básicos y complementan el estudio, incluyendo elementos teóricos conocidos como válidos y confiables para la investigación.

#### 2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En esta sección a continuación se establecen referencias de otras investigaciones que tienen relevancia y sustentan el tema propuesto.

**PÉREZ ET AL. (2013)**, proveen una breve explicación sobre los orígenes, aportaciones más importantes, áreas donde se ha aplicado y líneas actuales de investigación del análisis de punto de cambio. Además en su trabajo desarrollan el enfoque propuesto por Shao y Hou (2011), el cual según los autores, combina un gráfico de control EWMA adaptado a la distribución Gamma y los estimadores de máxima verosimilitud (MLE) para detectar y estimar puntos de cambios. El objetivo principal de su trabajo es familiarizar a los lectores con el análisis de punto de cambio.

**THORSEN (2013)**, diseña una interfaz gráfica de usuario (GUI) en MATLAB que proporciona a los investigadores, una herramienta que pone a disposición las muchas opciones que son de interés al estudiar el análisis de punto de cambio. Con su herramienta el usuario simplemente introduce los datos, selecciona las opciones y se muestran los resultados, sin necesidad de programar en MATLAB. Su interfaz tiene como objetivo la realización de un análisis de punto de cambio más accesible.

**GÓMEZ y PÉREZ (2012)**, en su trabajo de grado titulado *Desarrollo de una metodología computarizada para el análisis de datos provenientes de procesos productivos y la construcción de los gráficos de control EWMA, CUSUM y análisis de punto de cambio*, de la Universidad de Carabobo (UC), para optar al título de Ingeniero Industrial, desarrollaron una metodología computarizada para el análisis de datos provenientes de procesos productivos y establecen las medidas remediales en caso de ser necesarias con el objeto de cumplir los supuestos teóricos para el diseño de gráficos de control CUSUM, EWMA y de análisis de punto de cambio. En su metodología propuesta realizan tanto un análisis exploratorio como un análisis inferencial de datos para procesos univariantes, donde verifican supuestos como la normalidad, estacionariedad y ausencia de autocorrelación en los datos.

La herramienta, permite la construcción de los gráficos de control antes mencionados para datos independientes y autocorrelacionados. Para validar su metodología computarizada utilizaron datos teóricos y reales provenientes de la industria papelera, que demuestran la forma de llevar a cabo un control estadístico de calidad en un proceso industrial.

Este estudio nos indicó la importancia de analizar los datos previos a la construcción del gráfico de control. Esta noción será tomada en cuenta en este trabajo de grado pero enfocada en el contexto multivariante.

**FERRER y GUTIERREZ (2010)**, en su trabajo de grado titulado *Desarrollo de herramientas computarizadas para el uso del análisis de punto de cambio en conjunto con los gráficos EWMA y CUSUM*, de la Universidad de Carabobo (UC), para optar al título de Ingeniero Industrial, desarrollaron una herramienta computarizada, la cual de forma conjunta permite aplicar el análisis de punto de cambio (CPA) con los gráficos de control CUSUM y EWMA, donde los datos del proceso deben ser estacionarios. Para lograrlo estos autores realizaron un estudio previo de estos modelos, luego desarrollaron un procedimiento que verifica el cumplimiento de los supuestos estadísticos y desarrolla cada modelo. A partir de lo anterior los autores codificaron su modelo en MATLAB. Por ultimo ejecutaron su programa a diversos ejemplos y simulaciones de series de tiempo para validar su funcionamiento.

El trabajo de grado realizado por estos autores es relevante en esta investigación, ya que es el primer trabajo de grado en la Escuela de Ingeniería Industrial, que refleja la aplicación de una gráfica de control basada en el análisis de punto cambio, equivalente al desarrollar en el presente estudio, con la diferencia que la gráfica de control a implementar en esta investigación se enfoca a el control estadístico multivariante de procesos.

**MARROQUIN, RODRIGUEZ y SALAS (2009)**, proponen un modelo combinado (C) de análisis de punto de cambio basado en el estimador de máxima verosimilitud (MLE), para analizar el punto de cambio en la media de un proceso normal univariante cuando se presenta una combinación de cambio repentino y tendencia. En su trabajo, evalúa el desempeño de su modelo combinado (C) con el de cambio repentino (S) de Samuel et al. (1998) y, cambio con tendencia (T) de Perry y Pignatiello (2004). Los resultados de su evaluación muestran que el modelo combinado C es más eficiente que el modelo T bajo ciertas condiciones de operación del proceso.

**ZAMBA y HAWKINS (2009)**, proponen un modelo de punto de cambio para el control estadístico multivariante de procesos más generalizado, el cual es capaz de dar un solo diagnóstico para detectar un cambio en el vector de medias, la matriz de covarianza, o en ambos.

**ZAMBA y HAWKINS (2006)**, exponen un modelo de punto de cambio para el control estadístico multivariante de procesos, dicho modelo solo es capaz de detectar un cambio en el vector de medias de unos datos normales multivariante, es decir, los autores asumen que la matriz de covarianzas permanece sin cambios. Su modelo utiliza pruebas de razón de verosimilitud generalizadas para la detección del cambio, adicionalmente, este no asume que los parámetros en control son conocidos, lo cual acorta sustancialmente la fase I del control estadístico de procesos.

**HAWKINS, QIU y ZAMBA (2008)**, exponen la formulación y aplicación de los modelos de análisis de punto de cambio para el control estadístico de proceso, el cual sirve de fundamento para los modelos propuestos por Hawkins y sus colaboradores. La metodología utilizada para la estimación del punto de cambio en estas formulaciones es la prueba de razón de verosimilitud generalizada (GLR).

**HAWKINS y ZAMBA (2005b)**, proponen un modelo de punto de cambio más generalizado, el cual es capaz de dar un diagnóstico simple para detectar un cambio en la media, la varianza, o en ambas, en lugar de dos diagnósticos separados, restringido a procesos univariantes. Tiene el atractivo de usar pruebas de razón de verosimilitud que permiten graficar procesos en los cuales los parámetros en control son desconocidos, el cual es un beneficio considerable en su aplicación.

**HAWKINS y ZAMBA (2005a)**, presentan un modelo para detectar cambios en la varianza de procesos univariantes, basado en el análisis de punto de cambio. Este modelo tiene la particularidad de no requerir el conocimiento a priori del valor nominal de la varianza del proceso en control, lo cual evita la necesidad de una

cantidad considerable de datos del proceso en la fase I previa a la construcción del gráfico. El método desarrollado por los autores se basa en una prueba de razón de verosimilitud con la corrección de Bartlett convencional, adaptada a un uso secuencial repetitivo.

**HAWKINS, QIU y KANG (2003)**, proponen un modelo para detectar puntos de cambio en el control estadístico de procesos univariantes, dicho modelo solo permite detectar cambios en la media del proceso a monitorear, donde los datos deben provenir de una población normal.

**CROMWELL ET AL. (1994)**, exponen un procedimiento que permite a los investigadores elegir un modelo que pueda describir adecuadamente una serie de tiempo múltiple. En este trabajo de grado se hizo una adaptación del procedimiento descrito por estos autores, por lo cual solo se evaluara del total de características descritas en este procedimiento, la estacionariedad conjunta, normalidad de la serie de tiempo e independencia.

**BHATTACHARYA (1994)**, discute los problema más básicos del análisis de punto de cambio, el cual es probar la hipótesis de "no cambio", y la de estimación de un punto de cambio con un estimador puntual o con el establecimiento de una confianza cuando se sospecha la presencia de un cambio. Así mismo, el presenta algunos modelos no paramétricos, al igual de exponer el problema del análisis de punto de cambio en el contexto de la regresión y en cambios de distribución cuando las observaciones son obtenidas secuencialmente.

## **2.2 BASES TEORICAS**

Son conceptos, definiciones, y principios que explican la teoría principal de la investigación. Sobre este particular, Rudner (2008), expresa: Las bases o fundamentos teóricos de una investigación se agrupan jerárquicamente como simples

definiciones, conceptos, principios, líneas y teorías que sostienen cualquier proceso de investigación que se adelante sobre un problema.

### **2.2.1 PROCESO DE DESARROLLO DE SOFTWARE**

Jacobson, Booch y Rumbaugh (2000) citados por Briceño (2008) lo definen como aquel en donde las necesidades del usuario son traducidas en requerimientos de software, estos requerimientos transformados en diseño y el diseño implementado en código, el código es probado, documentado y certificado para su uso operativo. Concretamente define quién está haciendo qué, cuándo hacerlo y cómo alcanzar un cierto objetivo.

Asimismo Letelier (2004) reafirma la definición anterior, él menciona que, un proceso de desarrollo de software tiene como propósito la producción eficaz y eficiente de un producto que reúna los requisitos del cliente... El autor afirma que los proyectos de desarrollo de software, requieren desafíos adicionales a cualquier otro proyecto de ingeniería, (a pesar de existir similitudes entre ambos), relativos esencialmente a la naturaleza del producto obtenido. Estas particularidades afectan el desarrollo del software e influyen en su proceso de construcción.

El primer desafío es la propia complejidad del software, ya que existe una inmensa combinación de factores que impiden una verificación exhaustiva de las todas posibles situaciones de ejecución. La segunda particularidad que el autor refiere, es que un software es intangible y por lo general muy abstracto, esto dificulta la definición del producto y sus requisitos, sobre todo cuando no se tiene precedentes en productos software similar. Esto hace que los requisitos sean difíciles de consolidar tempranamente. Así, los cambios en los requisitos son inevitables, no sólo después de entregado en producto sino también durante el proceso de desarrollo.

De tal manera, el concepto de desarrollo de software está relacionado con el hecho de que la herramienta computarizada que se presenta en esta investigación, es

esencialmente un software con requisitos específicos, y permite solucionar distintos problemas dentro del área de control estadísticos de proceso.

### **2.2.2 CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS (SPC)**

Montgomery (2011) afirma que, para que un producto cumpla con los requerimientos del cliente generalmente deberá fabricarse con un proceso que sea estable o repetible. Para ser más específicos, es necesario que el proceso opere con poca variabilidad en las dimensiones objetivo o nominales de las características de calidad del producto. El control estadístico de procesos (SPC) es un conjunto poderoso de herramientas para resolver problemas, muy útil para conseguir la estabilidad y mejorar la capacidad del mismo proceso mediante la reducción de la variabilidad.

Mason y Young (2002) aseguran que las características o variables de un proceso multivariante a menudo están relacionadas entre sí y forman un conjunto correlacionado. Dado que las variables no se comportan de manera independiente entre sí, deben ser examinados en conjunto como un grupo y no por separado.

Por ello, el presente trabajo propone el uso de una herramienta computarizada que será de utilidad para el control estadístico multivariante de procesos. En la siguiente sección se presenta el grafico de control o carta de control, técnica que se utiliza ampliamente en el SPC (para profundizar en el tema de control estadístico de proceso se recomienda ver, Montgomery (2011), Qiu (2013)).

### **2.2.3 GRÁFICOS DE CONTROL**

Rooney *et al.* (2009), afirman que los gráficos de control son herramientas graficas con bases estadísticas utilizadas para monitorear el comportamiento de un proceso. Walter A. Shewhart los desarrolló a mediados de la década de 1920,

mientras trabajaba en los Laboratorios Bell. Más de 80 años después, los gráficos de control continúan sirviendo de base para el control estadístico de la calidad.

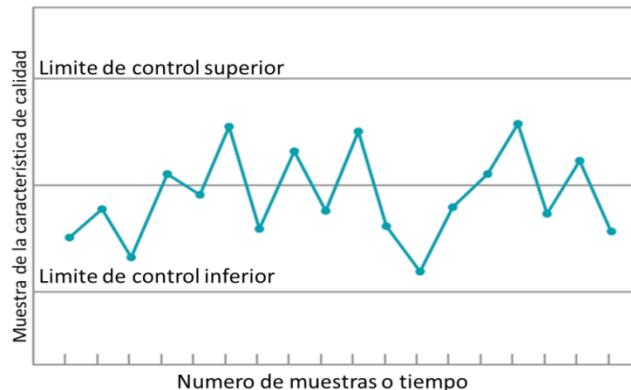
La naturaleza gráfica y estadística de los gráficos de control ayuda a:

- Cuantificar la variación de un proceso.
- Centrar un proceso.
- Monitorear un proceso en tiempo real.
- Determinar si se han de tomar acciones en un proceso.

Hansen y Ghare (1989) afirman que los gráficos de control se emplean para vigilar procesos, generalmente los de producción. Por ello, dichos gráficos deben satisfacer dos exigencias contrarias:

- Si el proceso está, de hecho, fuera de control, el grafico debe señalarlo tan pronto como sea posible. Cuanto antes se produzca la señal, más se reducirá la producción de unidades no satisfactorias.
- Si está bajo control, cualquier señal que lance el grafico será una señal falsa. Tal tipo de señales deben ser infrecuentes. El grafico de control debe permitir que un proceso bajo control opere durante largo tiempo sin producir señales falsas.

Asimismo, Montgomery (2009) describe la representación gráfica de un gráfico de control típico de Shewhart (Ver **Figura 1**) de la siguiente forma:



**Figura 1.** Gráfico de control típico. Fuente: Montgomery (2009).

El grafico de control contiene una línea central que representa el valor promedio de la característica de la calidad que corresponde al estado bajo control. (Es decir, cuando únicamente están presentes causas fortuitas.) También se muestran en la carta otras dos líneas horizontales, llamadas límite de control superior (UCL, por sus siglas en inglés) y límite de control inferior (LCL, por sus siglas en inglés).

Montgomery (2011) menciona que el grafico de control es una herramienta efectiva en la reducción de la variabilidad del proceso, y además el asevera, que en cierto sentido esta carta es una prueba de hipótesis de que el proceso está en un estado de control estadístico. Un punto que se localice dentro de los límites de control es equivalente a no poder rechazar la hipótesis del control estadístico, y un punto que se localice fuera de los límites de control es equivalente a rechazar la hipótesis del control estadístico.

En este orden de ideas, queda en evidencia la utilidad del gráfico de control en el monitoreo o control de procesos de producción en tiempo real, y es por ello, que esta herramienta grafica será la implementada en el programa computarizado a realizar. Y para complementar lo anterior, Mason y Young (2002) afirman que el control de proceso multivariantes es una metodología, basada en gráficos de control, que son utilizados para monitorear la estabilidad de un proceso multivariante. El control o monitoreo de procesos es llamado en la literatura del control estadístico de procesos (SPC) análisis de Fase II. En la próxima sección se distingue la diferencia entre el análisis de Fase I y análisis de Fase II, y además, se dará una explicación del uso de estas importantes fases en la investigación.

#### **2.2.4 FASE I Y FASE II (SPC)**

Woodall (2000) expone la importancia de distinguir entre el uso de un gráfico de control en un conjunto de datos históricos, para determinar si un procesos o no ha estado en control estadístico (Fase I) y su uso de forma prospectiva con muestras

tomadas secuencialmente en el tiempo, para detectar cambios en un proceso bajo control (Fase II). El enfoque teórico para las cartas de control en la Fase II, supone que la forma de la distribución es conocida junto con los valores de los parámetros en control. En las aplicaciones prácticas de los gráficos de control en la Fase I sin embargo no hay tales supuestos, son o se pueden hacer inicialmente y el gráfico de control se asemeja más a una herramienta de análisis exploratorio de datos.

Asimismo Woodall (ob.cit) afirma que vale la pena estudiar las características de la distribución y el grado de autocorrelación al llegar a las últimas etapas de la Fase I y en la Fase II, para evitar el uso de un gráfico de control que produzca muchas falsas alarmas.

La herramienta computarizada a realizar en este trabajo, permite implementar ambas fases del SPC. En la Fase I se evalúa a través de una data histórica el estado de control estadístico y otras características que se discuten en las secciones **2.2.10.3**, **2.2.10.4** y **2.2.10.5**. En la Fase II, se construye el grafico de control que permite monitorear el proceso mediante muestras tomadas secuencialmente en el tiempo, con el objetivo de detectar cambios en un proceso bajo control estadístico.

## **2.2.5 VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL**

Según Peña (2002), una variable aleatoria vectorial es el resultado de observar  $p$  características en un elemento de una población. Por ejemplo, si se observa la edad y el peso de los estudiantes de una universidad se tendrán valores de una variable aleatoria bidimensional; si se observa el número de trabajadores, las ventas y los beneficios de las empresas de un sector, se tendrá una variable aleatoria tridimensional.

Se dice que se ha definido la distribución conjunta de una variable aleatoria vectorial cuando se especifique:

- El espacio muestral o conjunto de sus valores posibles. Representando cada valor por un punto en el espacio de dimensión  $p$ ,  $\mathbb{R}^p$ , de los números reales, el espacio muestral es, en general, un subconjunto de este espacio.
- Las probabilidades de cada posible resultado (subconjunto de puntos) del espacio muestral.

Se dice que la variable vectorial  $p$ -dimensional es discreta, cuando lo es cada una de las  $p$ -variables escalares que la componen. Por ejemplo, el color de los ojos y del cabello, forman una variable bidimensional discreta. Análogamente, se dirá que la variable es continua si sus componentes lo son. Cuando algunos de sus componentes sean discretos y otros continuos se dirá que la variable vectorial es mixta.

El término variable aleatoria vectorial o vector aleatorio (vector de característica de calidad según Zamba y Hawkins (2006)) es relevante en este trabajo, debido a que estos son el objeto de estudio en el control estadístico multivariante de procesos, y por ende, son analizados en la herramienta computarizada a elaborar. Dos características importantes de los vectores aleatorios son el vector de medias y matriz de covarianza, estas medidas representan una medida del centrado y variabilidad del proceso. En las siguientes dos secciones se presentan estas dos características.

## 2.2.6 VECTOR DE MEDIAS

Peña (2002) llama a la esperanza, o vector de medias,  $\mu$ , de una variable multidimensional,  $\mathbf{x}$ , al vector cuyos componentes son las esperanzas, o medias, de los componentes de la variable aleatoria. El vector de media es descrito por él como:

$$\mu = E[\mathbf{x}] , \quad (2.1)$$

donde debe entenderse que la esperanza operando sobre un vector o una matriz es el resultado de aplicar este operador (tomar medias) a cada uno de los componentes.

## 2.2.7 MATRIZ DE COVARIANZAS

Peña (2002) llama a la matriz de varianzas y covarianzas (o simplemente matriz de covarianzas) de un vector aleatorio  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)'$ , de  $\Re^p$ , con vector de medias  $\boldsymbol{\mu}' = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ , a la matriz cuadrada de orden  $p$  obtenida por:

$$\mathbf{V}_x = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'] \quad (2.2)$$

La matriz  $\mathbf{V}_x$  contiene en la diagonal las varianzas de los componentes, que representaremos por  $\sigma_i^2$ , y fuera de ella las covarianzas entre los pares de variables, que representaremos por  $\sigma_{ij}$ . La matriz de covarianzas es simétrica y semidefinida positiva.

En la sección 2.2.4 se mencionó que en ambas fases del SPC, independientemente de la fase, se analizan datos o muestras multivariantes recolectadas de procesos, es decir, se estudian observaciones hechas sobre vectores aleatorios. Por lo anterior, en las secciones 2.2.8, 2.2.9, 2.2.10.4 y 2.2.10.5 se discuten ciertos términos que son relevantes en el análisis de series de tiempo multivariante y, que serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo.

## 2.2.8 PROCESO ESTOCÁSTICO

A continuación se presentan dos conceptos relacionados a procesos estocásticos:

Según Mauricio (2007), un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias ordenadas y equidistantes cronológicamente, referidas a una (proceso univariante o escalar) o a varias (proceso multivariante o vectorial) características de una unidad observable en diferentes momentos.

Ruiz (2005-2006) afirma que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo. A los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le denominaran estados, por lo que se puede tener un espacio de estados discreto y un espacio de estados continuo. Por otro lado, la variable tiempo puede ser de tipo discreto o de tipo continuo. En el caso del tiempo discreto se podría tomar como ejemplo que los cambios de estado ocurran cada día, cada mes, cada año, etc... En el caso del tiempo continuo, los cambios de estado se podrían realizar en cualquier instante.

Los conceptos anteriores, reflejan la relación de un proceso estocástico (o aleatorio según Gujarati (2004)) con el análisis de Fase I y II del SPC. Pero debido a que en la práctica se tienen son observaciones realizadas sobre vectores aleatorios, una serie de tiempo multivariante presenta mayor aplicación.

### **2.2.9 SERIE DE TIEMPO MULTIVARIANTE**

Kunst (2007) asevera que una serie de tiempo es una secuencia finita de observaciones en una variable, por ejemplo de  $y$ , en puntos de tiempo  $t = 1, \dots, T$ . Un miembro típico de la secuencia se denota como  $y_t$ . Entonces, una serie de tiempo multivariante consiste en observaciones  $y_{kt}$  para las variables  $k = 1, \dots, K$  y para los puntos de tiempo  $1, \dots, T$ . La palabra *serie de tiempo* se refiere a los datos.  $T$  denota el tamaño de la muestra o la longitud de la serie de tiempo.

Asimismo Kunst (ob. cit) afirma, que el análisis de series de tiempo multivariante se centra en procesos que se definen formalmente como

$$y : Z \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K, \quad (2.3)$$

donde  $Z$  denota un conjunto de índices, la forma  $\Omega$  el espacio de probabilidad y las variables aleatorias son vectores de  $K$  valores. Para un determinado  $t \in Z$ , tenemos

un vector de valores de variables aleatorias, mientras para un determinado  $\omega \in \Omega$ , tenemos una realización de  $K$  posibles secuencias infinitas de números reales.

El grafico de control que se presenta en este trabajo imparte sobre una serie de tiempo multivariante (muestra), una herramienta estadística llamada análisis de punto de cambio (CPA), con el objeto de llevar a cabo el monitoreo del proceso. En la sección 2.2.12 se discute con detalle esta herramienta. Se resalta además que los gráficos de control que utilizan datos o muestras de este tipo, se denominan en la literatura del SPC como gráficos de control para mediciones u observaciones individuales (para ampliar más sobre este tipo de gráficos de control consulte Montgomery (2011), Mason y Young (2002), Qiu (2013)).

## 2.2.10 ANALISIS MULTIVARIANTE

Según Rencher (2002), el análisis multivariante se compone de una colección de métodos que se pueden utilizar cuando muchas mediciones se realizan en cada individuo u objeto en una o más muestras. Él se refiere a las mediciones como *variables* y a los individuos u objetos como unidades u observaciones.

Rencher (ob. cit) asevera que el objetivo de muchos enfoques multivariantes es la simplificación. Se busca expresar lo que está pasando en términos de un conjunto reducido de dimensiones. Dichas técnicas son exploratorias; estas esencialmente generan hipótesis en lugar de probarlas. Por otro lado, si el objetivo es una prueba de hipótesis formal, se necesita una técnica que primero permita que muchas variables sean probadas y que aun así se preserve el nivel de significancia y, en segunda instancia, hacer esto para cualquier estructura de intercorrelación de las variables. Es decir, el análisis multivariante se refiere por lo general a dos áreas, a la estadística descriptiva e inferencial.

Igualmente Alfaro, Mondejar y Vargas (2010), comentan que las técnicas multivariantes están diseñadas para controlar la calidad en los procesos de producción

actuales, donde la calidad final de los productos está relacionada con múltiples características que influyen de forma conjunta e interrelacionada.

El conjunto de técnicas y métodos que componen el análisis multivariante de datos presenta una gran importancia en esta investigación, debido a que los datos multivariantes de procesos pueden ser modelados bajo estas técnicas. En la sección **2.2.10.1** se presenta un concepto básico de muestra, en la sección **2.2.10.2** se presenta el problema de valores atípicos (outliers) en un conjunto de datos y, en las secciones **2.2.10.3, 2.2.10.4** y **2.2.10.5**, se discuten las características a analizar en la fase II del SPC.

### **2.2.10.1 MUESTRA**

Según Canavos (1988), una muestra es un subconjunto representativo seleccionado de una población. La palabra representativo es la clave de esta idea. Una buena muestra es aquella que refleja las características esenciales de la población de la cual se obtuvo. En estadística, el objetivo de las técnicas de muestreo es asegurar que cada observación en la población tiene una oportunidad igual e independiente de ser incluida en la muestra. Tales procesos de muestreo conducen a una muestra aleatoria.

### **2.2.10.2 VALORES ATÍPICOS (*OUTLIERS*)**

Barnett y Lewis (1978) comentan que un valor atípico en un conjunto de datos es una observación (o subconjunto de observaciones), que parece ser incompatible con el resto de este conjunto de datos.

Asimismo Baragona, Battaglia y Poli (2011), aseguran que en una serie de tiempo algunas observaciones pueden ser consideradas como alejadas si son, en cierto sentido, muy diferente del resto. La presencia de estas observaciones alejadas puede

ser el resultado de errores de muestreo o perturbaciones en el comportamiento del fenómeno observado.

Los valores atípicos poseen dos características peculiares, a saber, los efectos de enmascaramiento y manchas:

- Efecto enmascaramiento: La ocurrencia de grandes valores atípicos puede impedir el diagnóstico de la detección de otras observaciones alejadas cercanas.
- Efecto mancha: La presencia de algunos valores atípicos puede sesgar el diagnóstico de manera que se pueden producir falsas identificaciones.

Kirk (2007) afirma que los valores extremos pueden afectar gravemente la integridad de los datos y dan como resultados estadísticas muestrales sesgadas o distorsionadas y conclusiones erróneas.

#### 2.2.10.3 DENSIDAD NORMAL MULTIVARIANTE

La densidad normal multivariante, es una extensión de la densidad normal univariante y comparte muchas de sus características, esta distribución estadística tiene gran relevancia en este trabajo de grado ya que los datos multivariantes obtenidos del proceso a monitorear, deben ajustarse bajo esta distribución estadística.

Rencher (2002), la define de la siguiente manera:

Si  $\mathbf{y}$  tiene una distribución normal multivariante con vector de medias  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}$ , La densidad está dada por:

$$g(\mathbf{y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}, \quad (2.4)$$

donde  $p$  es el número de variables. Cuando  $\mathbf{y}$  tiene la densidad (ecuación 2.4), podemos decir que  $\mathbf{y}$  está distribuida como  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

El término  $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^2 / \sigma^2 = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\sigma^2)^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$  en el exponente de la densidad normal univariante mide la distancia al cuadrado desde  $\mathbf{y}$  hacia  $\boldsymbol{\mu}$  en unidades de desviación estándar. De forma similar, el término  $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$  en el exponente de la densidad normal multivariante (2.4) es la distancia generalizada al cuadrado desde  $\mathbf{y}$  hacia  $\boldsymbol{\mu}$ , también llamada distancia de Mahalanobis,

$$\Delta^2 = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \quad (2.5)$$

Se debe notar que  $\Delta$ , la raíz cuadrada de la ecuación (2.5), no viene en unidades de desviación estándar como si sucede en el caso univariante  $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) / \sigma$ . La distancia  $\Delta$  se incrementa con  $p$ , que es el número de variables (componentes del vector).

Peña (2002) comenta que estrictamente la distancia de Mahalanobis es  $\Delta$ , pero es frecuente referirse también al valor  $\Delta^2$  como distancia de Mahalanobis, en lugar de como cuadrado de la distancia.

#### 2.2.10.4 ESTACIONARIEDAD

Tsay (2014) afirma que una serie de tiempo  $k$ -dimensional  $\mathbf{z}_t$  es llamada débilmente estacionaria si  $E(\mathbf{z}_t) = \boldsymbol{\mu}$ , es un vector  $k$ -dimensional constante, y  $\text{Cov}(\mathbf{z}_t) = E[(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Sigma}_z$ , es una matriz constante  $k \times k$  definida positiva. Donde,  $E(\mathbf{z}_t)$  y  $\text{Cov}(\mathbf{z}_t)$ , denotan la esperanza y matriz de covarianza de un vector aleatorio  $\mathbf{z}$ , respectivamente. Por lo tanto, la media y matriz de covarianza de una serie de tiempo débilmente estacionario  $\mathbf{z}_t$  no dependen del tiempo, es decir, los dos primeros momentos son invariantes en el tiempo. Implícito en la definición, es necesario que la media y matriz de covarianza de una serie de tiempo débilmente estacionaria exista.

Asimismo Tsay (ob. cit), asegura que una serie de tiempo  $k$ -dimensional  $\mathbf{z}_t$  es llamada estrictamente estacionaria si la distribución conjunta de la colección  $m$ ,  $(\mathbf{z}_{t_1}, \dots, \mathbf{z}_{t_m})$ , es la misma que el de  $(\mathbf{z}_{t_1+j}, \dots, \mathbf{z}_{t_m+j})'$ , donde  $m, j$  y  $(t_1, \dots, t_m)$  son enteros positivos arbitrarios. En términos estadísticos, la estacionariedad estricta requiere que la distribución de probabilidad de una colección arbitraria  $\mathbf{z}_t$  sea invariantes en el tiempo. Un ejemplo de serie de tiempo estrictamente estacionaria es la secuencia de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos de una distribución normal estándar multivariante.

En este trabajo, la estacionariedad a estudiar en el análisis de Fase I es la estacionariedad débil, también conocida como estacionariedad en amplio sentido. Esta es una condición clave a analizar, ya que si una serie de tiempo multivariante es débilmente estacionaria, se puede concluir, que aparentemente el vector de medias y matriz de covarianzas (es decir, los dos primeros momentos) son invariantes en el tiempo, con lo cual se entiende, que los parámetros que definen al modelo del proceso no han sido perturbados. Asimismo Shewhart citado por Montgomery (2011) complementa la idea anterior, mencionando que los datos de un proceso que presentan un comportamiento estacionario son producto de un proceso bajo control.

#### **2.2.10.5 DEPENDENCIA SERIAL**

Esta característica de las series de tiempo es relevante, debido a que es una cualidad que presenta el modelo de análisis de punto de cambio a desarrollar en este trabajo, en el capítulo III se discute con detalle este modelo.

Según Vallejo (1986a) citado por Arnau (2001), la dependencia serial se define como el hecho de que las respuestas emitidas por un sujeto en un determinado momento están estrechamente relacionadas con las emitidas por el mismo sujeto en un tiempo pasado de la serie, es decir no son puntuaciones independientes. Del mismo modo Jones, Weinrot y Vaught (1978) citado por Arnau (ob. cit), afirman que

la dependencia serial significa que puntuaciones temporalmente adyacentes tienden a estar relacionadas una con otra. Puesto que la dependencia serial es la correlación existente entre datos, también se denomina correlación serial o autocorrelación.

### **2.2.11 ESTIMADOR DE MÁXIMA VERO SIMILITUD (MLE)**

Devore (2008) asegura que el método de máxima verosimilitud es un método constructivo para obtener estimadores puntuales. Fue introducido por primera vez por R. A. Fisher, genetista y estadístico en la década de 1920. La mayoría de los estadísticos recomiendan este método, por lo menos cuando el tamaño de muestra es grande, puesto que los estimadores resultantes tienen ciertas propiedades de eficiencia deseables. A continuación se presenta su definición:

Que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tengan una función masa de probabilidad o una función de densidad de probabilidad

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) \quad (2.6)$$

donde los parámetros  $\theta_1, \dots, \theta_m$  tienen valores desconocidos. Cuando  $x_1, \dots, x_n$  son los valores muestrales observados y (2.6) se considera como una función de  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , se llama **función de verosimilitud**. Las estimaciones de máxima verosimilitud (emv)  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$  son aquellos valores de las  $\theta_i$  que incrementan al máximo la función de probabilidad, de modo que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m) > f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) \quad (2.7)$$

con todos los  $\theta_1, \dots, \theta_m$

Cuando se sustituyen las  $X_i$  en lugar de las  $x_i$ , se obtienen los **estimadores de máxima verosimilitud**.

La función de verosimilitud dice qué tan probable es que la muestra observada sea una función de los posibles valores de parámetro. Al incrementarse al máximo la probabilidad se obtienen los valores de parámetro con los que la muestra observada es más probable que haya sido generada, es decir, los valores de parámetro que “más concuerdan” con los datos observados.

Asimismo, Devore (ob. cit) enuncia lo siguiente:

“Como  $\ln[g(x)]$  es una función monotónica de  $g(x)$ , determinar  $x$  para incrementar al máximo  $\ln[g(x)]$  equivale a incrementar al máximo  $g(x)$ . En estadística, si se toma el logaritmo con frecuencia, un producto cambia a una suma, con la cual es más fácil trabajar”.

Este método de estimación y la prueba de razón de verosimilitud generalizada (GLRT) que se discute en la próxima sección son importantes en este trabajo de grado, debido a que son empleadas en la prueba de hipótesis estadística para la estimación del orden VAR que se presenta en el capítulo III, y en el modelo de análisis de punto de cambio a desarrollar en esta investigación (Zamba y Hawkins (2009).

### **2.2.12 PRUEBA DE RAZÓN VEROsimilitud GENERALIZADA (GLRT)**

Foster (2010) expone la prueba de razón verosimilitud generalizada de la siguiente manera:

Sea  $\mathbf{X}$  un  $p$ -vector aleatorio cuya distribución depende de un vector de parámetros denotado por  $\boldsymbol{\theta}$  y sea  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  una muestra aleatoria de esta distribución. Suponga que se desea probar:

$$H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$$

vs

$$H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1,$$

donde  $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$  y  $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$ ,

Bajo  $H_0$ , el valor  $\boldsymbol{\theta}$  que *explica mejor* la muestra aleatoria es el estimador de máxima verosimilitud (MLE) sujeta a la restricción de que  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Omega_0$ . Si  $L$  denota la función de verosimilitud entonces se define:

$$L_o^* = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} L \quad (2.8)$$

El valor de  $\boldsymbol{\theta}$  el cual maximiza  $L$  para  $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$  es el MLE sujeto a  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Omega$ .

Se define:

$$L^* = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} L \quad (2.9)$$

Hay que tener en cuenta que si  $\Omega$  es el espacio paramétrico total para  $\boldsymbol{\theta}$  entonces  $L^*$  es la verosimilitud calculada en el MLE sin restricciones de  $\boldsymbol{\theta}$ .

La razón de verosimilitud generalizada se define como:

$$\lambda = \frac{L_o^*}{L^*} = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} L}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} L} \quad (2.10)$$

Se tiene  $0 \leq \lambda \leq 1$  debido a que  $L_o^* \leq L^*$  ( $\Omega_0 \subset \Omega$ ). El GLRT emplea  $\lambda$  como estadístico de prueba y se rechazara  $H_0$  para valores *pequeños* de  $\lambda$ , es decir, cuándo  $\lambda \leq k$  donde el valor de  $k$  se determina al ajustar el valor de un error tipo I a  $\alpha$  es decir.

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} P(\text{rechazar } H_0 / \boldsymbol{\theta}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} P(\lambda \leq k / \boldsymbol{\theta}) \quad (2.11)$$

De manera equivalente, se puede utilizar  $-2 \log \lambda = 2(l^* - l_0^*)$ , donde  $l^* = \log L^*$  y  $l_0^* = \log L_0^*$ , y se rechaza  $H_0$  para valores *grandes*.

Se tiene el resultado de que, cuando  $H_0$  es verdadera y  $n$  es *grande*,  $-2 \log \lambda$  se aproxima a una distribución  $\chi^2(r)$ . El número de grados de libertad,  $r$ , es igual al número de parámetros libres bajo  $H_1$  menos el número de parámetros libres bajo  $H_0$ . Este resultado permite utilizar las tablas  $\chi^2$  para encontrar las regiones de rechazo con un valor fijo de  $\alpha$  cuando  $n$  es *grande*.

La siguiente sección expone ciertos puntos con respecto al análisis de punto de cambio. Como se mencionó en la sección 2.2.9, el grafico de control a desarrollar utiliza esta herramienta estadística para monitorear procesos.

### 2.2.13 ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO (CPA)

Existen diversas definiciones con respecto al Análisis de Punto de Cambio ó *Change Point Analysis* (CPA), entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

- Taylor (2000a) asegura que el análisis de punto de cambio es una nueva y poderosa herramienta para determinar si un cambio ha tenido lugar. Un análisis de punto de cambio es capaz de detectar múltiples cambios. Para cada cambio proporciona información detallada, incluyendo un nivel de confianza que indica la verosimilitud de que un cambio ocurrió y un intervalo de confianza que indica que se produjo el cambio.
- Rencová (2009) define el análisis de punto de cambio de la siguiente manera, un análisis de punto de cambio es un método estadístico que permite decidir si un proceso estocástico observado sigue un modelo o si el modelo cambia. En el caso de un cambio, se podría estar interesado en los siguientes problemas: cuándo se detecta un cambio y cuántos cambios han ocurrido.

- Cordero, Garza y Tercero (2014), lo detallan como sigue, el problema del punto de cambio es conocido como el problema de detectar y estimar el momento inicial cuando un proceso cambia, mientras que la colección de métodos que abordan este tema se denominan análisis del punto de cambio (CPA).

Al observar las tres definiciones anteriores se puede apreciar, que el análisis de punto de cambio permite hacer inferencias con respecto a un proceso estocástico o aleatorio, en donde el interés se centra en estimar el instante o momento en que se inicia el cambio, además de conocer cuántos cambios han ocurrido.

Entre las posibles aplicaciones del análisis de punto de cambio según Hušková (2014) se encuentran: la meteorología, la climatología, la hidrología, estudios ambientales, series de tiempo econométricas, el control estadístico de la calidad en la industria, la biología, medicina, etc. Los puntos de cambio aparecen bajo una variedad de sinónimos en diferentes campos científicos, entre los cuales se pueden mencionar problemas de desorden, rupturas estructurales, cambios de régimen, etc.

De las aplicaciones antes mencionadas, este trabajado se enfoca en el área del control estadístico de la calidad en la industria.

### **2.2.13.1 PROBLEMA GENERAL DE ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO (CPA)**

Rencová (2009) asegura que la detección de puntos de cambio se formula en términos de pruebas de hipótesis. La hipótesis nula afirma que la serie es estacionaria, esto significa que los parámetros del modelo no cambian, mientras que la hipótesis alternativa afirma que en un punto de tiempo desconocido el modelo cambia. La regla de decisión para rechazar la hipótesis nula se basa en pruebas estadísticas.

Chen y Gupta (2011), formulan el problema general del análisis de punto de cambio, de la siguiente manera:

Dada  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  una sucesión de vectores aleatorios (variables) independientes con funciones de distribución de probabilidad  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , respectivamente. Entonces en general, el problema de punto de cambio es probar la siguiente hipótesis nula,

$$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_n$$

versus la alternativa:

$$\begin{aligned} H_1 : & F_1 = \dots = F_{k_1} \neq F_{k_1+1} = \dots = F_{k_2} \neq F_{k_2+2} \\ & = \dots = F_{k_q} \neq F_{k_q+1} = \dots = F_n, \end{aligned}$$

donde  $1 < k_1 < k_2 \dots < k_q < n$ ,  $q$  es el número desconocido de puntos de cambio y  $k_1, k_2, \dots, k_q$  son las respectivas posiciones desconocidas que tienen que ser estimadas. Si las distribuciones  $F_1, F_2, \dots, F_n$  pertenecen a una familia paramétrica común  $F(\theta)$  donde  $\theta \in \mathbf{R}^p$ , entonces el problema punto de cambio es poner a prueba la hipótesis nula acerca de los parámetros poblaciones  $\theta_i, i = 1, \dots, n$ :

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta \text{ (desconocido)}$$

versus la hipótesis alternativa:

$$\begin{aligned} H_1 : & \theta_1 = \dots = \theta_{k_1} \neq \theta_{k_1+1} = \dots = \theta_{k_2} \\ & \neq \dots \neq \theta_{k_{q-1}} = \dots = \theta_{k_q} \neq \theta_{k_q+1} \dots = \theta_n, \end{aligned}$$

donde  $q$  y  $k_1, k_2, \dots, k_q$  tienen que ser estimadas.

Como se puede apreciar, esta formulación prueba si los parámetros de una serie de tiempo cambian. En otras palabras, el CPA prueba la estacionariedad de la serie de tiempo, que en términos del control estadístico de procesos se traduce en contrastar si un proceso se encuentra bajo control estadístico. En la siguiente sección se discute de manera breve sobre los orígenes de esta herramienta estadística.

### **2.2.13.2 ORÍGENES DEL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO**

Jensen y Lütkebohmert (2007) afirman que los modelos de punto de cambio se han desarrollado originalmente en relación con aplicaciones en el control de calidad, donde un cambio, de un estado en control hacia un estado fuera de control, tiene que ser detectado en base a las observaciones aleatorias disponibles.

Pérez *et al.* (2013), comenta que los primeros trabajos sobre CPA (*Change Point Analysis*), dentro del marco del SPC, fueron realizados por Girshick y Rubin (1952) utilizando un enfoque Bayesiano. Posteriormente, Page (1954, 1955, 1957) propuso la técnica de CUSUM (*Cumulative SUMs*) en 1954 para detectar cambios sostenidos en series de tiempo. Respecto a procedimientos paramétricos, Hinkley (1970) consolidó la teoría correspondiente para encontrar el punto de cambio utilizando MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) y pruebas de razón de verosimilitud (LRT *Likelihood Ratio Test*) considerando los parámetros iniciales conocidos y desconocidos.

### **2.2.13.3 CLASIFICACIONES EN EL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO**

Diversos autores han propuesto clasificaciones y categorizaciones con respecto a este tema;

Brodsky y Darkhovsky (1993), proponen la siguiente clasificación:

- Por el método de adquisición de datos.

- Por la cantidad de informaciones estadísticas previas.
- Por las características de los datos.
- Por el tipo de desorden.

Chen y Gupta (2011), aseguran que los problemas de punto de cambio pueden ser considerados en muchos modelos, entre los cuales menciona,

- Paramétricos
- No paramétricos
- Regresión
- Series de tiempo
- Secuencial
- Bayesianos

Así mismo, Chen y Gupta (ob. cit) mencionan algunas de las metodologías que frecuentemente se utilizan para inferir el punto de cambio, las cuales son:

- La prueba de la razón de máxima verosimilitud.
- La prueba bayesiana
- La prueba no paramétrica
- Los procesos estocásticos
- El enfoque de teoría de la información

Para el control estadístico de procesos (SPC), Zand, Yazdanshenas y Amiri (2013), proponen una categorización la cual es como sigue:

- Por el tipo de perfil (Por ejemplo lineal simple, lineal múltiple, univariantes, multivariantes, etc).
- Por el tipo de cambio (un solo cambio o múltiples cambios)
- Por la fase del control estadístico de proceso (fase I o fase II)

- Por el enfoque de estimación.

Por otra parte, Rencová (2009) categoriza los procedimientos estadísticos en el análisis de punto de cambio en dos: en línea o *on-line* (llamados métodos secuenciales, como indica Brodsky y Darkhovsky (1993)) y los fuera de línea o *off-line* (llamados métodos a posterior, como indica Brodsky y Darkhovsky (ob. cit)). Rencová (2009), asegura que el enfoque *on-line*, proveniente del proceso de fabricación, se basa en la idea de que, después de cada observación se aplica una nueva prueba y esperamos ser advertidos que se produjo el cambio, por otra parte el enfoque *off-line*, se fundamenta en la idea de que ya se tienen todas las observaciones y se aplica una prueba para los datos completos para decidir si y cuándo ocurrió el cambio. En las dos secciones siguientes se discuten las formulaciones de estas dos categorías.

#### **2.2.13.4 DETECCIÓN DE UN CAMBIO EN LÍNEA (*ON-LINE*)**

Basseville y Nikiforov (2007) formulan una declaración preliminar de este tema de la siguiente manera:

Sea  $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$  una secuencia de variables aleatorias observadas con densidad condicional  $p_\theta(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1)$ . Antes del tiempo de cambio desconocido  $t_0$ , el parámetro de densidad condicional  $\theta$  es constante e igual a  $\theta_0$ . Después del cambio, el parámetro es igual a  $\theta_1$ . El problema en línea (*on-line*) es detectar la ocurrencia del cambio tan pronto como sea posible, con una tasa fija de falsas alarmas antes de  $t_0$ .

La estimación de los parámetros  $\theta_0$  y  $\theta_1$  no es necesaria, pero a veces se puede utilizar como parte del algoritmo de detección. Ellos asumen implícitamente que, en caso de tiempos de cambio múltiples, se detecta cada cambio lo suficientemente rápido, uno después del otro, tal que en cada instante de tiempo sólo un cambio es

considerado. En el marco en línea (*on-line*), la detección es realizada por una regla de detención, que generalmente tiene la forma:

$$t_\alpha = \inf\{n: g_n(y_1, \dots, y_n) \geq \lambda\}, \quad (2.12)$$

donde  $\lambda$  es un umbral, y  $(g_n)_{n \geq 1}$  es una familia de funciones de  $n$  coordenadas. El tiempo de alarma  $t_\alpha$  es el momento en que se detecta el cambio. Note que si  $t_\alpha = n$ , basta con observar la muestra hasta el momento  $n$ , lo que explica el nombre de "secuencial" o punto de vista "*on-line*".

En el marco *on-line*, los criterios son el *retardo para la detección*, el cual está relacionado con la capacidad del algoritmo para ajustar una alarma cuando realmente se produce un cambio, y el tiempo promedio entre falsas alarmas. Por lo general, el criterio general consiste en *minimizar el retardo para la detección* para un tiempo promedio fijo entre falsas alarmas.

#### 2.2.13.5 PRUEBA DE HIPÓTESIS FUERA DE LÍNEA (*OFF-LINE*)

Basseville y Nikiforov (ob. cit), la definen formalmente de la siguiente manera:

Dado una muestra finita;  $y_1, \dots, y_N$ , se desea probar

$$\mathbf{H}_0 : \text{para } 1 \leq k \leq N : p_\theta(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1) = p_{\theta_0}(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1)$$

$\mathbf{H}_1 : \text{existe un desconocido } 1 \leq t_0 \leq N \text{ tal que:}$

$$\text{para } 1 \leq k \leq t_0 - 1 : p_\theta(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1) = p_{\theta'_0}(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1)$$

$$\text{para } t_0 \leq k \leq N : p_\theta(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1) = p_{\theta_1}(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1)$$

El criterio habitual utilizado en la prueba de hipótesis es una compensación entre la capacidad de detectar cambios reales cuando se produzcan, lo que requiere

una gran sensibilidad a los efectos de alta frecuencia, y la habilidad de no detectar nada cuando no se produzcan cambios, que requiere una baja sensibilidad a los efectos de ruido. Estos son evidentemente dos requisitos contradictorios. El criterio estándar es generalmente maximizar la probabilidad de aceptar  $H_1$ , cuando  $H_1$  es verdadera (es decir, la potencia), sujeto a la restricción de una probabilidad fija de aceptar  $H_1$  cuando  $H_0$  es verdadera (es decir, el tamaño o la probabilidad de falsas alarmas).

#### 2.2.13.6 CARACTERÍSTICA DE LAS METODOLOGÍAS DE CPA

Bhattacharya (1994) dice que una característica común de todas las metodologías de punto de cambio es que, debido a la propia naturaleza del problema, se deben dividir los datos de diferentes maneras y medir la divergencia entre los dos segmentos, con algún criterio para buscar para la heterogeneidad. Esto conduce naturalmente a la consideración de algunos procesos estocásticos, cuyos extremos forman la base de los métodos de probabilidad y cuyas integrales con respecto a las distribuciones previas constituyen la base de los métodos bayesianos de análisis de punto de cambio.

Esta característica de las metodologías de análisis de punto de cambio, cierra la idea general que se quiere introducir con respecto a esta herramienta. Por último se resalta que el modelo que se presenta en este trabajo de grado es del tipo secuencial (*on-line*), que utiliza la prueba de razón de verosimilitud generalizada como metodología para inferir el cambio y, orientada a la detección de un solo cambio en procesos. En el capítulo III se discute con detalle el modelo a desarrollar.

## 2.2.14 MATLAB

Es un gran programa de cálculo técnico y científico, su nombre es un acrónimo de *MATrix LABoratory*. El programa destaca en cálculos numéricos, especialmente en los relacionados con matrices y gráficas. MATLAB dispone de un código básico y de varias librerías especializadas (*toolboxes*).

MATLAB ofrece un entorno interactivo sencillo mediante una ventana en la que se pueden introducir órdenes en modo texto y en la que aparecen los resultados. Los gráficos se muestran en ventanas independientes. Cada ventana dispone de una barra de menús que controla su funcionalidad. El tipo de datos básico que se usa en MATLAB es la matriz. Un solo valor, llamado escalar, se representa como una matriz  $1 \times 1$ . Una lista de valores, ordenados en una columna o en una fila, es una matriz unidimensional que se llama vector. Una tabla de valores se representa como una matriz bidimensional.

Para facilitar la codificación del programa computarizado a desarrollar en este trabajo de grado, este será desarrollado en MATLAB, ya que como se mencionó anteriormente los datos a trabajar en esta investigación están representados por vectores y matrices.

## 2.2.15 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

**Autocorrelación:** Correlación entre miembros de series observadas en el tiempo o en el espacio.

**Algoritmo:** Es un método para resolver un problema mediante una serie de pasos precisos, definidos y finitos. La palabra que se deriva de la traducción al latín de la palabra *al khwarzimi*, nombre de un matemático y astrónomo árabe.

**Causas asignables de variación:** Son fuentes de variaciones que no son parte del patrón de causas fortuitas.

**Causas fortuitas de variación:** Es la variabilidad natural o inherente del proceso.

**Diagrama de flujo:** Es una forma de representar gráficamente un algoritmo, donde cada paso se escribe dentro de un símbolo, y los pasos se conectan unos con otros mediante líneas de flujo.

**Estacionariedad en amplio sentido:** Un vector de un proceso estocástico  $X(t)$  conjunto, es llamado en el total amplio sentido estacionario, si los dos primeros momentos son finitos y constantes con respecto al tiempo.

**Estadístico:** Es cualquier función de las observaciones de una muestra aleatoria.

**Falsa alarma:** Es la probabilidad de error tipo I de una carta de control (concluir que el proceso está fuera de control cuando en realidad está bajo control).

**Hipótesis estadística:** Es una pretensión o aseveración sobre el valor de un solo parámetro (característica de una población o característica de una distribución de probabilidad), sobre los valores de varios parámetros o sobre la forma de una distribución de probabilidad completa.

**Matriz de covarianza:** Es una matriz simétrica semidefinida positiva, cuya diagonal principal está compuesta por las varianzas de las variables y los restantes elementos corresponde a las covarianzas entre estas.

**Muestra:** Es un subconjunto de observaciones que se seleccionan de una población.

**Outliers:** Son observaciones que son inusualmente grandes o pequeñas en relación con otras observaciones.

**Población:** Consiste en la totalidad de las observaciones que son motivo de interés.

**Programa:** Son las operaciones que debe realizar el hardware y son especificadas por una lista de instrucciones, estas controlan a una computadora. Mas formalmente un programa de computadora es un conjunto de instrucciones internas utilizadas para ejecutarse en una computadora y que produzca un resultado completo.

**Prueba de hipótesis estadísticas:** Es el proceso que lleva a una decisión acerca de una hipótesis particular. Los procedimientos de prueba de hipótesis se basan en el uso de la información contenida en una muestra aleatoria de la población de interés.

**Punto de cambio:** Son aquellos puntos donde dos segmentos adyacentes de una serie de tiempo están conectados; estos ocurren como un cambio en la media, la varianza, en algún parámetro, o en el modelo estructural, como también en cualquiera de sus combinaciones.

**Variable aleatoria:** Es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral de un experimento aleatorio.

**Variable aleatoria continua:** Es una variable aleatoria que tiene como rango un intervalo (sea finito o infinito) de numeros reales.

**Vector de medias:** El vector de medias de un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  es aquel cuyas componentes son las esperanzas de cada componente de  $\mathbf{X}$ .

## **CAPÍTULO III**

### **MARCO METODOLOGICO**

El objetivo de este capítulo es dar a conocer la metodología que será implementada. Se describe el tipo de investigación que está presente a lo largo de este trabajo de grado, las fases que la componen, y posteriormente se explican paso a paso las técnicas estadísticas que fueron elegidas para cada fase.

#### **3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN**

El marco metodológico constituye la médula del plan, se refiere a la descripción de las unidades de análisis o de investigación, las técnicas de observación y de recolección de datos, los instrumentos, procedimientos y las técnicas de análisis. En este particular, el tipo de investigación del presente estudio corresponde a una investigación teórica apoyado por un diseño documental-descriptivo-cuantitativo.

#### **3.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN**

En este orden de ideas, la investigación presenta un diseño mixto Documental-descriptivo cuantitativo. Fidias (2006) señala que la investigación documental: es un proceso basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos secundarios, es decir, los obtenidos y registrados por otros investigadores en fuentes documentales; impresas, audiovisuales o electrónicas. En tal sentido la presente investigación se apoya en un estudio detallado de fuentes bibliográficas, datos estadísticos y algunos ejemplos reales que fundamentan los resultados de esta investigación.

Con respecto a la investigación Descriptiva-cuantitativa, Tamayo (2006) expresa: esta corresponde a la descripción, registro, análisis e interpretación de la naturaleza actual, composición de los fenómenos. La investigación descriptiva trabaja

sobre realidades de hecho y sus características, enfocándose en muchas oportunidades a la precisión del fenómeno a través del apoyo de la estadística descriptiva.

### **3.3 METODOLOGÍA ESPECÍFICA**

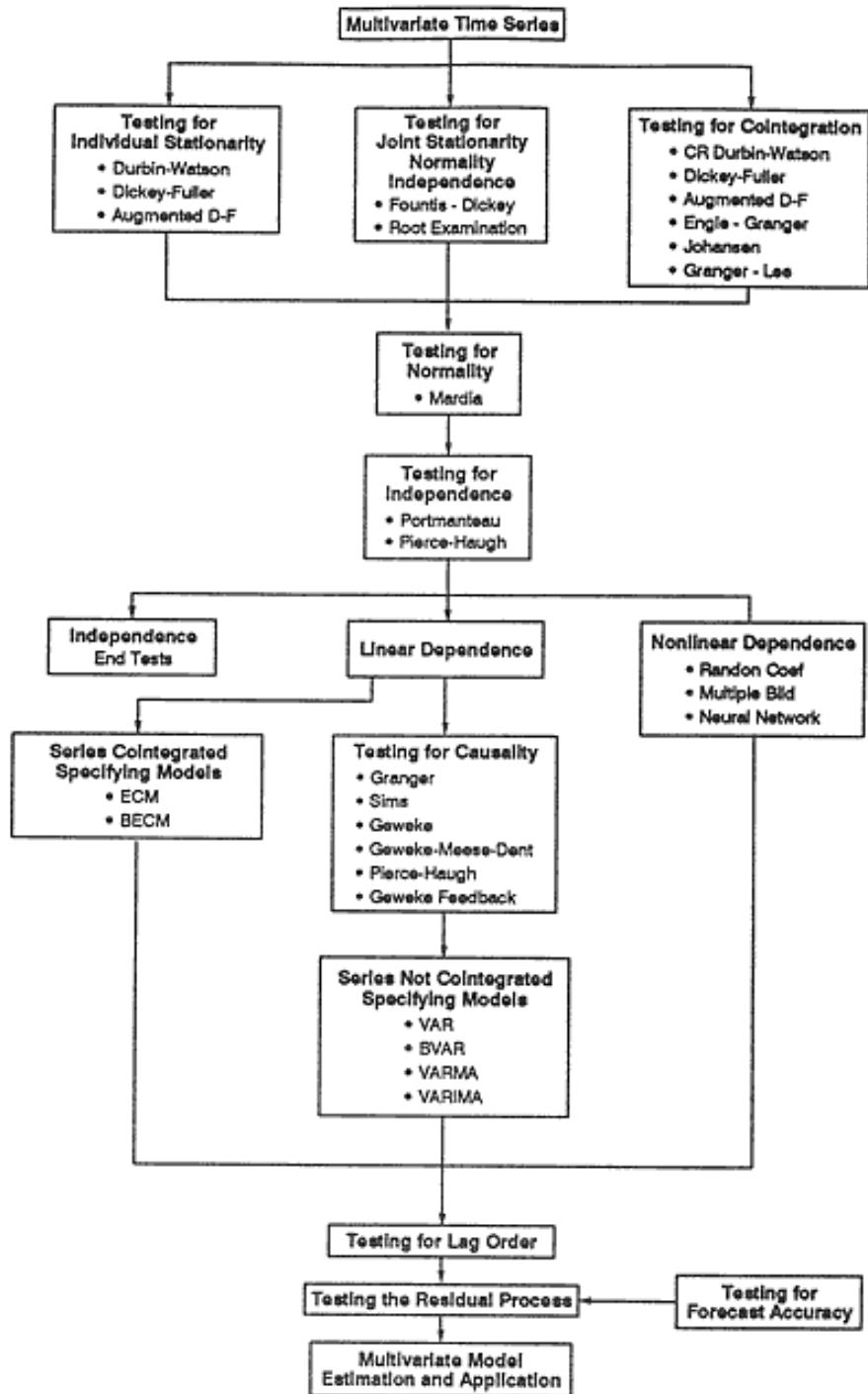
Dentro del diseño documental-descriptivo-cuantitativo de esta se plantea el desarrollo de un análisis de Fase I previo a la construcción del gráfico de control del análisis de punto de cambio Fase II, cumpliendo así las dos fases del SPC.

#### **3.3.1 ANÁLISIS DE FASE I**

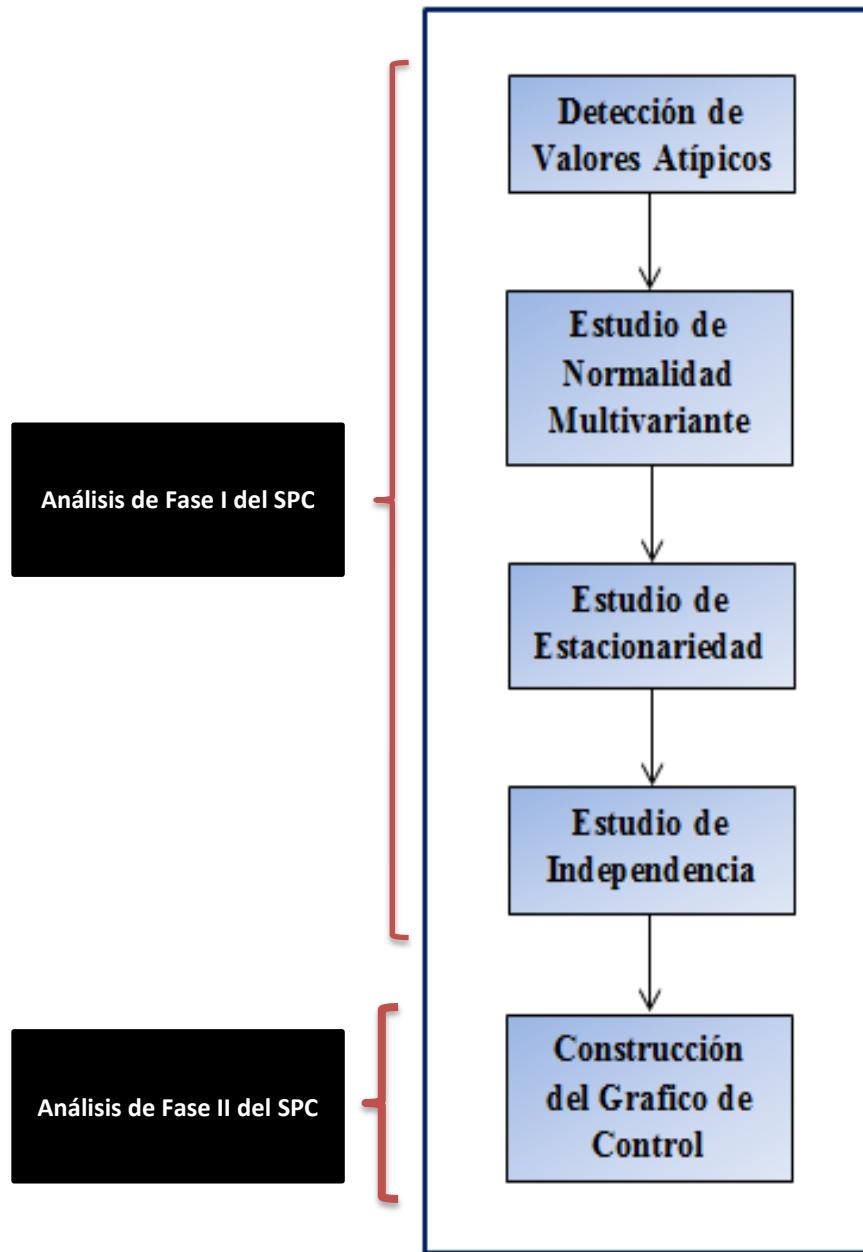
En esta Fase, la investigación sigue los siguientes procedimientos:

- La detección de valores atípicos (*outliers*).
- Estudio de normalidad multivariante.
- Estudio de Estacionariedad.
- Estudio de Independencia o Autocorrelación.

En este análisis se estudian las características de los datos del proceso a monitorear, con el objetivo de verificar si se cumplen los supuestos estadísticos que el modelo de análisis de punto de cambio requiere. El procedimiento desarrollado en esta Fase es una adaptación de la desarrollada por Cromwell et al. (1994), en la **Figura 2** se presenta el procedimiento original desarrollado por este autor, y en la **Figura 3**, se presenta la adaptación a desarrollar para la construcción del gráfico de control.



**Figura 2.** Procedimiento desarrollado por Cromwell *et al.*  
Fuente: *Multivariate tests for the time series models*, (1994).



**Figura 3.** Procedimiento implementado en esta investigación para la construcción del gráfico de control. Fuente: propia.

### **3.3.1.1 DETECCIÓN DE VALORES ATÍPICOS (*OUTLIERS*)**

Rencher (2002), comenta que la detección de valores atípicos (*outliers*) ha sido motivo de preocupación para los estadísticos y otros científicos durante más de un siglo. Él asegura, que algunos autores han afirmado que el investigador normalmente puede esperar a tener hasta un 10% de observaciones con errores de medición. Asimismo Kirk (2007) menciona, que estos valores afectan gravemente la integridad de los datos y dan como resultado estadísticas muestrales sesgadas o distorsionadas y conclusiones erróneas.

Por ello, en este trabajo de grado se aplica una prueba para la detección de valores atípicos al inicio del análisis de fase II del SPC, con el objetivo de evitar tomar decisiones erradas en el resto de este análisis. La prueba a desarrollar será la propuesta por Schwager y Margolin (1982).

#### **3.3.1.1.1 PRUEBA DE SCHWAGER Y MARGOLIN**

La metodología propuesta por Schwager y Margolin (ob. cit) está orientada a la detección de valores atípicos (*outliers*) en una muestra aleatoria normal multivariante con deslizamiento en la media. A través de esta prueba, es posible detectar múltiples valores atípicos, en el caso que existan. A continuación se presenta el problema de valores atípicos propuesto por Schwager y Margolin (ob. cit):

Considere una muestra aleatoria  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  de una distribución normal multivariante. El modelo para estos datos se puede especificar mediante la ecuación matricial  $\mathbf{Y} = \mathbf{e}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{U}$ , donde la matriz de observaciones  $\mathbf{Y} n \times p$  tiene filas  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$  i.i.d.,  $\mathbf{e}$  es un vector  $n \times 1$  de unos (1's),  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector de medias desconocido  $1 \times p$ , y las filas  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  de la matriz  $\mathbf{U} n \times p$  son i.i.d. con una distribución  $N(0, \boldsymbol{\Sigma})$ , con matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}$  desconocida.

Para incorporar la posibilidad de valores atípicos, el modelo de muestra aleatoria normal multivariante es ajustado en un modelo multivariante con deslizamiento en la media:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{e}\boldsymbol{\mu} + \Delta\mathbf{A} + \mathbf{U} \quad (3.1)$$

en donde  $\mathbf{e}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$ , y  $\mathbf{U}$  son como se describieron anteriormente; además,  $\Delta$  es un escalar no negativo, y  $\mathbf{A}$  es una matriz arbitraria  $n \times p$  tal que:  $\|\mathbf{A}\| = 1$ , a menos que  $\Delta = 0$ , en cuyo caso  $\mathbf{A} = 0$ ; y más de la mitad de las filas de  $\mathbf{A}$  son cero. En este modelo, la observación  $\mathbf{Y}_i$  es un valor atípico (*outlier*) si  $\mathbf{a}_i \neq 0$ , donde  $\mathbf{a}_i$  denota la fila  $i$  de  $\mathbf{A}$ . No hay valores atípicos si y solo si  $\Delta = 0$ .

La prueba de hipótesis para determinar la presencia o ausencia de valores atípicos según Schwager y Margolin (ob. cit), puede ser formulada en términos del modelo (3.1),

$$H_0: \Delta = 0$$

Vs

$$H_1: \Delta > 0$$

la cual equivale en,

$$H_0: \text{No hay valores atípicos presentes}$$

Vs

$$H_1: \text{Hay valores atípicos presentes}$$

Schwager y Margolin (ob. cit) afirman, que esta prueba es equivalente a rechazar la hipótesis nula, cuando la curtosis multivariante muestral es suficientemente grande (Ver, sección 3.3.1.2.1). Mardia (1970) citado por Rencher (2002), expresa la curtosis multivariante muestral de la siguiente forma,

$$b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{ii}^2 \quad (3.2)$$

$$g_{ij} = (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}), \quad (3.3)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'/n$  es el estimador de máxima verosimilitud de la matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\bar{\mathbf{y}}$  es el vector de medias muestral (3.3) expresada con los subíndices de la (3.2), es equivalente al cuadrado de la distancia de Mahalanobis.

En este orden de ideas, DeCarlo (1997) señala que los enfoques clásicos para la detección de valores atípicos multivariantes, examinan la distancia de Mahalanobis al cuadrado para cada caso; un valor grande para un caso en relación con otros casos puede indicar un valor atípico multivariante. Asimismo el autor menciona que la medida de curtosis multivariante de Mardia es el promedio de la suma de las distancias de Mahalanobis elevada a la cuarta potencia, lo cual indica la relación que tiene esta distancia con la curtosis multivariante.

DeCarlo (ob. cit) expresa la siguiente relación de la medida de Mardia (1970) con las distancias de Mahalanobis: un valor grande de la medida de Mardia (en relación con el valor esperado bajo normalidad multivariante) sugiere la presencia de uno o más casos con grandes distancias de Mahalanobis, que son los casos alejados del centroide del total de casos (valores atípicos potenciales). Lo anterior ratifica la aplicabilidad de esta prueba para la detección de múltiples valores atípicos (*outliers*).

A continuación se describe el procedimiento de esta prueba, en base a lo descrito por Rencher (2002) y Schwager y Margolin (1982):

**Paso 1.** Determinar las distancias estandarizadas  $D_i^2$  para cada vector observación, utilizando una muestra  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ ,

$$D_i^2 = (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}), \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \quad (3.5)$$

es la matriz de covarianza muestral.

**Paso 2.** Estimar el coeficiente de curtosis  $b_{2,p}$ , según la ecuación (3.2).

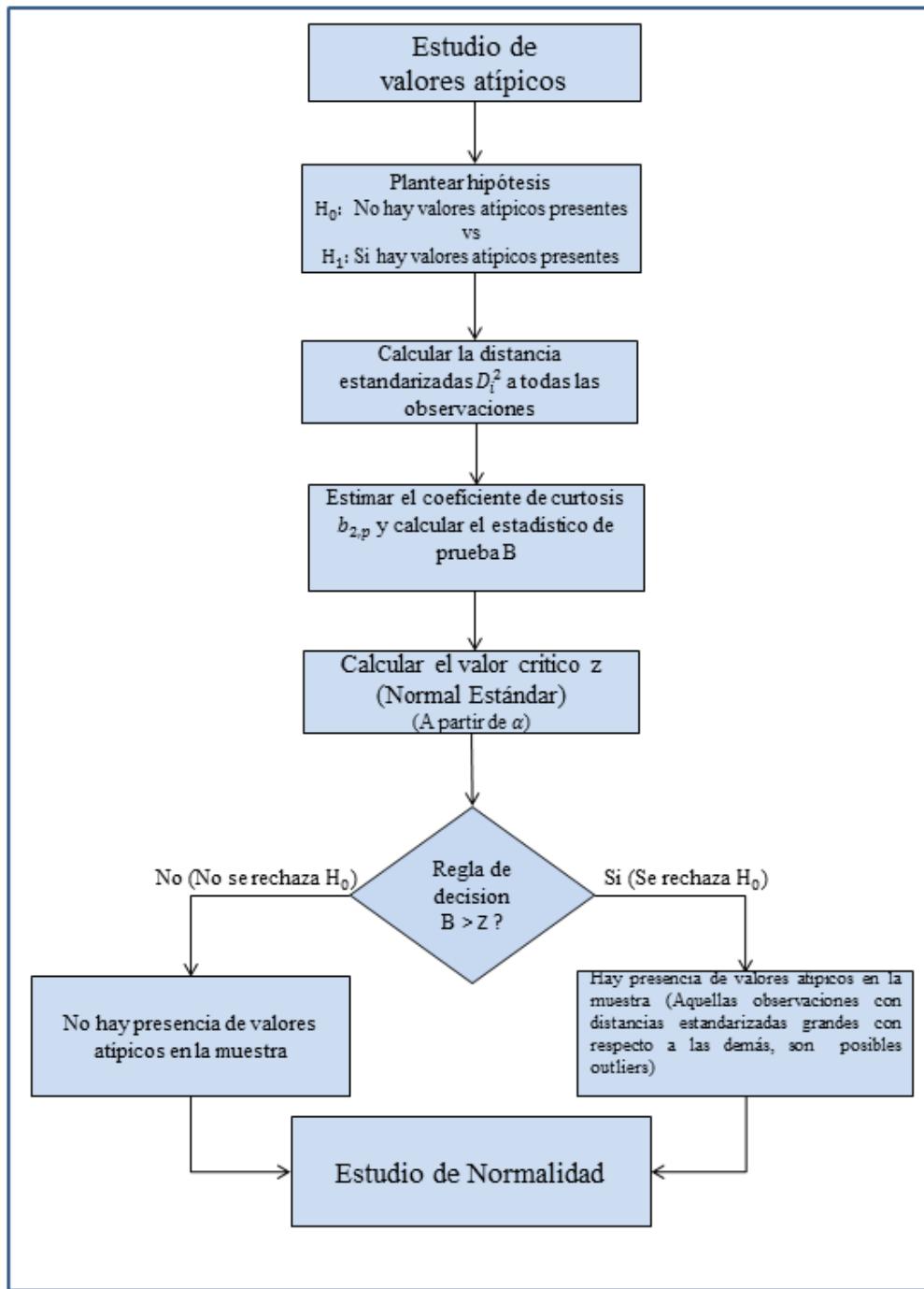
**Paso 3.** Determinar la estadística de prueba. Mardia (1970) proporcionó en su trabajo el siguiente estadístico,

$$B = (b_{2,p} - \beta_{2,p}) / \{8p(p+2)/n\}^{1/2}, \quad (3.6)$$

en donde  $\beta_{2,p} = p(p+2)$ .  $B$  se ajusta a una distribución  $N(0,1)$ .

**Paso 4.** Rechazar la hipótesis nula de que no hay valores atípicos en la muestra, si para un nivel de significancia  $\alpha$ ,  $B$  supera el valor crítico  $z$  de una distribución normal estándar. En el caso que la hipótesis nula se rechace, los vectores observación con grandes distancias estandarizadas del **Paso 1** se consideran outliers.

Rencher (2002) asegura que una ventaja de esta prueba, es que no se corre con el riesgo de enmascaramiento, debido a que no es necesario especificar el número valores atípicos (*outliers*). En la **Figura 4** se presenta el diagrama de flujo de la prueba de valores atípicos.



**Figura 4.** Diagrama de flujo: prueba de valores atípicos de Schwager y Margolin. Fuente: propia.

### **3.3.1.2 ESTUDIO DE NORMALIDAD MULTIVARIANTE**

Hay tres importantes razones por las que es importante conocer si un vector estacionario tiene una distribución normal conjunta, asegura Cromwell *et al.* (1994). La primera es que como en el caso univariante, cuando la estacionariedad conjunta y la normalidad multivariante coinciden, existe una especificación lineal para la serie de tiempo vectorial. La segunda razón es que bajo normalidad, modelos de estimación por mínimos cuadrados y métodos de máxima verosimilitud son igualmente eficientes. La última razón es que conocida la naturaleza de la distribución, se facilita la determinación de las propiedades estadísticas de las pruebas empleadas.

Además de lo anterior, el modelo de análisis de punto de cambio a desarrollar para la construcción del grafico de control, presenta este supuesto estadístico, y es por ello que este análisis es importante en este trabajo de grado, para la validación de este supuesto estadístico, la prueba de normalidad multivariante de Mardia (1970) será desarrollada.

#### **3.3.1.2.1 PRUEBA DE NORMALIDAD MULTIVARIANTE DE MARDIA**

Mardia (ob. cit) desarrollo extensiones multivariantes de las medidas univariantes de asimetría y curtosis. Rencher (2002) presenta las medidas desarrolladas por Mardia (1970) de la siguiente forma:

Sean  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{x}$  independientes e idénticamente distribuidas con vector de medias  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Entonces la asimetría y la curtosis multivariante poblacional se definen como

$$\beta_{1,p} = E[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^3, \quad (3.7)$$

$$\beta_{2,p} = E[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})]^2. \quad (3.8)$$

Asimismo Mardia (1970) citado por Rencher (2002), expresa el estimador de  $\beta_{1,p}$  utilizando una muestra  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ , de la siguiente forma,

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}^3, \quad (3.9)$$

donde  $g_{ij}$  es como en (3.3). El estimador de  $\beta_{2,p}$  es dado por (3.2).

A continuación se describe el procedimiento de esta prueba en base a lo descrito por Cromwell et al. (1994) y Mardia (1970),

**Paso 1.** Estimar los coeficientes de asimetría y curtosis con las ecuaciones (3.9) y (3.2).

**Paso 2.** Formular la hipótesis nula para cada medida.

$H_0$ :  $X(t)$  (vector aleatorio) se distribuye normalmente multivariante,  $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$H_1$ :  $X(t)$  no se distribuye normalmente multivariante

**Paso 3.** Calcular los estadísticos de prueba, A y B

El estadístico A referente a la Asimetría se calcula como

$$A = \frac{1}{6} n b_{1,p} \quad (3.10)$$

El estadístico B referente a la Curtosis se calcula como en 3.6.

#### **Paso 4.** Calculo de valores críticos

Dado un nivel de significancia  $\alpha$ , se prueba la asimetría al elegir un valor  $\tau$  de una distribución chi-cuadrado con  $f$  grados de libertad, donde  $f = 6^{-1}p(p + 1)(p + 2)$ , y en el caso de la curtosis, se elige un valor crítico  $z$  a partir de la distribución normal estándar.

#### **Paso 5.** Regla de decisión

Se rechazará  $H_0$  si:

En el caso del análisis de la Asimetría

$$A > \tau$$

Para el caso del análisis de la Curtosis

$$|B| > |Z|$$

Mardia (1970) citado por Cromwell et al. (1994), señala que  $A$  y  $B$  dan valores críticos conservadores para  $p > 2$  y  $n > 50$ . En la **Figura 5** se muestra el diagrama de flujo de la prueba de normalidad multivariante de Mardia.

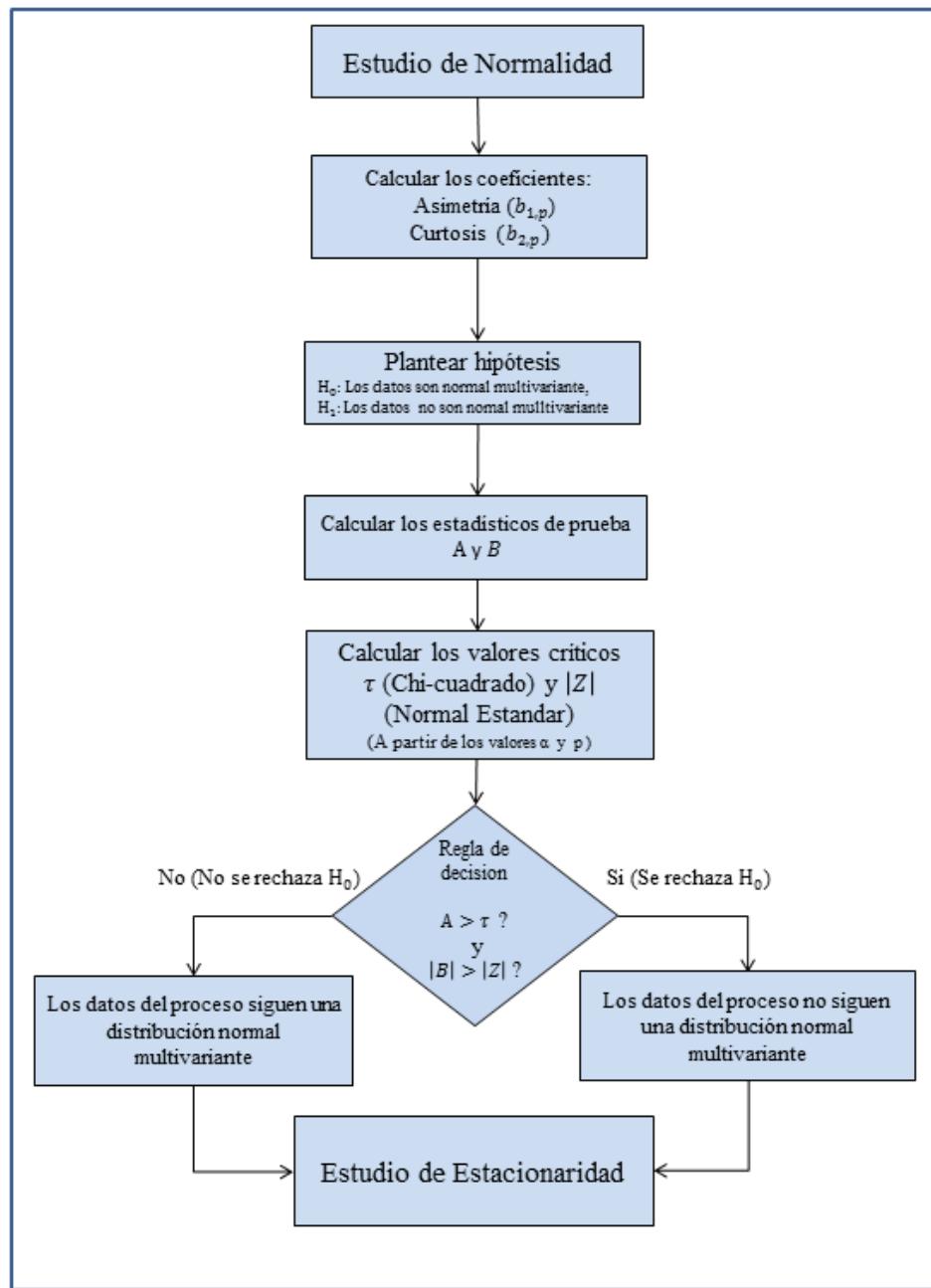


Figura 5. Diagrama de flujo: prueba de normalidad multivariante de Mardia. Fuente: propia.

### **3.3.1.3 ESTUDIO DE ESTACIONARIEDAD**

La condición de estacionariedad representa una condición clave a analizar en este trabajo, ya que una serie de tiempo multivariante que presenta un comportamiento estacionario, es producto de un proceso bajo control estadístico. Por lo tanto, garantizar que una muestra pasada del proceso presente esta condición, es fundamental.

Para ello la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey (1989) será implementada; esta prueba es una versión multivariante de la prueba de raíz unitaria de Dickey y Fuller (1979). Según Cromwell et al. (1994), esta prueba examina los autovalores de la matriz de coeficientes de un vector autorregresivo (VAR) especificado, con el fin de probar la presencia de una raíz unitaria.

El primer paso en la implementación de la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey (1989), requiere la estimación de un modelo VAR ( $p$ ) para la serie de tiempo, lo que implica la estimación del orden  $p$  del modelo VAR. En las secciones **3.3.1.3.1** y **3.3.1.3.2** se detallan ciertos conceptos y procedimientos fundamentales para la estimación del orden del modelo VAR, y por último en la sección **3.3.1.3.3**, se define el procedimiento de la prueba.

#### **3.3.1.3.1 MODELO AUTORREGRESIVO VECTORIAL DE ORDEN $p$ (VAR ( $p$ ))**

Lütkepohl (2005) expresa este modelo de la siguiente forma:

$$y_t = v + A_1 y_{t-1} + \cdots A_p y_{t-p} + u_t \quad (3.11)$$

donde  $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$  es un vector aleatorio ( $K \times 1$ ), las  $A_i$  son matrices de coeficientes fijos ( $K \times K$ ),  $v_t = (v_1, \dots, v_K)'$  es un vector fijo ( $K \times 1$ ) de términos de intercepción que permiten la posibilidad de una media  $E(y_t)$  distinta de cero, y

$u_t = (u_{1t}, \dots, u_{Kt})'$  es un proceso  $K$ -dimensional de ruido blanco, es decir,  $E(u_t) = 0$ ,  $E(u_t u_t') = \Sigma_u$  (matriz de covarianza no singular) y  $E(u_t u_s') = 0$  para  $s \neq t$ .

Lütkepohl (ob. cit) asegura, que cualquier modelo VAR( $p$ ) puede ser expresado en una forma compactada usando la siguiente notación:

$$Y := (y_1, \dots, y_T) \quad (K \times T),$$

$$B := (v, A_1, \dots, A_p) \quad (K \times (Kp + 1)),$$

$$Z_t := \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} \quad ((Kp + 1) \times 1),$$

$$Z := (Z_0, \dots, Z_{T-1}) \quad ((Kp + 1) \times T),$$

$$U := (u_1, \dots, u_T) \quad (K \times T),$$

Usando esta notación para  $t = 1, \dots, T$ , se puede escribir el modelo VAR ( $p$ ) (3.11) de forma compacta como

$$Y = BZ + U \quad (3.12)$$

Además de la notación anterior, Lütkepohl (ob. cit) supone la disponibilidad de dos serie de tiempo multivariantes  $y_1, \dots, y_T$  y  $y_{-p+1}, \dots, y_0$ , en donde:

- $y_1, \dots, y_T$  es una muestra de tamaño  $T$ .
- $y_{-p+1}, \dots, y_0$  es una pre-muestra de tamaño  $p$ .

En la siguiente sección, se presenta la prueba de hipótesis a utilizar para la estimación del orden VAR, que según Tsay (2014), recomendó Tiao y Box (1981).

### 3.3.1.3.2 PRUEBA SECUENCIAL PARA LA DETERMINACIÓN DEL ORDEN VAR

Lütkepohl (2005) describe en su libro el procedimiento de esta prueba de la siguiente manera:

Se asume que un límite superior  $M$  para el orden es conocido y, se evalúa la siguiente secuencia de hipótesis nulas y alternativas utilizando pruebas de **razón de verosimilitud (LR)**:

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &: A_M = 0 \quad \text{Vs} \quad H_1^1 : A_M \neq 0 \\
 H_0^2 &: A_{M-1} = 0 \quad \text{Vs} \quad H_1^2 : A_{M-1} \neq 0 \mid A_M = 0 \\
 &\vdots \\
 H_0^i &: A_{M-i+1} = 0 \quad \text{Vs} \quad H_1^i : A_{M-i+1} \neq 0 \\
 &\quad \mid A_M = \dots = A_{M-i+2} = 0 \\
 &\vdots \\
 H_0^M &: A_1 = 0 \quad \text{Vs} \quad H_1^M : A_1 \neq 0 \mid A_M = \dots = A_2 = 0
 \end{aligned}$$

En este esquema, cada hipótesis nula se prueba condicionada sobre las anteriores siendo estas ciertas. El procedimiento termina y el orden VAR se elige en consecuencia, si una de las hipótesis nulas es rechazada. Es decir, si  $H_0^i$  es rechazada,  $\hat{p} = M - i + 1$  se elegirá como estimación del orden autorregresivo.

El estadístico de razón de verosimilitud para probar la hipótesis nula de orden  $i$  es

$$\lambda_{LR}(i) = T[\ln|\tilde{\Sigma}_u(M-i)| - \ln|\tilde{\Sigma}_u(M-i+1)|], \quad (3.13)$$

donde  $\tilde{\Sigma}_u(m)$  denota el estimador de ML de  $\Sigma_u$  cuando un modelo VAR( $m$ ) se ajusta a una serie de tiempo de longitud  $T$ . Esta estadística tiene una distribución  $\chi^2(K^2)$  asintótica si  $H_0^i$  y todas las hipótesis nulas previas son ciertas. Para un nivel de significancia  $\alpha$ , se rechaza la hipótesis nula de orden  $i$  si,  $\lambda_{LR}(i)$  es mayor al valor crítico de la chi-cuadrado.

Lütkepohl (ob. cit) asegura que el estimador de máxima verosimilitud de  $\Sigma_u$ , es dado por

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{1}{T} (Y - \tilde{B}Z)(Y - \tilde{B}Z)' \quad (3.14)$$

donde  $\tilde{B} = YZ'(ZZ')^{-1}$ .

### 3.3.1.3.3 PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA DE FOUNTIS-DICKEY

Fountis y Dickey (1989) aseveran que la ecuación característica de una serie de tiempo autorregresiva múltiple, involucra los autovalores de una ecuación matricial que determinan si la serie es estacionaria. Los autores suponen en esta prueba que un autovalor es igual a 1 y el resto son menores a 1 en magnitud, es decir, esta prueba examina solo la presencia de una raíz unitaria.

A continuación se describe el procedimiento de esta prueba, en base a lo descrito por Cromwell et al. (1994) y Fountis y Dickey (1989):

**Paso 1.** Estimar el modelo VAR ( $p$ ) de la serie de tiempo:

En base a la estimación del orden  $p$  obtenido según la prueba de **LR** de la sección 3.3.1.3.2, se estima el modelo VAR ( $p$ ), expresado según Fountis y Dickey (ob. cit) como,

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_p \mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.15)$$

donde  $\mathbf{Y}_t = [Y_{1,t}, Y_{2,t}, \dots, Y_{k,t}]^T$  para  $t = 1, \dots, n$  ( $n$ , longitud de la serie de tiempo),  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  son *iid*  $N(\mathbf{0}, \Sigma)$  (proceso  $K$ -dimensional de ruido blanco, ver 3.3.1.3.1) con  $\Sigma$  definida positiva y  $\mathbf{B}_j$  son matrices de coeficientes fijos ( $K \times K$ ).

Fountis y Dickey (ob. cit) estiman las matrices de coeficientes  $\mathbf{B}_j$  mediante los estimadores de mínimos cuadrados  $\hat{\mathbf{B}}_{jn}$ . A continuación, se presentan estos estimadores según Fountis y Dickey (ob. cit),

Sea:

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_t \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{B}_p \\ \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

en donde  $\mathbf{0}$  es un vector de ceros y  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

El modelo compactado es dado por,

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{B} \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.16)$$

El estimador de mínimos cuadrados de  $\mathbf{B}$  esta dado por

$$\hat{\mathbf{B}}_n = \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \mathbf{X}_{t-1}^T \left( \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}_{t-1}^T \right)^{-1} \quad (3.17)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{1n} & \dots & \hat{\mathbf{B}}_{pn} \\ \mathbf{I} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \dots & \mathbf{I} & \emptyset \end{bmatrix} \quad (kp \times kp),$$

**Paso 2.** Encontrar el autovalor más grande,  $\lambda_{\text{MAX}}$  en base a la ecuación característica

$$\left| \lambda^p \mathbf{I} - \sum_{j=1}^p \lambda^{p-j} \hat{\mathbf{B}}_{jn} \right| = 0 \quad (3.18)$$

**Paso 3.** Formular la hipótesis nula que  $\mathbf{Y}_t$  tiene una raíz unitaria

$$H_0: \mathbf{Y}_t \text{ tiene una raíz unitaria}$$

$$H_A: \mathbf{Y}_t \text{ no tiene una raíz unitaria}$$

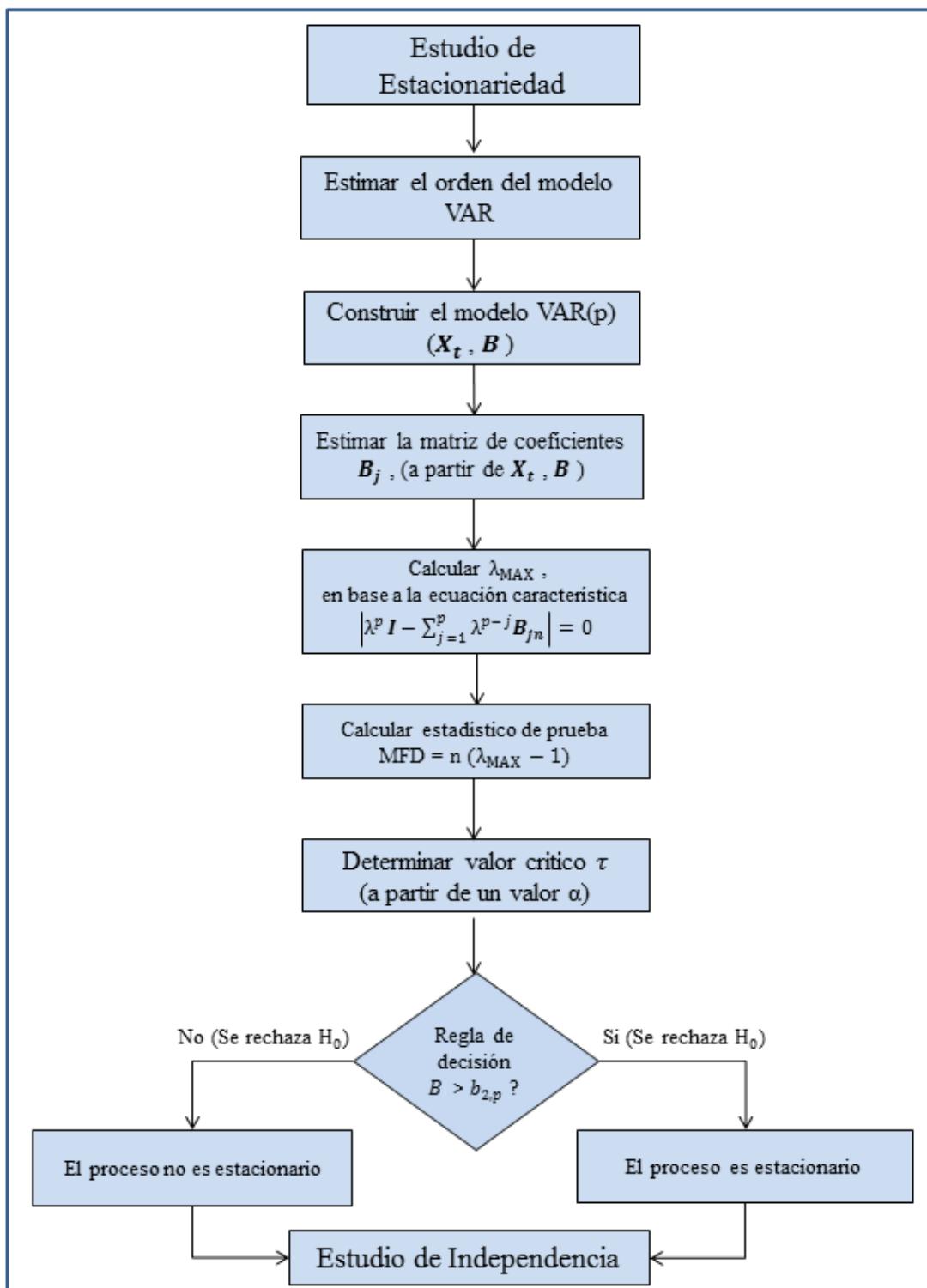
**Paso 4.** Calcular la estadística de prueba MFD

$$\text{MFD} = n(\lambda_{\text{MAX}} - 1) \quad (3.19)$$

**Paso 5.** Para un nivel de significación dado,  $\alpha$ , obtenga el valor crítico  $\tau$  de la prueba de raíz unitaria de Dickey y Fuller (1979). Rechazar  $H_0$  si

$$|\text{MFD}| > \tau$$

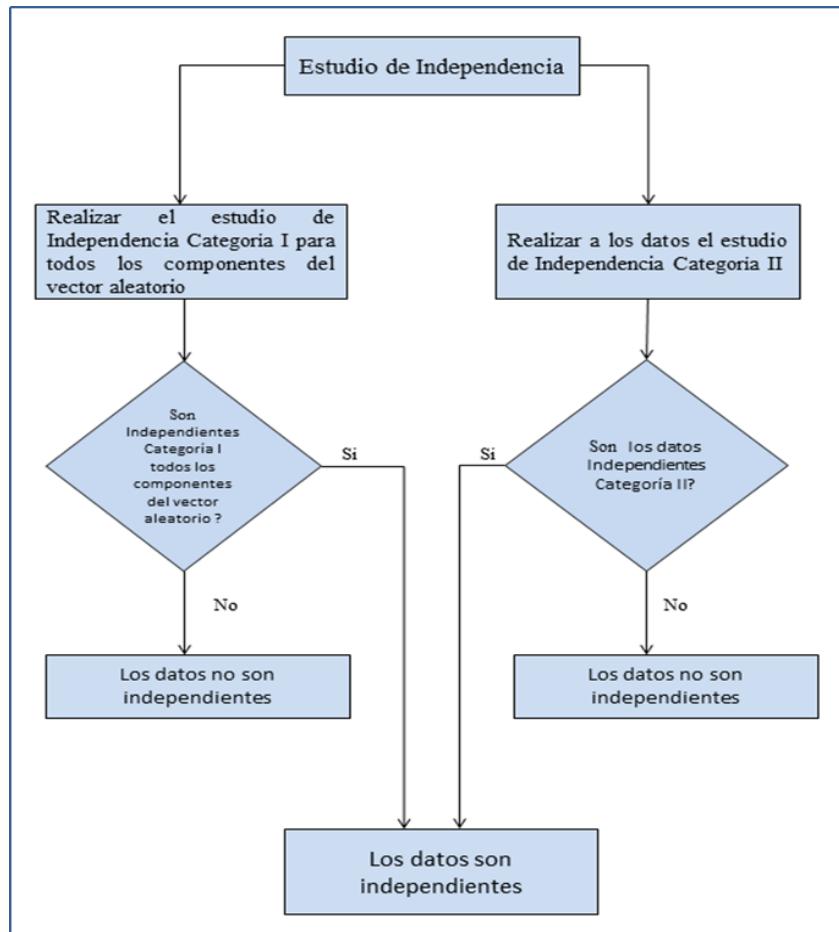
Es importante resaltar que, según Cromwell et al. (1994) esta prueba analiza la estacionariedad débil también conocida como estacionariedad en amplio sentido. En la **Figura 6** se muestra el diagrama de flujo del estudio de estacionariedad.



**Figura 6.** Diagrama de flujo: prueba de estacionariedad de Fountis y Dickey. Fuente: propia.

### 3.3.1.4 ESTUDIO DE INDEPENDENCIA

Cromwell *et al.* (ob. cit), comentan que para validar la independencia (autocorrelación) en el contexto multivariante, es necesario dividirlo en dos categorías. La categoría I se refiere a la independencia en cada elemento del vector  $X(t)$  (vector aleatorio). La categoría II se refiere a la independencia entre las variables en  $X(t)$ . En las siguientes secciones se describen los procedimientos para cada una de las pruebas empleadas en ambas categorías. En la **Figura 7** se muestra el diagrama de flujo del estudio de independencia.



**Figura 7.** Diagrama de flujo: estudio de independencia propuesto por Cromwell *et al.* (1994).  
Fuente: propia.

### 3.3.1.4.1 INDEPENDENCIA CATEGORÍA 1

La prueba estadística desarrollada en este trabajo para evaluar esta categoría es la prueba de Ljung y Box (1978). Antes de describir el procedimiento para esta prueba, en la siguiente sección se presenta la función de autocorrelación, medida importante para la implementación de esta prueba de hipótesis.

- **FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN (FAC)**

Gujarati (2004) asegura que la FAC al rezago  $k$ , denotada por  $\rho_k$ , se define como

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (3.20)$$

$$= \frac{\text{covarianza al rezago } k}{\text{varianza}}$$

Gujarati (ob. cit) asevera que  $\rho_k$  es un numero sin unidad de medida, debido a que la covarianza y la varianza están medida en la misma unidad. La FAC se encuentra entre  $-1$  y  $+1$ , igual que cualquier coeficiente de correlación.

Asimismo Gujarati (ob. cit) afirma que debido a que en la práctica, solo se tiene una realización de un proceso estocástico (es decir, la muestra), solamente se puede calcular la **función de autocorrelación muestral**,  $\hat{\rho}_k$ . Para tal efecto, se debe calcular primero la **covarianza muestral** al rezago  $k$ ,  $\hat{\gamma}_k$ , y la varianza muestral,  $\hat{\gamma}_0$ , que se definen como

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n} \quad (3.21)$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})^2}{n} \quad (3.22)$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra y  $\bar{Y}$  es la media muestral.

Por consiguiente, la función de autocorrelación muestral al rezago  $k$  es

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \quad (3.23)$$

que es simplemente la razón entre la covarianza y varianza muestrales.

- **PRUEBA DE LJUNG y BOX**

Cromwell, Labys y Terraza (1994) aseguran que, si una serie de tiempo se distribuye de forma independiente, los coeficientes de autocorrelación  $r(k)$  son ceros para todos los tiempo de rezagos (*lags*) de la serie diferenciada.

Según Gujarati (2004), la prueba de Ljung y Box (1978) evalúa la hipótesis conjunta de que, todos los coeficientes de autocorrelación son simultáneamente iguales a cero. El estadístico propuesto por Ljung y Box (ob. cit) se define como:

$$LB = n(n + 2) \sum_{k=1}^m \left( \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k} \right) \quad (3.24)$$

donde  $n$  es el tamño de la muestra,  $m$  es la longitud del rezago y  $\hat{\rho}_k$  es como en (3.23). El estadistico LB sigue una distribucion chi-cuadrado con  $m$  grados de libertad.

A continuación se describe el procedimiento de esta prueba en base a lo descrito por Cromwell, Labys y Terraza (1994):

**Paso 1.** Seleccionar el número de rezagos  $k$  para la estimación de los coeficientes de autocorrelación muestral  $r$ . Para la elección del número de rezagos (*lags*)  $m$ , se utilizó un criterio práctico enunciado por Gujarati (2004). Este criterio sugiere tomar un tercio o una cuarta parte de la longitud de la serie de tiempo, para este trabajo se tomó la primera de estas dos opciones.

**Paso 2.** Teniendo en cuenta el número de rezagos, se prueba la hipótesis nula, lo que implica la independencia lineal en  $x(t)$  (serie de tiempo)

$$H_0: r(1) = r(2) == r(k) = 0$$

$$H_A: \text{Al menos un } r(k) \text{ no es cero}$$

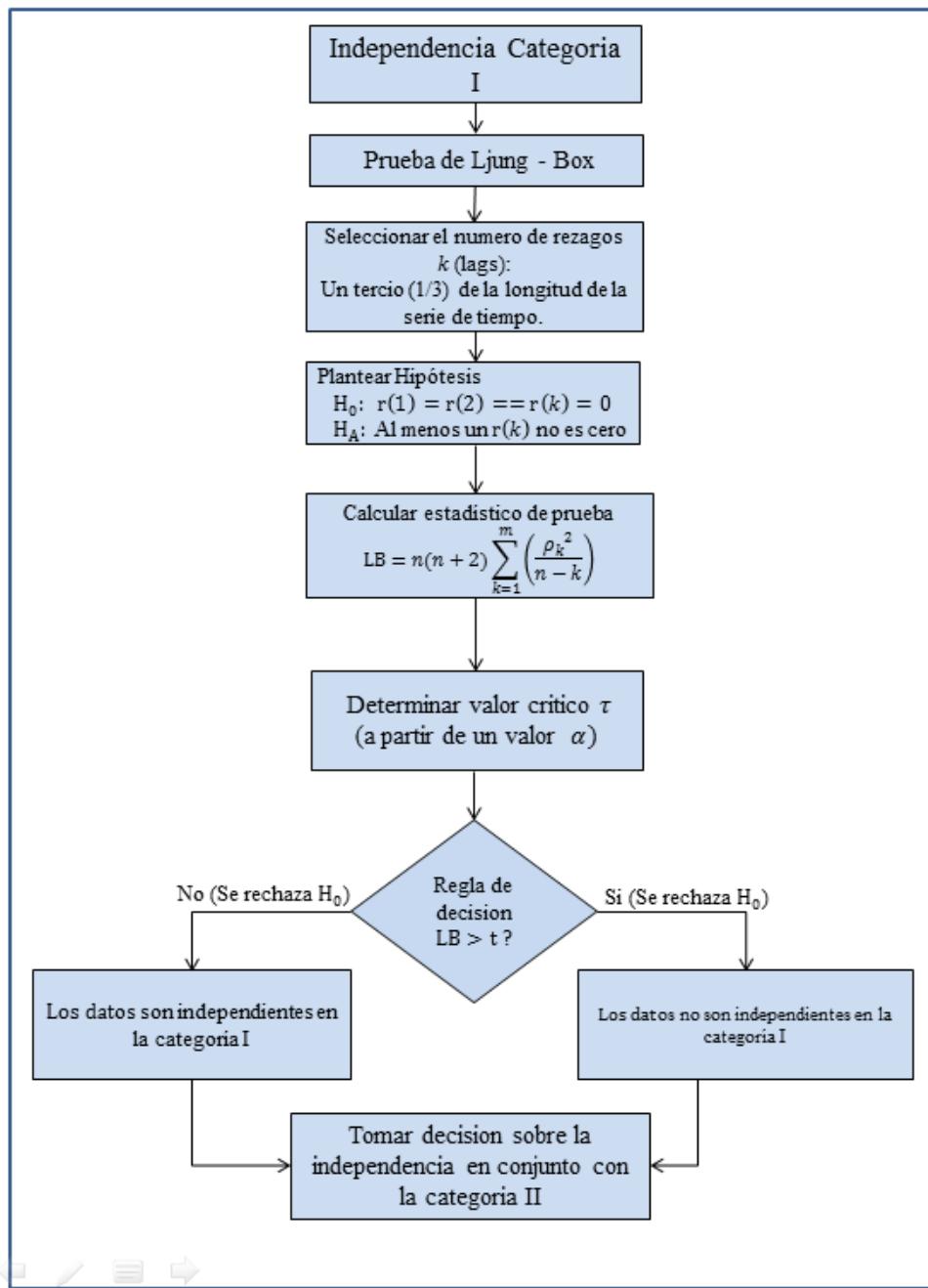
Calcular el estadístico de prueba según (3.24).

**Paso 3.** Para un nivel de significancia dado,  $\alpha$ , elegir el valor crítico  $t$  de una distribución chi-cuadrado con  $k$  grados de libertad.

**Paso 4.** Rechazar la hipótesis nula de independencia lineal si

$$LB > t$$

El procedimiento descrito anteriormente se debe aplicar en cada componente univariante de la serie de tiempo multivariante. En la **Figura 8** se muestra el diagrama de flujo del estudio de independencia categoría I.



**Figura 8.** Diagrama de flujo: prueba de independencia categoría I de Ljung y Box. Fuente: propia.

### 3.3.1.4.2 INDEPENDENCIA CATEGORÍA II

La prueba estadística desarrollada en este trabajo para evaluar esta categoría es la versión multivariante de Chitturi y Hosking sobre la prueba de Portmanteau. En la siguiente sección se describen dos importantes medidas estadísticas, a saber, la matriz de covarianzas cruzadas (*cross-covariances*) y correlaciones cruzadas (*cross-correlations*), posteriormente se describe el procedimiento de esta prueba.

- **MATRICES DE COVARIANZA Y CORRELACIÓN CRUZADA**

Según Tsay (2014) la matriz de covarianzas cruzadas (o autocovarianzas según Lütkepohl (2005)) al rezago (*lag*)  $\ell$  es una medida de la dependencia lineal dinámica, de una serie de tiempo estacionaria  $\mathbf{z}_t$ . Esta matriz está definida por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_\ell &= \text{Cov}(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-\ell}) = E[(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{z}_{t-\ell} - \boldsymbol{\mu})'] \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_{1t} \tilde{\mathbf{z}}_{1,t-\ell} & \tilde{\mathbf{z}}_{1t} \tilde{\mathbf{z}}_{2,t-\ell} & \cdots & \tilde{\mathbf{z}}_{1t} \tilde{\mathbf{z}}_{k,t-\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\mathbf{z}}_{kt} \tilde{\mathbf{z}}_{1,t-\ell} & \tilde{\mathbf{z}}_{kt} \tilde{\mathbf{z}}_{2,t-\ell} & \cdots & \tilde{\mathbf{z}}_{kt} \tilde{\mathbf{z}}_{k,t-\ell} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (3.25)$$

donde  $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{z}_t)$  es el vector de medias de  $\mathbf{z}_t$  y  $\tilde{\mathbf{z}}_t = (\tilde{\mathbf{z}}_{1t}, \dots, \tilde{\mathbf{z}}_{kt})' \equiv \mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu}$  es la serie de tiempo ajustada a la media. Debido a que  $\mathbf{z}_t$  es estacionaria, esta matriz de covarianzas cruzadas es una función de  $\ell$ , no del índice de tiempo  $t$ . Para  $\ell = 0$ , se tiene la matriz de covarianzas  $\boldsymbol{\Gamma}_0$  de  $\mathbf{z}_t$ . Los  $(i,j)$  elementos de  $\boldsymbol{\Gamma}_\ell$  se denotan como  $\gamma_{\ell,ij}$ , es decir,  $\boldsymbol{\Gamma}_\ell = [\gamma_{\ell,ij}]$ .

Asimismo Tsay (ob. cit) asegura que para una serie de tiempo estacionaria  $\mathbf{z}_t$ , la matriz de correlaciones cruzada (o autocorrelación según Lütkepohl (2005)) al rezago  $\ell$  está definida como:

$$\boldsymbol{\rho}_\ell = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_\ell \mathbf{D}^{-1} = [\rho_{\ell,ij}], \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{D} = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  es la matriz diagonal de las desviaciones estándar de los componentes de  $z_t$ . Específicamente,  $\sigma_i^2 = \text{Var}(z_{it}) = \gamma_{0,ii}$ , es decir, los elementos  $(i,i)$  de  $\boldsymbol{\Gamma}_0$ . Para una serie de tiempo  $k$ -dimensional  $\mathbf{z}_t$ , cada matriz  $\boldsymbol{\rho}_\ell$  es una matriz  $k \times k$ .

Tsay (ob. cit) provee un estimador para  $\boldsymbol{\Gamma}_\ell$  el cual está especificado por,

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\ell = \frac{1}{T-1} \sum_{t=\ell+1}^T (\mathbf{z}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)(\mathbf{z}_{t-\ell} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)' \quad (3.27)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z$  es el vector de medias muestral y se denota por

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t, \quad (3.28)$$

La matriz de correlaciones cruzadas muestral al rezago  $\ell$  esta dada por

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_\ell = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\ell \hat{\mathbf{D}}^{-1} \quad (3.29)$$

Es importante resaltar la diferencia existente entre el tamaño de muestra  $T$  de esta sección y el de la sección 3.3.1.3.1. Para esta sección, el  $T$  representa el total de las observaciones disponibles, es decir, representaría la suma de los tamaños de muestra y pre-muestra de la sección 3.3.1.3.1.

- **VERSION MULTIVARIANTE DE CHITTURI Y HOSKING SOBRE LA PRUEBA PORTMANTEAU**

Chitturi (1974) y Hosking (1981) citados por Cromwell et al. (ob. cit) desarrollaron y perfeccionaron esta prueba multivariante sobre la base de la versión univariante de la prueba Portmanteau. Con el fin de probar la hipótesis nula de independencia ellos proponen el siguiente estadístico de prueba

$$\mathcal{Q} = T \sum_{i=1}^k \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}'_i \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_i \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}) \quad (3.30)$$

donde  $T$  es el tamaño de la muestra,  $k$  es el número de rezagos,  $\text{tr}$  es el operador de traza, y  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  es la  $i$ -ésima matriz de covarianzas estimadas según (3.27). Formalmente, el estadístico de prueba (3.30) se expresa según Lütkepohl (2005) como

$$\mathcal{Q} = T \sum_{i=1}^k \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\rho}}'_i \hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}_i \hat{\boldsymbol{\rho}}_0^{-1}) \quad (3.31)$$

que al simplificar, se expresa como (3.30).

A continuación se describe el procedimiento de esta prueba en base a lo descrito por Cromwell et al. (1994).

**Paso 1.** Formar la hipótesis nula de independencia para el vector  $X(t)$ .

$$H_0 : X(t) \text{ es independiente}$$

$$H_A : X(t) \text{ no es independiente}$$

**Paso 2.** Para un determinado número de rezagos,  $k$ , calcular el estadístico de prueba  $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} = T \sum_{i=1}^k \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}'_i \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_i \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1})$$

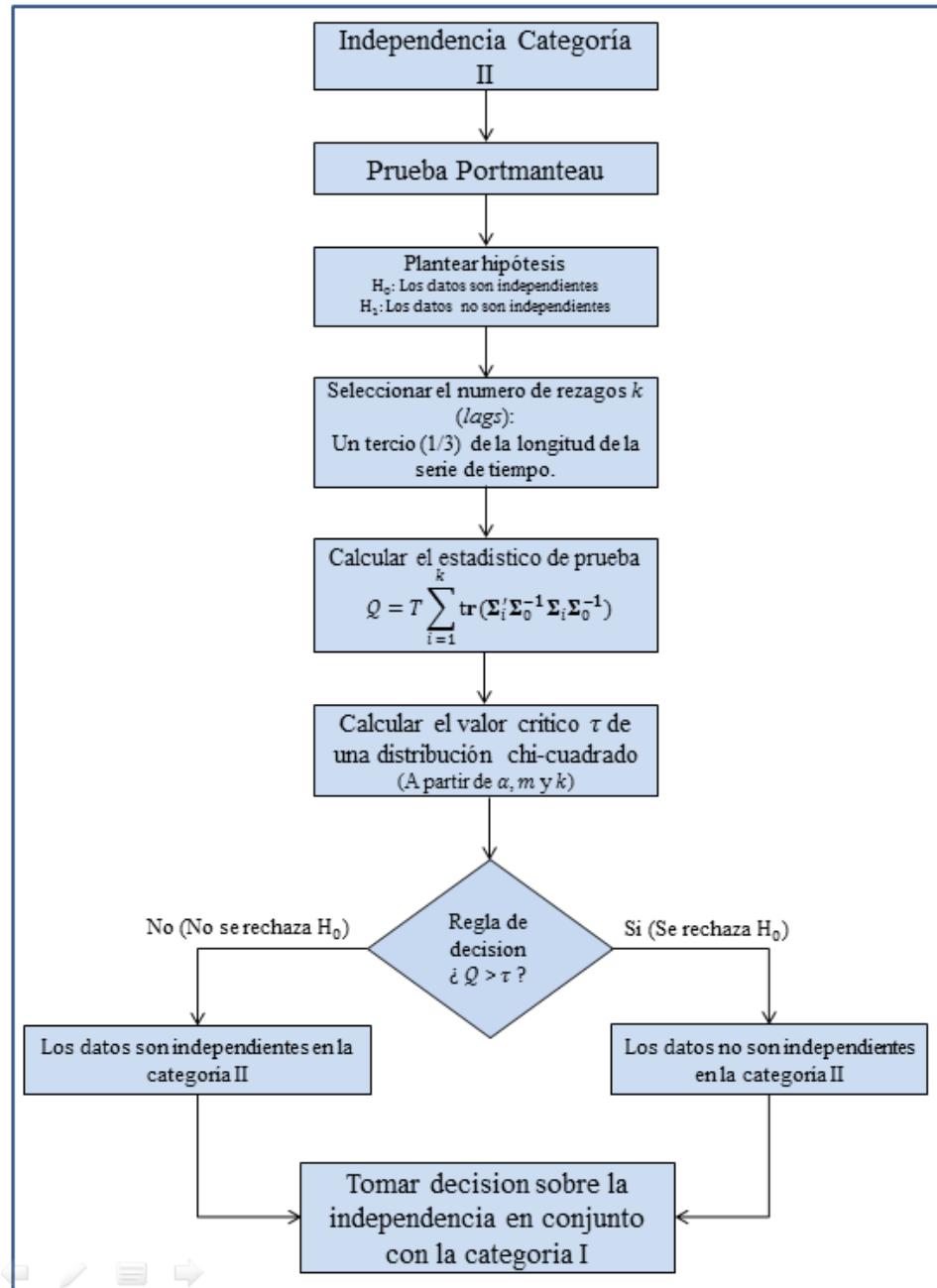
donde  $T$  es el tamaño de la muestra,  $k$  es el número de rezagos,  $\text{tr}$  es el operador de traza, y  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  es la  $i$ -ésima matriz de covarianzas estimadas según (3.27).

**Paso 3.** Para un nivel de significancia  $\alpha$ , obtener el valor crítico  $\tau$  de la distribución chi-cuadrado con  $m^2 k$  grados de libertad. Se Rechaza  $H_0$  si

$$\mathcal{Q} > \tau.$$

donde  $m$  es el numero de componentes de  $X(t)$ .

Para la elección del número de rezagos (*lags*)  $k$ , se utilizó un criterio práctico, que Gujarati (2004) menciona. Este criterio consiste en la elección de un tercio de la longitud de la serie de tiempo. En la **Figura 9** se muestra el diagrama de flujo del estudio del estudio de independencia categoría II.



**Figura 9.** Diagrama de flujo: prueba de independencia categoría II de Chitturi y Hosking.  
Fuente: propia.

### **3.3.2 ANÁLISIS DE FASE II**

En esta fase se construye el grafico de control en base al modelo de análisis de punto de cambio (CPA) desarrollado por Zamba y Hawkins (2009). En la siguiente sección se describe el enfoque para probar un punto de cambio desarrollado por Hawkins, Qiu, y Zamba (2008), el cual se utiliza en el modelo de Zamba y Hawkins (2009). Luego, en la sección **3.3.2.2** se describe el uso de este enfoque en el monitoreo de procesos y posteriormente en la sección **3.3.2.3**, se describe la formulación a desarrollar en este trabajo de grado.

#### **3.3.2.1 MODELO GENERAL PARA LA DETECCIÓN DE UN PUNTO DE CAMBIO**

Hawkins, Qiu, y Zamba (2008), afirman que desde un punto de vista estadístico, los estados en control y fuera del control se distinguen por la distribución del flujo de la medición del proceso. Se escribe  $X_1, \dots, X_n$  para la secuencia de lecturas (que podrían ser univariantes o multivariantes). Mientras el proceso se encuentre bajo control, las lecturas son independientes y siguen alguna distribución estadística  $f(x, \theta)$  con un vector de parámetros  $\theta$  que tiene su valor en control  $\theta_0$ . En virtud de un cambio persistente en algún momento  $\tau$ , las lecturas siguen esta distribución hasta el momento  $\tau$ , después de  $\tau$  su comportamiento cambian a algo más.

Los autores mencionan que bajo el modelo de punto de cambio convencional, este cambio de comportamiento tiene la misma distribución con el parámetro  $\theta$  tomando el nuevo valor  $\theta_1$ . Si el punto de cambio  $\tau$  fuese conocido, se tendría una comparación de dos muestras estándar. A veces este es el caso en que se sabe que algo sucedió en el tiempo  $\tau$  y se quería probar si hubo un efecto visible sobre el proceso. Comúnmente, se desconoce que los cambios han intervenido hasta que se

detectan y se diagnostican sus efectos. En concordancia con esta situación, se supone que  $\tau$  se desconoce.

Si ambos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  son conocidos, entonces el diagnostico de SPC de elección es generalmente la carta de sumas acumulativas (cusum), con su tiempo mínimo para la propiedad de detección. La formulación de punto de cambio es por lo tanto, de interés en lugares donde no se conoce al menos uno de estos parámetros.

Se consideran la siguientes situaciones  $\theta_0$  y  $\theta_1$

- $\theta_0$  conocido,  $\theta_1$  desconocido; y
- Tanto  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  desconocido.

El enfoque para probar un punto de cambio para ambas situaciones; la *log-verosimilitud* de la secuencia  $X_1, \dots, X_n$  bajo el modelo de punto de cambio es la suma de dos términos: una porción de la secuencia cuando el proceso está en control y otra cuando está fuera de control:

$$\log L(\theta_0, \theta_1, \tau) = A(\theta_0, \tau) + B(\theta_1, \tau, n), \quad (3.32)$$

donde  $A(\theta_0, \tau) = \sum_{i=1}^{\tau} \log f(X_i, \theta_0)$  es la porción bajo control, y  $B(\theta_1, \tau, n) = \sum_{i=\tau+1}^n \log f(X_i, \theta_1)$  es la que está fuera de control. Si alguno de los parámetros es desconocido, entonces se estiman mediante la maximización de la verosimilitud. Si por ejemplo,  $\theta_1$  es desconocido, como comúnmente es, entonces se sustituye por el valor  $\hat{\theta}_1$  maximizando el término  $B(\theta_1, \tau, n)$ , y de forma similar para  $\theta_0$ . El punto de cambio  $\tau$  se estima como el valor  $k$  que maximiza la suma  $A(\theta_0, k) + B(\hat{\theta}_1, k, n)$  si  $\theta_0$  es conocido, y si  $\theta_0$  es desconocido se estima con  $A(\hat{\theta}_0, \tau) + B(\hat{\theta}_1, \tau, n)$ .

Si no hay un punto de cambio, entonces la *log-verosimilitud* es igual a  $A(\theta_0, n)$ . De este modo la prueba de razón de verosimilitud generalizada convencional (GLR) para la presencia de un punto de cambio es

$$2[\log L(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{t}) - A(\hat{\theta}_0, n)], \text{ si } \theta_0 \text{ es desconocido y}$$

$$2[\log L(\theta_0, \hat{\theta}_1, \hat{t}) - A(\theta_0, n)] \text{ si } \theta_0 \text{ es conocido.}$$

### 3.3.2.2 MONITOREO DE UN PROCESO A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO

Según Hawkins, Qiu, y Zamba (ob. cit), en la Fase II del control estadístico de proceso, el tamaño de la muestra no es fijo. Ya que mientras se piense que el proceso esté bajo control, lecturas adicionales se añaden al registro y se incorporan en las gráficas de control. A medida que se obtiene cada nueva lectura, la decisión debe basarse en si el proceso aun parece estar en control.

Si es así, entonces la lectura se incorpora en la historia y se permite que el proceso continúe. Sin embargo, si la lectura da lugar a la sospecha de que el proceso está fuera de control, entonces el proceso se detiene para el diagnóstico y medidas correctivas.

Volviendo a la formulación genérica de punto de cambio, un procedimiento exclusivamente orientado para punto de cambio puede ser descrito como:

- Cuando cada nueva observación se agregue, calcular

$$C_n = \max_k 2[\log L(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, k) - A(\hat{\theta}_0, n)] \quad (3.33)$$

- Si  $C_n < c_n$  entonces se concluye que no hay evidencia de un cambio.
- Si  $C_n > c_n$  entonces se concluye que hay evidencia de que sale de control.

La secuencia  $c_n$  es una secuencia de límites de control elegido para controlar el comportamiento de falsas alarmas del esquema. Encontrar a esta secuencia  $c_n$  no parece ser susceptible de análisis teórico y las implementaciones reales del método de punto de cambio han utilizado la simulación para encontrar valores adecuados.

### **3.3.2.3 MODELO DE ANALISIS DE PUNTO DE CAMBIO PARA UN CAMBIO EN EL VECTOR DE MEDIAS Y/O MATRIZ DE COVARIANZA**

Zamba y Hawkins (2009) proponen un modelo de análisis de punto de cambio para el control estadístico multivariante de procesos, y teniendo además como posibles áreas de aplicación los procesos a corto plazo, monitoreo ambulatorio, monitoreo de enfermedades y vigilancia sindrómica. Esta herramienta permite monitorear simultáneamente el vector de medias y/o matriz de covarianza mediante un gráfico de control, es decir, proporciona un solo diagnóstico para detectar un cambio en el vector de medias, matriz de covarianza, o en ambos, en lugar de dos diagnósticos por separado.

Este modelo asume que mientras el proceso esté en control, las lecturas siguen una distribución normal multivariante comúnmente independiente con algún vector de medias  $\mu$  y estructura de covarianza  $\Sigma$ . Lo anterior se conoce en el control estadístico multivariante de procesos como ajuste normal multivariante. Esta distribución de probabilidad según Chen y Gupta (2011) es la más común en la práctica.

A continuación, se expone el modelo a desarrollar,

Supongamos la existencia de un tiempo,  $\tau$ , cuando el vector de medias y/o matriz de covarianza cambian. El modelo de trabajo

$$\mathbf{X}_i \sim \begin{cases} N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) & \text{si } i \leq \tau \\ N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1) & \text{si } i > \tau \end{cases}$$

define la formulación de punto de cambio en un caso normal  $p$ -variado. Los parámetros  $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_1$  son los vectores de media y matrices de covarianza fuera y dentro del control. Bajo el supuesto de ningún cambio, el modelo puede ser resumido en términos de hipótesis conjunta de la siguiente manera:

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1$$

Esta hipótesis se puede dividir en la combinación de dos hipótesis compuestos, la primera es igual a

$$H_{0,1}: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1 \mid \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1$$

y la segunda es igual

$$H_{0,2}: \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1$$

Dado  $\bar{\mathbf{X}}_{i,j}$  y  $\mathbf{S}_{i,j}$  el vector de medias y la matriz de covarianza muestral de máxima verosimilitud para los vectores  $\mathbf{X}_{i+1}, \mathbf{X}_{i+2}, \dots, \mathbf{X}_j$ ; es decir,

$$\bar{\mathbf{X}}_{i,j} = \frac{1}{(j-i)} \sum_{k=i+1}^j \mathbf{X}_k, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{S}_{i,j} = \sum_{k=i+1}^j (\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_{i,j})(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_{i,j})' / (j-i) \quad (3.35)$$

Zamba y Hawkins (2009), usando el Lema 10.3.1 (Anderson (1984)), la estadística de prueba de razón de verosimilitud para probar  $H_0$  donde se asume un punto de división en la observación  $k$  es

$$\Lambda_{k,n} \propto \frac{|\mathcal{S}_{0,k}|^{(k-1)/2} \times |\mathcal{S}_{k,n}|^{(n-k-1)/2}}{|\mathcal{S}_{0,n}|^{(n-1)/2}}, \quad (3.36)$$

y la familiar razón de verosimilitud logarítmica negativa doble es:

$$-2\log \Lambda_{k,n} = (n - 1)\log|\mathcal{S}_{0,n}| - (k - 1)\log|\mathcal{S}_{0,k}| - (n - k - 1)\log|\mathcal{S}_{k,n}|. \quad (3.37)$$

El estadístico de prueba de la razón de verosimilitud generalizada tiene una distribución asintótica chi-cuadrado con  $p(p + 3)/2$  grados de libertad. Esta distribución asintótica sería relevante si tanto  $k$  y  $n - k$  fueran grandes. Sin embargo, en aplicaciones del SPC, la respuesta rápida es importante, lo que lleva a la conclusión de que los procedimientos del SPC deben ser capaces de manejar configuraciones en las que un segmento o los segmentos son cortos. Por esta razón, es recomendable utilizar la corrección de Bartlett de normalización del GLR por su expectativa nula, un procedimiento que se conoce para mejorar drásticamente la aproximación chi-cuadrado.

Bajo la distribución en control con la secuencia de longitud  $n$  dividida en el punto  $k$ , la media del log del estadístico de razón de verosimilitud es dada por

$$E(-2\log \Lambda_{k,n}) = g_{k,n} \quad (3.38)$$

donde

$$g_{k,n} = p[\log 2 + (n-1)\log(n-1) - (n-k-1)\log(n-k-1) - \\ (k-1)\log(k-1)] + \sum_{j=1}^p \left[ (n-1)\psi\left(\frac{n-j}{2}\right) - (k-1)\psi\left(\frac{k-j}{2}\right) - (n-k-1)\psi\left(\frac{n-k-j}{2}\right) \right], \quad (3.39)$$

donde  $\psi(z) = d(\log\Gamma(z))/dz$ , es la función digamma.

La corrección Bartlett entonces consiste en utilizar la estadística de prueba

$$G_{k,n} = -2\log \Lambda_{k,n}(p(p+3))/g_{k,n} \quad (3.40)$$

el cual, para un  $k$  fijo, tiene una distribución chi-cuadrada a escala aproximada.

Por último resta la aplicación del modelo en el monitoreo en curso del proceso. A continuación se describe el procedimiento específico de Zamba y Hawkins (2009),

- Para cada nueva observación  $n$ , calcular el  $G_{k,n}$  para cada  $k$  en el rango factible  $p+1, \dots, n-p-1$ .
- Calcular el  $G_{\max,n}$ , el cual es el máximo de estos  $G_{k,n}$ .
- Si  $G_{\max,n}$  supera un límite de control  $h_{n,p,\alpha}$ , hay una señal de cambio. Se estima el momento de la ocurrencia del cambio por el valor de  $k$  que conduce al máximo  $G_{k,n}$ .
- De lo contrario, se continúa con el siguiente vector observación.

Los límites de control  $h_{n,p,\alpha}$  son elegidos para fijar la probabilidad de una falsa alarma en cada observación a  $\alpha$ . En otras palabras, son la solución a la ecuación

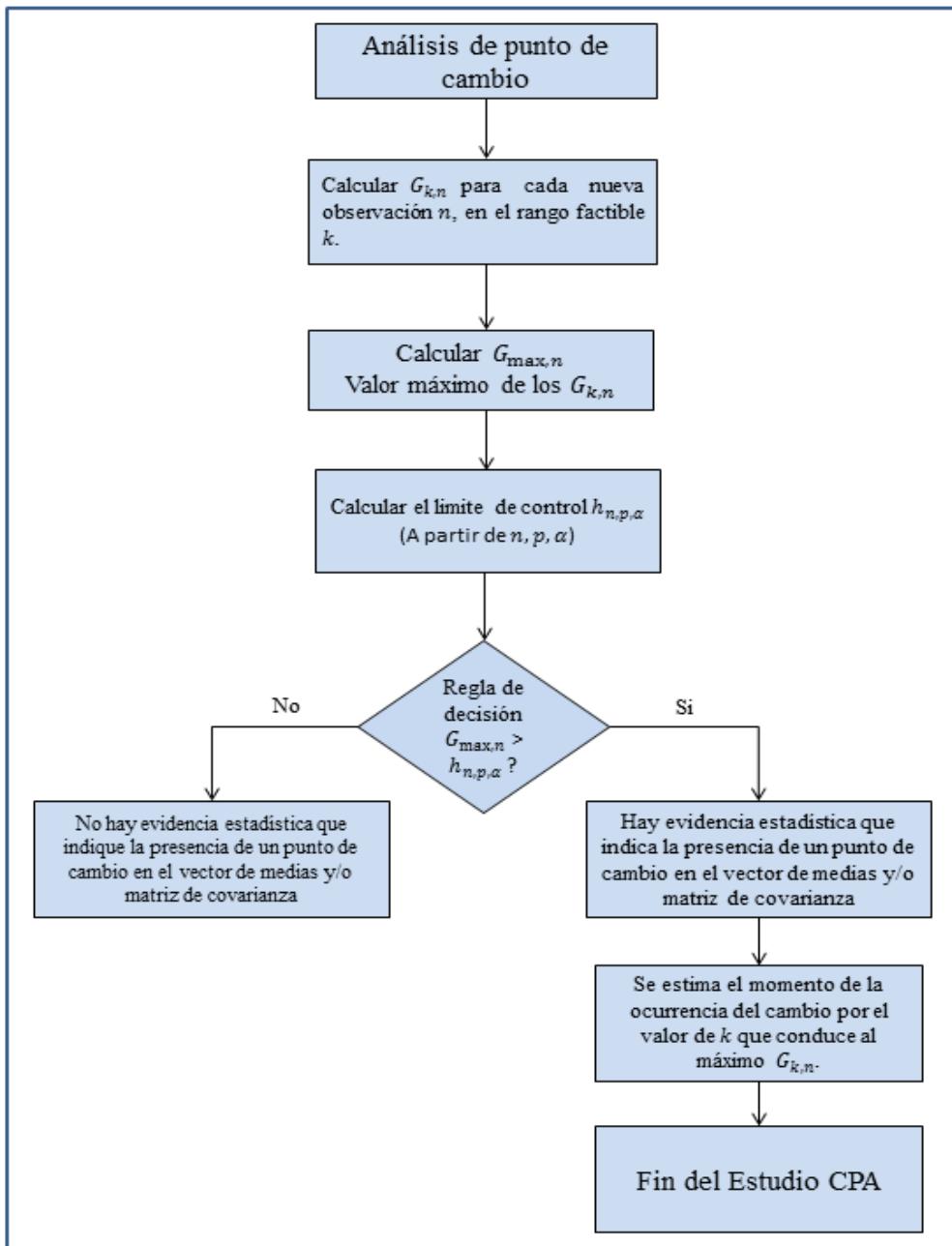
$$P[G_{\max,n} > h_{n,p,\alpha} | G_{\max,j} \leq h_{j,p,\alpha}; j < n] = \alpha \quad (3.41)$$

Como una solución analítica a las ecuaciones parece intratable, los autores estimaron  $h_{n,p,\alpha}$  a través de simulaciones. Esto implicó 5 millones de simulaciones para estimar los límites de longitudes de series de hasta 150. Cubrieron valores  $\alpha$  correspondientes a 0.0005, 0.001, 0.002, 0.005 y 0.01, respectivamente, a ARL fijos de 2000, 1000, 500, 200, y 100, para dimensiones de  $p = \{2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25\}$ . En el apéndice I se muestran los límites de control que Zamba y Hawkins (ob. cit) obtuvieron mediante las simulaciones.

Zamba y Hawkins (ob. cit), dicen que en un sentido puramente matemático, la formulación de punto de cambio de parámetros desconocidos se puede ejecutar con un  $n$  tan pequeño como  $2(p + 1)$ , el cual es el tamaño de muestra mínimo requerido tanto para  $S_{0,k}$  y  $S_{k,n}$ , de manera que estas no sean no singulares.

### • CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL

Para el ploteo del gráfico de control, si se tiene una muestra de tamaño  $N$ , se determina los  $G_{\max,n}$  para cada  $n$  en el rango factible  $2(p + 1), \dots, N$ . Posteriormente estos  $G_{\max,n}$  son llevados al gráfico de control. En el caso de los límites de control  $h_{n,p,\alpha}$ , estos se seleccionan de los valores tabulados por Zamba y Hawkins (ob. cit). En la **Figura 10** se muestra el diagrama de flujo del estudio de análisis de punto de cambio.



**Figura 10.** Diagrama de flujo: estudio de análisis de punto de cambio desarrollado por Zamba y Hawkins (2009). Fuente: propia.

## CAPÍTULO IV

### DISEÑO DE LA HERRAMIENTA

#### **4.1 PRESENTACION**

Este capítulo presenta de manera detallada la estructura y lógica formal de la herramienta computacional desarrollada en MATLAB, con el objeto de lograr una mejor comprensión con respecto a su composición.

La herramienta desarrollada permite implementar un análisis de Fase I del SPC, el cual contempla una depuración de valores atípicos previa al estudio de normalidad multivariante, estudio de estacionariedad y estudio de independencia o autocorrelación; además permite la construcción del gráfico de control del análisis de punto de cambio, para el monitoreo en curso del proceso, es decir, permite implementar un análisis de Fase II del SPC. La herramienta computacional es aplicable solo a vectores de características de calidad (vectores aleatorios).

El programa principal y los subprogramas diseñados para herramienta de este trabajo de grados, se encuentran en su totalidad en el Apéndice II. Para poseer una mejor comprensión con respecto a la utilización del programa, consulte el manual del usuario del Apéndice III.

#### **4.2 DISEÑO GENERAL DE LA HERRAMIENTA.**

Al ejecutar la etapa inicial del programa se presenta una breve explicación de su función, y además, se visualizan las pruebas de hipótesis estadística que el programa realiza en el análisis de Fase I. Si el usuario lo desea el programa le permite saltar este análisis, en caso contrario, el programa presenta un mensaje que indica la

necesidad de ingresar los datos a utilizar en este estudio. Una vez ingresados los datos, el programa verifica que estos no provengan de procesos univariantes.

Luego, se inicia la detección de valores atípicos; en el caso que se presenten observaciones de este tipo, el programa enseñara un mensaje indicando la necesidad de ingresar nuevamente la data depurada. Posteriormente, se realiza el estudio de normalidad multivariante; solo cuando estos datos no se ajustan a esta distribución de probabilidad, el usuario tiene la opción de detener por completo la ejecución del programa. A continuación, se realiza un estudio de estacionariedad e independencia y, al igual que en el análisis de normalidad multivariante, únicamente cuando estos datos no cumplan estas condiciones, el usuario puede detener la ejecución del programa por completo.

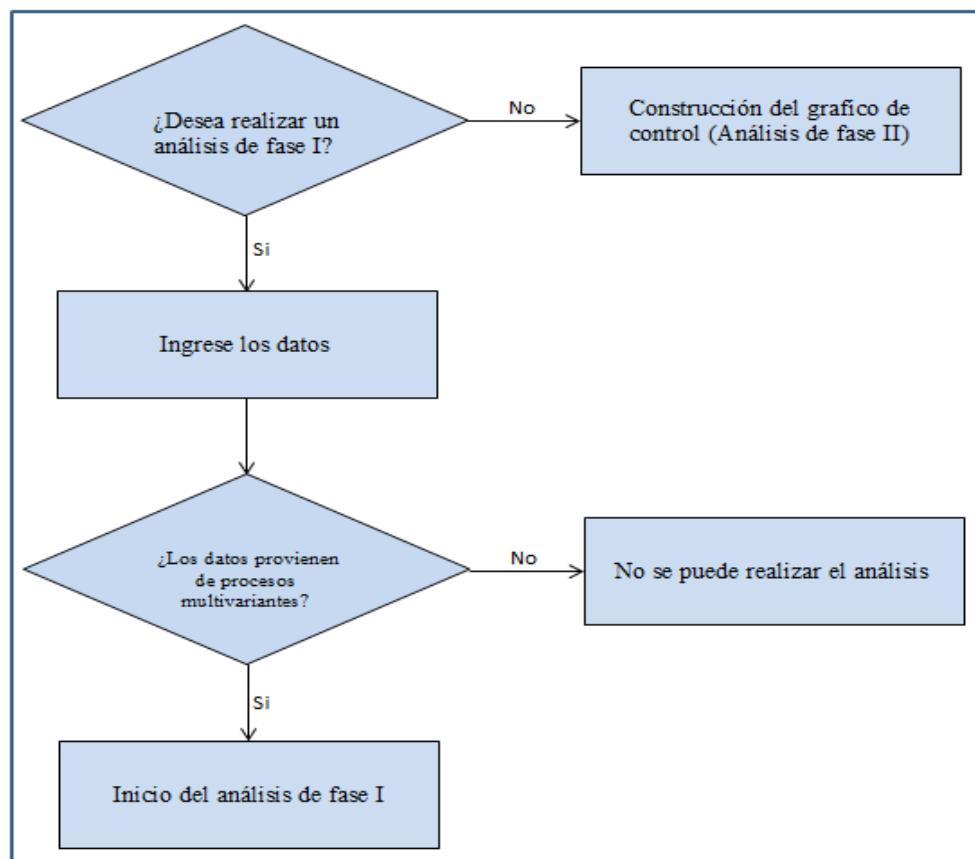
Por último, se procede a construir el grafico de control basado en el análisis de punto de cambio, para lo cual el usuario, deberá ingresar la data del proceso a monitorear. En esta Fase final, el programa verifica que estos datos no provengan de procesos univariantes, y además comprueba que estos, posean las dimensiones vectoriales válidas para la construcción del gráfico.

#### **4.2.1 ENTRADA DE BASE DE DATOS.**

El programa requiere que los datos (independientemente de la fase del SPC) posean una configuración específica. Para que los datos puedan ser leídos, deben estar escritos en un archivo de tipo “.xls” para “EXCEL 1997-2003” o “.xlsx” para “EXCEL 2007-2010”. Este archivo no debe tener caracteres alfabéticos, ni títulos en la hoja Excel, solo números. Asimismo, los datos que se ingresen por medio de la lectura deben estar predisuestos de la siguiente manera: cada vector de observación debe colocarse en las filas del archivo de forma sucesiva y, de manera descendiente según el orden de estos vectores.

#### 4.2.2 ANÁLISIS DE FASE I DEL SPC

Si el usuario desea realizar un análisis de Fase I, en primera instancia el programa solicitará ingresar los datos a utilizar en estudio. Luego, se verifica que estos no provengan de procesos univariantes, es decir, que estos no sean vectores de observación. En el caso que los datos no sean univariantes, se procede con el análisis. Es importante resaltar que el programa provee una opción, con respecto a la realización o no de las distintas pruebas de hipótesis estadísticas implementadas en este análisis. En la **Figura 11** se muestra la secuencia lógica con respecto a la etapa inicial del análisis de Fase I.



**Figura 11.** Procedimiento implementado en esta investigación para la construcción del gráfico de control. Fuente: propia.

#### **4.2.2.1 DETECCIÓN DE VALORES ATÍPICOS**

La detección y eliminación de valores atípicos (*outliers*) en una muestra es importante, debido a que estas observaciones afectan la integridad de los datos, lo cual podría ocasionar, que quizás el usuario tome decisiones erradas en el resto del análisis de Fase I. La prueba de hipótesis a utilizar para la detección de valores atípicos, es la diseñada por Schwager y Margolin (1982). Esta prueba se implementó debido a que permite detectar múltiples *outliers*, y además esta no corre con el riesgo de enmascaramiento.

En el programa esta prueba se realiza, con una función desarrollada por los autores de este trabajo de grado llamada “margoline” (`margoline(A,alpha)`), esta función prueba la hipótesis nula de que no hay valores atípicos presentes, contra la hipótesis alternativa de que hay valores atípicos presentes. Como parámetros de entrada se encuentra la matriz de los datos leídos, más el nivel de significancia  $\alpha$  ingresado por el usuario. La salida de esta función está representada por un valor numérico. A continuación se presentan sus significados:

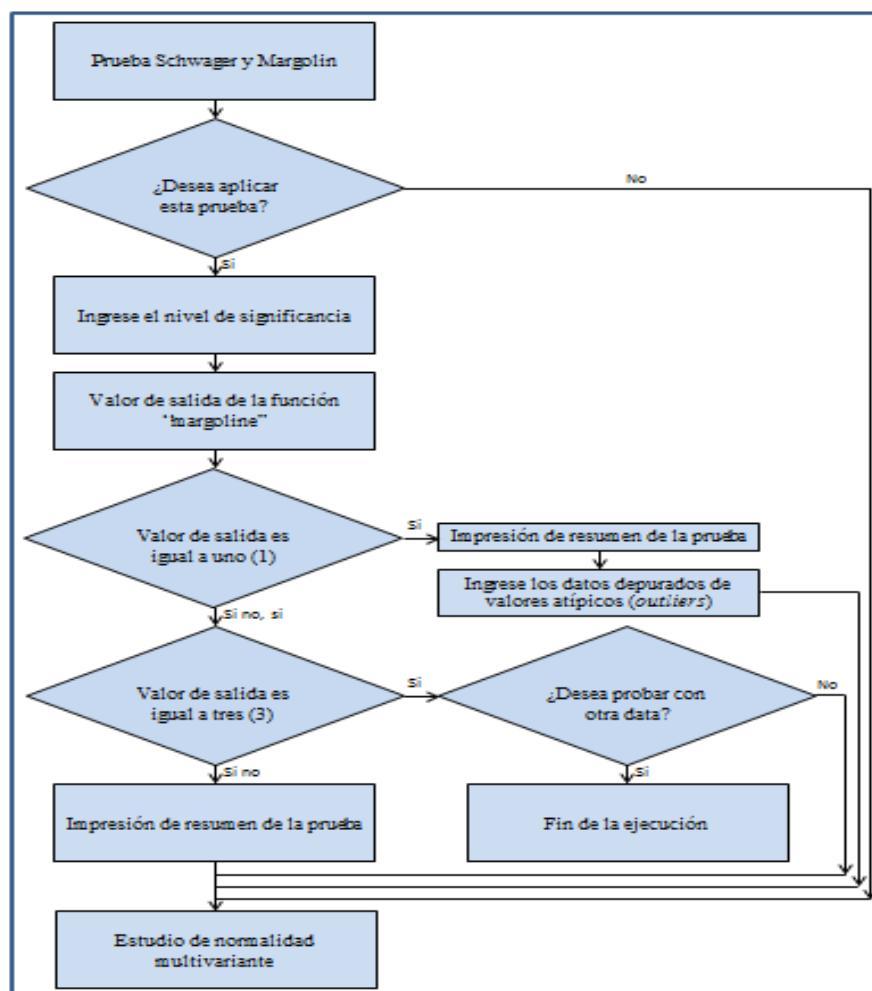
- Si la salida es igual a cero (0) no se rechaza la hipótesis nula  $H_0$ , es decir, no se presentan valores atípicos en la muestra. En este caso el programa presentara además el resumen de la prueba Schwager y Margolin (ob. cit), el cual incluye, las distancias estandarizadas de cada vector de observación de la muestra.
- Si la salida es igual a uno (1) se rechaza la hipótesis nula, es decir, se presentan valores atípicos en la muestra. Si es este caso el programa presentara un resumen de la prueba Schwager y Margolin (ob. cit), y al igual que en el caso anterior, se muestran las distancias estandarizadas de cada vector de observación de la muestra. Además se imprimirá un mensaje que señala la necesidad de ingresar los datos depurados de valores atípicos. Este

mensaje también sugiere que como criterio de eliminación, seleccione las observaciones que presenten grandes distancias estandarizadas.

- Una salida igual a tres (3) representa que la matriz de covarianza muestral de los datos es singular, es decir, la matriz no es invertible. En este caso, el programa presentara una opción al usuario que permite detener la ejecución del programa por completo.

Se resalta que al inicio de esta prueba el usuario tiene como opción no aplicarla.

En la **Figura 12** se muestra la secuencia lógica de la prueba Schwager y Margolin en el programa.



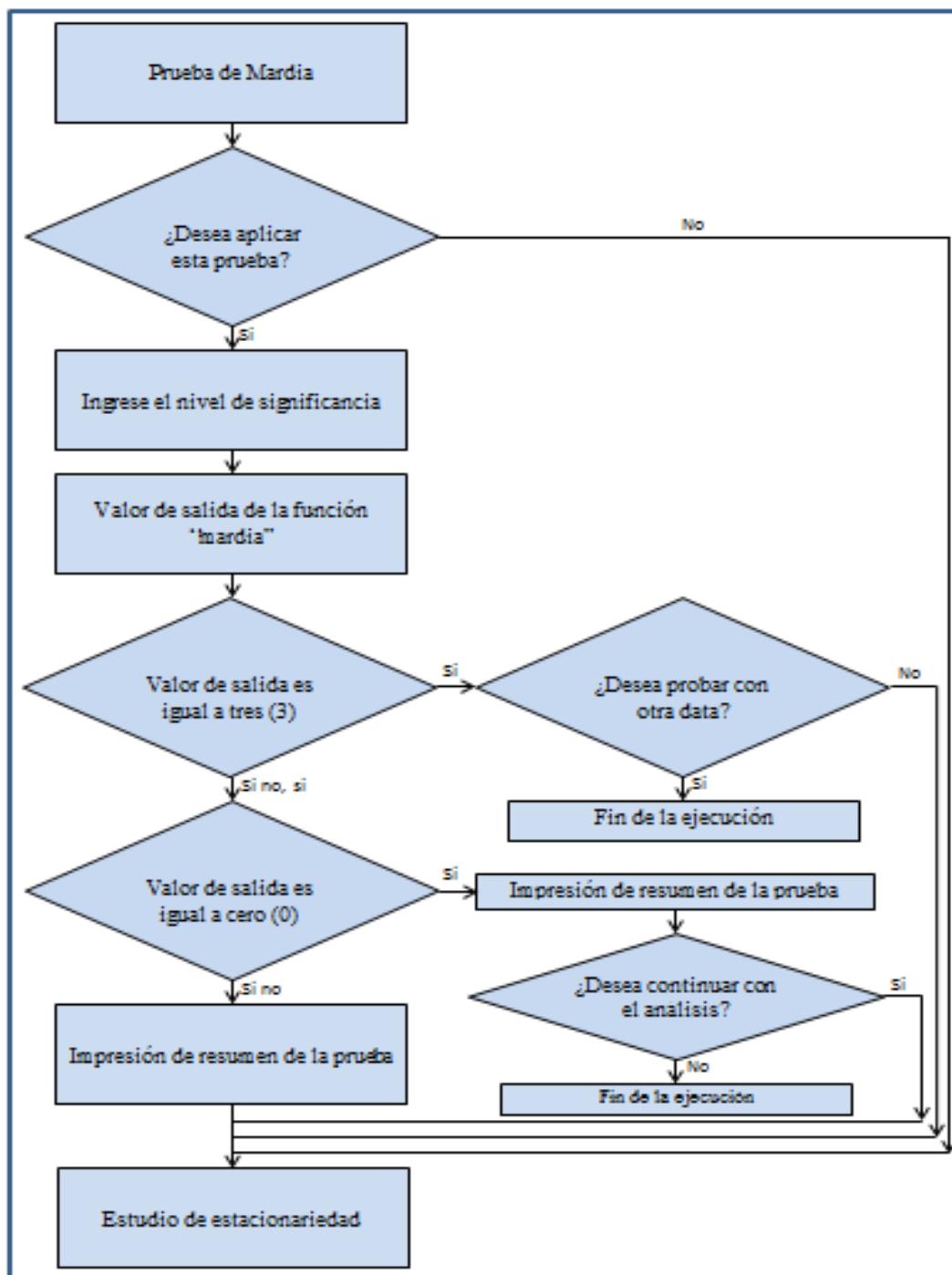
**Figura 12.** Secuencia lógica de la prueba de Schwager y Margolin en el programa.Fuente: propia.

#### 4.2.2.2 ESTUDIO DE NORMALIDAD MULTIVARIANTE

Dentro de esta etapa, se prueba el supuesto estadístico de normalidad multivariante que el modelo de análisis de punto de cambio requiere. En esta fase se hace uso de la prueba de asimetría y curtosis de Mardia (1970), la cual es representada en el programa por la función “mardia” (`mardia(A,alpha)`). Esta función prueba la significancia de la asimetría y curtosis multivariante, como parámetros de entrada se encuentran la matriz datos leídos y el nivel de significancia ingresado por el usuario. Su salida al igual que en la función anterior es un valor numérico. A continuación se muestran sus significados:

- Si la salida es igual a uno (1) no se rechaza la hipótesis nula  $H_0$ , es decir, los datos se ajustan a una distribución normal multivariante. El programa presentara en este caso además una tabla resumen de la prueba de Mardia (ob. cit), en donde se visualizan los coeficientes de asimetría y curtosis estimados, los estadísticos de prueba y valores P.
- Si la salida es igual a cero (0) se rechaza la hipótesis nula, es decir, los datos no se ajustan a una distribución normal multivariante. Al igual que en la salida anterior se presenta un resumen de la prueba, en conjunto con una opción que le permite al usuario detener el estudio.
- Una salida igual a tres (3) representa que la matriz de covarianza muestral de los datos es singular. Con esta salida el programa también presentara una opción que permite detener la ejecución por completo.

La función “mardia” fue desarrollada por los autores de este trabajo de grado. Al igual que en la prueba anterior, el usuario tiene como opción saltar este estudio. En la **Figura 13** se muestra la secuencia lógica de la prueba de Mardia en el programa.



**Figura 13.** Secuencia lógica de la prueba de Normalidad Multivariante de Mardia en el programa.  
Fuente: propia.

#### 4.2.2.3 ESTUDIO DE ESTACIONARIEDAD

En esta Fase el programa analiza si la serie de tiempo multivariante es débilmente estacionario (también llamada estacionariedad en amplio sentido). Esta condición es importante, ya que una serie de tiempo multivariante que presente este comportamiento, es producto de un proceso bajo control estadístico. Para probar la estacionariedad se implementa la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey (1989), esta examina los autovalores de la matriz de coeficientes de un vector autorregresivo (VAR) especificado, con el fin de probar la presencia de una raíz unitaria. En el programa la función que representa esta prueba es llamada “pruebaf” (pruebaf(A,alpha)), y esta fue desarrollada por los autores de este trabajo de grado.

El estadístico de prueba resultante en esta prueba de hipótesis, debe ser contrastado con el valor crítico  $\tau$  (**tau**) desarrollado por Dickey (1976). Para la determinación del valor critico  $\tau$ , se hizo uso de una función llamada “dfcrit” (dfcrit(tratio,ssize,variant)), esta, fue desarrollada por Kanzler (1998) en la Universidad de Oxford, Inglaterra. Esta función, calcula el valor crítico  $\tau$  a partir de una superficie de respuesta desarrollada por MacKinnon (1991), para niveles de significación de 0.01, 0.05 y 0.1.

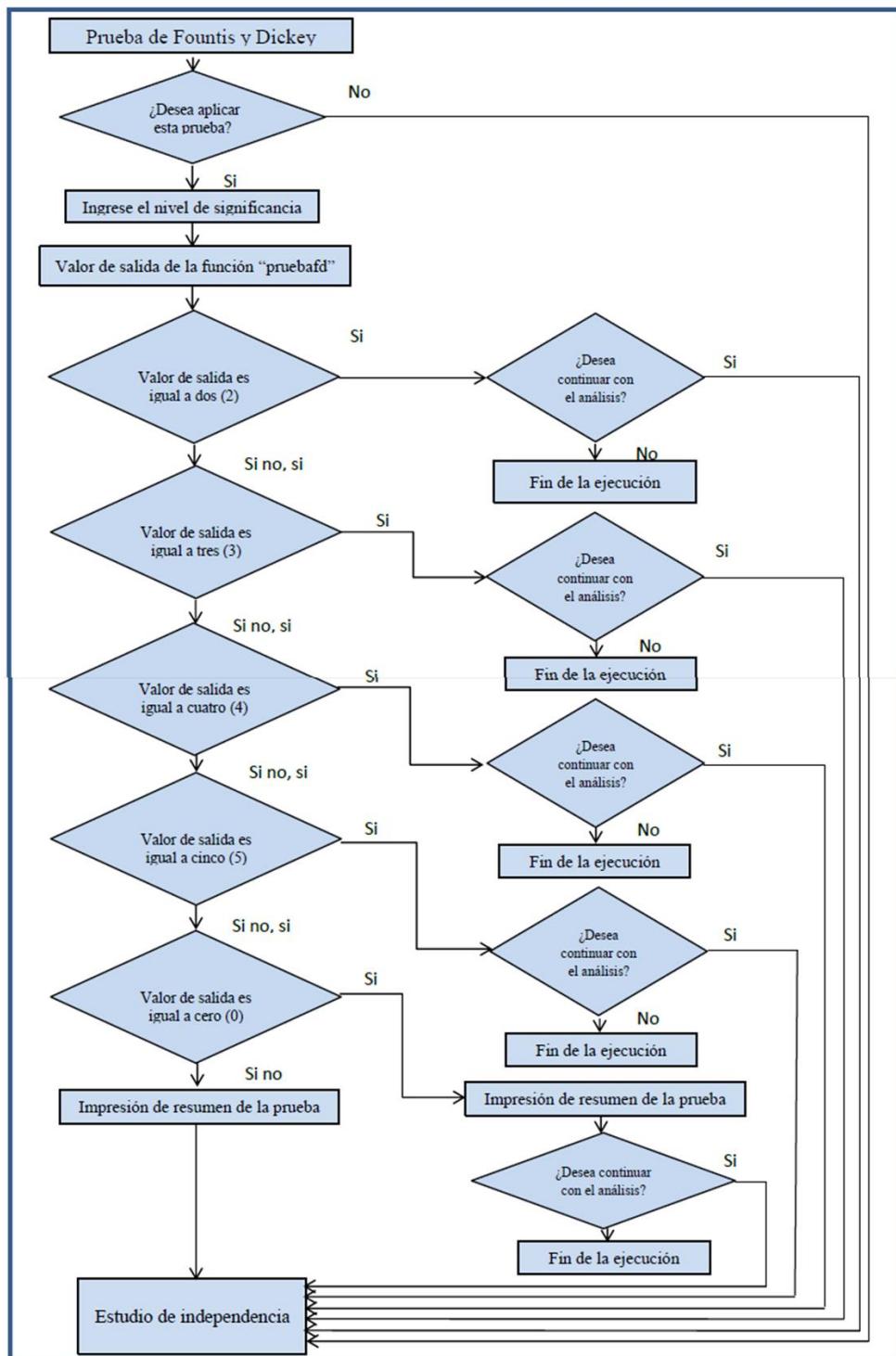
Las salidas de la función “pruebaf” son valores numéricos. A continuación se exponen sus significados:

- Si la salida es igual a uno (1) se rechaza la hipótesis nula, es decir, el proceso es estacionario en amplio sentido. En este caso el programa presentara una tabla resumen de la prueba de Fountis y Dickey (ob. cit), en la cual se presenta el orden del modelo VAR, el valor de la estadística de prueba y el valor critico  $\tau$ .
- Si la salida es igual a cero (0) no se rechaza la hipótesis nula, es decir, el proceso no es estacionario en amplio sentido. En este caso también se

presentara una tabla resumen de la prueba de Fountis y Dickey (ob. cit), además, de una opción que le permite al usuario detener el estudio.

- Una salida igual a dos (2) representa que el usuario a ingresado un nivel de significancia no disponible. En este caso, el programa presentara una opción que permite al usuario detener el estudio, debido a que no se ha podido validar la estacionariedad en amplio sentido.
- Una salida igual a tres (3) se presentara cuando existan matrices singulares en los cálculos internos de la función “pruebafdf”. Aquí también se exhibirá una opción que permite al usuario detener el estudio por completo.
- Una salida igual a cuatro (4) significara que el orden del modelo VAR no puedo ser estimado, lo que conlleva a la no realización de la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey (ob. cit). El programa en este caso presentara una opción que permite al usuario detener el estudio.
- Una salida igual a cinco (5) expresara que la serie de tiempo multivariante es explosiva. Esto implicara la no realización de la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey (ob. cit). El programa también en este caso presentara una opción que permite al usuario detener el estudio.

El usuario al inicio de la prueba tiene además como opción saltar este estudio. En la **Figura 14** se muestra la secuencia lógica de la prueba de Fountis y Dickey en el programa.



**Figura 14.** Secuencia lógica de la prueba de Fountis y Dickey en el programa.Fuente: propia.

#### **4.2.2.4 ESTUDIO DE INDEPENDENCIA**

El estudio de independencia o autocorrelación es importante, debido a que esta, es una condición que requiere el modelo de análisis de punto de cambio a desarrollar. Este estudio se realiza en dos categorías:

- La primera categoría prueba la independencia en cada componente univariante de la serie de tiempo multivariante.
- La segunda categoría prueba la exsistencia de una dependencia lineal dinamica en los datos de la serie de tiempo multivariante.

La primera categoría es analizada mediante la prueba de Ljung y Box (1978). Esta prueba evalúa la hipótesis conjunta de que todos los coeficientes de autocorrelación son simultáneamente iguales a cero. Esta prueba se encuentra representada por la función “LBprueba” (LBprueba(A,alpha)), la cual fue desarrollada por los autores de este trabajo de grado. Esta función aplica la prueba de Ljung y Box (ob. cit) en cada componente univariante de la serie de tiempo multivariante. El usuario deberá ingresar el nivel de significancia  $\alpha$ , el cual será el utilizado para cada una de las series de tiempo.

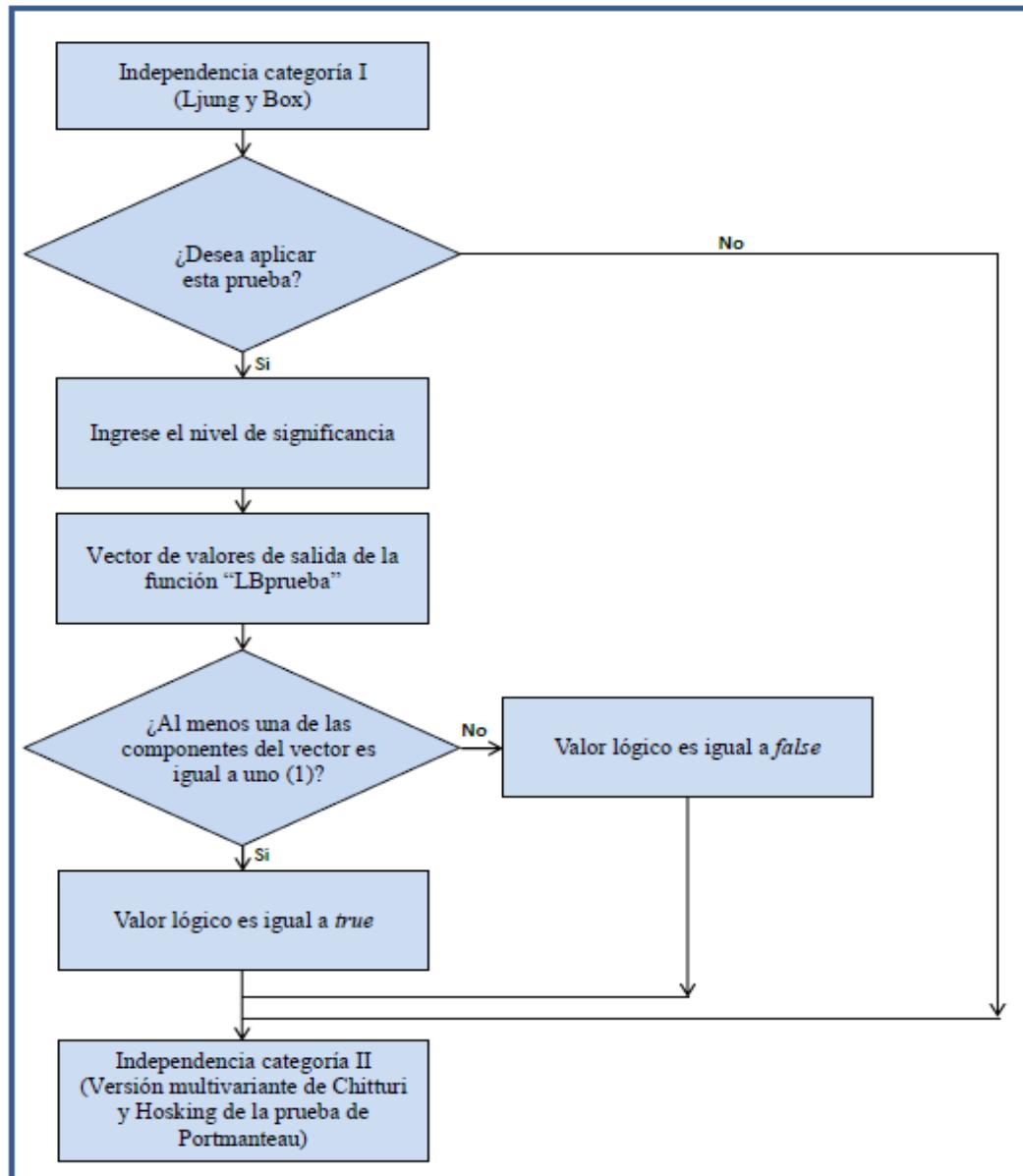
Una vez finalizado el análisis de la primera categoría el programa imprime una tabla resumen, en donde se muestran las estadísticas de prueba, grados de libertad (debido a que la estadística se ajusta a una distribución chi-cuadrado) y P-VALOR, para cada una de las pruebas Ljung y Box realizadas. La función que realiza esta prueba tiene como salida un vector de valores cero (0) o uno (1), con número de componentes iguales e igualmente ordenados como en el vector de características de calidad estudiado. Si es uno, los datos de variable no son independientes, si es cero, los datos de esa variable son independientes. Si al menos una de las variable resulta no ser independientes el programa almacena un valor lógico denominado *true*, en caso contrario el programa almacenara el valor *false*.

Posteriormente se inicia la segunda categoría, en la cual se implementa la versión multivariante de la prueba de Portmanteau, desarrollada por Chitturi (1974) y Hosking (1981). Este contraste es representado por la función “portmprueba” (`portmprueba(A,alpha)`). La función “portmprueba” fue desarrollada por los autores de este trabajo de grado, y esta presenta como salida un valor numérico. A continuación se exhiben sus significados:

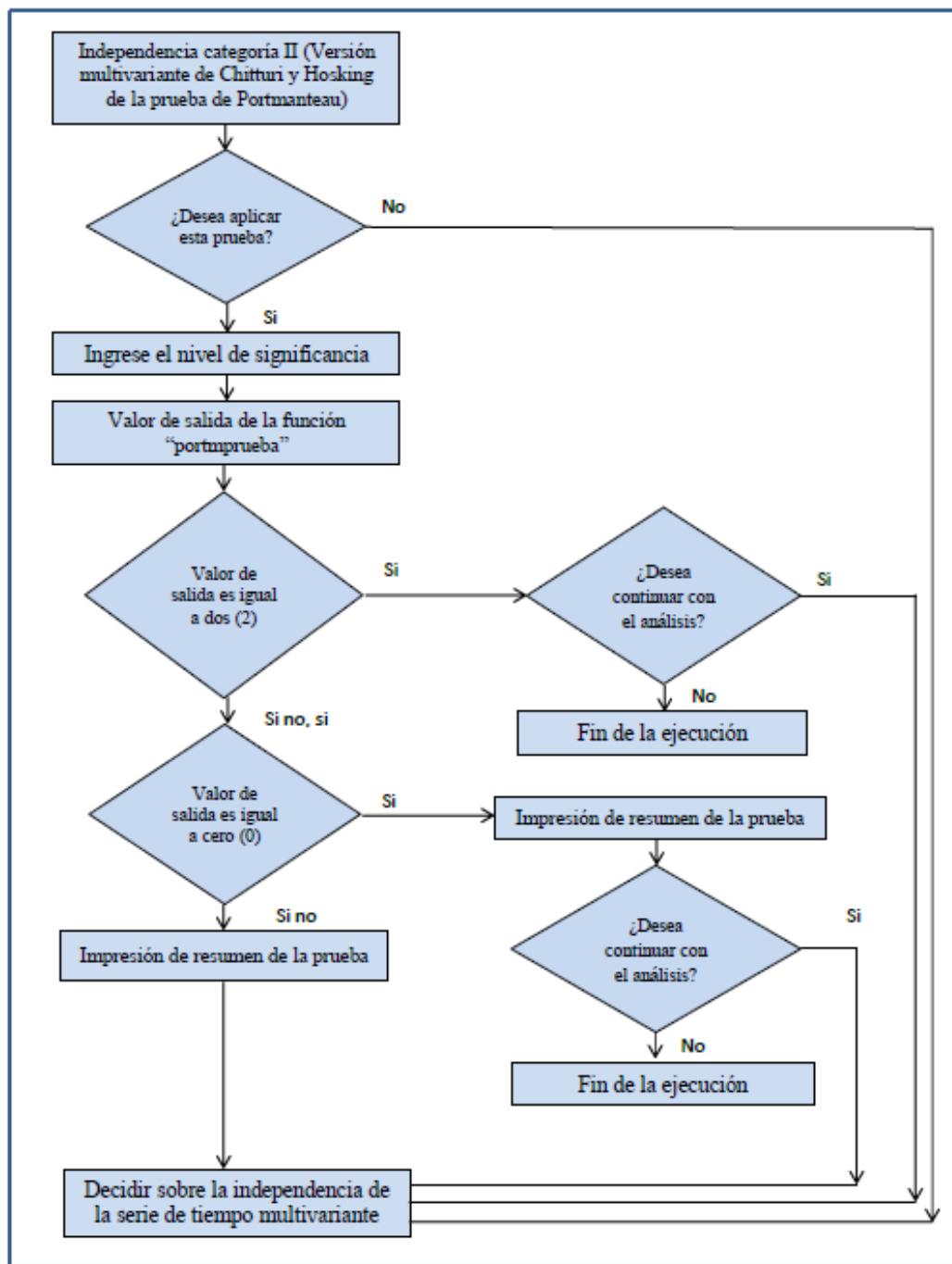
- Si la salida es igual a uno (1) no se rechaza la hipótesis nula, es decir, los datos son independientes en la categoría II. En este caso el programa presentara una tabla resumen de esta prueba.
- Si la salida es igual a cero (0) se rechaza la hipótesis nula, es decir, los datos no son independientes en la categoría II. En este caso el programa presentara también una tabla resumen de esta prueba, en conjunto con un mensaje en donde el usuario tiene la opción de detener la ejecución del programa.
- Una salida igual a dos (2) implica que la matriz de covarianza muestral es singular, en tal caso, el usuario tiene la opción de detener la ejecución del programa.

Se resalta que la decisión con respecto a la independencia o autocorrelación de la serie de tiempo, se decide según lo obtenido por el valor lógico de las pruebas Ljung y Box realizadas, en conjunto con la salida de la función de la versión multivariante de la prueba de Portmanteau. Además de lo anterior, se destaca que si el usuario decide no realizar la prueba de independencia en alguna de las categorías, el programa no podrá tomar una decisión con respecto a la independencia de los datos.

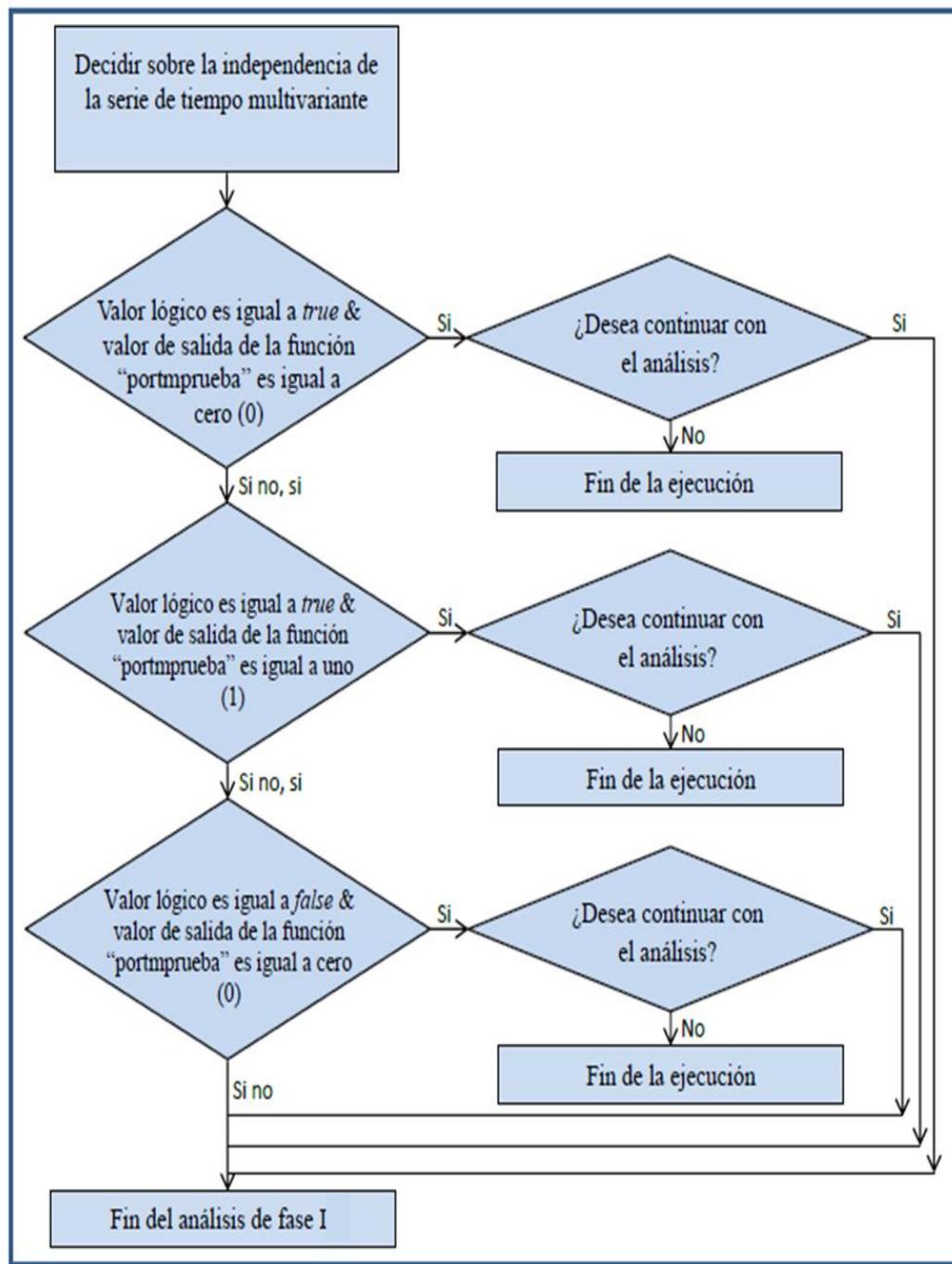
El usuario al inicio de ambas categorías de independencia tiene como opción saltar estos análisis. En las **Figuras 15, 16 y 17** se muestran las secuencias lógicas de estas pruebas en conjunto con la decisión que el programa realiza con respecto al estudio de independencia.



**Figura 15.** Secuencia lógica de la prueba de Ljung y Box (Independencia categoría I) en el programa.  
Fuente: propia.



**Figura 16.** Secuencia lógica de la prueba de Chitturi y Hosking (Independencia categoría II) en el programa. Fuente: propia.



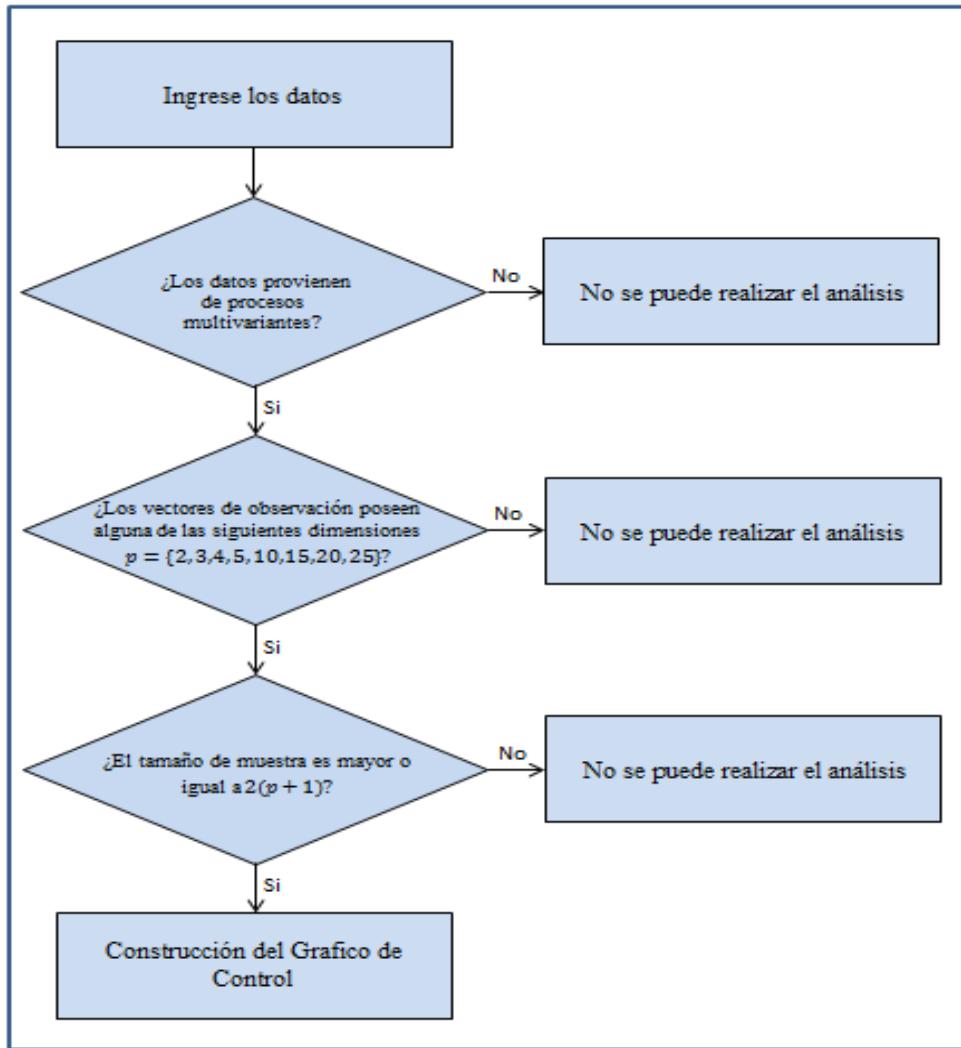
**Figura 17.** Secuencia lógica de la decisión conjunta con respecto a la independencia de los datos en el programa. Fuente: propia.

### 4.2.3 CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL

Al iniciar la Fase II del SPC, el programa exhibe un mensaje que indica la necesidad de ingresar los datos a analizar en esta fase. Una vez ingresado los datos el programa verifica tres condiciones:

- ¿Los datos son multivariantes?
- ¿Los vectores de observación (columnas de la matriz de datos en Excel) están entre las dimensiones validas, las cuales son  $p = \{2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25\}$ ?
- ¿El tamaño de la muestra es el mínimo requerido, el cual es  $2(p + 1)$ ?

En el caso que alguna de estas condiciones no se cumpla, el programa no construirá el grafico de control. En caso contrario se continúa con el resto de la ejecución, en donde se procede a construir el grafico de control basado en el análisis de punto de cambio. En la **Figura 18** se muestra la secuencia lógica del inicio del estudio de la Fase II.



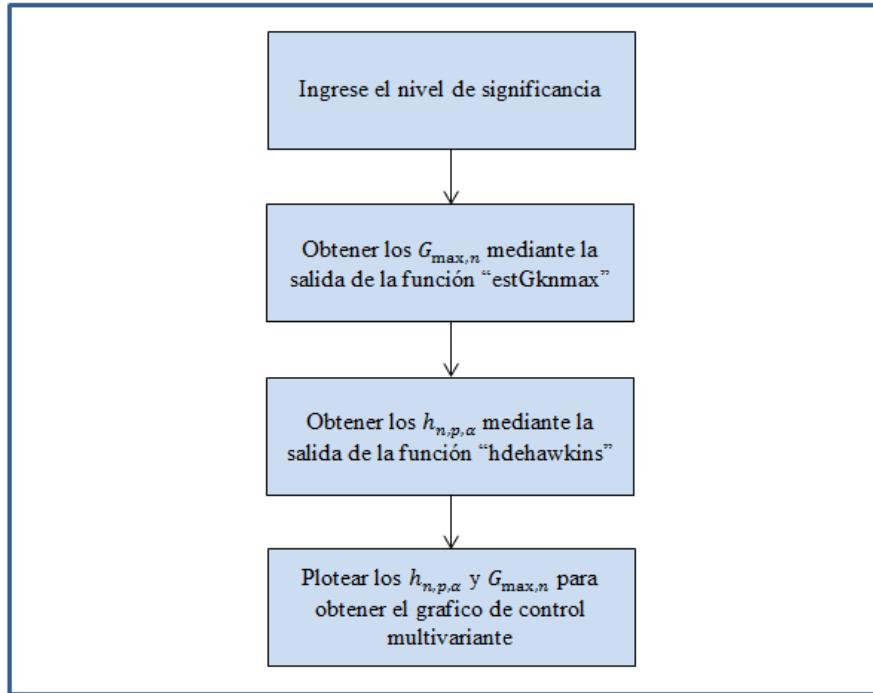
**Figura 18.** Secuencia lógica de la del inicio del estudio de la Fase II en el programa. Fuente: propia.

Zamba y Hawkins (2009) presentan un modelo de análisis de punto de cambio para el control estadístico multivariante de procesos, el cual será el desarrollado en la Fase II del SPC. Estos autores proponen el uso de estadísticas de razón de verosimilitud generalizadas ( $G_{k,n}$ ) aplicadas secuencialmente y adaptadas a un uso repetido, para detectar un cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianzas. A continuación se describe el procedimiento descrito por estos autores, para su aplicación en la Fase II:

- Para cada nueva observación  $n$ , calcular el  $G_{k,n}$  para cada  $k$  en el rango factible  $p+1, \dots, n-p-1$ .
- Calcular el  $G_{\max,n}$ , el cual es el máximo de estos  $G_{k,n}$ .
- Si  $G_{\max,n}$  supera un límite de control  $h_{n,p,\alpha}$ , hay una señal de cambio. Se estima el momento de la ocurrencia del cambio por el valor de  $k$  que conduce al máximo  $G_{k,n}$ .
- De lo contrario, se continúa con el siguiente vector observación.

Si se tiene una muestra de tamaño  $N$ , la función “estGknmax” (estGknmax(x,p,m)) determina los  $G_{\max,n}$  para cada  $n$  en el rango factible  $2(p+1), \dots, N$ . Esta función tiene como parámetros de entrada la matriz de datos de la fase II, el número de componentes del vector de características de calidad y el tamaño de la muestra. Para determinar los límites de control  $h_{n,p,\alpha}$ , el programa hace uso de la función “hdehawkins” (hdehawkins(n,p,alfa)), la cual solicitará al usuario el nivel de significancia  $\alpha$ . Los niveles de significancia disponibles son 0.0005, 0.001, 0.002, 0.005 y 0.01. Esta función determina  $h_{n,p,\alpha}$  en el mismo rango factible  $2(p+1), \dots, N$ . Posteriormente se grafican estos  $G_{\max,n}$  y  $h_{n,p,\alpha}$  para obtener el gráfico de control, para ello el programa hace uso de la función interna de MATLAB llamada “plot” (plot(X1,Y1,...,Xn,Yn)).

En la **Figura 19** se muestra la secuencia lógica para la construcción del gráfico de control.



**Figura 19.** Secuencia lógica de la construcción del grafico de control en el programa.Fuente: propia.

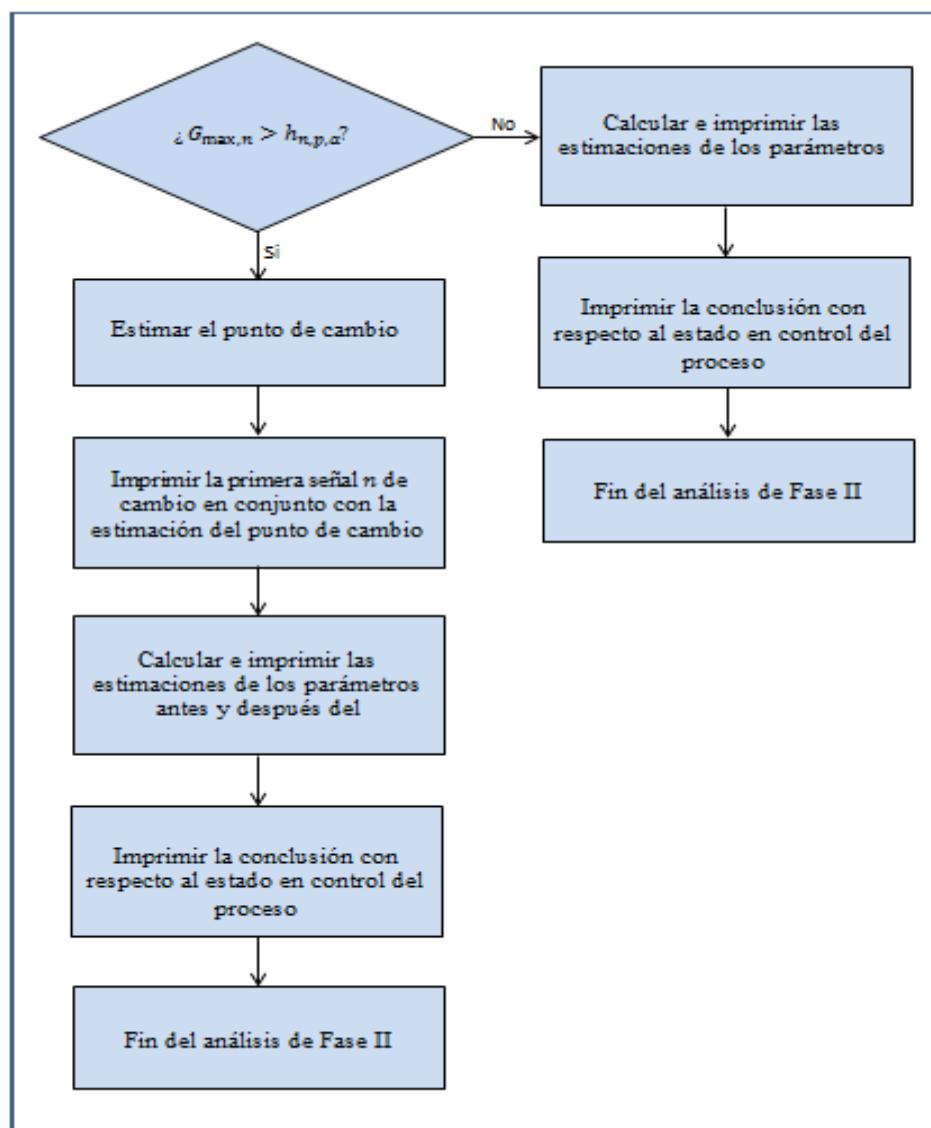
En el caso que exista un punto de cambio, el programa detecta la primera señal y, mediante la función “cambio” (`cambio(x,n,p)`) estima el punto en donde el cambio inicia, en función del  $n$  que supera el límite de control  $h_{n,p,\alpha}$ . Además de esto, el programa calcula e imprime el vector de medias, matriz de covarianza y matriz de correlación muestral, antes y después del cambio, haciendo uso de las funciones “vectmedia” (`vectmedia(x,m,i)`) , “Sij” (`Sij(x,m,i)`) y “correlacion” (`correlacion(x,m,i)`). En el caso que no exista un punto de cambio el programa estima estos parámetros con estas mismas funciones.

Por último, es importante recalcar que si existe un punto de cambio, el programa imprimirá la siguiente conclusión:

- El proceso está fuera de control, es decir, el proceso está operando en presencia de causas asignables de variación, en caso que este punto de cambio no exista, la conclusión impresa será:

- El proceso está bajo control estadístico, es decir, el proceso opera únicamente en presencia de causas fortuitas de variación.

En la Figura 20 se muestra la secuencia lógica con respecto a la estimación del punto de cambio y conclusión con respecto al estado en control del proceso.



**Figura 20.** Secuencia lógica de la estimación del punto de cambio y conclusión del análisis Fase II en el programa. Fuente: propia.

## CAPITULO V

### APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA

Este capítulo ilustra el uso de la herramienta computarizada desarrollada, para ello, se hace uso de casos prácticos reales de procesos industriales y casos teóricos. Con estos ejemplos se evalúa el desempeño y funcionamiento del programa, además, se demuestra la aplicabilidad de esta herramienta en el control estadístico multivariante de procesos.

#### 5.1 EJEMPLO 1 CORROBORANDO LA CAPACIDAD DE MONITOREO

En este ejemplo, se comprueba la capacidad de monitoreo del programa computarizado desarrollado. Para ello, se compara la capacidad de estimación de un punto de cambio en un proceso, con respecto a los resultados obtenidos por Qiu (2013). Este autor desarrolló el modelo de análisis de punto de cambio (CPA) de Zamba y Hawkins (2006) en el lenguaje de programación **R**, se resalta que este modelo, fue formulado solo para el monitoreo del vector de medias de un proceso.

Los datos de la tabla 5.1, que Qiu (2013) utilizó, representan las primeras 50 observaciones que se obtuvieron de un proceso de producción, compuesto por tres características de calidad a controlar (tridimensional).

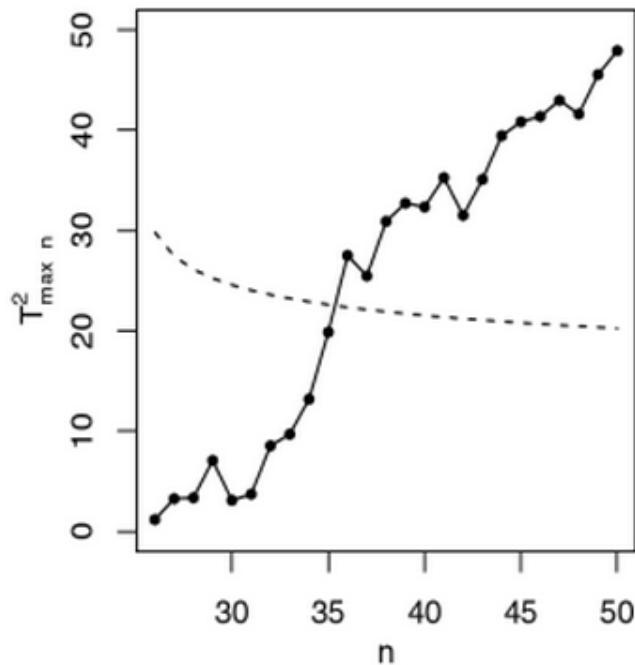
**Tabla 5.1.** Datos del proceso de producción tridimensional, (estandarizados), Ejemplo I.  
 Fuente: *Introduction to Statistical Process*, Qiu (2013).

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<b>1</b>	-0,419	-0,426	-0,51	<b>26</b>	-0,887	-0,389	0,094
<b>2</b>	-0,775	0,144	0,982	<b>27</b>	0,112	-0,751	-1,287
<b>3</b>	-0,049	0,013	-0,187	<b>28</b>	-0,605	0,032	1,219
<b>4</b>	1,16	0,253	1,049	<b>29</b>	-1,45	-1,532	-0,069
<b>5</b>	0,462	0,083	-0,228	<b>30</b>	0,617	0,265	-0,222
<b>6</b>	0,288	0,478	0,066	<b>31</b>	0,381	-0,443	-0,446
<b>7</b>	-0,504	-0,716	-0,321	<b>32</b>	1,981	1,588	1,236
<b>8</b>	0,43	0,647	0,847	<b>33</b>	0,635	-1,03	-0,979
<b>9</b>	-1,248	-0,786	-0,183	<b>34</b>	0,663	-1,017	-1,767
<b>10</b>	-0,805	-0,328	0,165	<b>35</b>	0,892	-0,833	-0,439
<b>11</b>	0,188	-0,018	0,086	<b>36</b>	3,088	2,272	2,216
<b>12</b>	-0,762	0,344	0,642	<b>37</b>	-0,242	-0,773	-0,223
<b>13</b>	0,56	0,078	-1,216	<b>38</b>	1,543	0,295	0,287
<b>14</b>	0,542	0,331	1,165	<b>39</b>	0,137	-1,136	-1,165
<b>15</b>	0,091	0,606	-0,432	<b>40</b>	-0,751	-1,248	-0,136
<b>16</b>	-0,684	-0,031	0,638	<b>41</b>	1,047	-0,227	-0,726
<b>17</b>	-0,297	-0,122	-0,66	<b>42</b>	1,668	1,828	1,092
<b>18</b>	-0,186	0,433	1,133	<b>43</b>	0,912	-0,493	-0,672
<b>19</b>	-0,669	-1,126	-0,625	<b>44</b>	1,602	0,664	1,017
<b>20</b>	2,638	2,734	0,76	<b>45</b>	0,394	-1,186	-2,152
<b>21</b>	-0,031	-0,637	-0,478	<b>46</b>	0,768	-0,127	-0,751
<b>22</b>	1,516	0,754	-0,222	<b>47</b>	0,417	-0,652	-0,863
<b>23</b>	-0,045	0,572	0,134	<b>48</b>	0,111	-0,237	0,119
<b>24</b>	-0,545	1,207	1,352	<b>49</b>	2,352	1,106	0,882
<b>25</b>	0,534	-0,959	-1,738	<b>50</b>	0,777	-0,136	0,075

Qiu (ob. cit) asume que las primeras 25 observaciones están bajo control, y que la distribución que siguen los datos cuando el proceso está en control es una normal multivariante  $N_3(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ . De igual forma, este autor resalta que tanto el vector de medias  $\boldsymbol{\mu}_0$  y la matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  son desconocidos. El autor comienza a monitorear el vector de medias del proceso a partir de la observación 26, a través del grafico control *Change-Point Detection* (CPD), propuesto por Zamba y Hawkins (2006).

Qiu (ob. cit) fijó un nivel  $\alpha$  de 0.005 (es decir un  $ARL_0$  de  $1/0.005 = 200$ ). El estadístico de prueba de razón de verosimilitud generalizada para un cambio en la media es denotado por  $T_{max,n}^2$  (estadístico de graficación). El grafico de control CPD

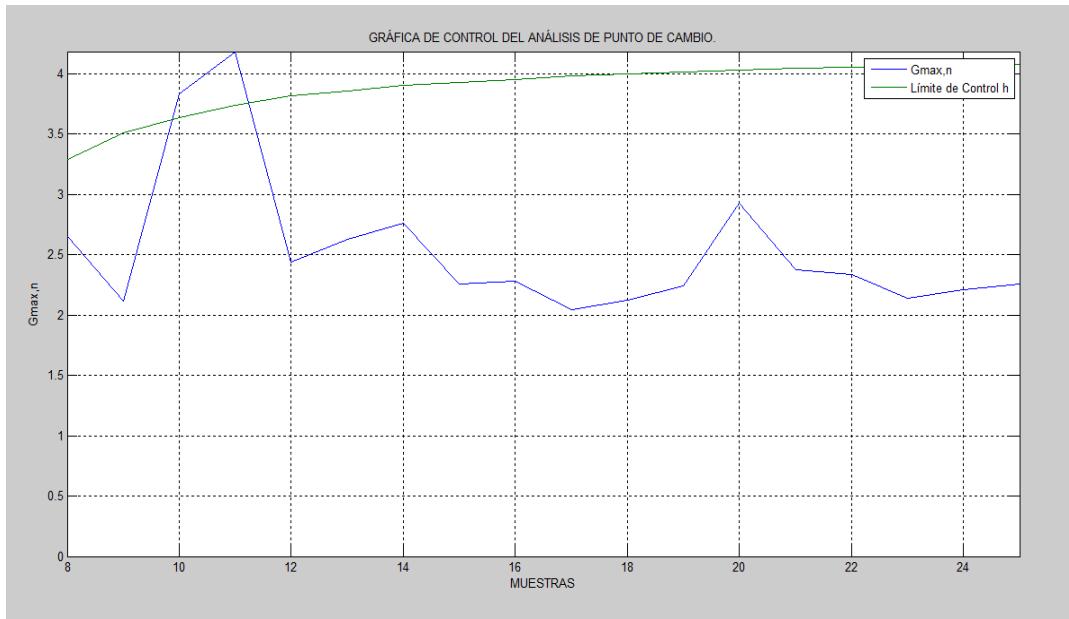
desarrollado por este autor, detecta la primera señal de cambio en el vector de medias del proceso en la observación número 36. En la **Figura 21** se muestra el grafico de control obtenido por Qiu (ob. cit).



**Figura 21.** Gráfico de control CPD. Fuente: *Introduction to Statistical Process*, Qiu (2013).

Asimismo, Qiu (ob. cit) utilizando la metodología de Zamba y Hawkins (2006), estima el punto de cambio (*change-point*) en el punto 31. Una vez presentados los resultados obtenidos por Qiu (ob. cit), a continuación se presentaran los conseguidos, utilizando la herramienta computarizada desarrollada en este trabajo de grado.

Al igual que Qiu (ob. cit), se comienza a monitorear el proceso a partir de la observación 26, con el objetivo de detectar un cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianza. Igualmente se fijó un nivel  $\alpha$  de 0.005. El estadístico de prueba que utiliza este modelo es denotado por  $G_{max,n}$ , el cual, es un estadístico de prueba de razón de verosimilitud generalizada. En la **Figura 22** se muestra la gráfica de control obtenida mediante el programa desarrollado.



**Figura 22.** Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, ejemplo 2. Fuente: propia.

Al observar la **Figura 22**, se observa una diferencia en el eje de las observaciones (eje de las abscisas) con respecto a la **Figura 21**. Esta diferencia se debe a que el programa desarrollado en este trabajo de grado, solo hace uso de los datos a utilizar para el monitoreo del proceso, es decir, solo se introducen las 25 observaciones correspondientes desde la 26 a la 50. El grafico de control obtenido, detecta el cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianzas del proceso en la observación número 10, la cual, corresponde a la observación número 35 de la data total. Asimismo utilizando la metodología de Zamba y Hawkins (2009), el programa presenta una estimación del punto de cambio (*change-point*), esta es dada por la observación número 6, siendo esta correspondiente al número 31 de la data total.

Se observa en este ejemplo, que la estimación del punto de cambio es consistente con lo obtenido por Qiu (2013). Con ello se corrobora la capacidad de monitoreo de la herramienta computarizada desarrollada. Adicionalmente al análisis desarrollado por Qiu (ob. cit), a continuación se presentan de forma resumida, los resultados obtenidos al implementar un análisis de Fase I. Este análisis se aplicó a las

primeras 25 observaciones de la **Tabla 5.1**, mediante el programa computarizado desarrollado.

Este estudio en primera instancia aplica la prueba de Schwager y Margolin, con el objetivo de detectar valores atípicos (*outliers*) en la muestra. Al realizar la prueba con un nivel de significancia de 0.01, para este caso no existe suficiente evidencia estadística para rechazar  $H_0$ , lo que lleva a la conclusión de que no se presentan valores atípicos en la muestra. El valor P para esta prueba es de 0.0720.

Al continuar con este estudio, se realiza la prueba de asimetría y curtosis de Mardia, con el objeto de validar el supuesto de normalidad multivariante. Los resultados obtenidos en esta prueba, evidencian que con un nivel de significancia de 0.01, la asimetría y curtosis multivariante no son significativas, lo que lleva a la conclusión de que los datos se ajustan a una distribución normal multivariante. Los valores P para la asimetría y curtosis multivariante son dados por 0.0398 y 0.1441 respectivamente. Las estimaciones para los coeficientes de asimetría y curtosis fueron 4.5687 y 18.2006 respectivamente.

La tercera prueba implementada en el análisis de Fase I, es la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey. Esta tiene como objetivo verificar si la serie de tiempo multivariante es estacionaria en amplio sentido. Al realizar esta prueba con un nivel de significancia de 0.01, existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de la existencia de una raíz unitaria, por lo tanto el proceso es estacionario en amplio sentido. Esto significa, que aparentemente tanto el vector de medias y matriz de covarianzas del proceso, son invariantes en el tiempo. El valor crítico  $\tau$  para esta prueba es de -2.6649, y el estadístico de prueba es de -5.6027.

Por último se estudia la independencia o autocorrelación de la serie. Para ello se aplica la prueba de Ljung y Box a cada componente univariante de la serie de tiempo multivariante (independencia categoría I). Posteriormente, se examina la existencia de

una dependencia lineal dinámica en los datos de la serie de tiempo, mediante la versión multivariante de la prueba de Portmanteau (independencia categoría II).

Las pruebas de Ljung y Box con un nivel de significancia de 0.01, nos presenta como conclusión que los datos de la variable número tres (3), no son independientes. El valor P para esta prueba en esta variable en específico, es de aproximadamente 0.0000. Por otro lado, la versión multivariante de la prueba de Portmanteau con un nivel de significancia de 0.01, no presenta suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , por lo tanto se concluye que aparentemente no existe dependencia lineal dinámica en los datos de la serie de tiempo multivariante, es decir, los datos son independientes en esta categoría. Con este resultado del estudio de independencia, se evidencia que los datos son parcialmente independientes, ya que la variable tres (3) a un nivel de significancia de 0.01, resulta no ser independiente.

Con la versión multivariante de la prueba de Portmanteau, finaliza el análisis de Fase I. Se pudo apreciar en este estudio que el supuesto de normalidad multivariante no pudo ser rechazado, el proceso es estacionario en amplio sentido y además, se observó que los datos son independientes de manera parcial.

## **5.2 EJEMPLO 2 ILUSTRANDO LA CAPACIDAD DE DETECCIÓN CONTRA LAS CARTAS MCUSUM Y MEWMA**

De manera ilustrativa se utilizó un ejemplo desarrollado por Qiu (2013), en el cual, se desarrolla dos gráficos de control: el gráfico de control multivariante CUSUM (MCUSUM) propuesto por Crosier (1988) y el gráfico de control multivariante EWMA (MEWMA) propuesto por Lowry et al. (1992). Ambas gráficas de control fueron desarrollados para el monitoreo del vector de medias de un proceso. Las observaciones presentadas en la **Tabla 5.2**, contienen las primeras 30 observaciones de la Fase II de un proceso de producción, compuesto por tres características de calidad (tridimensional).

**Tabla 5.2.** Datos del proceso de producción tridimensional, (estandarizados), Ejemplo 2.  
 Fuente: *Introduction to Statistical Process*, Qiu (2013).

<b>n</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	<b>n</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<b>1</b>	-0,533	-0,385	-0,443	<b>16</b>	0,322	-0,219	0,302
<b>2</b>	0,167	-0,052	0,263	<b>17</b>	1,71	0,434	-0,688
<b>3</b>	0,068	-0,138	-0,133	<b>18</b>	0,481	0,342	1,306
<b>4</b>	0,492	0,68	1,232	<b>19</b>	1,356	0,798	1,737
<b>5</b>	-0,071	0,306	0,053	<b>20</b>	1,972	1,432	0,133
<b>6</b>	0,229	0,413	0,199	<b>21</b>	1,164	-0,31	-0,098
<b>7</b>	-0,4	-0,396	-0,789	<b>22</b>	2,228	1,375	1,16
<b>8</b>	0,387	0,64	0,898	<b>23</b>	-0,511	-1,41	-1,89
<b>9</b>	-0,404	-0,529	-1,318	<b>24</b>	-0,016	1,06	1,565
<b>10</b>	-1,43	-0,408	0,88	<b>25</b>	0,58	-0,675	-0,287
<b>11</b>	1,206	-0,194	-0,241	<b>26</b>	2,467	1,322	0,754
<b>12</b>	3,231	1,959	0,492	<b>27</b>	0,399	-0,404	0,037
<b>13</b>	0,637	0,14	-0,184	<b>28</b>	2,137	1,089	1,339
<b>14</b>	0,177	-0,497	1,074	<b>29</b>	1,304	-0,364	0,234
<b>15</b>	1,27	-0,185	-2,002	<b>30</b>	-0,575	-1,801	-1,668

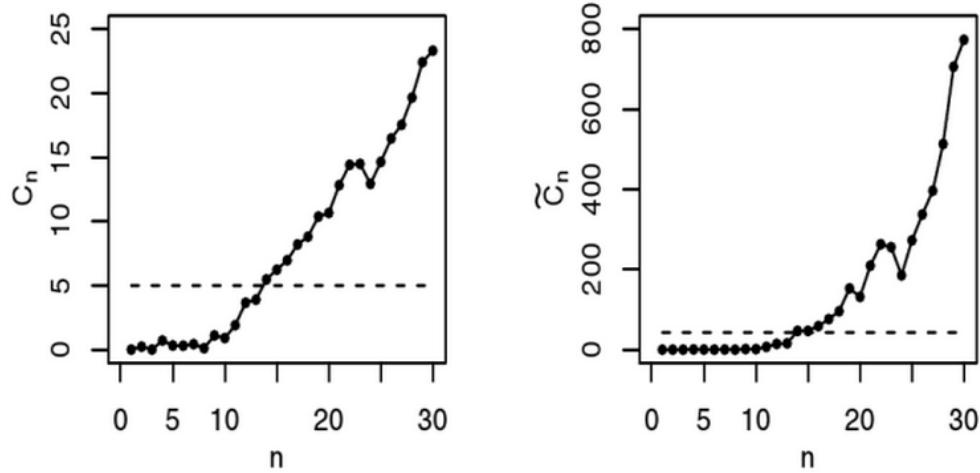
Para la implementación de estas gráficas, Qiu (2013) asume que la distribución IC (*in control*) del proceso de producción es una  $N_3(\mu_0, \Sigma_0)$ , donde

$$\mu_0 = (0,0,0)'$$

y

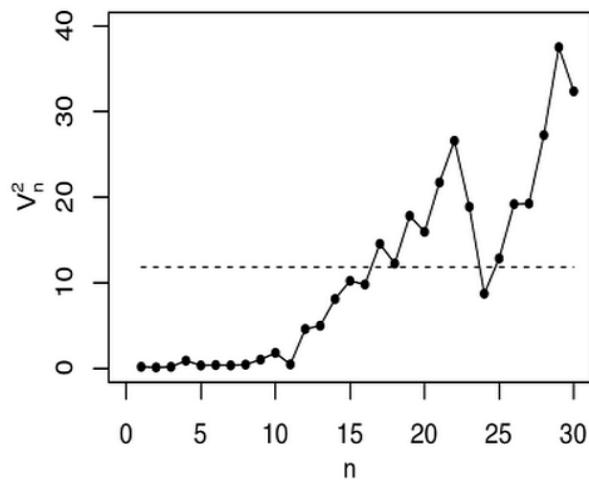
$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Qiu (ob. cit) aplicó en su libro el grafico de control MCUSUM desarrollado por Crosier (1988), utilizando los estadístico  $C_n$  y  $\tilde{C}_n$ . En la **Figura 23** se presentan las gráficas de control multivariantes obtenidas por este autor para ambos estadísticos, con un nivel  $\alpha$  de 0.005 (es decir un  $ARL_0$  de  $1/0.005 = 200$ ).



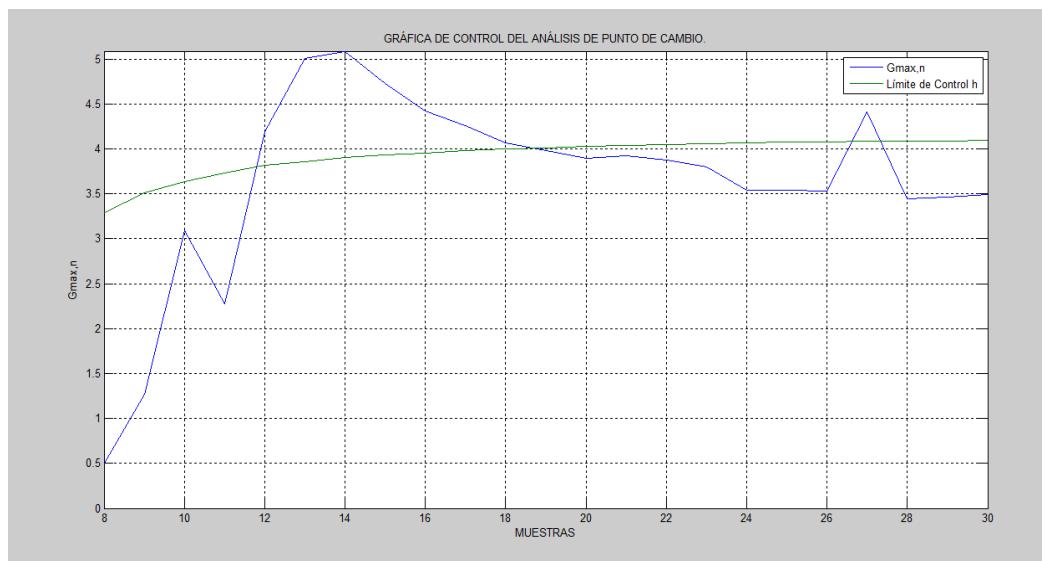
**Figura 23.** Gráfico de control MCUSUM, Ejemplo 2.  
Fuente: *Introduction to Statistical Process*, Qiu (2013).

Luego de realizar estas gráficas, Qiu (ob. cit) concluye que la primera señal es detectada por ambas cartas en la observación número 14. Asimismo, este autor empleó el grafico de control MEWMA desarrollado por Lowry et al. (1992). La estadística utilizada para la detección de un cambio en el vector de medias del proceso en un punto de tiempo  $n$ , es llamada  $V_n^2$ . En la **Figura 24** se presentan la gráfica de control multivariante, con un nivel  $\alpha$  de 0.005.



**Figura 24.** Gráfico de control MEWMA, Ejemplo 2.  
Fuente: *Introduction to Statistical Process*, Qiu (2013).

Se observa en la gráfica que la primera señal es detectada en la observación número 17. Una vez exhibidos los resultados conseguidos por Qiu (2013), a continuación se presentaran los conseguidos, utilizando la herramienta computarizada desarrollada en este trabajo de grado. Al igual que este autor se fijó un nivel  $\alpha$  de 0.005. En la **Figura 25** se muestra la gráfica de control obtenida mediante el programa desarrollado.



**Figura 25.** Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, ejemplo 2. Fuente: propia

El grafico de control obtenido, detecta la señal de cambio en la observación número 12. Como una bondad adicional, el programa estima el punto en donde ocurre el cambio, el cual es dado por el punto de tiempo 8. Esta estimación es una de las ventajas que presenta la implementación de modelos de análisis de punto de cambio. Es importante resaltar, que el grafico de control desarrollado no requiere del conocimiento de los parámetros en control, la cual, es la situación más común en la industria.

Adicionalmente el programa presenta las estimaciones del vector de medias, matriz de covarianza y matriz de correlación antes y después del cambio. Se puede

decir de forma subjetiva observando estos parámetros, que en el vector de medias, la característica (variable) uno (1) aparentemente sufrió un incremento, en la característica número (3) aparentemente sucedió una disminución y, en la característica dos (2) se aprecia que al parecer no ocurrió cambio alguno. Asimismo en la matriz de covarianzas, se aprecia en la diagonal, que aparentemente hubo un incremento en la variabilidad.

### 5.3 EJEMPLO 3 PROCESO DE CLARIFICACIÓN DEL AGUA

La clarificación del agua se basa en la administración de sustancias químicas tales como floculante, coagulante y ácido sulfúrico, utilizadas para la remoción de los sólidos suspendidos totales, disminución de la turbidez, neutralización del pH y estabilización de la carga iónica. Esta agua clarificada constituye un elemento primordial en la industria papelera, ya que si esta no cumple con ciertos estos estándares de calidad, se ocasionan problemas en el proceso de elaboración, lo cual, conlleva a una disminución en la calidad del papel.

En la **Tabla 5.3** se muestran 33 observaciones realizadas en un proceso de clarificación. La variable  $x_1$  representa la carga iónica, la variable  $x_2$  representa la turbidez y la variable  $x_3$  representa los sólidos en suspensión. Se conoce con anterioridad que estas variables están relacionadas entre sí, por ello, estas deben ser monitoreadas en conjunto como un grupo y no de forma separada.

**Tabla 5.3.** Datos del proceso de clarificación del agua, (no estandarizados), Fase II Ejemplo 3.

Fuente: PAVECA.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<b>1</b>	-0,10240114	44,029958	12,6336328	<b>18</b>	-0,1038662	46,5394215	11,8096752
<b>2</b>	-0,09349027	41,0545444	11,5775293	<b>19</b>	-0,09438154	46,7295928	12,0491884
<b>3</b>	-0,10199871	44,8100082	12,144421	<b>20</b>	-0,09428989	46,4124501	12,9802704
<b>4</b>	-0,09946285	44,7465333	12,1968296	<b>21</b>	-0,09268107	53,5534765	11,3537408
<b>5</b>	-0,09488966	41,2444593	11,7918858	<b>22</b>	-0,10822009	44,6193912	11,7763211
<b>6</b>	-0,10105906	39,2230099	10,7152362	<b>23</b>	-0,11178972	42,9343453	13,8466738
<b>7</b>	-0,08986163	37,1109658	9,39787695	<b>24</b>	-0,10920071	45,7178508	11,8192528
<b>8</b>	-0,09707178	42,2013327	11,2007249	<b>25</b>	-0,10674503	47,525748	11,7644779
<b>9</b>	-0,09295755	38,7572166	10,7781536	<b>26</b>	-0,1074829	48,9869876	12,346118

<b>10</b>	-0,0919	45,2074	11,1979	<b>27</b>	-0,09958217	51,9650201	11,6524075
<b>11</b>	-0,10764806	45,409807	14,0176193	<b>28</b>	-0,09309401	40,3410129	11,4311395
<b>12</b>	-0,10470286	47,2954028	13,6962233	<b>29</b>	-0,08321619	38,9298321	10,1869014
<b>13</b>	-0,100763	46,5824467	12,1656701	<b>30</b>	-0,10622198	53,3524045	12,9754289
<b>14</b>	-0,09263451	41,3430248	12,1311716	<b>31</b>	-0,1067125	45,4911744	12,7373701
<b>15</b>	-0,09669624	40,747153	11,7239952	<b>32</b>	-0,10497973	41,4563298	11,2498668
<b>16</b>	-0,08579746	38,3858102	9,82643294	<b>33</b>	-0,11225826	49,2788412	14,6589811
<b>17</b>	-0,0929814	48,9716349	12,2704326				

Se desea detectar por medio de esta data si existe un cambio en el proceso, con lo cual se concluiría que el proceso de clarificación esta fuera de control. Antes de ello es necesario verificar los supuestos estadísticos que el modelo a desarrollar requiere, La **Tabla 5.4** contiene 37 observaciones previas a la de la **Tabla 5.3**, con el objetivo de llevar un análisis de fase I que valide los supuestos estadísticos necesarios.

**Tabla 5.4.** Datos del proceso de clarificación del agua, (no estandarizados), Fase I, Ejemplo 3. Fuente: PAVECA.

<i>n</i>	<i>x</i> <sub>1</sub>	<i>x</i> <sub>2</sub>	<i>x</i> <sub>3</sub>	<i>n</i>	<i>x</i> <sub>1</sub>	<i>x</i> <sub>2</sub>	<i>x</i> <sub>3</sub>
<b>1</b>	-0,10275899	46,4517628	12,0355418	<b>20</b>	-0,1001155	46,6679036	10,8538123
<b>2</b>	-0,09783332	42,6027493	12,5672056	<b>21</b>	-0,10859325	56,7054675	13,7048024
<b>3</b>	-0,09716449	42,3216761	11,5424073	<b>22</b>	-0,10210819	47,246727	12,7655069
<b>4</b>	-0,08979858	40,9483602	10,5172998	<b>23</b>	-0,09036883	38,4659405	9,4666063
<b>5</b>	-0,10159594	46,9699494	12,9757088	<b>24</b>	-0,10115001	46,7016554	14,0971112
<b>6</b>	-0,1016775	43,0550149	11,3665595	<b>25</b>	-0,10422166	46,3051076	11,8999367
<b>7</b>	-0,09743581	43,2491477	11,6613636	<b>26</b>	-0,09521232	35,5344036	12,3747459
<b>8</b>	-0,097277	44,9134968	11,334961	<b>27</b>	-0,0959377	39,5478737	8,59163463
<b>9</b>	-0,10207203	47,7462251	13,1240972	<b>28</b>	-0,08837255	39,2269343	11,7932707
<b>10</b>	-0,09999567	48,0895906	12,4621872	<b>29</b>	-0,10189249	53,7386361	13,2937916
<b>11</b>	-0,10719165	48,6648483	13,2828141	<b>30</b>	-0,10037291	42,3528917	11,7386842
<b>12</b>	-0,10027001	45,5158237	11,9708784	<b>31</b>	-0,10373286	46,1461651	13,3466526
<b>13</b>	-0,09807471	43,5135378	11,5961473	<b>32</b>	-0,1133569	48,7157832	14,6294279
<b>14</b>	-0,10408371	49,3303468	12,313003	<b>33</b>	-0,09204129	38,743867	10,2706856
<b>15</b>	-0,09860448	45,634561	12,5579444	<b>34</b>	-0,08777346	34,7223023	9,12804126
<b>16</b>	-0,10279865	44,7708093	11,2770417	<b>35</b>	-0,09553345	47,5589311	11,2279788
<b>17</b>	-0,09654942	40,3024915	11,5808099	<b>36</b>	-0,10010564	45,8235107	12,2333869
<b>18</b>	-0,10138063	44,4264713	11,1181951	<b>37</b>	-0,10683117	43,4191279	11,606423
<b>19</b>	-0,09403131	39,2754954	11,2092459				

En las **Tablas 5.3** y **5.4** se aprecia la diferencia existente en la escala de las variables. Con el objetivo de proporcionar el mismo peso a las tres (3) variables, se estandarizaron los datos. Este paso previo es importante, debido a que los estadísticos empleados en la construcción del grafico de control, son sensibles a la diferencia de escala. En las **Tablas 5.5** y **5.6** se presentan las estandarizaciones de estos datos.

**Tabla 5.5.** Datos del proceso de clarificación del agua, (estandarizados), Fase II, Ejemplo 3.

Fuente: propia.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<b>1</b>	-0,24635094	-0,23355089	0,83549322	<b>18</b>	-0,86954582	0,52547284	-0,41243011
<b>2</b>	0,81182941	-0,82570826	0,1782737	<b>19</b>	1,3673684	0,53814291	-0,1830759
<b>3</b>	-0,39572963	0,03767887	0,2026152	<b>20</b>	1,93396228	0,31724896	0,84554455
<b>4</b>	0,18591672	0,01391255	0,26896384	<b>21</b>	1,8655869	2,36910348	-1,94566222
<b>5</b>	0,65295264	-0,81018486	0,37448115	<b>22</b>	-1,99804671	0,04459187	-0,16009683
<b>6</b>	-1,52208331	-1,15920764	-0,45780224	<b>23</b>	-1,64292558	-0,69469333	2,27288908
<b>7</b>	-0,05435369	-1,49335805	-1,5192429	<b>24</b>	-2,0969724	0,31582077	-0,28147276
<b>8</b>	-0,10997025	-0,4790413	-0,39408098	<b>25</b>	-1,44687209	0,78150702	-0,61084793
<b>9</b>	0,25056071	-1,28585493	-0,31616965	<b>26</b>	-1,132153	1,06309613	-0,21951301
<b>10</b>	1,26329899	0,28202746	-0,848129	<b>27</b>	0,41100306	1,92169729	-1,39530623
<b>11</b>	-0,43119296	-0,09415488	2,08140814	<b>28</b>	0,75060542	-0,98400411	0,13215848
<b>12</b>	0,16839143	0,43151027	1,45978035	<b>29</b>	2,03156327	-1,15206558	-0,95898871
<b>13</b>	0,03141675	0,48281065	-0,04208116	<b>30</b>	-0,11531944	2,07209845	-0,21559616
<b>14</b>	1,36268687	-0,83634504	0,71831756	<b>31</b>	-1,00688722	0,11995902	0,72129536
<b>15</b>	0,17577203	-0,92583916	0,37701524	<b>32</b>	-1,86966902	-0,67551717	-0,23460551
<b>16</b>	1,20133732	-1,23538502	-1,25802216	<b>33</b>	-0,73122995	0,78701678	2,16941774
<b>17</b>	1,99151315	1,07182728	-0,28799357				

**Tabla 5.6.** Datos del proceso de clarificación del agua, estandarizados, Fase I, Ejemplo 3.

Fuente: propia.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<b>1</b>	-0,49568829	0,46926312	-0,1606147	<b>20</b>	-0,62637069	0,70271179	-1,43627992
<b>2</b>	0,59596322	-0,58407754	0,9840057	<b>21</b>	0,08651479	2,80966519	0,04445515
<b>3</b>	0,0895349	-0,50024664	-0,05245433	<b>22</b>	0,15982648	0,56005297	0,48847559
<b>4</b>	0,95890555	-0,69204925	-0,92007327	<b>23</b>	-0,01307106	-1,16111741	-1,65191946
<b>5</b>	0,37859167	0,45833466	0,75200492	<b>24</b>	1,14360959	0,22106351	1,97391185
<b>6</b>	-0,9460188	-0,28858186	-0,35125183	<b>25</b>	-0,91082141	0,4525474	-0,28217523
<b>7</b>	0,17858192	-0,28369053	-0,06748495	<b>26</b>	0,47724695	-2,34233778	1,85102193
<b>8</b>	0,14775995	0,18655267	-0,66266551	<b>27</b>	-1,68096029	-0,7557345	-2,7403782
<b>9</b>	0,42867631	0,63218981	0,79069452	<b>28</b>	1,91534556	-1,32008909	0,68481684
<b>10</b>	0,50379423	0,8192163	0,04294326	<b>29</b>	1,05855332	2,12201792	0,06400884
<b>11</b>	-0,51886269	0,84010642	0,81589806	<b>30</b>	-0,48896227	-0,52227243	0,14758057
<b>12</b>	-0,06705672	0,24254131	-0,08575877	<b>31</b>	0,07240059	0,19377564	1,26586259
<b>13</b>	0,02022762	-0,20702427	-0,17651757	<b>32</b>	-1,03535741	0,64899837	2,22270088
<b>14</b>	-0,38125101	1,15521019	-0,30418681	<b>33</b>	0,13794799	-1,21247235	-0,8480678

<b>15</b>	0,66766465	0,18399219	0,51563575	<b>34</b>	0,04261771	-2,05649655	-1,44120278
<b>16</b>	-1,10698751	0,15877176	-0,70549983	<b>35</b>	0,67799948	0,87187997	-1,17402611
<b>17</b>	0,08378676	-1,01664335	0,29349246	<b>36</b>	0,15521181	0,28069937	0,14432809
<b>18</b>	-0,9224512	0,0958087	-0,81989619	<b>37</b>	-1,8961289	-0,23316355	-0,1568106
<b>19</b>	0,32276388	-1,22001451	0,05889023				

A continuación se presenta de forma resumida, los resultados obtenidos al implementar un análisis de Fase I. Este análisis se aplicó a los datos de la **Tabla 5.6**.

En primera instancia se aplicó la prueba de Schwager y Margolin. Al realizar la prueba con un nivel de significancia de 0.01, para este caso no existe suficiente evidencia estadística para rechazar  $H_0$ , lo que lleva a la conclusión de que no se presentan valores atípicos en la muestra. El valor P para esta prueba es de 0.0508.

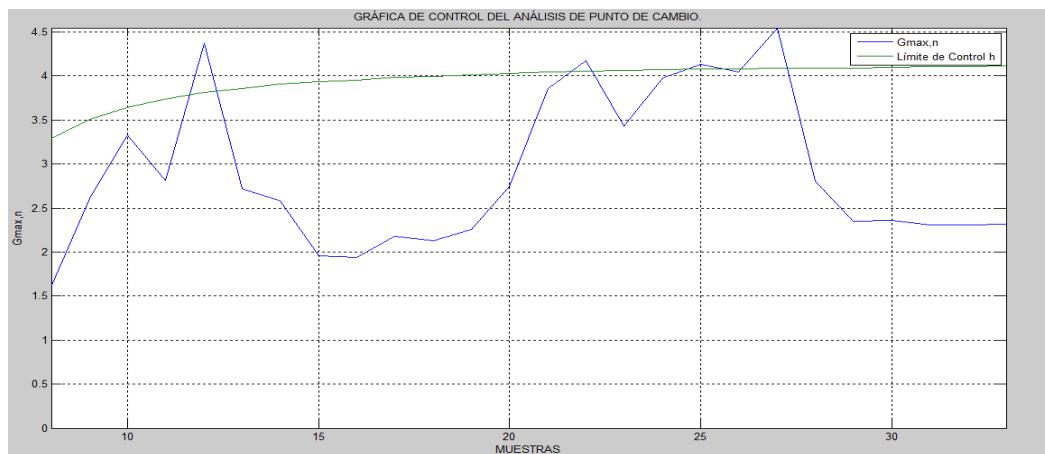
Al continuar con este estudio, se realiza la prueba de asimetría y curtosis de Mardia, los resultados de esta prueba evidencian que con un nivel de significancia de 0.01, la asimetría y curtosis multivariante no son significativas, por lo tanto se concluye que los datos se ajustan a una distribución normal multivariante. Los valores P para la asimetría y curtosis multivariante son dados por 0.4031 y 0.1016 respectivamente. Las estimaciones para los coeficientes de asimetría y curtosis fueron 1.6923 y 17.9481 respectivamente.

Luego se aplicó la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey. Al realizar esta prueba con un nivel de significancia de 0.01, existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de la existencia de una raíz unitaria, por lo tanto el proceso es estacionario en amplio sentido. El valor crítico  $\tau$  para esta prueba es de -2.6280, y el estadístico de prueba es de -14.0206.

Por último se estudia la independencia o autocorrelación de la serie. Las pruebas de Ljung y Box con un nivel de significancia de 0.01, presentaron como conclusión que los datos de la variable número uno (1), no son independientes. El valor P para esta prueba en esta variable en específica, es de 0.0034. Por otro lado, la

versión multivariante de la prueba de Portmanteau con un nivel de significancia de 0.01, no presenta suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , por lo tanto se concluye que aparentemente no existe dependencia lineal dinámica en los datos de la serie de tiempo, es decir, los datos son independientes en la categoría II.

Con este resultado del estudio de independencia, se evidencia que los datos son parcialmente independientes, ya que la variable uno (1) a un nivel de significancia de 0.01, resulta no ser independiente. Con la versión multivariante de la prueba de Portmanteau finaliza el análisis de Fase I. Se pudo apreciar en este estudio que el supuesto de normalidad multivariante no pudo ser rechazado, el proceso es estacionario en amplio sentido y además, se observó que los datos son independientes de manera parcial. A continuación, se presentan los resultados obtenidos al aplicar el grafico de control del análisis de punto de cambio a los datos de la **Tabla 5.5** (análisis de Fase II). Se fijó un nivel  $\alpha$  de 0.005 (es decir un  $ARL_0$  de  $1/0.005 = 200$ ). En la **Figura 26** se muestra la gráfica de control obtenida mediante el programa desarrollado.



**Figura 26.** Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, (datos estandarizados), ejemplo3.  
Fuente: propia.

El grafico de control detecta el primer cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianzas del proceso en la observación número 12. Asimismo el programa

presenta una estimación del punto de cambio (*change-point*), esta es dada por la observación número 8, la cual, corresponde a la observación (-0.09707178, 42.2013327, 11.2007249) de la data original (no estandarizada).

Adicionalmente, el programa presenta las estimaciones del vector de medias, matriz de covarianza y matriz de correlación, antes y después del cambio.

Estimaciones de los parámetros del proceso antes del cambio:

$$\boldsymbol{\mu}_{1\dots 8} = \begin{pmatrix} -0.0847 \\ -0.6187 \\ -0.0639 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{1\dots 8} = \begin{pmatrix} 0.4515 & 0.0406 & 0.1166 \\ 0.0406 & 0.2669 & 0.2547 \\ 0.1166 & 0.2547 & 0.4530 \end{pmatrix}$$

$$\text{Corr}_{1\dots 8} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1169 & 0.2578 \\ 0.1169 & 1.0000 & 0.7324 \\ 0.2578 & 0.7324 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Estimaciones de los parámetros del proceso después del cambio:

$$\boldsymbol{\mu}_{9\dots 33} = \begin{pmatrix} 0.0586 \\ 0.2096 \\ 0.0563 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{9\dots 33} = \begin{pmatrix} 1.7325 & 0.0244 & -0.4310 \\ 0.0244 & 1.0108 & -0.2665 \\ -0.4310 & -0.2665 & 1.1255 \end{pmatrix}$$

$$\text{Corr}_{9 \dots 33} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.01184 & -0.3087 \\ 0.01184 & 1.0000 & -0.2498 \\ -0.3087 & -0.2498 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Se aprecia en el vector de medias, que aparentemente sucedió un incremento. Por otro lado al observar la diagonal de la matriz de covarianzas, se evidencia que aparentemente hubo un incremento en la variabilidad. Para demostrar la importancia que presenta la estandarización de los datos, a continuación se presenta la gráfica de control aplicada a la data original no estandarizada (**Figura 27**), con un nivel de significancia de 0.005.



**Figura 27.** Gráfico de control multivariante, estudio Fase II, datos no estandarizados, Ejemplo3.  
Fuente: propia.

En la **Figura 27** se evidencia, que a pesar de la gráfica de control posee el mismo comportamiento que el de la **Figura 26**, la decisión para este caso sería que no existe suficiente evidencia estadística para afirmar, que ha ocurrido un cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianzas del proceso. Lo anterior expresa la importancia de estandarizar la data previo al monitoreo del proceso.

## 5.4 EJEMPLO 4 PROCESO DE FABRICACIÓN DEL PAPEL HIGIÉNICO

El papel higiénico, producto básico para la vida cotidiana, es obtenido mediante un proceso industrial que combina pulpa, agua y resinas. La formación del papel se realiza en molinos, en donde se obtienen bobinas con las dimensiones requeridas por las máquinas convertidoras. El proceso de conversión, conformado por las operaciones de rebobinado, perforación, corte y embobinado, transforma las bobinas en los productos comercializados.

El proceso de fabricación del papel higiénico se controla estadísticamente mediante el seguimiento de las siguientes características de calidad: peso base, calibre y esfuerzo máximo a la tracción en la dirección de la máquina. El peso base ( $\text{g/m}^2$ ) representa la cantidad de material que se encuentra presente por cada  $\text{m}^2$  de papel producido. El calibre (mm), medido considerando la ondulación natural del papel, es sinónimo de suavidad y capacidad para la elongación. El esfuerzo máximo a la tracción en la dirección de la máquina (*machine direction MD*) (kg-f) es la característica crítica para el logro de las operaciones de embobinado y rebobinado. Adicionalmente en este proceso, también son controladas dos variables conocidas como stretch y crepe. Entre los problemas que se pueden presentar en este proceso, se encuentran: rotura del papel en el momento del desembobinado, valores de calibre muy altos, valores de calibre muy bajos y peso base excesivo.

En la **Tabla 5.7** se muestran 28 observaciones realizadas en un proceso de fabricación del papel higiénico. La variable  $x_1$  representa el peso base, la variable  $x_2$  representa el calibre, la variable  $x_3$  representa el *machine direction MD*, la variable  $x_4$  representa el stretch y la variable  $x_5$  representa el crepe. Se conoce con anterioridad que estas variables están relacionadas entre sí, por ello, estas deben ser monitoreadas en conjunto como un grupo y no de forma separada.

**Tabla 5.7** Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (no estandarizados), Fase II, Ejemplo 4. Fuente: PAVECA.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
<b>1</b>	14,64	0,127	185	17,0	21,60	<b>15</b>	14,66	0,127	182	15,9	21,61
<b>2</b>	14,67	0,127	185	15,6	21,58	<b>16</b>	14,67	0,127	185	15,8	21,59
<b>3</b>	14,62	0,127	185	15,0	21,67	<b>17</b>	14,68	0,127	185	15,7	21,64
<b>4</b>	14,66	0,128	185	15,7	21,63	<b>18</b>	14,69	0,128	187	15,7	21,58
<b>5</b>	14,68	0,128	184	15,9	21,66	<b>19</b>	14,20	0,125	160	15,0	20,15
<b>6</b>	14,63	0,128	185	16,0	21,61	<b>20</b>	14,20	0,125	196	15,0	20,15
<b>7</b>	14,69	0,128	185	15,7	21,63	<b>21</b>	14,68	0,131	195	17,3	19,93
<b>8</b>	14,66	0,128	186	16,3	21,51	<b>22</b>	14,48	0,138	211	18,7	20,04
<b>9</b>	14,64	0,128	185	15,6	21,55	<b>23</b>	14,30	0,136	187	18,0	19,93
<b>10</b>	14,61	0,128	185	15,7	21,67	<b>24</b>	14,30	0,135	186	18,0	19,93
<b>11</b>	14,66	0,127	183	15,7	21,60	<b>25</b>	14,78	0,137	195	19,0	20,04
<b>12</b>	14,67	0,128	185	16,4	21,56	<b>26</b>	14,31	0,137	210	17,7	20,04
<b>13</b>	14,68	0,127	185	15,7	21,73	<b>27</b>	14,68	0,135	203	17,0	20,04
<b>14</b>	14,62	0,128	185	16,0	21,63	<b>28</b>	14,56	0,135	223	18,0	20,04

Se desea detectar por medio de esta data si existe un cambio en el proceso, con lo cual se concluiría que el proceso está fuera de control. Antes de ello es necesario verificar los supuestos estadísticos que el modelo a desarrollar requiere, para ello se seleccionaron 20 observaciones previas a la de la **Tabla 5.8**, con el objetivo de llevar un análisis de Fase I que valide los supuestos estadísticos necesarios.

**Tabla 5.8.** Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (no estandarizados), Fase I, Ejemplo 4. Fuente: PAVECA.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
<b>1</b>	14,65	0,135	165	17,0	22,84	<b>11</b>	14,52	0,125	174	15,0	22,53
<b>2</b>	14,80	0,125	208	16,0	22,87	<b>12</b>	14,65	0,125	195	15,0	22,53
<b>3</b>	14,35	0,125	185	17,0	22,87	<b>13</b>	14,65	0,125	172	16,0	22,53
<b>4</b>	14,75	0,125	205	15,0	22,87	<b>14</b>	15,00	0,13	190	16,3	22,53
<b>5</b>	14,80	0,121	200	15,0	22,53	<b>15</b>	14,30	0,133	160	15,0	21,04
<b>6</b>	14,75	0,121	187	16,0	22,53	<b>16</b>	14,87	0,119	195	15,0	21,04
<b>7</b>	14,80	0,125	206	14,0	22,53	<b>17</b>	14,79	0,123	172	14,0	22,37
<b>8</b>	14,80	0,129	196	14,0	22,53	<b>18</b>	14,66	0,128	155	16,0	22,37
<b>9</b>	15,06	0,128	211	14,0	21,16	<b>19</b>	15,00	0,122	190	15,0	22,31
<b>10</b>	14,76	0,136	166	15,0	21,04	<b>20</b>	14,30	0,136	165	16,0	22,31

Con el objetivo de proporcionar el mismo peso a las variables, se estandarizaron los datos. En la **Tabla 5.9** y **5.10** se presentan las estandarizaciones de estos datos.

**Tabla 5.9** Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (estandarizados), Fase II, Ejemplo 4.  
Fuente: Propia.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
<b>1</b>	0,29071439	-1,13282612	-0,17375674	1,06175148	0,30534756
<b>2</b>	0,212491	-0,27494453	-0,15890278	-0,25408614	-0,10451279
<b>3</b>	-0,28035976	0,16664884	-0,14819515	-0,85939615	-0,14069868
<b>4</b>	0,1314027	0,04080069	-0,15812275	-0,21411837	-0,02755208
<b>5</b>	0,32560286	-0,10071811	-0,23165815	0,03269887	0,04802036
<b>6</b>	0,0109758	-0,16392764	-0,16099997	0,06469534	0,0428442
<b>7</b>	0,33103918	0,02016783	-0,15960466	-0,16923998	-0,03081793
<b>8</b>	0,28377203	-0,40358794	-0,09690543	0,35118917	0,00711369
<b>9</b>	0,02306448	0,05608989	-0,15764265	-0,32712763	-0,14436376
<b>10</b>	-0,20446659	0,04587333	-0,1559342	-0,20380825	0,04963697
<b>11</b>	0,2165824	-0,32510221	-0,30005078	-0,17850327	-0,09227232
<b>12</b>	0,37804787	-0,45455311	-0,16824399	0,47555282	0,0774481
<b>13</b>	0,22398905	-0,25800016	-0,15794403	-0,1240711	0,10604538
<b>14</b>	-0,05611455	-0,17487981	-0,16070612	0,09712985	0,08116707
<b>15</b>	0,28849705	-0,46675653	-0,3729928	0,0394036	-0,03814412
<b>16</b>	0,23034567	-0,3398991	-0,16005344	-0,14487801	-0,06184641
<b>17</b>	0,26850941	-0,30782039	-0,15948171	-0,13889361	-0,00569638
<b>18</b>	0,28960727	0,01618759	-0,01930781	-0,1969596	-0,06015914
<b>19</b>	-1,40495782	-1,58990125	-1,92314603	-1,06080332	-2,27074867
<b>20</b>	-2,61235276	-1,11259034	0,61852558	-1,48897561	-1,70325341
<b>21</b>	1,06078205	-0,74214038	0,50108106	0,78423373	-1,59622952
<b>22</b>	-0,51552602	0,78877311	1,62259632	1,93367062	-0,72519526
<b>23</b>	-0,95122322	0,20864404	-0,0592494	1,47586584	-1,35003492
<b>24</b>	-0,91784259	-0,11681996	-0,12986465	1,48839393	-1,36628175
<b>25</b>	1,99677939	0,12154202	0,47932151	2,47658272	-1,0377825
<b>26</b>	-1,7721163	1,07084009	1,56957633	0,94326197	-0,93348002
<b>27</b>	0,67963523	0,85621103	1,07125213	0,42607963	-1,40996308
<b>28</b>	-0,55163935	0,46799812	2,47542289	1,1316313	-0,76580791

**Tabla 5.10** Datos del proceso de fabricación del papel higiénico, (estandarizado), Fase I, Ejemplo 4.  
 Fuente: Propia.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
<b>1</b>	0,44144577	1,70022951	-1,56647878	1,63419888	1,5662821
<b>2</b>	-0,26453008	-0,17908151	1,47660994	0,20001387	1,93441165
<b>3</b>	-2,15934633	-1,18959521	-0,14403705	1,34927348	2,05644211
<b>4</b>	-0,6881728	0,4076479	1,27837459	-0,74261637	1,63845813
<b>5</b>	-0,04162935	-1,06380386	0,91827499	-0,76291667	1,10169288
<b>6</b>	0,28054006	-1,8784834	-0,0097676	0,34949112	1,19261321
<b>7</b>	-0,44744168	0,89898071	1,35383364	-1,80486701	0,92595199
<b>8</b>	-0,11142172	2,0152158	0,64786678	-1,68846791	0,77024669
<b>9</b>	1,69084236	1,28119796	1,67656694	-2,18587373	-0,85886719
<b>10</b>	1,54890776	2,44238694	-1,50414021	-0,78191741	-1,30317432
<b>11</b>	-0,95565061	-0,2039804	-0,90793284	-0,51367823	0,82589086
<b>12</b>	-0,83044305	0,09500649	0,57034889	-0,7367678	1,09558676
<b>13</b>	0,14616048	-0,84435344	-1,06539053	0,50483736	1,00527605
<b>14</b>	1,8381438	0,82034726	0,1902049	0,64981867	1,20796149
<b>15</b>	-1,18556322	1,35348408	-1,9123641	-0,8030498	-1,18214621
<b>16</b>	1,27549865	-2,46321064	0,53940282	-1,09347562	-0,90614313
<b>17</b>	0,70424927	-0,25509572	-1,04884733	-1,44482629	0,19024469
<b>18</b>	0,85610197	-0,20884384	-2,26844216	0,6636178	0,53053058
<b>19</b>	1,67391406	-0,95883591	0,20209258	-0,66346813	0,57036288
<b>20</b>	-1,74684423	2,33547834	-1,55118808	0,44939399	0,78559609

A continuación se presentan los resultados obtenidos al implementar un análisis de Fase I. Este análisis se aplicó a los datos la **Tabla 5.10**, mediante el programa computarizado desarrollado:

Para detectar valores atípicos (*outliers*) en la muestra, se aplica la prueba de Schwager y Margolin, al realizar con un nivel de significancia de 0.05, para este caso no existe suficiente evidencia estadística para rechazar, lo que lleva a la conclusión de que no se presentan valores atípicos en la muestra. El valor P para esta prueba es de 0.8418.

Al continuar, se realiza la prueba de asimetría y curtosis de Mardia, los resultados obtenidos en esta prueba, evidencian que con un nivel de significancia de 0.05, la asimetría y curtosis multivariante no son significativas, lo que lleva a la conclusión de que los datos se ajustan a una distribución normal multivariante. Los valores P para la asimetría y curtosis multivariante son dados por 0.8166 y 0.3164 respectivamente. Las estimaciones para los coeficientes de asimetría y curtosis fueron 8.2200 y 31.2514 respectivamente.

La tercera prueba implementada fue la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey. Esta verifica si la serie de tiempo multivariante es estacionaria en amplio sentido. Al realizar esta prueba con un nivel de significancia de 0.05, existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de la existencia de una raíz unitaria, por lo tanto el proceso es estacionario en amplio sentido. El valor crítico  $\tau$  para esta prueba es de -1.9602, y el estadístico de prueba es de -4.2693.

Por último se estudia la independencia de la serie. En la categoría I las pruebas de Ljung y Box con un nivel de significancia de 0.05, presentaron como conclusión que los datos de la variable número tres (3), no son independientes. El valor P para esta prueba en esta variable en específica es de 0.0381. Por otro lado, la categoría II al aplicar la versión multivariante de la prueba de Portmanteau con un nivel de significancia de 0.05, no se presenta suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , por lo tanto se concluye que aparentemente los datos son independientes en esta categoría. Con este resultado del estudio de independencia, se evidencia que los datos son parcialmente independientes, ya que la variable tres (3) a un nivel de significancia de 0.05, resulta no ser independiente.

Con lo anterior finaliza el análisis de Fase I. Se pudo apreciar en este estudio que el supuesto de normalidad multivariante no pudo ser rechazado, el proceso es estacionario en amplio sentido y además, se observó que los datos son independientes de manera parcial.

A continuación, se aplicará el grafico de control del análisis de punto de cambio a los datos de la **Tabla 5.9** (análisis de Fase II), con el objetivo de detectar un cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianza. Se fijó un nivel  $\alpha$  de 0.002 (es decir un  $ARL_0$  de  $1/0.002 = 500$ ). En la **Figura 28** se muestra la gráfica de control obtenida mediante el programa desarrollado.



**Figura 28.** Gráfico de control multivariante, estudio fase II, datos estandarizados, Ejemplo 4.  
Fuente: propia.

El grafico de control detecta el cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianzas del proceso en la observación número 15. Asimismo el programa presenta una estimación del punto de cambio (*change-point*), esta es dada por la observación número 9, la cual, corresponde a la observación (14.64, 0.128, 185, 15.6, 21.55) de la data original (no estandarizada). Igualmente, el programa presenta las estimaciones del vector de medias, matriz de covarianza y matriz de correlación, antes y después del cambio.

Estimaciones de los parámetros del proceso antes del cambio:

$$\boldsymbol{\mu}_{1\dots 9} = \begin{pmatrix} 0.1476 \\ -0.1991 \\ -0.1606 \\ -0.0348 \\ -0.0050 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{1\dots 9} = \begin{pmatrix} 0.0362 & -0.0340 & -0.0012 & 0.0624 & 0.0126 \\ -0.0340 & 0.1372 & -0.0002 & -0.1694 & -0.0416 \\ -0.0012 & -0.0002 & -0.0011 & -0.0007 & -0.0010 \\ 0.0624 & -0.1694 & -0.0007 & -0.2477 & -0.0595 \\ 0.0126 & -0.0416 & -0.0010 & 0.0595 & 0.0167 \end{pmatrix}$$

$$\text{Corr}_{1\dots 9} = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.4816 & -0.2022 & 0.6581 & 0.5126 \\ -0.4816 & 1.0000 & -0.0164 & -0.9189 & -0.8678 \\ -0.2022 & -0.0164 & 1.0000 & -0.0463 & -0.2504 \\ 0.6581 & -0.9189 & -0.0463 & 1.0000 & 0.9242 \\ 0.5126 & -0.8678 & -0.2504 & 0.9242 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Estimaciones de los parámetros del proceso después del cambio:

$$\boldsymbol{\mu}_{10\dots 28} = \begin{pmatrix} -0.1765 \\ -0.1217 \\ 0.2406 \\ 0.4071 \\ -0.6896 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{10\dots 28} = \begin{pmatrix} 1.0429 & 0.0803 & -0.0534 & 0.3570 & 0.2930 \\ 0.0803 & 0.4036 & 0.4297 & 0.3940 & 0.0897 \\ -0.0534 & 0.4297 & 0.8546 & 0.4462 & -0.0326 \\ 0.3570 & 0.3940 & 0.4462 & 0.9385 & -0.0664 \\ 0.2930 & 0.0897 & -0.0326 & -0.0664 & 0.5448 \end{pmatrix}$$

$$\text{Corr}_{10\dots 28} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1237 & -0.0565 & 0.3608 & 0.3887 \\ 0.1237 & 1.0000 & 0.7317 & 0.6401 & 0.1914 \\ -0.0565 & 0.7317 & 1.0000 & 0.4982 & -0.0477 \\ 0.3608 & 0.6401 & 0.4982 & 1.0000 & -0.0928 \\ 0.3887 & 0.1914 & -0.0477 & -0.0928 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

## CONCLUSIONES

Basados en los objetivos propuestos y en los resultados obtenidos, se concluye lo siguiente:

- Al estudiar el modelo de análisis de punto de cambio desarrollado en esta investigación, se puede concluir que este presenta la bondad de permitir controlar simultáneamente el vector de medias y matriz de covarianzas del proceso, es decir que a través de esta formulación se obtiene un solo diagnóstico, en lugar de dos diagnósticos por separado que usualmente se obtiene mediante las gráficas de control tradicionales.
- El programa diseñado en este trabajo permite realizar cinco pruebas estadísticas, con el objeto de validar los supuestos estadísticos que el modelo de análisis de punto de cambio requiere, llevando acabo de esta forma un análisis de Fase I del control estadístico de procesos. Cada una de ellas permite elegir el nivel de significancia, dando una flexibilidad al usuario, y adicionalmente el programa permite su ejecución inclusive si no se cumple algún supuesto teórico de la prueba respectiva.
- El programa propuesto permite construir el gráfico de control que se genera al implementar la formulación del análisis de punto de cambio, de igual forma presenta en pantalla el punto en donde es detectado el primer cambio, la estimación del punto de cambio, es decir, del momento en donde inicia el cambio y, las estimaciones de los parámetros antes y después del cambio en el proceso.
- Al observar el resultado obtenido en el primer ejemplo realizado, se corrobora el correcto funcionamiento del programa en la aplicación del modelo de

análisis de punto de cambio de esta investigación, ya que al comparar este resultado con el obtenido por otro investigador, se aprecia que éstos son consistentes.

- Los resultados obtenidos en los ejemplos realizados, evidencian que esta herramienta si es aplicable en el control estadístico multivariante de procesos. Asimismo se exhibe, como la herramienta permite obtener la estimación del momento en donde inicia el cambio, un aspecto que es determinante en la toma de acciones correctivas una vez ocurrido el cambio en el proceso.
- El programa diseñado logra el objetivo de desarrollar una herramienta computarizada que permita controlar procesos, a través del análisis de punto de cambio para el caso multivariante. Esto le otorga al investigador o analista una herramienta que le facilita el trabajo en el Control de Calidad.

## **RECOMENDACIONES**

A continuación se sugieren una serie de recomendaciones referentes a los aspectos planteados en el marco de esta investigación:

- Para el modelo de análisis de punto de cambio de Zamba y Hawkins (2009), generar mediante simulaciones las tablas de los límites de control para dimensiones adicionales a las de  $p = \{2,3,4,5,10,15,20,25\}$ , las cuales son las que se tienen hasta la fecha. Esto permitirá que el programa tenga una mayor flexibilidad en la cantidad de procesos que pueda controlar.
- Incluir en el estudio de Fase I del programa una representación explotaría de datos multivariantes del proceso, previo a realizar las diversas pruebas, como por ejemplo una nube de puntos a través del análisis de componentes principales, esto puede dar al usuario una idea inicial del comportamiento del proceso.
- Continuar con el desarrollo de la herramienta al incluir otros modelos que permitan más libertad en términos de los supuestos estadísticos, por ejemplo el caso de los modelos de análisis de punto de cambio no paramétricos.
- Se recomienda la inclusión del estudio de series de tiempo como materia electiva, este tópico tiene diversas áreas de aplicación dentro de la Ingeniería Industrial, y la mayoría de datos en los procesos están en función del tiempo, y por ende estos deben ser tratados como tal.
- Se recomienda incluir el estudio multivariante en el control estadístico de procesos dentro del pensum de estudio, ya que al adquirir estos conocimientos

el capital humano estará mejor preparado, y tendrá mejores competencias dentro del control estadístico de procesos.

## **APENDICES**

## APÉNDICE I. TABLAS DE LÍMITE DE CONTROL

**Tabla AI.1.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 2$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	$p=2$				
	$hn,p,\alpha$				
$n$	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>6</b>	3,8729	4,3588	4,9879	5,4647	5,9441
<b>7</b>	4,2263	4,7546	5,4352	5,9641	6,4792
<b>8</b>	4,4540	5,0035	5,7256	6,2525	6,7650
<b>9</b>	4,6175	5,1882	5,9108	6,4576	7,0256
<b>10</b>	4,7508	5,3303	6,0548	6,5840	7,1324
<b>11</b>	4,8315	5,4085	6,1596	6,6858	7,1807
<b>12</b>	4,9047	5,4971	6,2548	6,8122	7,3392
<b>13</b>	4,9747	5,5797	6,3323	6,8703	7,4275
<b>14</b>	5,0185	5,6231	6,4036	6,9628	7,5266
<b>15</b>	5,0465	5,6498	6,4397	7,0096	7,5559
<b>16</b>	5,0850	5,6913	6,4706	7,0359	7,5978
<b>17</b>	5,1032	5,7217	6,5041	7,0631	7,5888
<b>18</b>	5,1275	5,7487	6,5262	7,1100	7,6419
<b>19</b>	5,1452	5,7710	6,5511	7,1213	7,7092
<b>20</b>	5,1626	5,7909	6,5900	7,1734	7,7153
<b>21</b>	5,1788	5,8020	6,5926	7,1624	7,7418
<b>22</b>	5,1952	5,8128	6,6165	7,1877	7,7388
<b>23</b>	5,2058	5,8415	6,6283	7,1948	7,7610
<b>24</b>	5,2105	5,8339	6,6567	7,2437	7,8370
<b>25</b>	5,2191	5,8468	6,6418	7,2376	7,8346
<b>26</b>	5,2308	5,8608	6,6596	7,2463	7,8145
<b>27</b>	5,2426	5,8771	6,6872	7,2757	7,8390
<b>28</b>	5,2419	5,8741	6,6895	7,2707	7,8434

<b>29</b>	5,2511	5,8879	6,6951	7,2749	7,8601
<b>30</b>	5,2549	5,8967	6,7145	7,3219	7,8977
<b>31</b>	5,2595	5,8936	6,7122	7,3259	7,9057
<b>32</b>	5,2619	5,9020	6,7213	7,3280	7,9059
<b>33</b>	5,2677	5,9033	6,7282	7,3113	7,8898
<b>34</b>	5,2770	5,9130	6,7478	7,3139	7,9011
<b>35</b>	5,2746	5,9189	6,7401	7,3271	7,9125
<b>36</b>	5,2865	5,9394	6,7360	7,3383	7,9149
<b>37</b>	5,2896	5,9336	6,7290	7,3209	7,9062
<b>38</b>	5,2956	5,9386	6,7509	7,3548	7,9418
<b>39</b>	5,2948	5,9355	6,7452	7,3555	7,9509
<b>40</b>	5,2957	5,9412	6,7610	7,3504	7,9385
<b>41</b>	5,2945	5,9394	6,7478	7,3272	7,9517
<b>42</b>	5,3029	5,9475	6,7621	7,3588	7,9373
<b>43</b>	5,3017	5,9506	6,7637	7,3471	7,9149
<b>44</b>	5,3007	5,9554	6,7688	7,3588	7,9319
<b>45</b>	5,3092	5,9580	6,7821	7,3888	7,9653
<b>46</b>	5,3101	5,9517	6,7911	7,4004	7,9686
<b>47</b>	5,3136	5,9556	6,7746	7,3904	7,9917
<b>48</b>	5,3215	5,9630	6,7878	7,3988	7,9905
<b>49</b>	5,3117	5,9692	6,7993	7,4075	7,9940
<b>50</b>	5,3169	5,9551	6,7941	7,4013	7,9929
<b>51</b>	5,3165	5,9643	6,7898	7,3953	7,9755
<b>52</b>	5,3180	5,9759	6,8117	7,3967	8,0002
<b>53</b>	5,3216	5,9741	6,7991	7,3928	7,9790
<b>54</b>	5,3182	5,9767	6,8142	7,4167	8,0028
<b>55</b>	5,3214	5,9792	6,7967	7,4183	8,0403
<b>56</b>	5,3217	5,9747	6,7930	7,4057	8,0004
<b>57</b>	5,3229	5,9805	6,8117	7,3955	7,9988
<b>58</b>	5,3247	5,9670	6,7975	7,4011	7,9847
<b>59</b>	5,3262	5,9845	6,8043	7,4185	8,0154

<b>60</b>	5,3343	5,9776	6,8043	7,4199	7,9911
<b>61</b>	5,3289	5,9788	6,8012	7,4086	7,9505
<b>62</b>	5,3291	5,9814	6,7939	7,4116	7,9698
<b>63</b>	5,3250	5,9890	6,7957	7,4078	7,9724
<b>64</b>	5,3208	5,9755	6,8061	7,4197	8,0063
<b>65</b>	5,3166	5,9760	6,8046	7,4182	7,9891
<b>66</b>	5,3277	5,9768	6,8117	7,4190	8,0188
<b>67</b>	5,3431	5,9818	6,8250	7,4342	7,9784
<b>68</b>	5,3284	5,9822	6,8090	7,4184	8,0062
<b>69</b>	5,3400	5,9887	6,8022	7,3926	8,0176
<b>70</b>	5,3332	5,9892	6,8098	7,4176	7,9826
<b>71</b>	5,3359	5,9844	6,8127	7,4265	7,9963
<b>72</b>	5,3405	5,9882	6,8124	7,4235	7,9813
<b>73</b>	5,3365	5,9881	6,7896	7,4210	8,0018
<b>74</b>	5,3324	5,9809	6,8099	7,4277	8,0325
<b>75</b>	5,3385	5,9915	6,8222	7,4283	8,0196
<b>76</b>	5,3294	5,9919	6,8119	7,4051	8,0063
<b>77</b>	5,3254	5,9928	6,8171	7,4332	8,0327
<b>78</b>	5,3380	5,9879	6,8145	7,4298	8,0253
<b>79</b>	5,3356	5,9909	6,8087	7,4141	8,0060
<b>80</b>	5,3316	5,9955	6,8069	7,4257	7,9935
<b>81</b>	5,3274	6,0014	6,8225	7,4280	7,9977
<b>82</b>	5,3386	5,9974	6,8155	7,4246	8,0250
<b>83</b>	5,3338	6,0034	6,8211	7,4399	8,0505
<b>84</b>	5,3357	5,9947	6,8283	7,4353	8,0409
<b>85</b>	5,3458	5,9985	6,8292	7,4399	8,0444
<b>86</b>	5,3286	5,9857	6,8513	7,4401	8,0308
<b>87</b>	5,3333	5,9884	6,8267	7,4595	8,0336
<b>88</b>	5,3437	5,9954	6,8395	7,4418	8,0520
<b>89</b>	5,3407	5,9953	6,8412	7,4380	8,0328
<b>90</b>	5,3357	6,0072	6,8446	7,4428	8,0471

<b>91</b>	5,3475	6,0107	6,8335	7,4400	8,0369
<b>92</b>	5,3353	6,0061	6,8409	7,4529	8,0341
<b>93</b>	5,3439	6,0060	6,8333	7,4446	8,0024
<b>94</b>	5,3433	6,0014	6,8337	7,4324	8,0318
<b>95</b>	5,3416	6,0010	6,8281	7,4242	8,0146
<b>96</b>	5,3500	5,9986	6,8355	7,4480	8,0492
<b>97</b>	5,3507	6,0022	6,8374	7,4328	8,0058
<b>98</b>	5,3479	6,0009	6,8317	7,4307	8,0323
<b>99</b>	5,3448	6,0048	6,8454	7,4327	8,0255
<b>100</b>	5,3562	6,0103	6,8509	7,4783	8,0681
<b>101</b>	5,3464	6,0009	6,8399	7,4624	8,0458
<b>102</b>	5,3435	5,9990	6,8461	7,4682	8,0229
<b>103</b>	5,3542	6,0007	6,8292	7,4493	8,0314
<b>104</b>	5,3479	6,0136	6,8388	7,4579	8,0315
<b>105</b>	5,3521	5,9979	6,8404	7,4468	8,0655
<b>106</b>	5,3510	6,0083	6,8373	7,4484	8,0294
<b>107</b>	5,3448	6,0037	6,8406	7,4512	8,0446
<b>108</b>	5,3547	6,0035	6,8524	7,4554	8,0657
<b>109</b>	5,3433	6,0009	6,8463	7,4613	8,0361
<b>110</b>	5,3476	5,9965	6,8450	7,4190	8,0407
<b>111</b>	5,3484	5,9982	6,8368	7,4447	8,0642
<b>112</b>	5,3514	5,9988	6,8314	7,4530	8,0724
<b>113</b>	5,3456	6,0076	6,8402	7,4545	8,0481
<b>114</b>	5,3407	5,9985	6,8395	7,4433	8,0256
<b>115</b>	5,3451	6,0095	6,8464	7,4580	8,0488
<b>116</b>	5,3420	6,0127	6,8444	7,4528	8,0623
<b>117</b>	5,3459	5,9941	6,8360	7,4671	8,0620
<b>118</b>	5,3406	6,0008	6,8420	7,4346	8,0412
<b>119</b>	5,3426	5,9985	6,8465	7,4555	8,0468
<b>120</b>	5,3429	6,0122	6,8441	7,4552	8,0728
<b>121</b>	5,3532	6,0118	6,8320	7,4631	8,0613

<b>122</b>	5,3397	5,9991	6,8251	7,4571	8,0797
<b>123</b>	5,3335	5,9972	6,8348	7,4479	8,0520
<b>124</b>	5,3477	6,0066	6,8440	7,4626	8,0601
<b>125</b>	5,3366	6,0014	6,8386	7,4655	8,0788
<b>126</b>	5,3492	6,0116	6,8469	7,4722	8,0599
<b>127</b>	5,3468	6,0094	6,8427	7,4514	8,0723
<b>128</b>	5,3435	6,0014	6,8507	7,4565	8,0590
<b>129</b>	5,3356	5,9952	6,8513	7,4488	8,0325
<b>130</b>	5,3525	6,0056	6,8593	7,4649	8,0421
<b>131</b>	5,3384	6,0027	6,8629	7,4777	8,0918
<b>132</b>	5,3529	6,0003	6,8389	7,4591	8,0324
<b>133</b>	5,3414	6,0088	6,8413	7,4656	8,0566
<b>134</b>	5,3513	5,9989	6,8434	7,4530	8,0568
<b>135</b>	5,3550	6,0099	6,8393	7,4705	8,0486
<b>136</b>	5,3540	5,9957	6,8473	7,4670	8,0633
<b>137</b>	5,3539	6,0000	6,8264	7,4442	8,0463
<b>138</b>	5,3605	6,0159	6,8616	7,4639	8,0689
<b>139</b>	5,3566	6,0306	6,8696	7,4668	8,0680
<b>140</b>	5,3482	6,0100	6,8660	7,4686	8,0795
<b>141</b>	5,3529	6,0112	6,8511	7,4663	8,0591
<b>142</b>	5,3419	6,0109	6,8482	7,4447	8,0474
<b>143</b>	5,3545	6,0225	6,8581	7,4517	8,0532
<b>144</b>	5,3559	6,0176	6,8474	7,4649	8,0794
<b>145</b>	5,3440	6,0161	6,8642	7,4613	8,0606
<b>146</b>	5,3382	6,0158	6,8621	7,4699	8,0790
<b>147</b>	5,3549	6,0139	6,8571	7,4921	8,0871
<b>148</b>	5,3472	6,0085	6,8502	7,4853	8,0723
<b>149</b>	5,3427	6,0249	6,8476	7,4771	8,0510
<b>150</b>	5,3478	6,0148	6,8525	7,4683	8,0646

**Tabla AI.2.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 3$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	$p=3$				
	$hn,p,\alpha$				
$n$	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>8</b>	2,9644	3,2883	3,6957	4,0015	4,3096
<b>9</b>	3,1672	3,5098	3,9647	4,2938	4,6155
<b>10</b>	3,2884	3,6391	4,1076	4,4446	4,7957
<b>11</b>	3,3816	3,7363	4,2040	4,5649	4,9264
<b>12</b>	3,4440	3,8151	4,2733	4,6087	4,9601
<b>13</b>	3,4915	3,8548	4,3255	4,6777	5,0160
<b>14</b>	3,5314	3,9060	4,3746	4,7294	5,0753
<b>15</b>	3,5547	3,9315	4,4127	4,7653	5,1020
<b>16</b>	3,5803	3,9526	4,4276	4,7720	5,1162
<b>17</b>	3,6028	3,9816	4,4547	4,8084	5,1439
<b>18</b>	3,6145	3,9980	4,4742	4,8340	5,1873
<b>19</b>	3,6353	4,0124	4,4938	4,8377	5,1834
<b>20</b>	3,6472	4,0272	4,5060	4,8549	5,1932
<b>21</b>	3,6578	4,0438	4,5252	4,8674	5,2130
<b>22</b>	3,6675	4,0508	4,5196	4,8700	5,2083
<b>23</b>	3,6787	4,0594	4,5278	4,8836	5,2166
<b>24</b>	3,6835	4,0669	4,5518	4,8843	5,2202
<b>25</b>	3,6903	4,0772	4,5622	4,9109	5,2533
<b>26</b>	3,7015	4,0799	4,5567	4,9064	5,2577
<b>27</b>	3,7005	4,0875	4,5666	4,9141	5,2587
<b>28</b>	3,7077	4,0908	4,5677	4,9078	5,2413
<b>29</b>	3,7070	4,0883	4,5758	4,9155	5,2679
<b>30</b>	3,7139	4,0955	4,5744	4,9217	5,2583
<b>31</b>	3,7200	4,1073	4,5862	4,9435	5,2953
<b>32</b>	3,7217	4,1088	4,5790	4,9335	5,2721

<b>33</b>	3,7235	4,1152	4,5932	4,9497	5,3072
<b>34</b>	3,7254	4,1185	4,5950	4,9562	5,3087
<b>35</b>	3,7264	4,1124	4,5962	4,9344	5,2962
<b>36</b>	3,7312	4,1174	4,6004	4,9517	5,2875
<b>37</b>	3,7332	4,1210	4,6108	4,9625	5,3020
<b>38</b>	3,7345	4,1194	4,6049	4,9624	5,3206
<b>39</b>	3,7432	4,1304	4,6171	4,9726	5,3144
<b>40</b>	3,7448	4,1348	4,6172	4,9639	5,3073
<b>41</b>	3,7437	4,1316	4,6249	4,9682	5,3134
<b>42</b>	3,7453	4,1341	4,6261	4,9794	5,3034
<b>43</b>	3,7492	4,1296	4,6301	4,9773	5,3080
<b>44</b>	3,7516	4,1328	4,6219	4,9809	5,3256
<b>45</b>	3,7546	4,1404	4,6324	4,9994	5,3464
<b>46</b>	3,7505	4,1492	4,6304	4,9880	5,3254
<b>47</b>	3,7503	4,1436	4,6279	4,9895	5,3213
<b>48</b>	3,7466	4,1447	4,6229	4,9902	5,3319
<b>49</b>	3,7527	4,1431	4,6267	4,9890	5,3315
<b>50</b>	3,7524	4,1427	4,6281	4,9986	5,3233
<b>51</b>	3,7562	4,1449	4,6329	4,9848	5,3296
<b>52</b>	3,7509	4,1360	4,6430	4,9950	5,3590
<b>53</b>	3,7488	4,1458	4,6360	4,9977	5,3340
<b>54</b>	3,7534	4,1392	4,6515	5,0035	5,3420
<b>55</b>	3,7577	4,1411	4,6376	4,9924	5,3342
<b>56</b>	3,7597	4,1472	4,6326	4,9917	5,3345
<b>57</b>	3,7637	4,1586	4,6372	4,9972	5,3559
<b>58</b>	3,7622	4,1561	4,6383	4,9904	5,3417
<b>59</b>	3,7613	4,1543	4,6354	4,9862	5,3477
<b>60</b>	3,7603	4,1491	4,6349	4,9905	5,3372
<b>61</b>	3,7628	4,1559	4,6290	4,9911	5,3366
<b>62</b>	3,7599	4,1543	4,6454	5,0074	5,3550
<b>63</b>	3,7669	4,1556	4,6513	5,0137	5,3712

<b>64</b>	3,7672	4,1579	4,6508	5,0097	5,3662
<b>65</b>	3,7684	4,1572	4,6420	5,0215	5,3720
<b>66</b>	3,7693	4,1598	4,6494	4,9998	5,3558
<b>67</b>	3,7639	4,1547	4,6511	5,0006	5,3506
<b>68</b>	3,7609	4,1586	4,6592	5,0125	5,3447
<b>69</b>	3,7682	4,1504	4,6576	5,0121	5,3653
<b>70</b>	3,7668	4,1524	4,6520	5,0062	5,3570
<b>71</b>	3,7681	4,1607	4,6541	5,0041	5,3624
<b>72</b>	3,7737	4,1630	4,6633	5,0114	5,3462
<b>73</b>	3,7740	4,1560	4,6533	5,0098	5,3563
<b>74</b>	3,7683	4,1578	4,6535	5,0072	5,3635
<b>75</b>	3,7668	4,1611	4,6525	5,0084	5,3639
<b>76</b>	3,7654	4,1596	4,6482	5,0062	5,3402
<b>77</b>	3,7706	4,1626	4,6577	5,0211	5,3514
<b>78</b>	3,7725	4,1616	4,6578	5,0211	5,3601
<b>79</b>	3,7777	4,1586	4,6568	5,0002	5,3767
<b>80</b>	3,7803	4,1663	4,6632	5,0202	5,3796
<b>81</b>	3,7768	4,1610	4,6516	5,0212	5,3602
<b>82</b>	3,7774	4,1718	4,6588	5,0072	5,3558
<b>83</b>	3,7763	4,1702	4,6599	5,0181	5,3703
<b>84</b>	3,7695	4,1610	4,6600	5,0132	5,3536
<b>85</b>	3,7688	4,1637	4,6617	5,0271	5,3653
<b>86</b>	3,7677	4,1633	4,6532	5,0086	5,3623
<b>87</b>	3,7695	4,1651	4,6624	5,0117	5,3688
<b>88</b>	3,7739	4,1629	4,6558	5,0077	5,3549
<b>89</b>	3,7731	4,1558	4,6621	5,0173	5,3630
<b>90</b>	3,7697	4,1587	4,6722	5,0308	5,3749
<b>91</b>	3,7758	4,1646	4,6690	5,0377	5,3902
<b>92</b>	3,7763	4,1618	4,6605	5,0230	5,3799
<b>93</b>	3,7726	4,1675	4,6552	5,0269	5,3768
<b>94</b>	3,7704	4,1644	4,6628	5,0165	5,3641

<b>95</b>	3,7767	4,1696	4,6658	5,0313	5,3717
<b>96</b>	3,7754	4,1717	4,6646	5,0232	5,3826
<b>97</b>	3,7836	4,1727	4,6718	5,0266	5,3729
<b>98</b>	3,7801	4,1712	4,6622	5,0234	5,3762
<b>99</b>	3,7789	4,1816	4,6657	5,0298	5,3818
<b>100</b>	3,7848	4,1793	4,6760	5,0379	5,3788
<b>101</b>	3,7770	4,1764	4,6686	5,0487	5,4005
<b>102</b>	3,7723	4,1699	4,6726	5,0269	5,3827
<b>103</b>	3,7751	4,1704	4,6725	5,0397	5,3831
<b>104</b>	3,7773	4,1623	4,6619	5,0249	5,3584
<b>105</b>	3,7740	4,1645	4,6630	5,0260	5,3721
<b>106</b>	3,7752	4,1660	4,6565	5,0163	5,3664
<b>107</b>	3,7808	4,1744	4,6648	5,0145	5,3799
<b>108</b>	3,7764	4,1675	4,6657	5,0227	5,3664
<b>109</b>	3,7798	4,1755	4,6733	5,0308	5,3819
<b>110</b>	3,7767	4,1696	4,6716	5,0185	5,3538
<b>111</b>	3,7751	4,1688	4,6637	5,0345	5,3658
<b>112</b>	3,7786	4,1711	4,6656	5,0179	5,3657
<b>113</b>	3,7732	4,1756	4,6761	5,0262	5,3679
<b>114</b>	3,7815	4,1758	4,6693	5,0385	5,3932
<b>115</b>	3,7733	4,1751	4,6634	5,0190	5,3573
<b>116</b>	3,7779	4,1672	4,6754	5,0242	5,3751
<b>117</b>	3,7776	4,1744	4,6618	5,0318	5,3814
<b>118</b>	3,7788	4,1762	4,6653	5,0340	5,3842
<b>119</b>	3,7777	4,1709	4,6654	5,0200	5,3705
<b>120</b>	3,7788	4,1733	4,6628	5,0254	5,3790
<b>121</b>	3,7760	4,1740	4,6594	5,0190	5,3613
<b>122</b>	3,7698	4,1702	4,6625	5,0331	5,3654
<b>123</b>	3,7811	4,1639	4,6587	5,0243	5,3724
<b>124</b>	3,7699	4,1683	4,6618	5,0181	5,3590
<b>125</b>	3,7715	4,1696	4,6627	5,0173	5,3754

<b>126</b>	3,7733	4,1714	4,6645	5,0316	5,3647
<b>127</b>	3,7759	4,1793	4,6639	5,0197	5,3744
<b>128</b>	3,7805	4,1733	4,6550	5,0122	5,3637
<b>129</b>	3,7810	4,1730	4,6571	5,0164	5,3823
<b>130</b>	3,7768	4,1695	4,6644	5,0184	5,3746
<b>131</b>	3,7834	4,1785	4,6660	5,0303	5,3865
<b>132</b>	3,7724	4,1712	4,6710	5,0090	5,3604
<b>133</b>	3,7756	4,1767	4,6633	5,0273	5,3641
<b>134</b>	3,7767	4,1800	4,6662	5,0281	5,3778
<b>135</b>	3,7787	4,1769	4,6763	5,0346	5,3771
<b>136</b>	3,7733	4,1636	4,6698	5,0291	5,3820
<b>137</b>	3,7747	4,1745	4,6634	5,0216	5,3583
<b>138</b>	3,7723	4,1731	4,6650	5,0260	5,3588
<b>139</b>	3,7763	4,1617	4,6701	5,0343	5,3796
<b>140</b>	3,7717	4,1728	4,6759	5,0172	5,3648
<b>141</b>	3,7748	4,1712	4,6768	5,0282	5,3726
<b>142</b>	3,7721	4,1669	4,6759	5,0483	5,3813
<b>143</b>	3,7740	4,1656	4,6679	5,0403	5,3772
<b>144</b>	3,7741	4,1718	4,6811	5,0332	5,3753
<b>145</b>	3,7787	4,1707	4,6601	5,0178	5,3602
<b>146</b>	3,7735	4,1682	4,6668	5,0214	5,3790
<b>147</b>	3,7829	4,1717	4,6693	5,0303	5,3888
<b>148</b>	3,7725	4,1705	4,6713	5,0312	5,3735
<b>149</b>	3,7838	4,1825	4,6598	5,0288	5,3860
<b>150</b>	3,7816	4,1737	4,6653	5,0103	5,3739

**Tabla AI.3.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 4$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	<b><math>p=4</math></b>				
	<b><math>hn,p,\alpha</math></b>				
<b><math>n</math></b>	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>10</b>	2,5312	2,7718	3,0807	3,3151	3,5462
<b>11</b>	2,6588	2,9225	3,2615	3,5020	3,7461
<b>12</b>	2,7313	2,9998	3,3378	3,5891	3,8386
<b>13</b>	2,7806	3,0498	3,3951	3,6399	3,8905
<b>14</b>	2,8177	3,0845	3,4370	3,6911	3,9546
<b>15</b>	2,8489	3,1165	3,4643	3,7249	3,9787
<b>16</b>	2,8737	3,1423	3,4889	3,7546	4,0159
<b>17</b>	2,8895	3,1623	3,5082	3,7664	4,0357
<b>18</b>	2,9071	3,1820	3,5323	3,7834	4,0440
<b>19</b>	2,9215	3,1966	3,5451	3,8048	4,0611
<b>20</b>	2,9302	3,2017	3,5492	3,8096	4,0697
<b>21</b>	2,9407	3,2225	3,5711	3,8278	4,0772
<b>22</b>	2,9516	3,2262	3,5870	3,8486	4,1033
<b>23</b>	2,9531	3,2239	3,5799	3,8328	4,1000
<b>24</b>	2,9621	3,2349	3,5904	3,8543	4,1060
<b>25</b>	2,9651	3,2428	3,5922	3,8473	4,1071
<b>26</b>	2,9709	3,2457	3,5961	3,8438	4,0915
<b>27</b>	2,9756	3,2478	3,5938	3,8490	4,1000
<b>28</b>	2,9767	3,2484	3,6011	3,8546	4,1153
<b>29</b>	2,9830	3,2552	3,5992	3,8526	4,1260
<b>30</b>	2,9890	3,2632	3,6116	3,8691	4,1333
<b>31</b>	2,9906	3,2688	3,6160	3,8659	4,1213
<b>32</b>	2,9939	3,2669	3,6126	3,8754	4,1361
<b>33</b>	2,9951	3,2692	3,6172	3,8769	4,1263
<b>34</b>	2,9969	3,2732	3,6226	3,8856	4,1353
<b>35</b>	2,9997	3,2724	3,6161	3,8823	4,1413

<b>36</b>	3,0008	3,2761	3,6160	3,8829	4,1427
<b>37</b>	3,0021	3,2795	3,6217	3,8939	4,1399
<b>38</b>	3,0067	3,2856	3,6330	3,8871	4,1492
<b>39</b>	3,0083	3,2885	3,6416	3,9057	4,1682
<b>40</b>	3,0075	3,2818	3,6376	3,8958	4,1552
<b>41</b>	3,0101	3,2874	3,6347	3,9002	4,1519
<b>42</b>	3,0119	3,2895	3,6454	3,9054	4,1433
<b>43</b>	3,0077	3,2835	3,6439	3,9028	4,1616
<b>44</b>	3,0087	3,2892	3,6372	3,9057	4,1602
<b>45</b>	3,0106	3,2882	3,6376	3,8940	4,1462
<b>46</b>	3,0157	3,2922	3,6434	3,8981	4,1568
<b>47</b>	3,0185	3,2910	3,6452	3,9028	4,1482
<b>48</b>	3,0198	3,2955	3,6471	3,9045	4,1643
<b>49</b>	3,0181	3,2975	3,6479	3,8944	4,1468
<b>50</b>	3,0170	3,3048	3,6419	3,8991	4,1546
<b>51</b>	3,0141	3,2995	3,6398	3,8908	4,1404
<b>52</b>	3,0200	3,2969	3,6385	3,8977	4,1537
<b>53</b>	3,0200	3,2986	3,6400	3,8928	4,1347
<b>54</b>	3,0171	3,2980	3,6363	3,8940	4,1421
<b>55</b>	3,0217	3,3041	3,6475	3,9013	4,1500
<b>56</b>	3,0196	3,2987	3,6459	3,9002	4,1530
<b>57</b>	3,0200	3,2985	3,6478	3,9090	4,1648
<b>58</b>	3,0220	3,2976	3,6451	3,9072	4,1626
<b>59</b>	3,0197	3,2976	3,6512	3,9178	4,1765
<b>60</b>	3,0259	3,3047	3,6540	3,9204	4,1771
<b>61</b>	3,0259	3,3049	3,6565	3,9209	4,1823
<b>62</b>	3,0250	3,3051	3,6625	3,9261	4,1736
<b>63</b>	3,0245	3,3056	3,6635	3,9114	4,1677
<b>64</b>	3,0214	3,3092	3,6579	3,9135	4,1625
<b>65</b>	3,0301	3,3062	3,6579	3,9203	4,1756
<b>66</b>	3,0295	3,3059	3,6556	3,9132	4,1587

<b>67</b>	3,0301	3,3084	3,6673	3,9184	4,1740
<b>68</b>	3,0291	3,3048	3,6583	3,9106	4,1580
<b>69</b>	3,0268	3,3076	3,6636	3,9115	4,1533
<b>70</b>	3,0298	3,3035	3,6602	3,9114	4,1664
<b>71</b>	3,0279	3,3102	3,6631	3,9213	4,1663
<b>72</b>	3,0314	3,3072	3,6625	3,9098	4,1463
<b>73</b>	3,0312	3,3046	3,6543	3,9099	4,1665
<b>74</b>	3,0305	3,3081	3,6587	3,9113	4,1636
<b>75</b>	3,0314	3,3127	3,6557	3,9028	4,1538
<b>76</b>	3,0293	3,3088	3,6689	3,9252	4,1794
<b>77</b>	3,0354	3,3111	3,6659	3,9234	4,1789
<b>78</b>	3,0320	3,3141	3,6631	3,9290	4,1869
<b>79</b>	3,0303	3,3125	3,6638	3,9258	4,1852
<b>80</b>	3,0316	3,3068	3,6574	3,9149	4,1729
<b>81</b>	3,0345	3,3113	3,6682	3,9248	4,1713
<b>82</b>	3,0297	3,3120	3,6655	3,9212	4,1549
<b>83</b>	3,0283	3,3071	3,6557	3,9192	4,1655
<b>84</b>	3,0305	3,3135	3,6640	3,9177	4,1613
<b>85</b>	3,0308	3,3118	3,6546	3,9133	4,1576
<b>86</b>	3,0306	3,3125	3,6575	3,9176	4,1747
<b>87</b>	3,0346	3,3133	3,6590	3,9200	4,1819
<b>88</b>	3,0358	3,3114	3,6668	3,9224	4,1759
<b>89</b>	3,0318	3,3132	3,6631	3,9196	4,1772
<b>90</b>	3,0342	3,3102	3,6563	3,9163	4,1951
<b>91</b>	3,0349	3,3117	3,6657	3,9214	4,1841
<b>92</b>	3,0340	3,3097	3,6615	3,9192	4,1596
<b>93</b>	3,0304	3,3143	3,6597	3,9182	4,1723
<b>94</b>	3,0355	3,3159	3,6574	3,9154	4,1761
<b>95</b>	3,0310	3,3147	3,6628	3,9193	4,1698
<b>96</b>	3,0326	3,3111	3,6665	3,9252	4,1719
<b>97</b>	3,0340	3,3097	3,6725	3,9340	4,1912

<b>98</b>	3,0339	3,3108	3,6673	3,9254	4,1767
<b>99</b>	3,0327	3,3154	3,6661	3,9232	4,1678
<b>100</b>	3,0314	3,3140	3,6646	3,9187	4,1663
<b>101</b>	3,0305	3,3159	3,6628	3,9199	4,1718
<b>102</b>	3,0363	3,3193	3,6685	3,9265	4,1700
<b>103</b>	3,0371	3,3191	3,6675	3,9245	4,1733
<b>104</b>	3,0346	3,3134	3,6635	3,9296	4,1865
<b>105</b>	3,0392	3,3166	3,6665	3,9265	4,1737
<b>106</b>	3,0368	3,3161	3,6584	3,9207	4,1717
<b>107</b>	3,0363	3,3210	3,6658	3,9298	4,1753
<b>108</b>	3,0349	3,3214	3,6766	3,9260	4,1765
<b>109</b>	3,0371	3,3214	3,6793	3,9272	4,1834
<b>110</b>	3,0381	3,3210	3,6766	3,9364	4,2019
<b>111</b>	3,0375	3,3249	3,6772	3,9391	4,2002
<b>112</b>	3,0377	3,3123	3,6726	3,9299	4,1865
<b>113</b>	3,0429	3,3132	3,6677	3,9291	4,1889
<b>114</b>	3,0374	3,3162	3,6711	3,9348	4,1909
<b>115</b>	3,0412	3,3111	3,6589	3,9266	4,1781
<b>116</b>	3,0332	3,3108	3,6638	3,9224	4,1735
<b>117</b>	3,0399	3,3138	3,6611	3,9157	4,1605
<b>118</b>	3,0343	3,3150	3,6615	3,9144	4,1708
<b>119</b>	3,0362	3,3129	3,6680	3,9238	4,1744
<b>120</b>	3,0352	3,3136	3,6690	3,9192	4,1640
<b>121</b>	3,0347	3,3173	3,6633	3,9284	4,1735
<b>122</b>	3,0407	3,3173	3,6701	3,9216	4,1756
<b>123</b>	3,0359	3,3155	3,6695	3,9224	4,1684
<b>124</b>	3,0407	3,3125	3,6639	3,9250	4,1802
<b>125</b>	3,0421	3,3203	3,6762	3,9323	4,1782
<b>126</b>	3,0360	3,3245	3,6656	3,9335	4,1662
<b>127</b>	3,0373	3,3207	3,6639	3,9225	4,1706
<b>128</b>	3,0368	3,3147	3,6656	3,9263	4,1680

<b>129</b>	3,0410	3,3174	3,6654	3,9306	4,1714
<b>130</b>	3,0381	3,3169	3,6630	3,9230	4,1915
<b>131</b>	3,0421	3,3193	3,6677	3,9375	4,1931
<b>132</b>	3,0328	3,3204	3,6746	3,9293	4,1795
<b>133</b>	3,0318	3,3143	3,6641	3,9311	4,1915
<b>134</b>	3,0351	3,3171	3,6701	3,9312	4,1853
<b>135</b>	3,0360	3,3187	3,6760	3,9319	4,1974
<b>136</b>	3,0368	3,3167	3,6683	3,9328	4,1803
<b>137</b>	3,0384	3,3137	3,6653	3,9286	4,1862
<b>138</b>	3,0328	3,3158	3,6679	3,9257	4,1843
<b>139</b>	3,0399	3,3230	3,6806	3,9410	4,2003
<b>140</b>	3,0370	3,3176	3,6694	3,9240	4,1888
<b>141</b>	3,0346	3,3156	3,6630	3,9254	4,1813
<b>142</b>	3,0343	3,3150	3,6618	3,9174	4,1642
<b>143</b>	3,0380	3,3170	3,6744	3,9331	4,1928
<b>144</b>	3,0380	3,3200	3,6760	3,9373	4,1898
<b>145</b>	3,0352	3,3192	3,6677	3,9212	4,1821
<b>146</b>	3,0351	3,3184	3,6742	3,9178	4,1773
<b>147</b>	3,0358	3,3239	3,6797	3,9368	4,2056
<b>148</b>	3,0337	3,3170	3,6752	3,9290	4,1913
<b>149</b>	3,0389	3,3213	3,6732	3,9320	4,1928
<b>150</b>	3,0416	3,3197	3,6746	3,9359	4,1880

**Tabla AI.4.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 5$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	$p=5$				
	$hn,p,\alpha$				
$n$	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>12</b>	2,2593	2,4575	2,7135	2,8936	3,0863
<b>13</b>	2,3461	2,5547	2,8318	3,0322	3,2351
<b>14</b>	2,3958	2,6087	2,8874	3,0959	3,3077
<b>15</b>	2,4318	2,6456	2,9302	3,1398	3,3421
<b>16</b>	2,4550	2,6676	2,9414	3,1502	3,3510
<b>17</b>	2,4734	2,6883	2,9642	3,1836	3,3903
<b>18</b>	2,4882	2,7023	2,9846	3,2010	3,4135
<b>19</b>	2,5023	2,7207	3,0039	3,2128	3,4292
<b>20</b>	2,5147	2,7322	3,0135	3,2237	3,4372
<b>21</b>	2,5213	2,7379	3,0175	3,2270	3,4371
<b>22</b>	2,5272	2,7442	3,0257	3,2286	3,4308
<b>23</b>	2,5375	2,7536	3,0363	3,2429	3,4515
<b>24</b>	2,5419	2,7569	3,0422	3,2481	3,4554
<b>25</b>	2,5473	2,7654	3,0474	3,2551	3,4525
<b>26</b>	2,5552	2,7705	3,0540	3,2551	3,4549
<b>27</b>	2,5590	2,7766	3,0550	3,2663	3,4790
<b>28</b>	2,5593	2,7772	3,0583	3,2715	3,4905
<b>29</b>	2,5630	2,7794	3,0554	3,2613	3,4695
<b>30</b>	2,5688	2,7854	3,0648	3,2662	3,4893
<b>31</b>	2,5707	2,7882	3,0671	3,2699	3,4862
<b>32</b>	2,5729	2,7921	3,0696	3,2810	3,4938
<b>33</b>	2,5749	2,7930	3,0755	3,2765	3,4796
<b>34</b>	2,5794	2,7978	3,0707	3,2773	3,4956
<b>35</b>	2,5773	2,7971	3,0763	3,2763	3,4834
<b>36</b>	2,5811	2,8002	3,0750	3,2780	3,4900

<b>37</b>	2,5817	2,8035	3,0819	3,2780	3,4818
<b>38</b>	2,5850	2,8032	3,0854	3,3026	3,5062
<b>39</b>	2,5823	2,8026	3,0850	3,2941	3,5080
<b>40</b>	2,5889	2,8077	3,0854	3,3024	3,5136
<b>41</b>	2,5872	2,8092	3,0868	3,2999	3,5092
<b>42</b>	2,5901	2,8133	3,0909	3,2971	3,5044
<b>43</b>	2,5912	2,8071	3,0873	3,2970	3,4996
<b>44</b>	2,5903	2,8068	3,0868	3,2944	3,5057
<b>45</b>	2,5921	2,8104	3,0897	3,2976	3,5022
<b>46</b>	2,5913	2,8124	3,0975	3,3053	3,5142
<b>47</b>	2,5923	2,8139	3,0915	3,2990	3,5152
<b>48</b>	2,5922	2,8146	3,0959	3,3052	3,5201
<b>49</b>	2,5944	2,8098	3,0967	3,3120	3,5310
<b>50</b>	2,5953	2,8158	3,1018	3,3063	3,5082
<b>51</b>	2,5979	2,8174	3,0951	3,2904	3,5119
<b>52</b>	2,5943	2,8166	3,0957	3,2927	3,5098
<b>53</b>	2,5932	2,8114	3,0923	3,2987	3,5050
<b>54</b>	2,5978	2,8156	3,0936	3,2997	3,5065
<b>55</b>	2,5961	2,8104	3,0896	3,2955	3,5094
<b>56</b>	2,6004	2,8188	3,0927	3,2967	3,4988
<b>57</b>	2,5985	2,8190	3,0936	3,2913	3,4915
<b>58</b>	2,5987	2,8197	3,0998	3,3020	3,5049
<b>59</b>	2,5985	2,8188	3,1000	3,3076	3,5084
<b>60</b>	2,5999	2,8148	3,0986	3,3074	3,5055
<b>61</b>	2,6013	2,8202	3,0816	3,2918	3,4972
<b>62</b>	2,6004	2,8236	3,0986	3,3095	3,5021
<b>63</b>	2,6037	2,8219	3,1017	3,3097	3,5117
<b>64</b>	2,6019	2,8222	3,1002	3,2957	3,4975
<b>65</b>	2,6035	2,8205	3,0983	3,3016	3,5010
<b>66</b>	2,6033	2,8210	3,1015	3,3109	3,5182
<b>67</b>	2,6038	2,8214	3,0990	3,3057	3,5090

<b>68</b>	2,6012	2,8241	3,1026	3,3028	3,5200
<b>69</b>	2,6039	2,8270	3,1027	3,3061	3,5104
<b>70</b>	2,6032	2,8217	3,1047	3,3033	3,5097
<b>71</b>	2,6010	2,8233	3,1054	3,3063	3,5045
<b>72</b>	2,6026	2,8260	3,1019	3,3041	3,5128
<b>73</b>	2,6000	2,8235	3,1042	3,3032	3,5083
<b>74</b>	2,6039	2,8229	3,1035	3,3057	3,5093
<b>75</b>	2,6022	2,8192	3,0982	3,3122	3,5262
<b>76</b>	2,6052	2,8237	3,1073	3,3155	3,5230
<b>77</b>	2,6073	2,8267	3,1067	3,3128	3,5206
<b>78</b>	2,6046	2,8238	3,1059	3,3072	3,5267
<b>79</b>	2,6030	2,8208	3,1003	3,3104	3,5131
<b>80</b>	2,6050	2,8240	3,1046	3,3064	3,5184
<b>81</b>	2,6085	2,8250	3,1061	3,3123	3,5143
<b>82</b>	2,6071	2,8253	3,1031	3,3053	3,5118
<b>83</b>	2,6003	2,8218	3,0970	3,2935	3,4997
<b>84</b>	2,6029	2,8262	3,1069	3,3135	3,5213
<b>85</b>	2,6051	2,8271	3,0971	3,3047	3,5132
<b>86</b>	2,6042	2,8260	3,1080	3,3053	3,5082
<b>87</b>	2,6040	2,8279	3,1056	3,3164	3,5216
<b>88</b>	2,6057	2,8231	3,1113	3,3160	3,5170
<b>89</b>	2,6057	2,8234	3,1035	3,3103	3,5093
<b>90</b>	2,6078	2,8259	3,0993	3,3050	3,5007
<b>91</b>	2,6060	2,8234	3,0968	3,2999	3,4995
<b>92</b>	2,6090	2,8227	3,1038	3,3068	3,5183
<b>93</b>	2,6066	2,8269	3,1057	3,3092	3,5084
<b>94</b>	2,6117	2,8281	3,1075	3,3166	3,5355
<b>95</b>	2,6100	2,8316	3,1105	3,3193	3,5234
<b>96</b>	2,6077	2,8276	3,1096	3,3105	3,5280
<b>97</b>	2,6067	2,8309	3,1077	3,3061	3,5242
<b>98</b>	2,6062	2,8287	3,1092	3,3096	3,5175

<b>99</b>	2,6076	2,8261	3,1041	3,3159	3,5146
<b>100</b>	2,6044	2,8269	3,1026	3,3147	3,5297
<b>101</b>	2,6065	2,8251	3,1033	3,3105	3,5188
<b>102</b>	2,6067	2,8281	3,0990	3,3078	3,5132
<b>103</b>	2,6097	2,8266	3,0949	3,3040	3,5282
<b>104</b>	2,6083	2,8278	3,1024	3,3133	3,4977
<b>105</b>	2,6059	2,8278	3,1110	3,3100	3,5033
<b>106</b>	2,6102	2,8285	3,1106	3,3166	3,5206
<b>107</b>	2,6113	2,8276	3,1044	3,3087	3,5105
<b>108</b>	2,6086	2,8243	3,1057	3,3154	3,5079
<b>109</b>	2,6059	2,8324	3,1081	3,3080	3,4998
<b>110</b>	2,6077	2,8264	3,1074	3,3102	3,5151
<b>111</b>	2,6076	2,8270	3,1035	3,3089	3,5188
<b>112</b>	2,6114	2,8257	3,1116	3,3104	3,5124
<b>113</b>	2,6137	2,8312	3,1066	3,3126	3,5257
<b>114</b>	2,6108	2,8295	3,1047	3,3116	3,5311
<b>115</b>	2,6113	2,8297	3,1104	3,3197	3,5210
<b>116</b>	2,6134	2,8317	3,1089	3,3128	3,5057
<b>117</b>	2,6091	2,8327	3,1127	3,3149	3,5148
<b>118</b>	2,6136	2,8316	3,1137	3,3273	3,5309
<b>119</b>	2,6100	2,8295	3,1133	3,3176	3,5196
<b>120</b>	2,6067	2,8256	3,1099	3,3256	3,5210
<b>121</b>	2,6071	2,8244	3,1070	3,3093	3,5024
<b>122</b>	2,6081	2,8280	3,1076	3,3186	3,5105
<b>123</b>	2,6081	2,8278	3,1104	3,3091	3,5160
<b>124</b>	2,6094	2,8334	3,1090	3,3101	3,5145
<b>125</b>	2,6123	2,8289	3,1101	3,3188	3,5277
<b>126</b>	2,6075	2,8277	3,1072	3,3154	3,5223
<b>127</b>	2,6083	2,8277	3,1118	3,3229	3,5136
<b>128</b>	2,6090	2,8316	3,1080	3,3170	3,5187
<b>129</b>	2,6099	2,8260	3,1085	3,3270	3,5257

<b>130</b>	2,6088	2,8242	3,1040	3,3130	3,5195
<b>131</b>	2,6072	2,8272	3,1011	3,3050	3,5178
<b>132</b>	2,6111	2,8266	3,1033	3,3046	3,5027
<b>133</b>	2,6086	2,8226	3,1007	3,3070	3,5196
<b>134</b>	2,6100	2,8315	3,1151	3,3198	3,5193
<b>135</b>	2,6107	2,8343	3,1103	3,3142	3,5191
<b>136</b>	2,6125	2,8294	3,1107	3,3217	3,5261
<b>137</b>	2,6087	2,8319	3,1110	3,3261	3,5204
<b>138</b>	2,6133	2,8266	3,1086	3,3165	3,5399
<b>139</b>	2,6115	2,8240	3,1088	3,3108	3,5124
<b>140</b>	2,6122	2,8279	3,1126	3,3194	3,5234
<b>141</b>	2,6098	2,8302	3,1092	3,3204	3,5323
<b>142</b>	2,6098	2,8262	3,1022	3,3113	3,5248
<b>143</b>	2,6056	2,8268	3,1016	3,3099	3,5236
<b>144</b>	2,6092	2,8270	3,1055	3,3134	3,5293
<b>145</b>	2,6107	2,8308	3,1063	3,3160	3,5237
<b>146</b>	2,6108	2,8275	3,1013	3,3036	3,5136
<b>147</b>	2,6108	2,8320	3,1032	3,3029	3,5135
<b>148</b>	2,6099	2,8296	3,1110	3,3097	3,5117
<b>149</b>	2,6109	2,8311	3,1062	3,3068	3,4988
<b>150</b>	2,6177	2,8322	3,1127	3,3198	3,5252

**Tabla AI.5.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 10$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	$p=10$				
	$hn,p,\alpha$				
$n$	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>22</b>	1,6959	1,7995	1,9321	2,0284	2,1300
<b>23</b>	1,7105	1,8152	1,9538	2,0586	2,1633
<b>24</b>	1,7203	1,8281	1,9684	2,0703	2,1753
<b>25</b>	1,7283	1,8373	1,9792	2,0868	2,1967
<b>26</b>	1,7366	1,8468	1,9872	2,0984	2,2054
<b>27</b>	1,7414	1,8523	1,9941	2,1077	2,2157
<b>28</b>	1,7490	1,8597	2,0017	2,1139	2,2225
<b>29</b>	1,7531	1,8642	2,0081	2,1229	2,2338
<b>30</b>	1,7561	1,8702	2,0206	2,1286	2,2410
<b>31</b>	1,7611	1,8748	2,0232	2,1327	2,2544
<b>32</b>	1,7630	1,8778	2,0271	2,1410	2,2520
<b>33</b>	1,7685	1,8841	2,0366	2,1473	2,2595
<b>34</b>	1,7684	1,8813	2,0332	2,1460	2,2653
<b>35</b>	1,7721	1,8877	2,0384	2,1567	2,2755
<b>36</b>	1,7739	1,8884	2,0396	2,1534	2,2787
<b>37</b>	1,7723	1,8882	2,0344	2,1421	2,2593
<b>38</b>	1,7761	1,8909	2,0372	2,1510	2,2664
<b>39</b>	1,7796	1,8959	2,0511	2,1589	2,2788
<b>40</b>	1,7801	1,8948	2,0476	2,1625	2,2691
<b>41</b>	1,7822	1,8971	2,0521	2,1704	2,2847
<b>42</b>	1,7841	1,8975	2,0499	2,1615	2,2845
<b>43</b>	1,7833	1,8990	2,0458	2,1627	2,2797
<b>44</b>	1,7833	1,8992	2,0482	2,1601	2,2722
<b>45</b>	1,7851	1,9006	2,0499	2,1670	2,2832

<b>46</b>	1,7849	1,9007	2,0501	2,1680	2,2818
<b>47</b>	1,7862	1,9003	2,0501	2,1684	2,2919
<b>48</b>	1,7894	1,9038	2,0534	2,1675	2,2876
<b>49</b>	1,7868	1,9011	2,0490	2,1594	2,2841
<b>50</b>	1,7871	1,9038	2,0536	2,1669	2,2830
<b>51</b>	1,7875	1,9053	2,0568	2,1733	2,2884
<b>52</b>	1,7890	1,9044	2,0591	2,1818	2,2999
<b>53</b>	1,7886	1,9039	2,0504	2,1592	2,2785
<b>54</b>	1,7889	1,9029	2,0525	2,1654	2,2741
<b>55</b>	1,7940	1,9080	2,0614	2,1785	2,2958
<b>56</b>	1,7931	1,9104	2,0583	2,1780	2,2984
<b>57</b>	1,7933	1,9079	2,0598	2,1753	2,2928
<b>58</b>	1,7933	1,9098	2,0639	2,1829	2,3035
<b>59</b>	1,7933	1,9111	2,0614	2,1776	2,2898
<b>60</b>	1,7923	1,9091	2,0597	2,1768	2,2968
<b>61</b>	1,7931	1,9107	2,0633	2,1757	2,3026
<b>62</b>	1,7934	1,9126	2,0599	2,1745	2,2914
<b>63</b>	1,7946	1,9089	2,0608	2,1734	2,2877
<b>64</b>	1,7944	1,9125	2,0622	2,1730	2,2835
<b>65</b>	1,7919	1,9047	2,0564	2,1693	2,2877
<b>66</b>	1,7953	1,9103	2,0604	2,1812	2,2960
<b>67</b>	1,7974	1,9109	2,0605	2,1788	2,2996
<b>68</b>	1,7963	1,9067	2,0573	2,1759	2,2867
<b>69</b>	1,7941	1,9070	2,0606	2,1767	2,2958
<b>70</b>	1,7938	1,9096	2,0601	2,1749	2,2862
<b>71</b>	1,7948	1,9102	2,0568	2,1744	2,2878
<b>72</b>	1,7952	1,9114	2,0632	2,1788	2,2921
<b>73</b>	1,7974	1,9126	2,0620	2,1757	2,2921
<b>74</b>	1,7972	1,9145	2,0606	2,1762	2,2965
<b>75</b>	1,7984	1,9131	2,0699	2,1902	2,3075
<b>76</b>	1,7969	1,9129	2,0619	2,1829	2,2997

<b>77</b>	1,7977	1,9126	2,0663	2,1778	2,2943
<b>78</b>	1,7979	1,9148	2,0646	2,1609	2,2966
<b>79</b>	1,7982	1,9131	2,0606	2,1741	2,2969
<b>80</b>	1,7993	1,9129	2,0656	2,1820	2,3060
<b>81</b>	1,8005	1,9151	2,0648	2,1825	2,3087
<b>82</b>	1,7983	1,9144	2,0641	2,1814	2,3036
<b>83</b>	1,8007	1,9152	2,0643	2,1810	2,3039
<b>84</b>	1,7961	1,9135	2,0657	2,1859	2,2959
<b>85</b>	1,7947	1,9118	2,0630	2,1768	2,2928
<b>86</b>	1,7957	1,9119	2,0617	2,1767	2,2972
<b>87</b>	1,7987	1,9117	2,0617	2,1798	2,3095
<b>88</b>	1,7974	1,9116	2,0637	2,1813	2,2974
<b>89</b>	1,7960	1,9127	2,0642	2,1807	2,2930
<b>90</b>	1,7979	1,9183	2,0648	2,1803	2,2865
<b>91</b>	1,7999	1,9125	2,0662	2,1822	2,2999
<b>92</b>	1,7979	1,9132	2,0603	2,1749	2,3003
<b>93</b>	1,8001	1,9150	2,0599	2,1767	2,2898
<b>94</b>	1,7993	1,9158	2,0671	2,1788	2,2965
<b>95</b>	1,8022	1,9163	2,0671	2,1881	2,3036
<b>96</b>	1,8016	1,9152	2,0674	2,1829	2,3004
<b>97</b>	1,7989	1,9152	2,0637	2,1858	2,3098
<b>98</b>	1,7997	1,9181	2,0706	2,1833	2,3071
<b>99</b>	1,7980	1,9169	2,0614	2,1707	2,2830
<b>100</b>	1,7992	1,9148	2,0680	2,1726	2,2923
<b>101</b>	1,7997	1,9180	2,0655	2,1829	2,3018
<b>102</b>	1,8003	1,9148	2,0594	2,1787	2,2870
<b>103</b>	1,7984	1,9131	2,0615	2,1820	2,2995
<b>104</b>	1,7991	1,9151	2,0711	2,1860	2,3107
<b>105</b>	1,7984	1,9135	2,0706	2,1864	2,3074
<b>106</b>	1,7963	1,9102	2,0629	2,1781	2,2913
<b>107</b>	1,8007	1,9188	2,0654	2,1842	2,2991

<b>108</b>	1,7978	1,9124	2,0650	2,1753	2,2996
<b>109</b>	1,8012	1,9169	2,0716	2,1886	2,3064
<b>110</b>	1,8004	1,9146	2,0713	2,1905	2,3058
<b>111</b>	1,7991	1,9143	2,0664	2,1793	2,3026
<b>112</b>	1,8012	1,9156	2,0647	2,1852	2,3022
<b>113</b>	1,7967	1,9149	2,0657	2,1885	2,3042
<b>114</b>	1,7984	1,9102	2,0615	2,1801	2,2999
<b>115</b>	1,8000	1,9115	2,0626	2,1799	2,3022
<b>116</b>	1,8005	1,9166	2,0678	2,1886	2,3076
<b>117</b>	1,8010	1,9149	2,0678	2,1820	2,2915
<b>118</b>	1,8003	1,9174	2,0660	2,1793	2,3091
<b>119</b>	1,8024	1,9179	2,0651	2,1864	2,2927
<b>120</b>	1,8005	1,9176	2,0724	2,1841	2,3016
<b>121</b>	1,8007	1,9150	2,0629	2,1767	2,2858
<b>122</b>	1,8004	1,9166	2,0682	2,1879	2,3051
<b>123</b>	1,7961	1,9110	2,0647	2,1794	2,2921
<b>124</b>	1,8020	1,9154	2,0659	2,1843	2,3039
<b>125</b>	1,7999	1,9160	2,0625	2,1740	2,2951
<b>126</b>	1,7959	1,9135	2,0679	2,1859	2,3053
<b>127</b>	1,8031	1,9186	2,0716	2,1908	2,3051
<b>128</b>	1,8022	1,9202	2,0708	2,1953	2,3088
<b>129</b>	1,7993	1,9173	2,0736	2,1921	2,3158
<b>130</b>	1,8014	1,9180	2,0631	2,1856	2,3036
<b>131</b>	1,8034	1,9161	2,0715	2,1827	2,2961
<b>132</b>	1,8011	1,9177	2,0698	2,1820	2,3060
<b>133</b>	1,7994	1,9117	2,0707	2,1899	2,3088
<b>134</b>	1,7999	1,9175	2,0686	2,1902	2,2997
<b>135</b>	1,8013	1,9150	2,0657	2,1833	2,3049
<b>136</b>	1,7969	1,9156	2,0671	2,1894	2,3155
<b>137</b>	1,8011	1,9180	2,0649	2,1783	2,2976
<b>138</b>	1,8039	1,9191	2,0699	2,1812	2,2935

<b>139</b>	1,8033	1,9193	2,0667	2,1833	2,2965
<b>140</b>	1,8060	1,9218	2,0715	2,1792	2,2995
<b>141</b>	1,8041	1,9161	2,0693	2,1803	2,2994
<b>142</b>	1,8007	1,9153	2,0656	2,1819	2,3040
<b>143</b>	1,8026	1,9171	2,0713	2,1863	2,3036
<b>144</b>	1,8063	1,9225	2,0686	2,1826	2,3044
<b>145</b>	1,8049	1,9171	2,0637	2,1750	2,2949
<b>146</b>	1,8022	1,9159	2,0629	2,1833	2,2975
<b>147</b>	1,8033	1,9206	2,0722	2,1844	2,3033
<b>148</b>	1,8038	1,9169	2,0728	2,1919	2,3034
<b>149</b>	1,8044	1,9213	2,0678	2,1862	2,3119
<b>150</b>	1,8015	1,9203	2,0691	2,1883	2,3036

**Tabla AI.6.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 15$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	<b><math>p=15</math></b>				
	<b><math>hn,p,\alpha</math></b>				
<b><math>n</math></b>	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>32</b>	1,4892	1,5629	1,6530	1,7195	1,7900
<b>33</b>	1,4900	1,5615	1,6571	1,7248	1,7971
<b>34</b>	1,4907	1,5646	1,6607	1,7313	1,7982
<b>35</b>	1,4941	1,5675	1,6657	1,7355	1,8022
<b>36</b>	1,4951	1,5707	1,6719	1,7391	1,8055
<b>37</b>	1,4988	1,5752	1,6722	1,7460	1,8189
<b>38</b>	1,5021	1,5800	1,6805	1,7584	1,8342
<b>39</b>	1,5045	1,5834	1,6837	1,7618	1,8387
<b>40</b>	1,5066	1,5843	1,6873	1,7635	1,8374
<b>41</b>	1,5099	1,5892	1,6894	1,7673	1,8476
<b>42</b>	1,5118	1,5905	1,6922	1,7721	1,8517

<b>43</b>	1,5126	1,5925	1,6939	1,7763	1,8518
<b>44</b>	1,5139	1,5960	1,7006	1,7772	1,8598
<b>45</b>	1,5185	1,5993	1,7062	1,7834	1,8650
<b>46</b>	1,5183	1,5997	1,7028	1,7825	1,8609
<b>47</b>	1,5209	1,6017	1,7059	1,7849	1,8671
<b>48</b>	1,5220	1,6033	1,7072	1,7914	1,8700
<b>49</b>	1,5246	1,6054	1,7077	1,7866	1,8636
<b>50</b>	1,5254	1,6064	1,7105	1,7918	1,8737
<b>51</b>	1,5263	1,6076	1,7123	1,7942	1,8768
<b>52</b>	1,5263	1,6079	1,7115	1,7907	1,8699
<b>53</b>	1,5271	1,6086	1,7151	1,7900	1,8699
<b>54</b>	1,5270	1,6081	1,7150	1,8010	1,8838
<b>55</b>	1,5285	1,6094	1,7149	1,7960	1,8752
<b>56</b>	1,5303	1,6123	1,7204	1,7982	1,8840
<b>57</b>	1,5292	1,6099	1,7182	1,7961	1,8709
<b>58</b>	1,5299	1,6108	1,7190	1,8064	1,8903
<b>59</b>	1,5292	1,6113	1,7163	1,7959	1,8849
<b>60</b>	1,5299	1,6112	1,7159	1,7976	1,8814
<b>61</b>	1,5302	1,6138	1,7218	1,8001	1,8853
<b>62</b>	1,5328	1,6140	1,7182	1,8024	1,8852
<b>63</b>	1,5332	1,6151	1,7233	1,8080	1,8884
<b>64</b>	1,5356	1,6170	1,7267	1,8083	1,8945
<b>65</b>	1,5322	1,6132	1,7214	1,8041	1,8833
<b>66</b>	1,5337	1,6151	1,7193	1,7989	1,8881
<b>67</b>	1,5346	1,6166	1,7204	1,8056	1,8864
<b>68</b>	1,5345	1,6170	1,7225	1,8058	1,8859
<b>69</b>	1,5343	1,6166	1,7248	1,8087	1,8935
<b>70</b>	1,5349	1,6169	1,7212	1,8045	1,8861
<b>71</b>	1,5360	1,6162	1,7189	1,8013	1,8794
<b>72</b>	1,5367	1,6194	1,7240	1,8020	1,8800
<b>73</b>	1,5377	1,6193	1,7268	1,8085	1,8872

<b>74</b>	1,5356	1,6187	1,7237	1,8085	1,8854
<b>75</b>	1,5376	1,6187	1,7297	1,8131	1,9014
<b>76</b>	1,5367	1,6193	1,7259	1,8076	1,8905
<b>77</b>	1,5355	1,6186	1,7249	1,8044	1,8881
<b>78</b>	1,5397	1,6240	1,7325	1,8144	1,8998
<b>79</b>	1,5354	1,6192	1,7273	1,8071	1,8921
<b>80</b>	1,5370	1,6194	1,7305	1,8117	1,8954
<b>81</b>	1,5380	1,6170	1,7235	1,8027	1,8865
<b>82</b>	1,5360	1,6175	1,7266	1,8072	1,8918
<b>83</b>	1,5384	1,6201	1,7264	1,8127	1,8945
<b>84</b>	1,5381	1,6208	1,7248	1,8050	1,8942
<b>85</b>	1,5376	1,6196	1,7306	1,8130	1,9060
<b>86</b>	1,5380	1,6200	1,7243	1,8085	1,8855
<b>87</b>	1,5374	1,6182	1,7277	1,8081	1,8919
<b>88</b>	1,5404	1,6206	1,7288	1,8182	1,9022
<b>89</b>	1,5388	1,6191	1,7278	1,8090	1,8878
<b>90</b>	1,5404	1,6245	1,7320	1,8121	1,8994
<b>91</b>	1,5403	1,6204	1,7268	1,8094	1,8876
<b>92</b>	1,5385	1,6193	1,7293	1,8129	1,8996
<b>93</b>	1,5387	1,6192	1,7255	1,8083	1,8891
<b>94</b>	1,5396	1,6229	1,7295	1,8137	1,8929
<b>95</b>	1,5406	1,6246	1,7368	1,8196	1,9057
<b>96</b>	1,5376	1,6203	1,7296	1,8098	1,8942
<b>97</b>	1,5403	1,6236	1,7328	1,8159	1,8889
<b>98</b>	1,5391	1,6221	1,7260	1,8062	1,8869
<b>99</b>	1,5408	1,6246	1,7326	1,8161	1,9022
<b>100</b>	1,5410	1,6239	1,7285	1,8110	1,8963
<b>101</b>	1,5408	1,6246	1,7264	1,8075	1,8955
<b>102</b>	1,5408	1,6252	1,7294	1,8107	1,8958
<b>103</b>	1,5423	1,6239	1,7302	1,8113	1,8988
<b>104</b>	1,5402	1,6212	1,7285	1,8145	1,8969

<b>105</b>	1,5394	1,6229	1,7297	1,8124	1,8991
<b>106</b>	1,5410	1,6226	1,7315	1,8109	1,8948
<b>107</b>	1,5419	1,6231	1,7276	1,8117	1,8965
<b>108</b>	1,5386	1,6221	1,7289	1,8116	1,8973
<b>109</b>	1,5398	1,6242	1,7352	1,8181	1,8996
<b>110</b>	1,5370	1,6224	1,7320	1,8129	1,8937
<b>111</b>	1,5400	1,6259	1,7348	1,8171	1,8988
<b>112</b>	1,5396	1,6255	1,7292	1,8135	1,8946
<b>113</b>	1,5380	1,6227	1,7275	1,8124	1,8922
<b>114</b>	1,5377	1,6214	1,7314	1,8095	1,8931
<b>115</b>	1,5390	1,6192	1,7247	1,8055	1,8836
<b>116</b>	1,5411	1,6232	1,7326	1,8183	1,8982
<b>117</b>	1,5415	1,6240	1,7349	1,8175	1,9042
<b>118</b>	1,5429	1,6227	1,7292	1,8131	1,8925
<b>119</b>	1,5394	1,6216	1,7289	1,8102	1,8933
<b>120</b>	1,5413	1,6258	1,7325	1,8133	1,8881
<b>121</b>	1,5393	1,6214	1,7251	1,8139	1,8982
<b>122</b>	1,5411	1,6285	1,7336	1,8152	1,8977
<b>123</b>	1,5407	1,6231	1,7329	1,8116	1,8921
<b>124</b>	1,5421	1,6228	1,7319	1,8147	1,8939
<b>125</b>	1,5407	1,6219	1,7285	1,8107	1,8895
<b>126</b>	1,5385	1,6212	1,7254	1,8077	1,8921
<b>127</b>	1,5415	1,6260	1,7323	1,8159	1,8922
<b>128</b>	1,5405	1,6248	1,7309	1,8161	1,8958
<b>129</b>	1,5406	1,6229	1,7296	1,8108	1,8969
<b>130</b>	1,5402	1,6241	1,7296	1,8114	1,8995
<b>131</b>	1,5379	1,6216	1,7293	1,8149	1,8957
<b>132</b>	1,5384	1,6234	1,7319	1,8139	1,9007
<b>133</b>	1,5432	1,6251	1,7321	1,8151	1,8981
<b>134</b>	1,5403	1,6235	1,7307	1,8155	1,9071
<b>135</b>	1,5398	1,6221	1,7264	1,8073	1,8878

<b>136</b>	1,5425	1,6229	1,7329	1,8158	1,9038
<b>137</b>	1,5408	1,6206	1,7298	1,8172	1,9020
<b>138</b>	1,5387	1,6219	1,7309	1,8150	1,8906
<b>139</b>	1,5415	1,6248	1,7353	1,8179	1,9030
<b>140</b>	1,5391	1,6240	1,7277	1,8112	1,8983
<b>141</b>	1,5409	1,6204	1,7271	1,8089	1,8825
<b>142</b>	1,5417	1,6210	1,7271	1,8091	1,8936
<b>143</b>	1,5408	1,6220	1,7288	1,8093	1,8933
<b>144</b>	1,5417	1,6236	1,7317	1,8186	1,8935
<b>145</b>	1,5413	1,6262	1,7356	1,8174	1,8996
<b>146</b>	1,5369	1,6204	1,7272	1,8092	1,8962
<b>147</b>	1,5408	1,6229	1,7294	1,8114	1,8961
<b>148</b>	1,5423	1,6261	1,7371	1,8192	1,9011
<b>149</b>	1,5417	1,6260	1,7376	1,8171	1,9042
<b>150</b>	1,5414	1,6221	1,7351	1,8164	1,8963

**Tabla AI.7.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 20$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	<b><math>p=20</math></b>				
	<b><math>hn,p,\alpha</math></b>				
<b><math>n</math></b>	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>42</b>	1,3824	1,4370	1,5084	1,5612	1,6141
<b>43</b>	1,3763	1,4317	1,5015	1,5529	1,6035
<b>44</b>	1,3740	1,4300	1,5010	1,5549	1,6085
<b>45</b>	1,3738	1,4297	1,5004	1,5542	1,6086
<b>46</b>	1,3747	1,4299	1,5023	1,5574	1,6112
<b>47</b>	1,3768	1,4338	1,5068	1,5614	1,6148
<b>48</b>	1,3789	1,4370	1,5112	1,5682	1,6247
<b>49</b>	1,3800	1,4393	1,5160	1,5711	1,6327

<b>50</b>	1,3820	1,4420	1,5192	1,5763	1,6332
<b>51</b>	1,3840	1,4443	1,5235	1,5805	1,6357
<b>52</b>	1,3850	1,4460	1,5244	1,5818	1,6410
<b>53</b>	1,3873	1,4479	1,5273	1,5849	1,6453
<b>54</b>	1,3882	1,4496	1,5286	1,5850	1,6485
<b>55</b>	1,3908	1,4523	1,5313	1,5906	1,6493
<b>56</b>	1,3901	1,4532	1,5340	1,5922	1,6525
<b>57</b>	1,3909	1,4544	1,5352	1,5948	1,6550
<b>58</b>	1,3921	1,4547	1,5377	1,5984	1,6557
<b>59</b>	1,3944	1,4578	1,5385	1,5990	1,6591
<b>60</b>	1,3947	1,4580	1,5387	1,5974	1,6573
<b>61</b>	1,3957	1,4589	1,5408	1,6020	1,6640
<b>62</b>	1,3962	1,4594	1,5411	1,6024	1,6620
<b>63</b>	1,3971	1,4595	1,5407	1,6028	1,6609
<b>64</b>	1,3985	1,4622	1,5435	1,6082	1,6688
<b>65</b>	1,3983	1,4615	1,5426	1,6038	1,6662
<b>66</b>	1,4002	1,4632	1,5450	1,6058	1,6706
<b>67</b>	1,4004	1,4648	1,5457	1,6052	1,6694
<b>68</b>	1,4004	1,4649	1,5477	1,6093	1,6729
<b>69</b>	1,4008	1,4650	1,5477	1,6097	1,6701
<b>70</b>	1,4005	1,4643	1,5466	1,6098	1,6690
<b>71</b>	1,4031	1,4677	1,5509	1,6111	1,6739
<b>72</b>	1,4036	1,4680	1,5484	1,6099	1,6710
<b>73</b>	1,4036	1,4677	1,5504	1,6135	1,6752
<b>74</b>	1,4036	1,4687	1,5504	1,6142	1,6773
<b>75</b>	1,4039	1,4684	1,5503	1,6127	1,6757
<b>76</b>	1,4048	1,4690	1,5507	1,6145	1,6807
<b>77</b>	1,4040	1,4704	1,5541	1,6128	1,6757
<b>78</b>	1,4046	1,4689	1,5495	1,6096	1,6726
<b>79</b>	1,4036	1,4679	1,5490	1,6141	1,6743
<b>80</b>	1,4050	1,4690	1,5498	1,6119	1,6746

<b>81</b>	1,4058	1,4699	1,5532	1,6168	1,6782
<b>82</b>	1,4056	1,4704	1,5558	1,6147	1,6757
<b>83</b>	1,4063	1,4709	1,5555	1,6191	1,6841
<b>84</b>	1,4054	1,4688	1,5521	1,6126	1,6727
<b>85</b>	1,4056	1,4702	1,5540	1,6199	1,6822
<b>86</b>	1,4064	1,4706	1,5552	1,6203	1,6797
<b>87</b>	1,4058	1,4701	1,5527	1,6166	1,6842
<b>88</b>	1,4063	1,4703	1,5529	1,6167	1,6818
<b>89</b>	1,4070	1,4713	1,5543	1,6185	1,6829
<b>90</b>	1,4062	1,4702	1,5537	1,6194	1,6794
<b>91</b>	1,4059	1,4707	1,5539	1,6179	1,6806
<b>92</b>	1,4060	1,4707	1,5560	1,6180	1,6809
<b>93</b>	1,4071	1,4696	1,5533	1,6168	1,6792
<b>94</b>	1,4077	1,4722	1,5575	1,6217	1,6826
<b>95</b>	1,4092	1,4733	1,5561	1,6205	1,6839
<b>96</b>	1,4087	1,4724	1,5575	1,6189	1,6800
<b>97</b>	1,4086	1,4733	1,5589	1,6224	1,6851
<b>98</b>	1,4087	1,4722	1,5523	1,6185	1,6832
<b>99</b>	1,4084	1,4734	1,5589	1,6216	1,6855
<b>100</b>	1,4083	1,4733	1,5578	1,6186	1,6799
<b>101</b>	1,4076	1,4730	1,5558	1,6213	1,6843
<b>102</b>	1,4091	1,4737	1,5577	1,6228	1,6897
<b>103</b>	1,4089	1,4741	1,5579	1,6196	1,6809
<b>104</b>	1,4086	1,4736	1,5580	1,6211	1,6865
<b>105</b>	1,4088	1,4722	1,5558	1,6168	1,6788
<b>106</b>	1,4090	1,4733	1,5567	1,6206	1,6813
<b>107</b>	1,4093	1,4729	1,5565	1,6179	1,6827
<b>108</b>	1,4090	1,4729	1,5551	1,6168	1,6800
<b>109</b>	1,4101	1,4748	1,5580	1,6195	1,6875
<b>110</b>	1,4090	1,4730	1,5584	1,6240	1,6858
<b>111</b>	1,4084	1,4748	1,5600	1,6252	1,6893

<b>112</b>	1,4094	1,4728	1,5573	1,6243	1,6853
<b>113</b>	1,4101	1,4744	1,5597	1,6222	1,6897
<b>114</b>	1,4094	1,4731	1,5568	1,6202	1,6864
<b>115</b>	1,4101	1,4765	1,5612	1,6255	1,6873
<b>116</b>	1,4106	1,4752	1,5582	1,6203	1,6832
<b>117</b>	1,4096	1,4737	1,5610	1,6203	1,6856
<b>118</b>	1,4087	1,4731	1,5599	1,6261	1,6886
<b>119</b>	1,4105	1,4766	1,5623	1,6261	1,6928
<b>120</b>	1,4085	1,4742	1,5576	1,6209	1,6806
<b>121</b>	1,4107	1,4766	1,5580	1,6250	1,6872
<b>122</b>	1,4105	1,4769	1,5594	1,6227	1,6884
<b>123</b>	1,4104	1,4767	1,5592	1,6223	1,6860
<b>124</b>	1,4088	1,4741	1,5577	1,6233	1,6857
<b>125</b>	1,4112	1,4772	1,5607	1,6221	1,6828
<b>126</b>	1,4119	1,4762	1,5613	1,6253	1,6853
<b>127</b>	1,4111	1,4757	1,5615	1,6255	1,6896
<b>128</b>	1,4112	1,4767	1,5602	1,6234	1,6892
<b>129</b>	1,4109	1,4777	1,5619	1,6248	1,6855
<b>130</b>	1,4110	1,4767	1,5621	1,6221	1,6911
<b>131</b>	1,4118	1,4755	1,5613	1,6246	1,6896
<b>132</b>	1,4116	1,4758	1,5620	1,6249	1,6916
<b>133</b>	1,4113	1,4748	1,5568	1,6209	1,6820
<b>134</b>	1,4113	1,4765	1,5605	1,6244	1,6860
<b>135</b>	1,4112	1,4748	1,5597	1,6228	1,6888
<b>136</b>	1,4113	1,4744	1,5581	1,6238	1,6897
<b>137</b>	1,4116	1,4760	1,5590	1,6242	1,6895
<b>138</b>	1,4103	1,4745	1,5608	1,6256	1,6870
<b>139</b>	1,4116	1,4761	1,5601	1,6249	1,6911
<b>140</b>	1,4104	1,4755	1,5611	1,6249	1,6874
<b>141</b>	1,4102	1,4739	1,5573	1,6205	1,6819
<b>142</b>	1,4113	1,4773	1,5608	1,6240	1,6901

<b>143</b>	1,4104	1,4766	1,5614	1,6253	1,6844
<b>144</b>	1,4116	1,4776	1,5625	1,6260	1,6871
<b>145</b>	1,4115	1,4746	1,5592	1,6252	1,6866
<b>146</b>	1,4109	1,4757	1,5608	1,6259	1,6875
<b>147</b>	1,4103	1,4754	1,5615	1,6243	1,6879
<b>148</b>	1,4111	1,4751	1,5573	1,6215	1,6844
<b>149</b>	1,4110	1,4769	1,5627	1,6264	1,6867
<b>150</b>	1,4130	1,4764	1,5613	1,6240	1,6878

**Tabla AI.8.** Límite de Control  $h_{n,p,\alpha}$  para un tamaño de muestra  $n$ , variables  $p = 25$  y nivel de significancia  $\alpha$ .

	<b><math>p=25</math></b>				
	<b><math>hn,p,\alpha</math></b>				
<b><math>n</math></b>	0,01000	0,00500	0,00200	0,00100	0,00050
<b>52</b>	1,3133	1,3584	1,4152	1,4587	1,4988
<b>53</b>	1,3061	1,3509	1,4072	1,4484	1,4910
<b>54</b>	1,3033	1,3472	1,4045	1,4480	1,4887
<b>55</b>	1,3021	1,3462	1,4045	1,4493	1,4914
<b>56</b>	1,3014	1,3468	1,4057	1,4502	1,4947
<b>57</b>	1,3029	1,3493	1,4092	1,4545	1,4977
<b>58</b>	1,3042	1,3510	1,4113	1,4565	1,5021
<b>59</b>	1,3053	1,3533	1,4148	1,4606	1,5057
<b>60</b>	1,3071	1,3553	1,4178	1,4647	1,5133
<b>61</b>	1,3074	1,3566	1,4182	1,4636	1,5096
<b>62</b>	1,3095	1,3582	1,4203	1,4681	1,5150
<b>63</b>	1,3102	1,3600	1,4244	1,4715	1,5235
<b>64</b>	1,3115	1,3610	1,4239	1,4715	1,5177
<b>65</b>	1,3123	1,3625	1,4267	1,4749	1,5248
<b>66</b>	1,3131	1,3633	1,4271	1,4741	1,5238
<b>67</b>	1,3146	1,3659	1,4306	1,4788	1,5259

<b>68</b>	1,3156	1,3667	1,4312	1,4801	1,5271
<b>69</b>	1,3171	1,3681	1,4327	1,4832	1,5293
<b>70</b>	1,3177	1,3682	1,4345	1,4852	1,5310
<b>71</b>	1,3177	1,3692	1,4364	1,4846	1,5338
<b>72</b>	1,3176	1,3699	1,4358	1,4845	1,5350
<b>73</b>	1,3188	1,3702	1,4377	1,4871	1,5361
<b>74</b>	1,3191	1,3715	1,4375	1,4900	1,5394
<b>75</b>	1,3191	1,3716	1,4384	1,4896	1,5410
<b>76</b>	1,3206	1,3725	1,4405	1,4906	1,5400
<b>77</b>	1,3218	1,3739	1,4427	1,4923	1,5409
<b>78</b>	1,3220	1,3742	1,4410	1,4890	1,5361
<b>79</b>	1,3233	1,3756	1,4434	1,4959	1,5465
<b>80</b>	1,3225	1,3742	1,4414	1,4924	1,5400
<b>81</b>	1,3235	1,3761	1,4437	1,4932	1,5434
<b>82</b>	1,3231	1,3753	1,4412	1,4921	1,5425
<b>83</b>	1,3244	1,3765	1,4442	1,4945	1,5429
<b>84</b>	1,3243	1,3763	1,4441	1,4941	1,5470
<b>85</b>	1,3247	1,3776	1,4455	1,4981	1,5522
<b>86</b>	1,3260	1,3782	1,4476	1,4980	1,5474
<b>87</b>	1,3255	1,3782	1,4467	1,4964	1,5461
<b>88</b>	1,3263	1,3796	1,4492	1,5010	1,5565
<b>89</b>	1,3266	1,3790	1,4466	1,4954	1,5445
<b>90</b>	1,3263	1,3783	1,4460	1,4965	1,5458
<b>91</b>	1,3263	1,3798	1,4491	1,4996	1,5533
<b>92</b>	1,3263	1,3796	1,4482	1,5018	1,5514
<b>93</b>	1,3268	1,3785	1,4460	1,4959	1,5472
<b>94</b>	1,3281	1,3800	1,4495	1,4985	1,5491
<b>95</b>	1,3272	1,3802	1,4495	1,4996	1,5490
<b>96</b>	1,3279	1,3804	1,4491	1,4993	1,5484
<b>97</b>	1,3280	1,3808	1,4490	1,5002	1,5517
<b>98</b>	1,3279	1,3814	1,4500	1,5007	1,5523

<b>99</b>	1,3286	1,3805	1,4480	1,4999	1,5497
<b>100</b>	1,3292	1,3821	1,4514	1,5030	1,5540
<b>101</b>	1,3286	1,3807	1,4493	1,5003	1,5511
<b>102</b>	1,3289	1,3816	1,4488	1,5017	1,5536
<b>103</b>	1,3294	1,3826	1,4523	1,5021	1,5554
<b>104</b>	1,3291	1,3830	1,4510	1,4999	1,5512
<b>105</b>	1,3284	1,3822	1,4500	1,5004	1,5485
<b>106</b>	1,3294	1,3821	1,4500	1,4985	1,5522
<b>107</b>	1,3286	1,3827	1,4512	1,5036	1,5549
<b>108</b>	1,3297	1,3825	1,4506	1,5007	1,5518
<b>109</b>	1,3303	1,3842	1,4531	1,5039	1,5538
<b>110</b>	1,3289	1,3830	1,4521	1,5038	1,5575
<b>111</b>	1,3298	1,3829	1,4514	1,5043	1,5559
<b>112</b>	1,3293	1,3815	1,4496	1,5014	1,5524
<b>113</b>	1,3302	1,3842	1,4542	1,5058	1,5576
<b>114</b>	1,3299	1,3839	1,4539	1,5073	1,5601
<b>115</b>	1,3300	1,3832	1,4524	1,5036	1,5555
<b>116</b>	1,3304	1,3842	1,4523	1,5011	1,5523
<b>117</b>	1,3305	1,3830	1,4527	1,5032	1,5546
<b>118</b>	1,3310	1,3845	1,4535	1,5051	1,5615
<b>119</b>	1,3321	1,3843	1,4531	1,5048	1,5572
<b>120</b>	1,3307	1,3866	1,4529	1,5032	1,5498
<b>121</b>	1,3301	1,3829	1,4502	1,5027	1,5517
<b>122</b>	1,3317	1,3843	1,4525	1,5050	1,5558
<b>123</b>	1,3303	1,3835	1,4506	1,5028	1,5529
<b>124</b>	1,3315	1,3864	1,4536	1,5030	1,5567
<b>125</b>	1,3315	1,3871	1,4556	1,5090	1,5588
<b>126</b>	1,3300	1,3849	1,4518	1,5075	1,5575
<b>127</b>	1,3319	1,3867	1,4549	1,5058	1,5559
<b>128</b>	1,3312	1,3846	1,4530	1,5039	1,5546
<b>129</b>	1,3333	1,3861	1,4545	1,5039	1,5548

<b>130</b>	1,3318	1,3838	1,4516	1,5055	1,5552
<b>131</b>	1,3322	1,3852	1,4521	1,5058	1,5582
<b>132</b>	1,3315	1,3852	1,4515	1,5051	1,5553
<b>133</b>	1,3312	1,3834	1,4527	1,5041	1,5579
<b>134</b>	1,3308	1,3848	1,4529	1,5054	1,5557
<b>135</b>	1,3305	1,3834	1,4546	1,5065	1,5571
<b>136</b>	1,3318	1,3847	1,4524	1,5043	1,5569
<b>137</b>	1,3318	1,3853	1,4557	1,5074	1,5560
<b>138</b>	1,3316	1,3854	1,4547	1,5057	1,5588
<b>139</b>	1,3325	1,3852	1,4529	1,5084	1,5594
<b>140</b>	1,3309	1,3830	1,4511	1,5034	1,5531
<b>141</b>	1,3330	1,3865	1,4555	1,5058	1,5591
<b>142</b>	1,3315	1,3853	1,4542	1,5052	1,5531
<b>143</b>	1,3311	1,3842	1,4543	1,5062	1,5575
<b>144</b>	1,3322	1,3853	1,4538	1,5078	1,5554
<b>145</b>	1,3329	1,3855	1,4556	1,5068	1,5579
<b>146</b>	1,3329	1,3866	1,4556	1,5081	1,5630
<b>147</b>	1,3321	1,3857	1,4551	1,5066	1,5585
<b>148</b>	1,3309	1,3835	1,4542	1,5032	1,5601
<b>149</b>	1,3316	1,3850	1,4570	1,5075	1,5585
<b>150</b>	1,3320	1,3858	1,4546	1,5047	1,5560

## APÉNDICE II. FUNCIONES Y SUBPROGRAMAS

### AII.1 Programa principal (CEPM)

```
function CEPM
clear

fprintf('-----
-----\n');
disp('Control estadístico multivariante de procesos: programa para
el monitoreo de un vector de')
disp('características de calidad.')
disp('');
disp('Trabajo Especial de Grado titulado: DESARROLLO DE UNA
HERRAMIENTA COMPUTARIZADA PARA EL')
disp('CONTROL ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE DE PROCESOS BASADA EN EL
ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO.')
disp('18 de enero de 2015, diseñado por José Brea y Ronald Medina,
Escuela de Ingeniería')
disp('Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo.')
disp('E-mail: esojmbh@gmail.com / alexchelsea222@gmail.com')
disp('');
disp('Este programa le permite monitorear muestras tomadas
secuencialmente en el tiempo y,')
disp('estima un punto de cambio (en el caso que exista) en un
proceso bajo control')
disp('estadístico, es decir, realiza el análisis de Fase II del
SPC.')
fprintf('-----
-----\n');
disp('Antes de iniciar el análisis de Fase II, se debe analizar un
conjunto de datos históricos,')
disp('es decir, se debe efectuar un análisis de Fase I.')
disp('');
disp('Las pruebas de hipótesis estadísticas a realizar en el
análisis de Fase I son:')
disp('');
disp('*Prueba de Schwager y Margolin para la detección de
outliers.')
disp('');
disp('*Prueba de normalidad multivariante de Mardia.')
disp('');
disp('*Prueba de raíz unitaria de Fountis-Dickey.')
disp('');
disp('*Prueba de Ljung-Box y la versión multivariante de Chitturi y
Hosking de la prueba de')
disp('Portmanteau.')
disp('');
disp('SUGERENCIA: la prueba de Schwager y Margolin y prueba de
Mardia dan valores críticos')
```

```

disp('conservadores para tamaños de muestra mayores o iguales a
50.')
b=input('¿Desea realizar el análisis de Fase I?: No(0), Si(Cualquier
otro número) ');

if b==0

fprintf('-----\n');
disp('La herramienta estadística utilizada para el análisis de Fase
II, es un gráfico de control');
disp('basado en el Análisis de Punto de Cambio (CPA).')

%Lectura de datos Fase II.

[t,m,datos]=lecturafaseII;

matr1=datos;

%Verificando que los datos no provengan de procesos univariantes.

if m==1

disp(' ');
disp('ERROR: LOS DATOS NO SON VECTORES DE OBSERVACIÓN, ES DECIR, NO
ESTÁ MONITOREANDO UN VECTOR')
disp('DE CARACTERÍSTICAS DE CALIDAD.')
disp(' ');

else

%Verificando que el p este en el rango.

if m==2 || m==3 || m==4 || m==5 || m==10 || m==15 || m==20 || m==25

%Verificando que el tamaño de muestra sea mayor o igual a 2(p+1).

if t<(2*(m+1))

disp(' ');
disp('ERROR: EL TAMAÑO DE MUESTRA ES MENOR AL MÍNIMO REQUERIDO.')
disp(' ');

else

%Construcción del grafico de control.

```

```

fprintf('-----\n');
disp('A continuación se procederá a construir el Gráfico de Control
del CPA.');
disp(' ');
disp('Deberá indicar el nivel significancia alfa (probabilidad
especificada de emitir una falsa')
disp('alarma), cuando se le indique.')
disp(' ');
disp('Valores permitidos de alfa: 0.0005 0.001 0.002 0.005 0.01')
alp5=input('Indique el valor de alfa: ');
Vcrit=hdehawkins(t,m,alp5);

%Gmax,n

GMaxi=estGknmax(matr1,m,t);

%Verificando un posible punto de cambio.

bandnl=false;

for j=(2*(m+1)):t

if GMaxi(j)>Vcrit(j) && bandnl==false

pcam=cambio(matr1,j,m);

fprintf('-----\n');
disp('Vector de medias, matriz de covarianzas y matriz
de correlaciones muestral antes del cambio:')
disp(' ');
disp('*Vector de medias:')
parm=vectmedia(matr1,pcam,0);
disp(parm)
disp('*Matriz de covarianzas:')
parml=Sij(matr1,pcam,0);
disp(parml)
disp('*Matriz de correlaciones:')
parm2=correlacion(matr1,pcam,0);
disp(parm2)
fprintf('-----\n');
disp('Vector de medias, matriz de covarianza y matriz de
correlaciones muestral después del cambio:')
disp(' ');
disp('*Vector de medias:')
parm3=vectmedia(matr1,t,pcam);
disp(parm3)
disp('*Matriz de covarianzas:')

```

```

parm4=Sij(matr1,t,pcam);
disp(parm4)
disp('*Matriz de correlaciones:')
parm5=correlacion(matr1,t,pcam);
disp(parm5)
disp('Existe suficiente evidencia estadística para
afirmar, que ha ocurrido un cambio en el')
disp(['vector de medias, matriz de covarianzas o en
ambos, en n igual a: ', num2str(j)])
disp(' ');
disp(['El punto estimado en donde ocurre el cambio es en
la observación: ', num2str(pcam)])
disp(' ');
disp('Conclusión: el proceso está fuera de control, es
decir, el proceso está operando en presencia')
disp('de causas asignables de variación.')
disp(' ');
disp('Arriba se presentan los vectores de medias,
matrices de covarianzas y matrices de correlaciones')
disp('muestral, antes y después del cambio.')

bandn1=true;

end

end

if bandn1==false

fprintf('-----\n');
-----\n');
disp('Estimaciones del vector de medias, matriz de
covarianzas y matriz de correlaciones:')
disp(' ');
disp('*Vector de medias:')
parm6=vectmedia(matr1,t,0);
disp(parm6)
disp('*Matriz de covarianzas:')
parm7=Sij(matr1,t,0);
disp(parm7)
disp('*Matriz de correlaciones:')
parm8=correlacion(matr1,t,0);
disp(parm8)
disp('No existe suficiente evidencia estadística para
afirmar, que ha ocurrido un cambio en el')
disp('vector de medias, matriz de covarianzas o en ambos.')
disp(' ');
disp('Conclusión: el proceso está bajo control estadístico,
es decir, el proceso opera únicamente')
disp('en presencia de causas fortuitas de variación.')
disp(' ');

```

```

        disp('Arriba se presentan las estimaciones del vector de
medias, matriz de covarianzas y matriz de')
        disp('correlaciones.')

    end

    %Gráfico de control

graficodecontrol=[GMaxi;Vcrit];

XxX=(1:t);

yminimo=min(min(graficodecontrol));
ymaximo=max(max(graficodecontrol));
plot(XxX, GMaxi, XxX, Vcrit)
title('GRÁFICA DE CONTROL DEL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO.')
axis([(2*(m+1)) t yminimo ymaximo])
xlabel('MUESTRAS')
ylabel('Gmax,n')
grid on
legend('Gmax,n','Límite de Control h');
datacursormode on

end

else

%En el caso que no se encuentre disponible la dimensión del vector.

disp(' ');
disp('ERROR: el grafico de control no puede ser construido, debido a
que no')
disp('se encuentra disponible la dimensión de su vector de
observación.')
disp(' ');

end

end

else

%lectura de datos de la Fase I

[n,p,dat]=lecturafaseI;

matr=dat;

%Verificando que los datos no provengan de procesos univariantes.

```

```

if p==1

    disp(' ');
    disp('ERROR: LOS DATOS NO SON VECTORES DE OBSERVACIÓN, ES DECIR, NO
ESTÁ MONITOREANDO UN VECTOR')
    disp('DE CARACTERÍSTICAS DE CALIDAD.')
    disp(' ');

else

    %Datos Atípicos (Outliers)

    fprintf('-----
-----\n');
    disp('A continuación se realizará la Prueba de Schwager y Margolin
para la detección de outliers,')
    disp('con el fin de depurar los datos para el Análisis de Fase I.')
    disp(' ');
    AUT=input('¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro
número) ');
    disp(' ');

    %Realizo la prueba de outliers

    if AUT~=0

        alp=input('Indique el nivel de significancia alfa: ');

        condi=margoline(matr,alp);

        if condi==3

            disp(' ');
            disp('La matriz de covarianzas muestral de los datos es
singular.')
            disp('SI SELECCIONA SI, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
            sing=input('¿Desea probar con otra data?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

            if sing~=0

                return

            end

        elseif condi==1

            disp(' ');

    end

```

```

        disp('Para la eliminación de valores atípicos (outliers),
elimine las observaciones con')
        disp('distancias estandarizadas grandes.')
        disp(' ');
        disp('Ingrese el nombre del archivo Excel, que contiene los
datos depurados de valores atípicos')
        disp('cuando se le indique. ');
        disp(' ');
filename=input('Ingrese el nombre del archivo: ','s');
matr=xlsread(filename); %Cambiara solo si hay outliers

elseif condi==0

    disp('*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.') %Pausa
    pause

end

%Prueba de Mardia

fprintf('-----
-----\n');

disp('A continuación se realizará la Prueba de normalidad
multivariante de Mardia, con el objeto de')
disp('validar el supuesto de normalidad multivariante.')
disp(' ');
AUT1=input('¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro
número) ');
disp(' ');

if AUT1~=0

    alp1=input('Indique el nivel de significancia alfa: ');

    cond1=mardia( matr,alp1 );

    if cond1==3

        disp(' ');
        disp('La matriz de covarianzas muestral de los datos es
singular.')
        disp('SI SELECCIONA SI, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
        singl=input('¿Desea probar con otra data?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

        if singl~=0

```

```

        return

    end

elseif cond1==0

    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    nnor=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0), Si(Cualquier otro número) ');
    if nnor==0

        return

    end

elseif cond1==1

    disp('*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.') %Pausa
    pause

end

end

%Prueba de Fountis-Dickey

fprintf('-----\n');
disp('A continuación se realizará la Prueba de raíz unitaria de Fountis-Dickey, la cual examina')
disp('la existencia de una raíz unitaria en una serie de tiempo multivariante autorregresiva.')
disp(' ');
AUT2=input('¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro número)');
disp(' ');

if AUT2~=0

    disp('Valores permitidos de alfa: ')
    disp('0.01 0.05 0.1')
    alp2=input('Indique el nivel de significancia alfa: ');

    cond2= pruebafd( matr,alp2 );

    if cond2==3

```

```

        disp(' ');
        disp('La prueba de Fountis-Dickey ha fallado debido a la
presencia de matrices singulares,')
        disp('el supuesto de estacionariedad en amplio sentido no
puede ser validado.');
        disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
        sing2=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

if sing2==0

    return

end

elseif cond2==4

    disp(' ');
    disp('La prueba de Fountis-Dickey ha fallado, debido a que
el orden del modelo autorregresivo')
    disp('vectorial VAR(p), no ha podido ser estimado.');
    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    noord=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

if noord==0

    return

end

elseif cond2==2

    disp(' ');
    disp('La prueba de Fountis-Dickey ha fallado, debido a que
ha ingresado un alfa fuera de los')
    disp('permitidos.');
    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    noalpha=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

if noalpha==0

    return

end

elseif cond2==0

```

```

        disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
        noesta=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

        if noesta==0

            return

        end

    elseif cond2==5

        disp(' ');
        disp('La prueba de Fountis-Dickey ha fallado, debido a que
la serie de tiempo')
        disp('multivariante es explosiva.');
        disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
        explosiva=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

        if explosiva==0

            return

        end

    elseif cond2==1

        disp('*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.') %Pausa
        pause

    end

end

%Evaluación de la Independencia.

fprintf('-----
-----\n');
disp('A continuación se probará la independencia de los datos.')
disp('Este análisis es dividido en dos categorías:')
disp(' ');
disp('*CATEGORÍA I: prueba la independencia en cada componente
univariante de la serie de')
disp('tiempo multivariante.');
disp(' ');
disp('*CATEGORÍA II: prueba la existencia de una dependencia lineal
dinámica en los datos de')
disp('la serie de tiempo multivariante.')

```

```

    disp(' ');
    disp('CATEGORÍA I: Prueba de Ljung-Box');
    disp(' ');
    AUT3=input('¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro
número) ');
    disp(' ');

    if AUT3~=0

        alp3=input('Indique el nivel de significancia alfa: ');

        cond13=LBprueba(matr,alp3);

        [tam,tam1]=size(cond13); %Tamaño del vector

        bandn=false;

        for i=1:tam

            if cond13(i)==1 && bandn==false

                bandn=true;

            end

        end

        disp('*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.') %Pausa
        pause

    end

    disp(' ');
    disp('CATEGORÍA II: Versión multivariante de Chitturi y Hosking de
la prueba de Portmanteau');
    disp('En esta categoría se prueba la existencia de una dependencia
lineal dinámica en los datos de')
    disp('la serie de tiempo multivariante.')
    disp(' ');
    AUT4=input('¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro
número) ');
    disp(' ');

    if AUT4~=0

        alp4=input('Indique el nivel de significancia alfa: ');

        cond14=portmp prueba (matr,alp4);

```

```

if condi4==2

    disp(' ');
    disp('La matriz de covarianzas muestral de los datos es
singular.')
    disp('SI SELECCIONA SI, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    sing3=input('¿Desea probar con otra data?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

    if sing3~=0

        return

    end

end

%Decisión de la prueba de Independencia

if AUT3~=0 && AUT4~=0

if bandn==true && condi4==1

    disp(' ');
    disp('Los datos son independientes solo en la categoría II.')
    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    ind=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

    if ind==0

        return

    end

elseif bandn==false && condi4==0

    disp(' ');
    disp('Los datos son independientes solo en la categoría I.')
    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    indl=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

    if indl==0

```

```

        return

    end

elseif bandn==true && cond4==0

    disp(' ');
    disp('Los datos no son independientes en ambas categorías.')
    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    ind2=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro número) ');

if ind2==0

    return

end

elseif bandn==false && cond4==1

    disp('*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.') %Pausa
    pause

end

elseif AUT3==0 && AUT4~=0

    disp('No se puede tomar una decisión con respecto a la
independencia, debido a que no se ejecutaron')
    disp('las pruebas de independencia para ambas categorías.')
    disp(' ');
    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')
    ind3=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro numero) ');

if ind3==0

    return

end

elseif AUT3~=0 && AUT4==0

    disp('No se puede tomar una decisión con respecto a la
independencia, debido a que no se ejecutaron')
    disp('las pruebas de independencia para ambas categorías.')
    disp(' ');
    disp('SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.')


```

```

ind4=input('¿Desea continuar con el análisis?: No(0),
Si(Cualquier otro numero) ');

if ind4==0

    return

end

end

fprintf('-----
-----\n');
disp('Ha finalizado el análisis de Fase I.')
disp(' ');
disp('A CONTINUACIÓN INICIARA EL ANÁLISIS DE FASE II.')
disp(' ');
disp('La herramienta estadística utilizada para el análisis es un
gráfico de control basado en el');
disp('Análisis de Punto de Cambio (CPA).')
disp(' ');
disp('*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.') %Pausa
pause

%Lectura de datos Fase II.

[t,m,datos]=lecturafaseII;

matr1=datos;

%Verificando que los datos no provengan de procesos univariantes.

if m==1

    disp(' ');
    disp('ERROR: LOS DATOS NO SON VECTORES DE OBSERVACIÓN, ES DECIR, NO
ESTÁ MONITOREANDO UN VECTOR')
    disp('DE CARACTERÍSTICAS DE CALIDAD.')
    disp(' ');

else

    %Verificando que el p este en el rango

    if m==2 || m==3 || m==4 || m==5 || m==10 || m==15 || m==20 || m==25

        %Verificando que el tamaño de muestra sea mayor o igual a 2(p+1).

        if t<(2*(m+1))

```

```

    disp(' ');
    disp('ERROR: EL TAMAÑO DE MUESTRA ES MENOR AL MÍNIMO REQUERIDO.')
    disp(' ');

else

    %Construcción del grafico de control.

    fprintf('-----\n');
    disp('A continuación se procederá a construir el Gráfico de Control
    del CPA.')
    disp(' ');
    disp('Deberá indicar el nivel significancia alfa (probabilidad
    especificada de emitir una falsa')
    disp('alarma), cuando se le indique.')
    disp(' ');
    disp('Valores permitidos de alfa: 0.0005 0.001 0.002 0.005 0.01')
    alp5=input('Indique el valor de alfa: ');
    Vcrit=hdehawkins(t,m,alp5);

    %Gmax,n

    GMaxi=estGknmax(matr1,m,t);

    %Verificando un posible punto de cambio.

    bandnl=false;

    for j=(2*(m+1)):t

        if GMaxi(j)>Vcrit(j) && bandnl==false

            pcam=cambio(matr1,j,m);

            fprintf('-----\n');
            disp('Vector de medias, matriz de covarianzas y matriz
            de correlaciones muestral antes del cambio:')
            disp(' ');
            disp('*Vector de medias:')
            parm=vectmedia(matr1,pcam,0);
            disp(parm)
            disp('*Matriz de covarianzas:')
            parml=Sij(matr1,pcam,0);
            disp(parm1)
            disp('*Matriz de correlaciones:')
            parm2=correlacion(matr1,pcam,0);
            disp(parm2)

```

```

        fprintf('-----\n');
        disp('Vector de medias, matriz de covarianzas y matriz
de correlaciones muestral después del cambio:')
        disp(' ');
        disp('*Vector de medias:')
        parm3=vectmedia(matr1,t,pcam);
        disp(parm3)
        disp('*Matriz de covarianzas:')
        parm4=Sij(matr1,t,pcam);
        disp(parm4)
        disp('*Matriz de correlaciones:')
        parm5=correlacion(matr1,t,pcam);
        disp(parm5)
        disp('Existe suficiente evidencia estadística para
afirmar, que ha ocurrido un cambio en el')
        disp(['vector de medias, matriz de covarianzas o en
ambos, en n igual a: ', num2str(j)])
        disp(' ');
        disp(['El punto estimado en donde ocurre el cambio es en
la observación: ', num2str(pcam)])
        disp(' ');
        disp('Conclusión: el proceso está fuera de control, es
decir, el proceso está operando en presencia')
        disp('de causas asignables de variación.')
        disp(' ');
        disp('Arriba se presentan los vectores de medias,
matrices de covarianzas y matrices de correlaciones')
        disp('muestra, antes y después del cambio.')

bandn1=true;

end

if bandn1==false

        fprintf('-----\n');
        disp('Estimaciones del vector de medias, matriz de
covarianzas y matriz de correlaciones:')
        disp(' ');
        disp('*Vector de medias:')
        parm6=vectmedia(matr1,t,0);
        disp(parm6)
        disp('*Matriz de covarianzas:')
        parm7=Sij(matr1,t,0);
        disp(parm7)
        disp('*Matriz de correlaciones:')
        parm8=correlacion(matr1,t,0);

```

```

        disp(parm8)
        disp('No existe suficiente evidencia estadística para
afirmar, que ha ocurrido un cambio en el')
        disp('vector de medias, matriz de covarianzas o en ambos.')
        disp(' ');
        disp('Conclusión: el proceso está bajo control estadístico,
es decir, el proceso opera únicamente')
        disp('en presencia de causas fortuitas de variación.')
        disp(' ');
        disp('Arriba se presentan las estimaciones del vector de
medias, matriz de covarianzas y matriz de')
        disp('correlaciones.')

    end

    %Gráfico de control

graficodecontrol=[GMaxi;Vcrit];

XxX=(1:t);

yminimo=min(min(graficodecontrol));
ymaximo=max(max(graficodecontrol));
plot(XxX, GMaxi, XxX, Vcrit)
title('GRÁFICA DE CONTROL DEL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO.')
axis([(2*(m+1)) t yminimo ymaximo])
xlabel('MUESTRAS')
ylabel('Gmax,n')
grid on
legend('Gmax,n','Límite de Control h');
datacursormode on

end

else

%En el caso que no se encuentre disponible la dimensión del vector.

disp(' ');
disp('ERROR: el grafico de control no puede ser construido, debido a
que no')
disp('se encuentra disponible la dimensión de su vector de
observación.')
disp(' ');

end

end

```

```

end

end

end
```

## II.2 Programa asimetria

```

function [ output ] = asimetria( A )
%Programa para estimar la asimetría multivariante.
[x,y]=size(A);
output=0;

for i=1:x

    for j=1:x

        v=(A(i,:)-mean(A));
        v1=(A(j,:)-mean(A));

        v2=(cov(A,1)^(-1));
        v3=(v*v2);
        v4=((v3*v1')^3);

        output=(output+(v4/(x^2)));
    end

end

end
```

## II.3 Programa autocova

```

function [ output ] = autocova( A,h )
%Programa para estimar la matriz de autocovarianzas de una serie de
%tiempo multivariante.

[t,z]=size(A);
media=mean(A);
y=A';
output1=0;
for j=1:(t-h)

    output1=(output1+((y(:,(j+h))-media')*(y(:,j)-media')'));
```

```

end

output=((1/(t-1))*output1));
end

```

#### **AII.4 Programa B**

```

function [ Be ] = B( A,p )
%Programa para estimar por el método de mínimos cuadrados, las
matrices %de coeficientes de un modelo VAR(p), requeridos para
determinar el %correcto orden VAR.

```

```

y=A';
[f,g]=size(y);
yf=y(:,(p+1):g);
z1=Z(A,p);
Be=(yf*(z1'))*((z1*(z1'))^(-1));
end

```

#### **AII.5 Programa Bi**

```

function [ v ] = Bi( A,p,i )
%Programa para extraer las matrices de coeficiente de un modelo
VAR(p)
%de la matriz B.

[x,y]=size(A);
c=productov(A,p);
v=c(1:y,((y*(i-1))+1):(y*i));
end

```

#### **AII.6 Programa cambio**

```

function [ output ] = cambio( x,n,p )
%Programa para estimar el punto de cambio

maximo=0;
for i=(p+1):(n-p-1)

ggkn=estGkn(x,p,n,i);

if ggkn>maximo

maximo=ggkn;

output=i;
end

```

```
end
```

```
end
```

### AII.7 Programa correlacion

```
function [ output ] = correlacion( x,m,i )
%Programa para estimar la matriz de correlación.

Me=[];
for k=(i+1):m

    Me=[Me;x( (k) , :)];

end

output=corrcoef (Me);

end
```

### AII.8 Programa curtosis

```
function [ output ] = curtosis( A )
%Programa para estimar la curtosis multivariante.

[x,y]=size(A);
output=0;

for i=1:x

    v=(A(i,:) - (mean(A)) );

    v1=(cov(A,1)^(-1));

    v2=(v*v1);

    v3=((v2*v')^2);

    output=(output+(v3/x));

end

end
```

## AII.9 Programa destand

```
function [ output ] = destand( A )
%Programa para la determinación de las distancias estandarizadas
%(distancia mahalanobis al cuadrado), de cada observación al vector
%de medias.

[x,y]=size(A);
output=[];

for i=1:x
    v=(A(i,:)-(mean(A)));
    v1=(cov(A)^(-1));
    v2=(v*v1);
    v3=(v2*v');
    output=[output;v3];
end
end
```

## AII.10 Programa dfcrit

```
function [sig, crit] = dfcrit (tratio, ssize, variant)
%DFCRIT Critical Dickey-Fuller values and level of significance,
based on MacKinnon (1991)
%
% [SIG, CRIT] = DFCRIT (TRATIO, SSIZE, VARIANT) computes the
critical values CRIT
% of the Dickey-Fuller distribution for given sample size SSIZE
and returns the
% level SIG, if any, at which t-value TRATIO is significant.
%
% Critical values are returned as a row vector for the 1%, 5% and
10% significance
% levels of a one-sided test. SIG is the highest level at which
TRATIO is significant;
% 1 indicates that TRATIO was not significant at the 10% level.
%
% VARIANT should be set to 1, 2 or 3 in accordance to whether the
Dickey-Fuller
% regression contains
% (1) no constant and no trend,
% (2) a constant but no trend,
% (3) a constant and a trend coefficient.
```

```

%      The relevant critical values CRIT are computed from a response
%      surface developed by
%      MacKinnon (1991).
%
%      The author assumes no responsibility for errors or damage
resulting from usage. All
%      rights reserved. Usage of the programme in applications and
alterations of the code
%      should be referenced. This script may be redistributed if nothing
has been added or
%      removed and nothing is charged. Positive or negative feedback
would be appreciated.

%
%          Copyright (c) 23 April 1998 by Ludwig Kanzler
%          Department of Economics, University of Oxford
%          Postal: Christ Church, Oxford OX1 1DP, U.K.
%          E-mail: ludwig.kanzler@economics.oxford.ac.uk
%          Homepage: http://users.ox.ac.uk/~econlrk
$ Revision: 1.0 $ $ Date: 23 April 1998 $

if nargin < 3
    variant = 2;
    if nargin < 2
        error('Insufficient number of arguments! Execution aborted.')
    end
elseif ~sum(variant == [1 2 3])
    error('Inadmissible value for VARIANT! Execution aborted.')
end

binf = [ -2.5658   -3.4335   -3.9638
         -1.9393   -2.8621   -3.4126
         -1.6156   -2.5671   -3.1279 ];
b1   = [ -1.960    -5.999    -8.353
         -0.398    -2.738    -4.039
         -0.181    -1.438    -2.418  ];
b2   = [ -10.04    -29.25    -47.44
         0.0       -8.36     -17.83
         0.0       -4.48     -7.58   ];
crit  = binf(:, variant) + b1(:, variant)./ssize + b2(:, variant)./ssize^2;

switch sum(tratio <= crit)
    case 0
        sig = 1;
    case 1
        sig = 0.10;
    case 2

```

```

    sig = 0.05;
    if variant == 2
        if dftable (tratio, ssize) == 0.025;
            sig = 0.025;
        end
    end
    case 3
        sig = 0.01;
    end

% End of main function.

function dfsig = dftable (tratio, ssize)
%DFTABLE Level of significance for Dickey-Fuller regression with
constant, but no trend
%
%
% Copyright (c) 13 March 1998 by Ludwig Kanzler
% Department of Economics, University of Oxford
% Postal: Christ Church, Oxford OX1 1DP, England
% E-mail: ludwig.kanzler@economics.oxford.ac.uk
% $ Revision: 1.03 $ $ Date: 15 September 1998 $

%
% DFCRIT lists the critical values for the Phillips-Perron Z(t) Test
and for the Dickey-
% Fuller Test Based on Estimated OLS t Statistic, as tabulated in
Fuller (1976) on p. 373,
% and reproduced, among others, in Hamilton (1994), p. 763, Table
B.6, Case 2, and in
% Harvey (1990), p. 368, Table D, 2nd matrix.
%
% DFCRIT could probably be improved by using the extended
tabulations of Guilkey & Schmidt
% (1989). Tables for the cases of no constant and of constant and
trend could also be
% added here.
%
%
% sample
% size
dfcrit = [ -3.75 -3.33 -3.00 -2.63      25
           -3.58 -3.22 -2.93 -2.60      50
           -3.51 -3.17 -2.89 -2.58     100
           -3.46 -3.14 -2.88 -2.57    250
           -3.44 -3.13 -2.87 -2.57    500
           -3.43 -3.12 -2.86 -2.57    inf
           0.01  0.025 0.05  0.10      NaN ];
%
% prob(tratio<=table entry)

%
% Find the entry matching sample size and t-ratio:
matchsize = find(ssize >= dfcrit(1:6,5));
matchlevel = find(tratio <= dfcrit(matchsize(end),1:4));

```

```

% Assign the corresponding level of significance, if any:
if matchlevel
    dfsig = dfcrit(7, matchlevel(1));
else
    dfsig = 1;
end

% End of sub-function.

% REFERENCES:
%
% Fuller, Wayne (1976), "Introduction to Statistical Time Series",
John Wiley & Sons, New
% York
%
% Guilkey, David & Peter Schmidt (1989), "Extended Tabulations for
Dickey-Fuller Tests",
% Economics Letters, vol. 31, no. 4, pp. 355-357
%
% Hamilton, James (1994), "Time Series Analysis", Princeton
University Press, Princeton,
% New Jersey
%
% Harvey, Andrew (1990), "The Econometric Analysis of Time Series",
2nd edition, MIT
% Press, Cambridge, Massachusetts
%
% MacKinnon, James (1991), "Critical Values for Cointegration
Tests", Chapter 13 in
% Robert Engle & Clive Granger, eds., "Long-run Economic
Relationships: Readings
% in Cointegration", Oxford University Press, Oxford, pp. 267-276

% End of file.

```

## AII.11 Programa doslogkn

```

function [ rvg ] = doslogkn( x,m,i )
%Programa para determinar el estadístico de razón de log-
verosimilitud
%doble negativa.

Son=Sij(x,m,0);
Sok=Sij(x,i,0);
Skn=Sij(x,m,i);
rvg=((m-1)*log10(det(Son)))-((i-1)*log10(det(Sok)))-((m-i-
1)*log10(det(Skn)));
end

```

## AII.12 Programa estGkn

```
function [ rvgcorregido ] = estGkn( x,p,m,i )
%Programa para determinar el GLR corregido.

rvgcorregido=((doslogkn(x,m,i)*(p*(p+3)))/(gkn(p,m,i)));
end
```

## AII.13 Programa estGknmax

```
function [ maxGkn ] = estGknmax( x,p,m )
%Programa para determinar el estadístico de prueba Gmax,n.

maxGkn=zeros(m,1);
for j=(2*(p+1)):m

    GKN=[ ];
    for i=(p+1):(j-p-1)

        GKN=[GKN,estGkn(x,p,j,i)];
    end

    maxGkn(j)=max(GKN);

end
end
```

## AII.14 Programa estLB

```
function [ output ] = estLB( A )
%Programa para obtener el estadístico de prueba del test de Ljung-
Box, de
%cada componente univariante en una serie de tiempo múltiple.

[x,y]=size(A);
a=(x/3);
m=round(a);
z=0;

for k=1:m

    z=(z+((funcauto(A,k).^2)./(x-m)));
end
```

```

output= ( (x*(x+2))^z) ;

end

```

### **AI1.15 Programa estm (A)**

```

function [ out ] = estm(A)
%Programa para determinar la estadística de prueba del test de
outliers de %schwager y margolin.

[n,p]=size(A);

curt=curtosis(A);

nume=(curt-(p*(p+2))) ;

deno=sqrt((8*p*(p+2))/n);

out=(nume/deno);

end

```

### **AI1.16 Programa estpruebfd**

```

function [ w ] = estpruebfd( A,p )

%Programa para la determinación de la estadística de prueba del test
de
%raíz unitaria de Fountis-Dickey.

[x,y]=size(A);
v1=solucion(A,p);
[x1,y1]=size(v1);
v2=[];

for i=1:x1
    v2=[v2;abs(v1(i))];
end

f=max(v2);
w=((x-p)*(f-1));
end

```

## AII.17 Programa estpruport

```
function [ output ] = estpruport( A )
%Programa para determinar la estadística de prueba del test de
portmanteau.

[x,y]=size(A);
a=(x/3);
h=round(a);
output1=0;

for i=1:h

    output1=(output1+(trace((autocova(A,i)')*(autocova(A,0)^(-1))* (autocova(A,i)) * (autocova(A,0)^(-1)))));

end

output=(x*output1);

end
```

## AII.18 Programa funcauto

```
function [ output ] = funcauto( A,k )
%Programa para obtener la función de autocorrelación muestral, de
cada
%componente univariante en una serie de tiempo múltiple.

b=A';
[x,y]=size(b);
varian=[];

for i=1:x

    varian=[varian;var(b(i,:))];

end
varian1=((y-1)*(varian));
media=mean(A)';
covari=[];

for j=1:x

acum=0;

    for l=1:(y-k)
```

```

acum=(acum+((b(j,l)-media(j))*(b(j,(l+k))-media(j)))) ;

end

covari=[covari;acum] ;

end

output=[];

for z=1:x

output=[output;(covari(z)/varianl(z))];

end

end

```

### **AII.19 Programa gkn**

```

function [ cbartlett ] = gkn( p,m,i )
%Programa para determinar la corrección de Bartlett.

expl=(p*(log10(2)+((m-1)*log10(m-1))-((m-i-1)*log10(m-i-1))-((i-
1)*log10(i-1))) ;

contador=0;

for j=1:p

    contador=(contador+((m-1)*psi((m-j)/2))-((i-1)*psi((i-j)/2))-(
(m-i-1)*psi((m-i-j)/2))) ;

end

cbartlett=(expl+contador);

end

```

### **AII.20 Programa hdehawkins**

```

function [ h ] = hdehawkins(n,p,alfa)
%Programa para la determinación del límite de control

h=zeros(n,1,'double');

switch p

case 2

```

```

for N=(2*(p+1):n)
TabAPC=xlsread('p igual a 2');
[nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

for i=2:nAPC
ValAPC=TabAPC(i,1);

if ValAPC==N;

for j=2:pAPC
Val2APC=TabAPC(1,j);

if Val2APC==alfa;
h(N)=TabAPC(i,j);
end
end
end
end
end

case 3

for N=(2*(p+1):n)
TabAPC=xlsread('p igual a 3');
[nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

for i=2:nAPC
ValAPC=TabAPC(i,1);

if ValAPC==N;

for j=2:pAPC
Val2APC=TabAPC(1,j);

if Val2APC==alfa;
h(N)=TabAPC(i,j);
end
end
end
end
end

case 4

for N=(2*(p+1):n)
TabAPC=xlsread('p igual a 4');
[nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

```

```

        for i=2:nAPC
            ValAPC=TabAPC(i,1);

            if ValAPC==N;

                for j=2:pAPC
                    Val2APC=TabAPC(1,j);

                    if Val2APC==alfa;
                        h(N)=TabAPC(i,j);
                    end
                end
            end
        end
    end

case 5

for N=(2*(p+1):n)
    TabAPC=xlsread('p igual a 5');
    [nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

    for i=2:nAPC
        ValAPC=TabAPC(i,1);

        if ValAPC==N;

            for j=2:pAPC
                Val2APC=TabAPC(1,j);

                if Val2APC==alfa;
                    h(N)=TabAPC(i,j);
                end
            end
        end
    end
end

case 10

for N=(2*(p+1):n)
    TabAPC=xlsread('p igual a 10');
    [nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

    for i=2:nAPC
        ValAPC=TabAPC(i,1);

        if ValAPC==N;

```

```

        for j=2:pAPC
            Val2APC=TabAPC(1,j);

            if Val2APC==alfa;
                h(N)=TabAPC(i,j);
            end
        end
    end
end

case 15

for N=(2*(p+1):n)
    TabAPC=xlsread('p igual a 15');
    [nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

    for i=2:nAPC
        ValAPC=TabAPC(i,1);

        if ValAPC==N;

            for j=2:pAPC
                Val2APC=TabAPC(1,j);

                if Val2APC==alfa;
                    h(N)=TabAPC(i,j);
                end
            end
        end
    end
end

case 20

for N=(2*(p+1):n)
    TabAPC=xlsread('p igual a 20');
    [nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

    for i=2:nAPC
        ValAPC=TabAPC(i,1);

        if ValAPC==N;
            for j=2:pAPC
                Val2APC=TabAPC(1,j);

                if Val2APC==alfa;

```

```

                h(N)=TabAPC(i,j);
            end
        end
    end
end

otherwise

for N=(2*(p+1):n)
    TabAPC=xlsread('p igual a 25');
    [nAPC,pAPC]=size(TabAPC);

    for i=2:nAPC
        ValAPC=TabAPC(i,1);

        if ValAPC==N;

            for j=2:pAPC
                Val2APC=TabAPC(1,j);

                if Val2APC==alfa;
                    h(N)=TabAPC(i,j);
                end
            end
        end
    end
end

```

## AII.21 Programa hipótesis

```

function [ output ] = hipotesis( A,M,alpha )
%Programa para encontrar el primer orden m, en donde la hipótesis
nula
%es rechazada.

[a,b]=size(A);
band=false;

for i=1:M

[c,d]=lamvar(A,M,i);

if d~=0 && c>chi2inv((1-alpha), (b^2)) && band==false
    band=true;

```

```

    output=1;

end

if d~=0 && c<=chi2inv((1-alpha), (b^2)) && band==false
    output=0;
end

if d==0 && band==false
    output=2;
end

end
end

```

## AII.22 Programa lamvar

```

function [ la, valog ] = lamvar( A,M,i )
%Programa para determinar la estadística de prueba de razón de
%verosimilitud, requerido para estimar el orden autorregresivo del
modelo.

[11,vlog]=u(A, (M-i));
[12,vlog1]=u(A, (M-i+1));
l3=det(11);
l4=det(12);

if vlog==0 || vlog1==0
    la=0;
    valog=0;
else
    if l3==0 || l4==0
        la=0;
        valog=0;
    else

```

```

v=(A') ;

[x,y]=size(v) ;

t=(y-M) ;

la=(t*(log(det(l1))-log(det(l2)))) ;

valog=1;

end

end

end

```

## AII.23 Programa LBprueba

```

function [ output ] = LBprueba ( A,alpha )
%Prueba Ljung-Box (Independencia categoría 1)

[x,y]=size(A) ;
v=estLB(A) ;
b=(x/3) ;
m=round(b) ;
gl=[ ] ;

for j=1:y
    gl=[gl;m] ;
end

pvalor= [] ;

for k=1:y
    pvalor = [pvalor; (1-chi2cdf(v(k),m)) ] ;
end

numv=(1:y) ;
esta=v' ;
gll=gl' ;
pvv=(pvalor)' ;

table=[numv;esta;gll;pvv] ;

```

```

disp(' ');
disp('Tabla resumen de la Prueba Ljung-Box (Independencia categoria
1)');
disp(' ');
disp(['                               [Numero de observaciones = ',num2str(x) ', '
'Longitud del rezago (Lag) = ',num2str(m) ']']);
fprintf('-----\n');
disp('          Serie de Tiempo           Estadísticos de prueba
G.L.          P          ')           (o     variable)
')
fprintf('-----\n');
fprintf('%18.0f %28.4f %18.0f %15.4f \n',table);
fprintf('-----\n');
disp(' ');
fprintf('Con un nivel de significancia de: %.3f\n', alpha);

output=[];

for l=1:y

    if pvalor(l)<= alpha

        disp(' ');
        fprintf('Se rechaza H0, es decir, los datos de la serie de
tiempo %.f no son independientes.\n', l);

        output=[output;1];

    else

        disp(' ');
        fprintf('No se rechaza H0, es decir, los datos de la serie
de tiempo %.f son independientes.\n', l);

        output=[output;0];

    end

end

disp(' ');
end

```

## AII.24 Programa lecturafaseI

```
function [ n,p,dat ] = lecturafaseI
%Lectura de Datos para la Fase I

fprintf('-----\n');
disp('A continuación debe leer el archivo Excel que contiene los
datos para el análisis de')
disp('Fase I del proceso, para leerlos debe ingresar el nombre
cuando se le indique.')
disp(' ');
filename=input('Ingrese el nombre del archivo: ','s');
dat=xlsread(filename);
[n,p]=size(dat);

end
```

## AII.25 Programa lecturafaseII

```
function [ n,p,dat ] = lecturafaseII
%Lectura de Datos para la Fase II

disp(' ');
disp('A continuación debe leer el archivo Excel que contiene los
datos a estudiar, para leerlos')
disp('debe ingresar el nombre cuando se le indique.')
disp(' ');
disp('SUGERENCIA: si su vector de características de calidad posee
"p" características (variables),')
disp('introduzca muestras de tamaño mayores o iguales a 2(p+1).')
filename=input('Ingrese el nombre del archivo: ','s');
dat=xlsread(filename);
[n,p]=size(dat);

End
```

## AII.26 Programa mardia

```
function [ output ] = mardia( A,alpha )

%Prueba de normalidad multivariante de Mardia.

[T,p]=size(A);

if T<50

    disp(' ');
    disp('ADVERTENCIA: el Tamaño de la muestra es menor a 50,');


```

```

b=input('¿Desea continuar?: No(0), Si(Cualquier otro número) ');

if b==0

    output=2;

else

    asim=asimetria(A);

    if isnan(asim)==1 || isinf(asim)==1

        output=3;

    else

        curt=curtosis(A);

        vc1=((6^(-1))*T*asim);

        vc2=(curt-(p*(p+2)));

        vc3=sqrt((8*p*(p+2))/T);

        vc4=(vc2/vc3);

        gl=((6^(-1))*p*(p+1)*(p+2));

        pvalor1=(1-chi2cdf(vc1,gl));

        pvalor2=(2*(1-normcdf(abs(vc4))));

        disp(' ');
        disp('Tabla resumen de la Prueba de Mardia');
        disp(['[Número de observaciones = ',num2str(T), ', ']);
'Variables = ',num2str(p),'"]');
        fprintf('-----\n');
        disp('Coeficientes Estimación
Estadístico G.L. P')
        disp('
de prueba ')
        fprintf('-----\n');
        fprintf('Asimetría
%23.4f%16.4f%11i%11.4f\n\n',asim,vc1,gl,pvalor1);
        fprintf('Curtosis
%24.4f%16.4f%22.4f\n',curt,vc4,pvalor2);

```

```

        fprintf('-----\n');
        fprintf('Con un nivel de significancia de: %.2f\n',
alpha);

        if pvalor1<=alpha && pvalor2<=alpha

            fprintf('La asimetría multivariante es
significativa.\n');
            fprintf('La curtosis multivariante es
significativa.\n');
            disp(' ');
            fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, los
datos no se ajustan a una\n');
            fprintf('distribución normal multivariante.\n');
            disp(' ');

            output=0;

        end

        if pvalor1>alpha && pvalor2>alpha

            fprintf('La asimetría multivariante no es
significativa.\n');
            fprintf('La curtosis multivariante no es
significativa.\n');
            disp(' ');
            fprintf('Por lo tanto No se rechaza H0, es decir,
los datos se ajustan a una\n');
            fprintf('distribución normal multivariante.\n');
            disp(' ');

            output=1;

        end

        if pvalor1<=alpha && pvalor2>alpha

            fprintf('La asimetría multivariante es
significativa.\n');
            fprintf('La curtosis multivariante no es
significativa.\n');
            disp(' ');
            fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, los
datos no se ajustan a una\n');
            fprintf('distribución normal multivariante.\n');
            disp(' ');

            output=0;

    end

```

```

        end

        if pvalor1>alpha && pvalor2<=alpha

            fprintf('La asimetría multivariante no es
significativa.\n');
            fprintf('La curtosis multivariante es
significativa.\n');
            disp(' ');
            fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, los
datos no se ajustan a una\n');
            fprintf('distribución normal multivariante.\n');
            disp(' ');

            output=0;

        end

    end

else

    asim=asimetria(A);

    if isnan(asim)==1 || isinf(asim)==1

        output=3;

    else

        curt=curtosis(A);

        vc1=((6^(-1))*T*asim);

        vc2=(curt-(p*(p+2)));

        vc3=sqrt((8*p*(p+2))/T);

        vc4=(vc2/vc3);

        gl=((6^(-1))*p*(p+1)*(p+2));

        pvalor1=(1-chi2cdf(vc1,gl));

        pvalor2=(2*(1-normcdf(abs(vc4))));

    end
end

```

```

        disp(' ');
        disp('Tabla resumen de la Prueba de Mardia')
        disp(['[Numero de observaciones = ',num2str(T), ', '
'Variables = ',num2str(p),']]');
        fprintf('-----\n');
        fprintf('-----\n');
        disp('Coeficientes           Estimación
Estadística      G.L.          P')
        fprintf('-----\n');
        fprintf('-----\n');
        fprintf('Asimetría
%23.4f%16.4f%11i%11.4f\n\n',asim,vc1,gl,pvalor1);
        fprintf('Curtosis
%24.4f%16.4f%22.4f\n',curt,vc4,pvalor2);
        fprintf('-----\n');
        fprintf('-----\n');
        fprintf('Con un nivel de significancia de: %.2f\n',
alpha);

    if pvalor1<=alpha && pvalor2<=alpha

        fprintf('La asimetría multivariante es
significativa.\n');
        fprintf('La curtosis multivariante es
significativa.\n');
        disp(' ');
        fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, los datos
no se ajustan a una\n');
        fprintf('distribución normal multivariante.\n');
        disp(' ');

        output=0;

    end

    if pvalor1>alpha && pvalor2>alpha

        fprintf('La asimetría multivariante no es
significativa.\n');
        fprintf('La curtosis multivariante no es
significativa.\n');
        disp(' ');
        fprintf('Por lo tanto No se rechaza H0, es decir, los
datos se ajustan a una\n');
        fprintf('distribución normal multivariante.\n');
        disp(' ');

        output=1;

    end

```

```

        if pvalor1<=alpha && pvalor2>alpha

            fprintf('La asimetría multivariante es
significativa.\n');
            fprintf('La curtosis multivariante no es
significativa.\n');
            disp(' ');
            fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, los datos
no se ajustan a una\n');
            fprintf('distribución normal multivariante.\n');
            disp(' ');

            output=0;

        end

        if pvalor1>alpha && pvalor2<=alpha

            fprintf('La asimetría multivariante no es
significativa.\n');
            fprintf('La curtosis multivariante es
significativa.\n');
            disp(' ');
            fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, los datos
no se ajustan a una\n');
            fprintf('distribución normal multivariante.\n');
            disp(' ');

            output=0;

        end

    end

```

## AII.27 Programa margoline

```

function [out] = margoline( A,alpha)
%Prueba estadística de schwager y margolin para el problema general
de
%outliers en una muestra aleatoria normal multivariante con media
%deslizada.

[n,y]=size(A);

if n<50

    disp(' ');


```

```

disp('ADVERTENCIA: el Tamaño de la muestra es menor a 50;');
b=input('¿Desea continuar?: No(0), Si(Cualquier otro número) ');

if b==0

    out=2;

else

    c=destand(A);

    if isnan(max(c))==1 || isinf(max(c))==1

        out=3;

    else

        c1=(1:n);
        table=[c1;c];

        disp(' ');
        fprintf('-----\n');
        disp('          Observación   Número   Distancias');
        fprintf('Estandarizadas      ');
        fprintf('-----');
        fprintf('-----\n');
        fprintf('%33.0f %26.4f \n',table);
        fprintf('-----');
        fprintf('-----\n');
        disp(' ');
        fprintf('Con un nivel de significancia de: %.3f\n', alpha);

        est=estm(A);
        b2p=curtosis(A);
        valorp=(1-normcdf(est));

        if est>=norminv(1-alpha)

            fprintf('La      curtosis      multivariante     es
significativa.\n');
            fprintf('Valor P de la prueba: %.4f\n', valorp);
            fprintf('Estimación      de      la      curtosis
multivariante: %.4f\n', b2p);
            disp(' ');
            fprintf('Conclusión: Se rechaza H0, es decir, se
presentan valores\n');
            fprintf('atípicos en la muestra.\n');
            disp(' ');

end;

```

```

        out =1;

    else

        fprintf('La curtosis multivariante no es
significativa.\n');
        fprintf('Valor P de la prueba: %.4f\n', valorp);
        fprintf('Estimación de la curtosis
multivariante: %.4f\n', b2p);
        disp(' ');
        fprintf('Conclusión: No se rechaza H0, es decir,
no se presentan valores\n');
        fprintf('atípicos en la muestra.\n');
        disp(' ');
        out =0;

    end
end

else
c=destand(A)';

if isnan(max(c))==1 || isinf(max(c))==1
    out=3;
else
    c1=(1:n);

    table=[c1;c];

    disp(' ');
    fprintf('-----\n');
    disp('          Observación Numero Distancias
Estandarizadas      ')
    fprintf('-----\n');
    fprintf('%33.0f %26.4f \n',table);
    fprintf('-----\n');
    disp(' ');
    fprintf('Con un nivel de significancia de: %.3f\n', alpha);

    est=estm(A);
    b2p=curtosis(A);

```

```

valorp=(1-normcdf(est));

if est>=norminv(1-alpha)

    fprintf('La      curtosis      multivariante     es
significativa.\n');
    fprintf('Valor P de la prueba: %.4f\n', valorp);
    fprintf('Estimación de la curtosis multivariante:
%.4f\n', b2p);
    disp(' ');
    fprintf('Conclusión: Se rechaza H0, es decir, se
presentan valores\n');
    fprintf('atípicos en la muestra.\n');
    disp(' ');
    out =1;

else

    fprintf('La      curtosis      multivariante     no     es
significativa.\n');
    fprintf('Valor P de la prueba: %.4f\n', valorp);
    fprintf('Estimación de la curtosis multivariante:
%.4f\n', b2p);
    disp(' ');
    fprintf('Conclusión: No se rechaza H0, es decir, no
se presentan valores\n');
    fprintf('atípicos en la muestra.\n');
    disp(' ');
    out =0;

end

end

end

```

## AII.28 Programa mland

```

function [ l ] = mland( A,p )
%Programa para la construcción de la matriz de autovalores.

[b,y]=size(A);
x=sym('x');
l1=((x^p)*eye(y));
l2=0;

for k=1:p

```

```

l2=(l2+((x^(p-k)) * (Bi(A,p,k))));

end

l=(l1-l2);

end

```

### **AII.29 Programa orden**

```

function [ p,vallog ] = orden( A,alpha )
%Programa para estimar el orden autorregresivo del modelo.

a=(A');
[x,y]=size(a);

for i=1:(y-1)

if hipotesis(A,i,alpha)==1

j=i;

for k=1:j

if lamvar(A,j,k)>chi2inv((1-alpha),(x^2))

p=(j-k+1);

vallog=1;

break;

end

end

break;

end

if hipotesis(A,i,alpha)==0

p=0;

vallog=0;

```

```

    end

    if hipotesis(A,i,alpha)==2

        p=0;

        vallog=2;

    end

end

end

```

### **AlI.30 Programa portmprueba**

```

function [ output ] = portmprueba( A,alpha )

%Prueba de portmanteau (Independencia categoría 2).

b=estpruport(A);

if isnan(b)==1 || isinf(b)==1

    output=2;

else

    [x,y]=size(A);

    a=(x/3);

    h=round(a);

    gl=((y^2)*h);

    vc=chi2inv((1-alpha),gl);

    pvalor=(1-chi2cdf(b,gl));

    disp(' ');
    disp('      Tabla resumen de la Prueba multivariante de Portmanteau
    (Independencia categoría 2)');
    disp(' ');
    disp(['          [Numero de observaciones = ',num2str(x)
    ', ' 'Rezagos (Lag) = ',num2str(h) ']']);
    fprintf('-----\n');

```

```

disp('Estadístico de prueba' G.L.
P')
fprintf('-----\n');
fprintf('%38.4f %18.0f %10.4f \n',b,gl,pvalor);
fprintf('-----\n');
disp(' ');
fprintf('Con un nivel de significancia de: %.3f\n', alpha);

if b>vc

    disp(' ');
    fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, existe
dependencia lineal\n');
    fprintf('dinámica en la serie de tiempo multivariante.\n');

    output=0;

else

    disp(' ');
    fprintf('Por lo tanto no se rechaza H0, es decir, no existe
dependencia lineal\n');
    fprintf('dinámica en la serie de tiempo multivariante.\n');

    output=1;

end

end

end

```

### AII.31 Programa producto1

```

function [ v1 ] = producto1( A,p )
%Programa para determinar la expresión 1 del método de mínimos
cuadrados.

v1=0;
[x,y]=size(A);

for k=1:(x-p)

v1=(v1+(Xt(A,p,k) * (Xt(A,p,(k-1))'))));

end

```

```
end
```

### AII.32 Programa producto2

```
function [ v3 ] = producto2( A,p )
%Programa para determinar la expresión 2 del método de mínimos cuadrados.

v2=0;
[x,y]=size(A);

for k=1:(x-p)

    v2=(v2+(Xt(A,p,(k-1)) * (Xt(A,p,(k-1))'))));

end

v3=(v2^(-1));

end
```

### AII.33 Programa productov

```
function [ vp ] = productov( A,p )

%Programa para estimar por el método de mínimos cuadrados la matriz B de
%tamaño KpxKp, de un modelo VAR(p) expresado en su forma VAR(1)
%Kp-dimensional.

v1=producto1(A,p);
v2=producto2(A,p);
vp=(v1*v2);

end
```

### AII.34 Programa pruebafd

```
function [ output ] = pruebafd( A,alpha )
%Prueba de raíz unitaria de Fountis-Dickey.

[m,n]=size(A);
[ord,logval]=orden( A,alpha );

if logval==2

    output=3;
```

```

elseif logval==0

    output=4;

else

    if ord>m

        output=4;

    else

        t=(m-ord);

        switch alpha

            case 0.01

                [x,vectorcritico]=dfcrit(1,t,1);

                valorcritico=vectorcritico(1);

            case 0.05

                [x,vectorcritico]=dfcrit(1,t,1);

                valorcritico=vectorcritico(2);

            case 0.1

                [x,vectorcritico]=dfcrit(1,t,1);

                valorcritico=vectorcritico(3);

            otherwise

                valorcritico=0;

        end

        if valorcritico==0

            output=2;

        else

```

```

        est=estpruebaafd( A,ord );

        if est<=0

            if est<valorcritico

                disp(' ');
                disp('Tabla resumen de la Prueba de Raíz Unitaria
Fountis-Dickey')
                disp(['[Numero de observaciones = ',num2str(t) ', '
'Variables = ',num2str(n) ']']);
                fprintf('-----\n');
                disp('      Orden VAR(p)           Valor Crítico
Estadístico de Prueba')
                fprintf('-----\n');
                fprintf('-----\n');
                fprintf('%0.0f%32.4f%30.4f\n',ord,valorcritico,est);
                fprintf('-----\n');
                fprintf('Con un nivel de significancia de: %.2f\n',
alpha);

                fprintf('No existe una raíz unitaria.\n');
                disp(' ');
                fprintf('Por lo tanto se rechaza H0, es decir, el
proceso es estacionario\n');
                fprintf('en amplio sentido.\n');
                disp(' ');

        output=1;

        else

            disp(' ');
            disp('Tabla resumen de la Prueba de Raíz Unitaria
Fountis-Dickey')
            disp(['[Numero de observaciones = ',num2str(t) ', '
'Variables = ',num2str(n) ']']);
            fprintf('-----\n');
            disp('      Orden VAR(p)           Valor Crítico
Estadístico de Prueba')
            fprintf('-----\n');
            fprintf('-----\n');
            fprintf('%0.0f%32.4f%30.4f\n',ord,valorcritico,est);

```

```

        fprintf('-----\n');
        fprintf('Con un nivel de significancia de: %.2f\n',
alpha);

        fprintf('Existe una raíz unitaria.\n');
        disp(' ');
        fprintf('Por lo tanto No se rechaza H0, es decir, el
proceso no es estacionario\n');
        fprintf('en amplio sentido.\n');
        disp(' ');
        output=0;

    end

else

output=5;

end
end
end
end
end

```

### AII.35 Programa Sij

```

function [ S ] = Sij( x,m,i )
%Programa para estimar la matriz de covarianza.

Me=[ ];
for k=(i+1):m
    Me=[Me;x((k),:)];
end
S=cov(Me,1);
end

```

### AII.36 Programa solución

```
function [ a ] = solucion( A,p )
%Programa para la determinación de las raíces o autovalores de la
ecuación
%característica de un modelo VAR(p).

v=mland(A,p);
v1=det(v);
v2=simplify(v1);
v3=[];
v3=[v3,solve(v2)];
a=double(v3);

end
```

### AII.37 Programa u

```
function [ ue,vlogi ] = u( A,p )
%Programa para estimar por el método de máxima verosimilitud, la
matriz
% de covarianza de los errores de un modelo VAR(p).

B1=B(A,p);

if isnan(max(max(B1)))==1 || isinf(max(max(B1)))==1
ue=0;
vlogi=0;

else
vlogi=1;
z1=Z(A,p);
y1=(A');
[a,b]=size(y1);
y2=y1(:, (p+1):b);
T=(b-p);
ue=((T^(-1))*((y2-(B1*z1))*(y2-(B1*z1))'));
end
end
```

### **AII.38 Programa vectmedia**

```
function [ output ] = vectmedia( x,m,i )
%Programa para estimar el vector de medias.

Me=[];

for k=(i+1):m

    Me=[Me;x( (k) , : )];

end

output=mean (Me)';

end
```

### **AII.39 Programa Xt**

```
function [ v ] = Xt( A,p,t )
%Programa para compactar las observaciones de una serie de tiempo
múltiple
%en vectores de tamaño Kpx1.

At=(A');
v=[];

for k=(p+t):-1:(t+1)

    v=[v;At(:,k)];

end

end
```

### **AII.40 Programa Z**

```
function [ C ] = Z( A,p )
%Programa para compactar los regresores de un modelo VAR(p).

[x,y]=size(A);
d=A';
C=[];

for i=1:(x-p)

    j=(i+p-1);
    E=[1];
```

```
for k=j:-1:i
    v=d(:,k);
    E=[E;v];
end
C=[C,E];
end
```

## APÉNDICE III. MANUAL DEL USUARIO.

Este instructivo está destinado a dar una asistencia al usuario que desee realizar a través de una data multivariante, un monitoreo de un proceso (análisis de Fase II) mediante el programa computarizado desarrollado, el cual, fue denominado como CEPM. De igual manera, se presenta el modo de utilizar esta herramienta en la validación de ciertos supuestos estadísticos que se requieren (análisis de Fase I).

### REQUERIMIENTOS DE HARDWARE

A continuación se muestra en la **Tabla AIII.1** los requerimientos de hardware que requiere el software MATLAB (versión 2012a) para ser ejecutado bajo el sistema operativo Windows.

**Tabla AIII.1.** Requerimientos de hardware de Matlab 2012a para Windows.

Fuente: sitio oficial de los desarrolladores de MATLAB (<http://www.mathworks.com/>)

Matlab 2012a versión 64 bits				
Sistema operativo	Procesador	Espacio en el disco duro	Memoria RAM	
Windows XP Service Pack 3	Cualquier procesador Intel o AMD x86 que pueda soportar conjunto de instrucciones SSE2	1 GB solo para MATLAB,	Mínimo	1024 MB
Windows Server 2003 R2 Service Pack 2		3–4 GB para una instalación típica (Por ejemplo al incluir algún Toolbox)	Se recomienda por lo menos	2048 MB
Windows Vista Service Pack 2				
Windows Server 2008 Service Pack 2 or R2				
Windows 7				

## INSTALACIÓN DEL CEPM

Cree una carpeta en el computador en un lugar a su preferencia, como sugerencia, de ser posible créela en el escritorio del computador. Posteriormente, guarde en esta carpeta todas las funciones programados en MATLAB y libros Excel proporcionadas por los autores de este trabajo de grado, para que el programa se ejecute correctamente. A continuación, se presentan los nombres de todas las funciones que el programa demanda:

Los programas realizados en MATLAB que se deben agregar a la carpeta son los siguientes:

**Tabla AIII.2.** Programas realizados en MATLAB que se deben agregar para hacer funcionar CEPM. Fuente: propia

asimetria	estm	orden
autocova	estpruebfd	portmpuebla
B	estpruport	producto1
Bi	funcauto	producto2
cambio	gkn	productov
CEPM	hdehawkins	pruebfd
correlacion	hipotesis	Sij
curtosis	lamvar	solucion
destand	LBprueba	U
dfcrit	lecturafaseI	vectmedia
doslogkn	lecturafaseII	Xt
estGkn	mardia	Z
estGknmax	margoline	
estLB	mland	

Por otro lado se necesitan agregar los siguientes libros de Excel que contienen las tablas de los límites de control:

**Tabla AIII.3.** Libros de Excel que se deben agregar para hacer funcionar CEPM. Fuente: propia

p igual a 2
p igual a 3
p igual a 4
p igual a 5
p igual a 10
p igual a 15
p igual a 20
p igual a 25

En la **Figura 29** se muestra la carpeta de trabajo al agregar los programas realizados en MATLAB y libros de Excel.

Nombre	Fecha de modificación	Tipo	Tamaño
orden.m	01/11/2014 04:51 ...	Archivo M	1 KB
lecturafase1.m	31/10/2014 06:34 ...	Archivo M	1 KB
estGkn.m	30/10/2014 10:02 ...	Archivo M	1 KB
gkn.m	30/10/2014 09:54 ...	Archivo M	1 KB
doslogkn.m	30/10/2014 09:51 ...	Archivo M	1 KB
Sij.m	30/10/2014 09:42 ...	Archivo M	1 KB
L8prueba.m	30/10/2014 07:18 ...	Archivo M	2 KB
funcauto.m	30/10/2014 07:16 ...	Archivo M	1 KB
estLB.m	30/10/2014 07:15 ...	Archivo M	1 KB
estpruport.m	30/10/2014 07:01 ...	Archivo M	1 KB
u.m	30/10/2014 05:54 ...	Archivo M	1 KB
estm.m	30/10/2014 04:32 ...	Archivo M	1 KB
curtosis.m	30/10/2014 04:00 ...	Archivo M	1 KB
asimetria.m	30/10/2014 03:59 ...	Archivo M	1 KB
destand.m	30/10/2014 03:28 ...	Archivo M	1 KB
estpruebad.m	30/10/2014 03:15 ...	Archivo M	1 KB
solucion.m	30/10/2014 03:11 ...	Archivo M	1 KB
mland.m	30/10/2014 03:04 ...	Archivo M	1 KB
Bi.m	30/10/2014 02:50 ...	Archivo M	1 KB
producto.m	30/10/2014 02:45 ...	Archivo M	1 KB
producto2.m	30/10/2014 02:43 ...	Archivo M	1 KB
producto1.m	30/10/2014 02:42 ...	Archivo M	1 KB
Xt.m	30/10/2014 02:20 ...	Archivo M	1 KB
Z.m	30/10/2014 02:09 ...	Archivo M	1 KB
hipotesis.m	30/10/2014 02:00 ...	Archivo M	1 KB
lamvar.m	30/10/2014 01:49 ...	Archivo M	1 KB
B.m	30/10/2014 01:43 ...	Archivo M	1 KB

**Figura 29.** Carpeta de trabajo con los programas y elementos de CEPM. Fuente: propia.

## CARGA DE DATOS

Los datos a utilizar en el análisis de Fase II de este programa presentan limitaciones con respecto al número de dimensiones  $p$  que deben poseer los vectores de observación. Las dimensiones de estos vectores de observación deben ser de 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20 y 25. Adicionalmente, el tamaño de muestra requerido para llevar a cabo este análisis debe ser mayor o igual a  $2(p + 1)$ , es decir, si se tiene un vector de observación de 5 dimensiones o variables, se necesitaría como mínimo un tamaño de muestra de  $2(5 + 1) = 12$ . Sin embargo, si el usuario posee unos datos con

vectores de observación que no posean las dimensiones descritas, tiene como opción realizar solo un análisis de Fase I ya que este no posee limitaciones en este aspecto.

Por otra parte, los datos a utilizar tanto para el análisis de Fase I como el análisis de Fase II deben estar dispuestos en un libro de Excel, el cual se debe guardar en la carpeta que contiene las funciones que el programa necesita. Asimismo, los datos a estudiar deben estar ordenados como se muestra en la **Figura 30**, con el propósito de evitar errores de compilación en el programa:

	A	B	C	D	E
1	-0,533	-0,385	-0,443		
2	0,167	-0,052	0,263		
3	0,068	-0,138	-0,133		
4	0,492	0,68	1,232		
5	-0,071	0,306	0,053		
6	0,229	0,413	0,199		
7	-0,4	-0,396	-0,789		
8	0,387	0,64	0,898		
9	-0,404	-0,529	-1,318		
10	-1,43	-0,408	0,88		
11	1,206	-0,194	-0,241		
12	3,231	1,959	0,492		
13	0,637	0,14	-0,184		
14	0,177	-0,497	1,074		

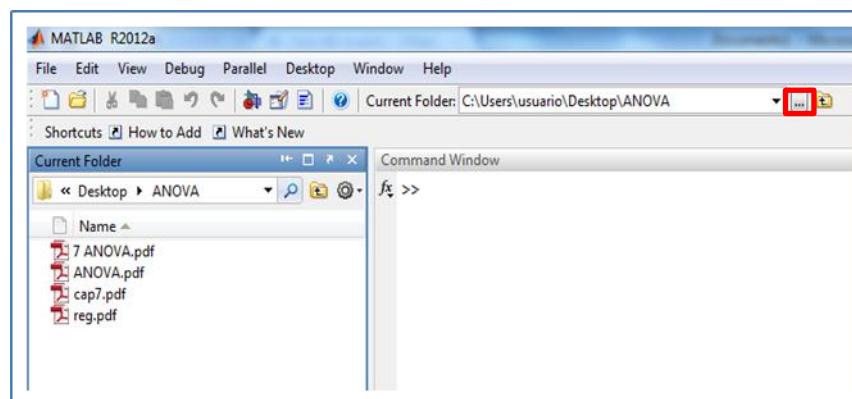
**Figura 30.** Organización en Excel de datos tanto para la Fase I como la Fase II del programa CEPM.  
Fuente: propia

Se observa en la **Figura 30** que el libro de datos que este programa utiliza no debe contener ningún tipo de encabezado, es decir, no permite al usuario leer el nombre de cada una de las variables estudiada, por ello, el analista debe recordar

como predispone las variables a analizar. En el ejemplo de la figura, cada columna de la matriz representa una variable y cada fila una observación, es decir que para este caso particular, se tienen 14 observaciones realizadas sobre un vector de 3 variables. Igualmente se resalta que los datos de ambas fases de estudio, se deben guardar en dos archivos Excel separados.

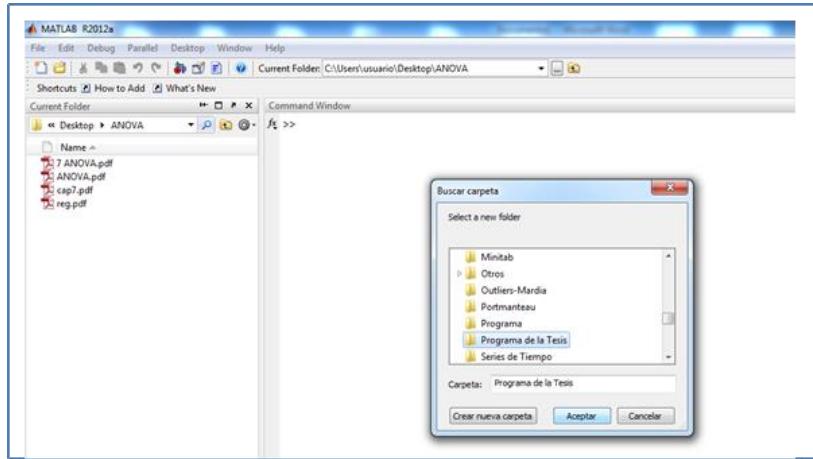
## EJECUCION DEL PROGRAMA CEPM

Para ejecutar el programa CEPM debe abrir el MATLAB, para ello haga clic sobre el acceso directo y, a continuación se iniciara la ejecución de MATLAB. Al finalizar el inicio de MATLAB se mostrará en pantalla la ventana principal. En esta ventana deberá hacer clic en el botón enmarcado con el cuadro rojo, **Figura 31**, con el objetivo de seleccionar la carpeta que contiene todas las funciones y libros Excel que el programa desarrollado CEPM requiere.



**Figura 31.** Búsqueda en MATLAB de carpeta de trabajo del programa CEPM. Fuente: propia.

Al hacer clic en el botón seleccione la carpeta y posteriormente haga clic en aceptar. (**Figura 32**).



**Figura 32.** Selección de carpeta de trabajo del programa CEPM en MATLAB. Fuente: propia

Una vez seleccionada la carpeta, para iniciar el programa escriba el nombre de la función “CEPM”, luego presione *Enter* para comenzar. Al iniciar el programa se imprimirá en pantalla (ver **Figura 33**) una breve explicación de lo que este permite realizar.

```
>> CEPM
-----
Control estadístico multivariante de procesos: programa para el monitoreo de un vector de
características de calidad.

Trabajo Especial de Grado titulado: DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA COMPUTARIZADA PARA EL
CONTROL ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE DE PROCESOS BASADA EN EL ANÁLISIS DE PUNTO DE CAMBIO.
18 de enero de 2015, diseñado por José Brea y Ronald Medina, Escuela de Ingeniería
Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo.
E-mail: esojmbh@gmail.com / alexchelsea222@gmail.com

Este programa le permite monitorear muestras tomadas secuencialmente en el tiempo y,
estima un punto de cambio (en el caso que exista) en un proceso bajo control
estadístico, es decir, realiza el análisis de Fase II del SPC.

-----
Antes de iniciar el análisis de Fase II, se debe analizar un conjunto de datos históricos,
es decir, se debe efectuar un análisis de Fase I.

Las pruebas de hipótesis estadísticas a realizar en el análisis de Fase I son:

*Prueba de Schwager y Margolin para la detección de outliers.

*Prueba de normalidad multivariante de Mardia.

*Prueba de raíz unitaria de Fountis-Dickey.

*Prueba de Ljung-Box y la versión multivariante de Chitturi y Hosking de la prueba de
Portmanteau.

SUGERENCIA: la prueba de Schwager y Margolin y prueba de Mardia dan valores críticos
conservadores para tamaños de muestra mayores o iguales a 50.
¿Desea realizar el análisis de Fase I?: No(0), Si(Cualquier otro número)
```

**Figura 33.** Pantalla inicial del estudio Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

## ANÁLISIS DE FASE I

Para una mejor explicación de esta sección del manual del usuario, se hará uso de los datos del ejemplo 1 del capítulo V. La muestra de este ejemplo es de tamaño 25, y está se encuentra compuesta por vectores de observación de tres (3) variables. A lo largo de este análisis, se utilizó en las pruebas de hipótesis estadísticas realizadas un nivel de significancia  $\alpha$  de 0.01.

Para iniciar el análisis de Fase I ingrese cualquier numero diferente de cero (0) y haga clic en la tecla *Enter*. Se observa en la **Figura 34** que el programa le sugiere al usuario utilizar tamaños de muestras mayores o iguales a 50.

SUGERENCIA: la prueba de Schwager y Margolin y prueba de Mardia dan valores críticos conservadores para tamaños de muestra mayores o iguales a 50.  
¿Desea realizar el análisis de Fase I?: No(0), Si(Cualquier otro número) 7

---

A continuación debe leer el archivo Excel que contiene los datos para el análisis de Fase I del proceso, para leerlos debe ingresar el nombre cuando se le indique.

Ingrese el nombre del archivo: |

**Figura 34.** Lectura de datos de la Fase I del ejemplo 1, Fuente: propia.

Se aprecia que una vez aceptada la opción de realizar el análisis de Fase I, inmediatamente se deberá ingresar los datos a estudiar. Independiente si el archivo Excel posee una extensión del tipo “.xls” o “.xlsx”, solo se deberá ingresar el nombre del archivo, por ejemplo si el archivo se llama Prueba\_papel.xlsx, el usuario deberá escribir solo Prueba\_papel, sin la extensión.

Para el ejemplo desarrollado en este manual del usuario, el nombre del archivo corresponde a “zamba2006\_faseI”, el cual una vez ingresado, da inicio al desarrollo de las pruebas de hipótesis a realizar en el análisis de Fase I.

- **DETECCIÓN DE VALORES ATÍPICOS (OUTLIERS)**

El programa presenta la opción de realizar un estudio para la detección de outliers, mediante la prueba de Schwager y Margolin.

Al aceptar la opción de realizar la prueba de Schwager y Margolin, se deberá ingresar el nivel de significancia  $\alpha$ , aquí el usuario tiene la libertad de ingresar este valor, (ejemplo: 0.05, 0.01, etc). Al ingresar un valor de 0.01, se presentará una impresión como el de la **Figura 35**.

```
-----
A continuación debe leer el archivo Excel que contiene los datos para el análisis de
Fase I del proceso, para leerlos debe ingresar el nombre cuando se le indique.

Ingrese el nombre del archivo: zamba2006_faseI
-----
A continuación se realizara la Prueba de Schwager y Margolin para la detección de outliers,
con el fin de depurar los datos para el Análisis de Fase I.

¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro número) 6
Indique el nivel de significancia alfa: 0.01
ADVERTENCIA: el Tamaño de la muestra es menor a 50,
¿Desea continuar?: No(0), Si(Cualquier otro número) |
```

**Figura 35.** Pantalla inicial prueba de outliers, Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

Se observa una advertencia, debido que para este ejemplo ilustrativo el tamaño de la muestra es menor a 50. Si se salta esta advertencia, a continuación el programa presentará como se observa en la **Figura 36** el resumen de la prueba.

Observación	Número	Distancias Estandarizadas
1		0.8766
2		2.3377
3		0.1710
4		8.8631
5		0.4854
6		0.3210
7		1.2059
8		1.1800
9		2.4774
10		1.0573
11		0.3135
12		2.2250
13		3.8371
14		4.5494
15		3.2223
16		1.3073
17		1.6883
18		1.9720
19		2.6461
20		12.8157
21		1.4658
22		3.2176
23		1.1554
24		5.9817
25		6.6273

Con un nivel de significancia de: 0.010  
La curtosis multivariante no es significativa.  
Valor P de la prueba: 0.0720  
Estimación de la curtosis multivariante: 18.2006  
  
Conclusión: No se rechaza  $H_0$ , es decir, no se presentan valores atípicos en la muestra.

**Figura 36.** Resumen de la prueba valores atípicos, Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

Este resumen presentará una tabla con las distancias estandarizadas de cada observación, el P-VALOR de la prueba, la estimación de la curtosis multivariante y una decisión con respecto a la presencia o ausencia de valores atípicos (*outliers*).

#### • ESTUDIO DE NORMALIDAD MULTIVARIANTE

Una vez realizada la prueba de Schwager y Margolin, se inicia el estudio de normalidad mediante la prueba de normalidad multivariante de Mardia. Se tiene la opción de no realizar esta prueba. Si se acepta su ejecución, se debe ingresar el nivel de significancia, y al igual que en la prueba de anterior, el programa presenta una advertencia en el caso que el tamaño de muestra es menor a 50. En el ejemplo

ilustrativo se eligió un nivel de significación de 0.01. En la **Figura 37** se muestra la pantalla del inicio de esta prueba.

A continuación se realizará la Prueba de normalidad multivariante de Mardia, con la búsqueda de validar el supuesto de normalidad multivariante.

¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro número) 5

Indique el nivel de significancia alfa: 0.01

ADVERTENCIA: el Tamaño de la muestra es menor a 50,

¿Desea continuar?: No(0), Si(Cualquier otro número) 6

**Figura 37.** Presentación prueba de Mardia, Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

Si se salta esta advertencia, a continuación el programa presentará una tabla resumen con los resultados de la prueba normalidad multivariante de Mardia. (Ver **Figura 38**).

Tabla resumen de la Prueba de Mardia  
[Número de observaciones = 25, Variables = 3]

Coeficientes	Estimación	Estadístico de prueba	G.L.	P
Asimetría	4.5687	19.0363	10	0.0398
Curtosis	18.2006	1.4609		0.1441

Con un nivel de significancia de: 0.01  
La asimetría multivariante no es significativa.  
La curtosis multivariante no es significativa.

Por lo tanto No se rechaza  $H_0$ , es decir, los datos se ajustan a una distribución normal multivariante.

**Figura 38.** Resumen de la prueba de Mardia, Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

En este resumen, el usuario visualizará las estimaciones de los coeficientes de asimetría y curtosis multivariantes, valores P y la decisión con respecto al supuesto de normalidad multivariante.

- **ESTUDIO DE ESTACIONARIEDAD**

Al finalizar el estudio de normalidad multivariante, se continúa el análisis de Fase I con la prueba de raíz unitaria de Fountis y Dickey. El usuario tiene la posibilidad de ejecutar o no esta prueba, si se acepta ejecutarla, el usuario debe ingresar el nivel de significancia, pero para este caso, solo se dispone de los valores 0.01, 0.05 y 0.1. Una vez ingresado, uno de estos tres valores (En el ejemplo se usó 0.01), En la **Figura 39** se presenta la pantalla inicial de la prueba.

```
A continuación se realizará la Prueba de raíz unitaria de Fountis-Dickey, la cual examina la existencia de una raíz unitaria en una serie de tiempo multivariante autorregresiva.  
¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro número) 5  
Valores permitidos de alfa:  
0.01 0.05 0.1  
Indique el nivel de significancia alfa: 0.01
```

**Figura 39.** Presentación y solicitud de significancia de la prueba de estacionariedad, Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

Al ingresar el nivel de significancia, el programa muestra el resumen de esta prueba (**Figura 40**), donde se presenta la estimación del orden VAR del modelo, el valor crítico, el estadístico de prueba y, la decisión con respecto a la estacionariedad de la serie de tiempo multivariante.

Tabla resumen de la Prueba de Raíz Unitaria Fountis-Dickey		
[Número de observaciones = 24, Variables = 3]		
Orden VAR(p)	Valor Crítico	Estadístico de Prueba
1	-2.6649	-5.6027

Con un nivel de significancia de: 0.01  
No existe una raíz unitaria.  
  
Por lo tanto se rechaza  $H_0$ , es decir, el proceso es estacionario en amplio sentido.

**Figura 40.** Resumen de la prueba de Fountis Dickey, Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

- **ESTUDIO DE INDEPENDENCIA**

Por último el programa ejecuta el estudio de independencia, dividido en dos categorías:

La primera categoría prueba la independencia en cada componente univariante de la serie de tiempo multivariante. Para ello se aplica la prueba de Ljung y Box a cada componente univariante.

La segunda categoría prueba la existencia de una dependencia lineal dinámica en los datos de la serie de tiempo multivariante. Para ello se realiza la versión multivariante de Chitturi y Hosking de la prueba de Portmanteau.

Al aceptar realizar la prueba de Ljung y Box se debe ingresar el nivel de significancia  $\alpha$ , cuyo valor para esta prueba, no posee restricciones en su elección. Una vez ingresado el nivel de significancia el programa presentará una tabla resumen. En este, se presentan los estadísticos de prueba, valores P y, al igual que en las pruebas anteriores, se exhiben conclusiones con respecto a la independencia en esta categoría. En la **Figura 41** se muestra la tabla de resultados del ejemplo ilustrativo al usar un nivel de significancia de 0.01

CATEGORÍA I: Prueba de Ljung-Box

¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro numero) 5

Indique el nivel de significancia alfa: 0.01

Tabla resumen de la Prueba Ljung-Box (Independencia categoria 1)

[Número de observaciones = 25, Longitud del rezago (Lag) = 8]

Serie de Tiempo (o variable)	Estadísticos de prueba	G.L.	P
1	7.8215	8	0.4511
2	19.7036	8	0.0115
3	68.9426	8	0.0000

Con un nivel de significancia de: 0.010

No se rechaza  $H_0$ , es decir, los datos de la serie de tiempo 1 son independientes.

No se rechaza  $H_0$ , es decir, los datos de la serie de tiempo 2 son independientes.

Se rechaza  $H_0$ , es decir, los datos de la serie de tiempo 3 no son independientes.

\*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.

**Figura 41.** Aplicación de la prueba de Ljung y Box, Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

Posteriormente se inicia la versión multivariante de Chitturi y Hosking de la prueba de Portmanteau. Al aceptar realizar la prueba e ingresar el nivel de significancia se exhibe la tabla resumen de la prueba. En la **Figura 42** se muestra la tabla de resultados del ejemplo ilustrativo al usar un nivel de significancia de 0.01.

CATEGORÍA III: Versión multivariante de Chitturi y Hosking de la prueba de Portmanteau.  
En esta categoría se prueba la existencia de una dependencia lineal dinámica en los datos de la serie de tiempo multivariante.

¿Desea aplicar esta prueba?: No(0), Si(Cualquier otro número) 8

Indique el nivel de significancia alfa: 0.01

Tabla resumen de la Prueba multivariante de Portmanteau (Independencia categoría 2)

[Número de observaciones = 25, Rezagos (Lag) = 8]

Estadístico de prueba	G.L.	P
96.3473	72	0.0293

Con un nivel de significancia de: 0.010

Por lo tanto no se rechaza  $H_0$ , es decir, no existe dependencia lineal dinámica en la serie de tiempo multivariante.

Los datos son independientes solo en la categoría II.  
SI SELECCIONA NO, EL PROGRAMA DETENDRÁ SU EJECUCIÓN.

¿Desea continuar con el análisis?: No(0), Si(Cualquier otro número) |

**Figura 42.** Aplicación de la versión multivariante de Chitturi y Hosking de la prueba de Portmanteau Fase I del ejemplo 1. Fuente: propia.

En el resumen se presentan el valor del estadístico de prueba en conjunto con el P-VALOR de la prueba. Asimismo se presenta una decisión con respecto a la independencia en esta categoría. En la **Figura 42** se muestra además una impresión con respecto a si se desea o no continuar con el análisis, esto es debido a que para este ejemplo los datos son parcialmente independientes.

Se resalta que en caso que el usuario no decida realizar alguna de estas pruebas, es decir, que no apruebe la realización de estas en la ejecución del programa, simplemente estas se saltaran y se continuará con la siguiente prueba. En caso que algún supuesto estadístico no se cumpla, se presentará un mensaje con la opción de detener el estudio. Si es así y, si se decide detener el análisis el programa detendrá su ejecución por completo.

## ANÁLISIS DE FASE II

Una vez finalizado el análisis de Fase I, a continuación inicia el análisis de Fase II del SPC, es decir, inicia el monitoreo en curso del proceso. En esta Fase el programa solicitará al usuario los datos a estudiar, y eventualmente solicitará además el nivel de significancia, con el objetivo de construir un gráfico que permita controlar el proceso a través del análisis de punto de cambio, que detectará un cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianzas, en caso que este exista. El diagnóstico que se obtiene en caso que exista un cambio, es el de la ocurrencia de un cambio en el vector de medias, matriz de covarianzas o en ambos.

Se resalta que el gráfico de control a construir exhibirá los estadísticos de graficación  $G_{\max,n}$  en conjunto con el límite de control  $h_{n,p,\alpha}$ . En caso que exista se detectara la primera señal de cambio, y esta se encontrara representada por el primer  $G_{\max,n}$  que supera el límite de control  $h_{n,p,\alpha}$ . En la **Figura 43** se presenta la pantalla inicial del análisis de Fase II.

Ha finalizado el análisis de Fase I.  
A CONTINUACIÓN INICIARA EL ANÁLISIS DE FASE II.  
La herramienta estadística utilizada para el análisis es un gráfico de control basado en el Análisis de Punto de Cambio (CPA).  
\*PRESIONE CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR.  
A continuación debe leer el archivo Excel que contiene los datos a estudiar, para leerlos debe ingresar el nombre cuando se le indique.  
SUGERENCIA: si su vector de características de calidad posee "p" características (variables), introduzca muestras de tamaño mayores o iguales a  $2(p+1)$ .  
Ingrese el nombre del archivo: |

**Figura 43.** Pantalla inicial del estudio Fase II del ejemplo 1, Fuente: propia

Se puede apreciar que el programa solicita el nombre del archivo a estudiar. Al igual que en el análisis de Fase I, para proporcionar una mejor explicación de esta sección se hará uso de los datos del ejemplo 1 del capítulo V. El archivo de este ejemplo se titula “zamba2006\_faseII”, y al igual que en el estudio de Fase I, solo se debe ingresar el nombre del archivo sin colocar su extensión. La muestra de este ejemplo es de tamaño 25, y está también se encuentra compuesta por vectores de observación de tres (3) variables. En la **Figura 44** se muestra la lectura del archivo de la Fase II y elección del nivel de significancia.

SUGERENCIA: si su vector de características de calidad posee "p" características (variables) introduzca muestras de tamaño mayores o iguales a  $2(p+1)$ .  
Ingrese el nombre del archivo: zamba2006\_faseII

---

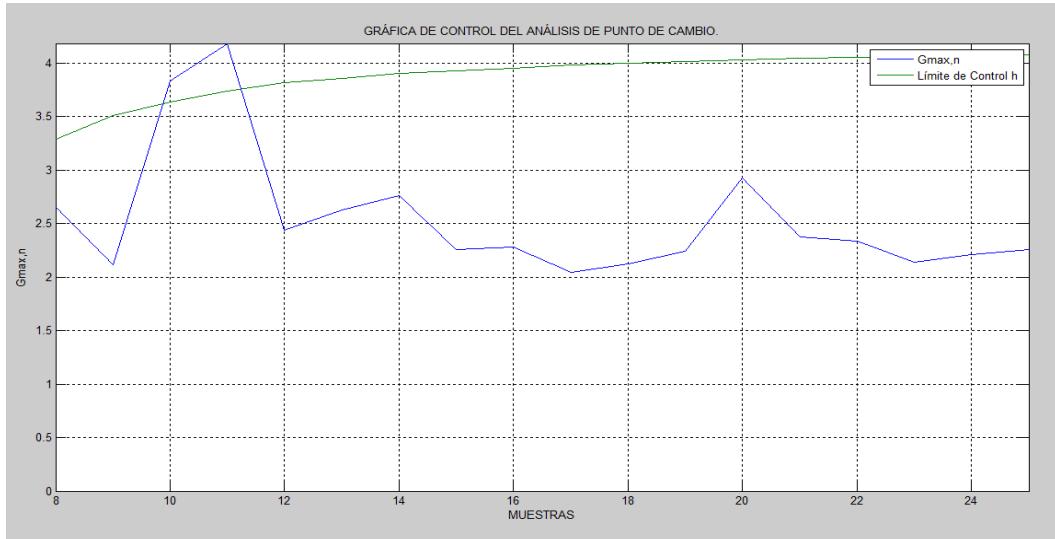
A continuación se procederá a construir el Gráfico de Control del CPA.

Deberá indicar el nivel significancia alfa (probabilidad especificada de emitir una falsa alarma), cuando se le indique.

Valores permitidos de alfa: 0.0005 0.001 0.002 0.005 0.01  
Indique el valor de alfa: 0.005

**Figura 44.** Lectura de datos y solicitud de nivel de significancia para realizar el estudio Fase II Ejemplo 1. Fuente propia.

Luego de leer los datos el usuario debe ingresar el nivel de significancia. Los niveles disponibles son 0.0005, 0.001, 0.002, 0.005 y 0.01., en este ejemplo, se utilizó un nivel de significancia de 0.005. Una vez ingresado este dato, a continuación el programa presentará el grafico de control multivariante del análisis de punto de cambio de la **Figura 45**, en conjunto de un resumen de los resultados obtenidos.



**Figura 45.** Monitoreo del proceso multivariante, estudio Fase II, ejemplo1. Fuente propia.

Con el objeto de lograr una mejor comprensión del gráfico de control obtenido, se describe lo siguiente:

El estadístico  $G_{\max,n}$  representa el estadístico de que se representa en el gráfico. Este estadístico es calculado mediante la maximización de los  $G_{k,n}$ . Este último es computado de forma recurrente para cada  $k$  en el rango factible  $p+1, \dots, n-p-1$ , en donde,  $p$  es el número de variables en el vector de observaciones y  $n$  representa las observaciones acumuladas.

La línea azul representa los estadísticos  $G_{\max,n}$  determinados para cada  $n$  en el rango factible  $2(p+1), \dots, N$ , en donde,  $p$  es el número de variables en el vector de observaciones, y  $N$  es el tamaño de la muestra. Debido a que para el ejemplo desarrollado  $p = 3$  y  $N = 25$ , es posible computar un total de 18 estadísticos  $G_{\max,n}$ . De manera similar, la línea verde representa el límite de control  $h_{n,p,\alpha}$ , determinados también para el mismo rango factible. El estadístico  $G_{\max,n}$  en conjunto con el límite de control  $h_{n,p,\alpha}$ , es el criterio utilizado para determinar si una señal de cambio en el vector de medias y/o matriz de covarianzas ha tenido lugar en el proceso.

El gráfico de la **Figura 45** presenta la primera señal de cambio en la observación acumulada  $n = 10$ . A partir de este valor, se estima el momento de inicio del cambio, llamado punto de cambio (*change-point*), mediante el valor de  $k$  que conduce al máximo  $G_{k,n}$ , el cual es dado por la observación número 6.

La **Figura 46** presenta un resumen de los resultados obtenidos del monitoreo del proceso, mediante representación gráfica multivariante a través del análisis de punto de cambio. Adicionalmente se muestran las estimaciones de los parámetros antes y después del cambio, además de ello, se exhibe el punto en donde se detecta la primera señal de cambio, se da una estimación del momento en donde el cambio inicia, y por último se presenta una conclusión con respecto al estado en control del proceso.

```

-----
Vector de medias, matriz de covarianza y matriz de correlación muestral antes del cambio:

*Vector de medias:
-0.3053
-0.4697
-0.1185

*Matriz de covarianza:
 0.5391  0.2662 -0.2315
 0.2662  0.3344  0.1466
-0.2315  0.1466  0.5533

*Matriz de correlación:
 1.0000  0.6270 -0.4239
 0.6270  1.0000  0.3408
-0.4239  0.3408  1.0000
-----
Vector de medias, matriz de covarianza y matriz de correlación muestral después del cambio:

*Vector de medias:
 0.9471
-0.0706
-0.1552

*Matriz de covarianza:
 0.8117  0.8339  0.6725
 0.8339  1.1123  1.0013
 0.6725  1.0013  1.1424

*Matriz de correlación:
 1.0000  0.8776  0.6984
 0.8776  1.0000  0.8883
 0.6984  0.8883  1.0000

Existe suficiente evidencia estadística para afirmar, que ha ocurrido un cambio en el
vector de medias, matriz de covarianzas o en ambos, en  $n$  igual a: 10

El punto estimado en donde ocurre el cambio es en la observación: 6

Conclusión: el proceso está fuera de control, es decir, el proceso está operando en presencia
de causas asignables de variación.

Arriba se presentan los vectores de medias, matrices de covarianza y matrices de correlación
muestra, antes y después del cambio.

```

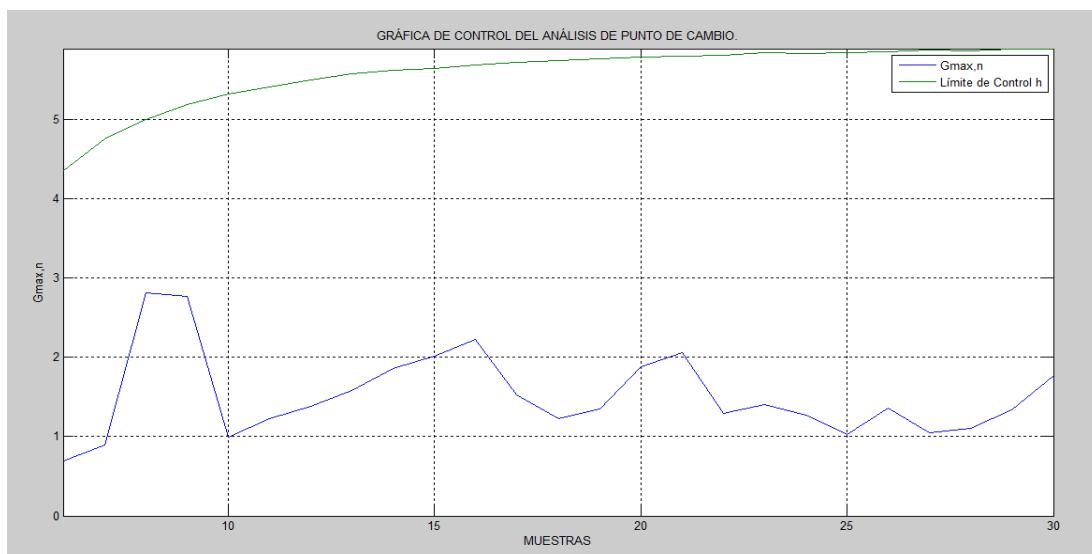
**Figura 46.** Resumen del análisis Fase II, Ejemplo 1. Fuente: propia.

En la **Tabla AIII.4** se muestra la observación en donde se detecta la primera señal de cambio y la estimación del momento en donde el cambio inicia.

**Tabla AIII.4.** Observación de primera señal decambio y estimación del punto de cambio.  
Fuente: propia

	Punto en donde ocurre la primera señal de cambio	Punto en donde se estima que ocurre el cambio
$x_1$	0,892	0,381
$x_2$	-0,833	-0,443
$x_3$	-0,439	-0,446

Se resalta que las estimaciones de los parámetros antes y después del cambio, el punto en donde se detecta al cambio y la estimación del momento en donde el cambio inicia, solo se imprimirán si dicho cambio existe, en caso contrario se presentará una conclusión con respecto al estado en control del proceso, así como las estimaciones de los parámetros en control. Para proporcionar una mejor explicación de lo anterior, se construyó el gráfico de control multivariante del análisis de punto de cambio, con una data que no presentaba cambio alguno en el vector de medias y/o matriz de covarianzas. En las **Figuras 47** y **48** se muestra el resultado obtenido, el cual ejemplifica la situación donde no existe un cambio en el proceso.



**Figura 47.** Monitoreo del proceso multivariante, estudio Fase II, ejemplo donde no ocurre ningún cambio. Fuente propia.

A continuación se procederá a construir el Gráfico de Control del CPA.

Deberá indicar el nivel significancia alfa (probabilidad especificada de emitir una falsa alarma), cuando se le indique.

Valores permitidos de alfa: 0.0005 0.001 0.002 0.005 0.01

Indique el valor de alfa: 0.005

-----  
Estimaciones del vector de medias, matriz de covarianzas y matriz de correlaciones:

\*Vector de medias:

1.0e-14 \*

0.2728

0.0396

\*Matriz de covarianzas:

0.9667 -0.0000

-0.0000 0.9667

\*Matriz de correlaciones:

1.0000 -0.0000

-0.0000 1.0000

No existe suficiente evidencia estadística para afirmar, que ha ocurrido un cambio en el vector de medias, matriz de covarianzas o en ambos.

Conclusión: el proceso está bajo control estadístico, es decir, el proceso opera únicamente en presencia de causas fortuitas de variación.

Arriba se presentan las estimaciones del vector de medias, matriz de covarianzas y matriz de correlaciones.

**Figura 48.** Resumen del análisis Fase II, ejemplo donde no ocurre ningún cambio. Fuente propia.

En el caso que el usuario desee realizar solo el monitoreo del proceso (es decir, que no acepte la opción de realizar un análisis de Fase I), el procedimiento descrito en esta parte de esta guía es también aplicable.

## BIBLIOGRAFIA

### Artículos

- ALIPPI, C.; BORACCHI, G.; ROVERI, M. (2011). "A Distributed Self-adaptive Nonparametric Change-Detection Test for Sensor/Actuator Networks". *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 6792, pp. 173-180.
- BHATTACHARYA, P. K. (1994). "Some aspects of change-point analysis" *Change-point Problems, IMS*, Vol. 23 pp. 28-56.
- CHITTURI, R. V. (1974) "Distribution of residual autocorrelations in multiple autoregressive schemes." *Journal of the American Statistical Association*, 69, pp. 928-934.
- CORDERO A. E.; GARZA J. A; TERCERO V. G. (2014) "Robust change-point estimator for series of normal observations". *Proceedings of the 2014 Industrial and Systems Engineering Research Conference Y. Guan and H. Liao*, eds.
- CROSIER, R. B. (1988). "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes". *Technometrics*, 30, pp. 291-303.
- DECARLO L. T. (1997). "On the Meaning and Use of Kurtosis". *Department of Psychology, Fordham University*, Bronx, New York Vol. 2, No. 3, pp. 292-307.
- DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. (1979). "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root." *Journal of the American Statistical Association*. 74, pp. 427-431.
- FOUNTIS, N. G.; DICKEY, D. A. (1989). "Testing for a unit root stationarity in multivariate autoregressive time series". *The Annals of Statistics*, 17, pp. 419-428.
- HAWKINS, D. M.; QIU, P.; KANG, C. W. (2003). "The Change Point Model for Statistical Process Control". *Journal of Quality Technology*, 35, pp. 355–365.
- HAWKINS, D. M.; ZAMBA, K. D. (2005a). "Change Point Model for Statistical Process Control with Shift in Variance," *Journal of Quality Technology*, 37(1), pp. 21-31.
- HAWKINS, D. M., ZAMBA, K. D. (2005b), "Statistical Process Control for Shift in Mean or Variance Using the Change Point Formulation". *Technometrics*, 47(2), pp. 164-173.

- HAWKINS, D. M., QIU, P.; ZAMBA, K .D. (2008). "Change-point methods", *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*, John Wiley & Sons.
- HOSKING, J. R. M. (1981). "Lagrange multiplier tests of multivariate time series models." *Journal of The Royal Statistical Society Series B*, 43, pp. 219-230.
- HOU, C.; SHAO, Y. E. (2011). "A combined MLE and EWMA chart approach to estimate the change point of a gamma process with individual observations". *International Journal of Innovative Computing, information and Control*, Vol. 7, No. 5A, pp. 2109-2122.
- JONES, R. R.; WEINROTT, M. ; VAUGHT, R. S. (1978). "Effects of serial dependency on the agreement between visual and statistical inference". *Journal of Applied Behavior Analysis*, 11, pp. 277-283.
- LJUNG, G. M.; BOX , G. P. E., (1978) "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models", *Biometrika*, vol. 66, 1978, pp. 66-72.
- LOWRY, C. A.; WOODALL, W. H.; CHAMP, C. W.; RIGDON, S. E. (1992). "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart". *Technometrics*, 34, pp. 46-53.
- MACKINNON, J. G. (1991), "Critical values for cointegration tests". *Chapter 13 in Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, ed. R. F. Engle and C. W. J. Granger. Oxford, Oxford University Press.
- MARDIA, K. V. (1970), "Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications", *Biometrika*, 57, pp. 519-530.
- MARROQUÍN, E.; RODRÍGUEZ, E.; SALAS, P. (2009). "Un Nuevo Modelo para Estimar el Punto de Cambio en la Media de un Proceso", *Revista de la Ingeniería Industrial*, Volumen 3, No. 1.
- PÉREZ, A. S.; CORDERO, A. E.; TERCERO, V.; CHÁVEZ, M. A. (2013) "Análisis de punto de cambio dentro del control estadístico de procesos", *CELERINET*, Universidad Autónoma de Nuevo León, México.
- PERRY, P. M.; PIGNATIELLO, J. J. (2004). "Estimating the Change Point of a Normal Process Mean with Linear Trend Disturbance in SPC". *Proceedings of the 34th International Conference on Computers and Industrial Engineering. San Fco. California*.

SAMUEL, R. T.; PIGNATIELLO, J. J. (1998). "Identifying the Time of a Step Change with X bar Control Charts". *Quality Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 521-527.

SCHWAGER, S. J.; MARGOLIN, B. H. (1982), "Detection of Multivariate Normal Outliers," *Annals of Statistics*, 10, pp. 943-954.

TAYLOR, W. (2000a). "Change-point Analysis: A Powerful New Tool for Detecting Changes". Disponible en: <http://www.variation.com/cpa/tech/changepoint.html>.

THORSEN, A. (2013). "Developing a MATLAB GUI for change point analysis". Carnegie Mellon University.

TIAO, G. C.; BOX, G. E. P. (1981). "Modeling multiple time series with applications". *Journal of the American Statistical Association*, 76, pp. 802-816.

VALLEJO, G. (1986a). Procedimientos simplificados de análisis en los diseños de series temporales interrumpidas: Modelos estáticos. *Revista de terapia del comportamiento*, 4 (2), pp.114-148.

WOODALL W. H. (2000), "Controversies and Contradictions in Statistical Process Control". *Journal of Quality Technology*, 32(4), pp. 341-350.

ZAMBA, K. D.; HAWKINS, D. M. (2006). "A Multivariate Change Point Model for Statistical Process Control". *Technometrics*, 48(4), pp. 539–549.

ZAMBA, K. D.; HAWKINS, D. M. (2009). "A Multivariate Change-Point Model for Change in Mean Vector and/or Covariance Structure". *Journal of Quality Technology*, 41(3), pp. 285.

ZAND, A.; YAZDANSHENAS, N.; AMIRI, A. (2013) "Change point estimation in phase I monitoring of logistic regression profile" *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Volume 67, Issue 9-12, pp. 2301-2311.

## Textos

ALFARO, J. M.; MONDEJAR J., Y VARGAS M. (2010). "Gráficos Multivariantes aplicados al Control Estadístico de la Calidad", 1ra Ed. Netbidlo, España.

ANDERSON, T. W. (1984). "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis". John Wiley, New York, NY.

ARNAU, J. (2001). "Diseños de series temporales: técnicas de análisis". Edicions Universitat Barcelona Volumen 46 de UB Manuals Series, España.

BALESTRINI, M, (2006). “*Cómo se elabora el proyecto de investigación: para los estudios formulativos o exploratorios, descriptivos, diagnósticos, evaluativos, formulación de hipótesis causales, experimentales y los proyectos factibles*”. 7ma. ed. Pie Imprenta, Caracas, Venezuela.

BARAGONA, R.; BATTAGLIA, F.; POLI, I. (2011). “*Evolutionary Statistical Procedures: An Evolutionary Computation Approach to Statistical Procedures Designs and Applications*”. Springer Science & Business Media.

BARNETT, V.; TOBY, L. (1978) “*Outliers in statistical data*”, John Wiley & Sons Ltd. Printed and bound in Great Britain at The Pitman Press, Bath.

BASSEVILLE, M.; NIKIFOROV, I. V. (2007) “*Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*”. Prentice Hall.

BRODSKY, B. E.; DARKHOVSKY, B. S. (1993). “*Nonparametric Methods in Change Point Problems*”. Springer Science & Business Media, Vol. 243, Printed in the Netherlands.

CANAVOS, G. C. (1988). “*Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos*”. 1era edición McGraw-Hill, Impreso en México.

CHEN, J.; GUPTA A. K. (2011). “*Parametric Statistical Change Point Analysis: With Applications to Genetics, Medicine, and Finance*”, Springer Science & Business Media.

CROMWELL, J. B.; LABYS, W. C.; TERRAZA, M. (1994) “*Univariate Tests for Time Series Models*”. Sage University Paper series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 07-099. Thousand Oaks, CA, Sage USA.

CROMWELL, J.; HANNAN, M.; LABYS, W.; TERRAZA, M. (1994). “*Multivariate Test for Time Series Models*”. Sage Publications, Series: Quantitative Applications in the Social Sciences.

DEVORE, J. L. (2008). “*Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*” séptima edición Cengage Learning México, D.F.

DICKEY, D. A. (1976). “*Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series*”. Ph.D. dissertation, Iowa State Univ.

FERRER, A.; GUTIERREZ, D. (2010). “*Desarrollo de Herramientas Computarizadas para el Análisis de Puntos de Cambios de Parámetros en Gráficos EWMA Y CUSUM*”. Trabajo Especial de Grado, Universidad de Carabobo, Venezuela.

- FIDIAS, G. (2006). “*El proyecto de Investigación. Introducción a la Metodología Científica*”. 5ta. Ed., Editorial Episteme, Caracas, Venezuela.
- GARCÍA, J.; RODRÍGUEZ, J. I.; Y VIDAL, J. (2005). “*Aprenda Matlab 7.0 como si estuviera en primero*”. Universidad Politécnica de Madrid, España.
- GEL, Y. (2009). “*Introduction to Change Point Analysis*”. Proceedings del VI Encuentro Colombia-Venezuela de Estadística y VIII Jornada de Aplicaciones Matemáticas, Universidad de Carabobo Valencia, Venezuela.
- GÓMEZ, J.; PÉREZ, C. (2012). “*Desarrollo de una Metodología Computarizada para el Análisis de Datos Provenientes de Procesos Productivos y la Construcción de los Gráficos de Control EWMA, CUSUM y Análisis de Punto de Cambio*”. Trabajo Especial de Grado, Universidad de Carabobo, Venezuela.
- GUJARATI, D. (2004), “*Econometría*”. 4ta Edición. McGraw-Hill. Impreso en México.
- HANSEN, B.L.; GHARE, P. M. (1989) “*Control de calidad: teoría y aplicaciones*” Ed. Díaz de Santos.
- JACOBSON, I.; BOOCH, G.; RUMBAUGH, J. (2000). “*El Proceso Unificado de Desarrollo de Software*”. Pearson Addison-Wesley.
- KIRK, R. (2007) “*Statistics: An Introduction*” fifth edition Thomson Wadsworth Printed in the United States of America.
- LÜTKEPOHL, H. (2005). “*New Introduction to Multiple Time Series Analysis*”. Berlin: Springer.
- MAURICIO, J. A. (2007), “*Introducción al Análisis de Series Temporales*” Universidad Complutense de Madrid.
- MASON, R. L; YOUNG, J. C. (2002). “*Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*”. Volumen 9 Ed SIAM Philadelphia, Pennsylvania.
- MONTGOMERY, D. C. (2011). “*Control Estadístico de la Calidad*”, 3era Ed. Limusa Wiley, México.
- MONTGOMERY, D. C; RUNGER, G. C. (2010) “*Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*”, Limusa Wiley México.
- MONTGOMERY, D. C. (2009) “*Introduction to Statistical Quality Control*”, 6th edition, Ed. John Wiley & Sons, Inc. Printed in the United States of America.

- MOORE, H. (2009). “*Matlab para Ingenieros*”. 1ra Ed. Prentice Hall.
- PEÑA, D. (2002). “Análisis de datos multivariantes”, 1era Ed. McGraw-Hill, España.
- RENCHER, A. C. (2002). “*Methods of Multivariate Analysis*”, Second Edition John Wiley & Sons, Inc.
- RENCOVÁ, M. (2009). “*Change-point detection in temperature series*”. PhD Thesis. Czech Technical University, Czech Republic.
- RUDNER, L. (2008). “*Metodología de la Investigación*”. Edit Aguilar. México.
- TAMAYO, M. (2006). “*El proceso de la investigación científica*”. 4ta Ed. Limusa, Mexico.
- TSAY, R. S. (2014). “*Multivariate Time Series Analysis: With R and Financial Applications*” Printed in the United States of America.
- QIU, P. (2013). “*Introduction to Statistical Process Control*”. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science, CRC Press.

### Páginas Web

- BRICEÑO, G. (2008). “El desarrollo de software desde un enfoque de procesos”. [Página Web en línea]. Universidad de los Andes. Revisado el 29 de octubre de 2014. Disponible en: <http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/gbriceno/presentacion%2008-2-2008.pdf>.
- FERNÁNDEZ, I. C. (2008-2009). “Vectores aleatorios” [Página Web en línea]. Universidad Carlos III de Madrid. Revisado el 29 de mayo de 2014. Disponible en: [http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/icascos/esp/resumen\\_vectores.pdf](http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/icascos/esp/resumen_vectores.pdf)
- FOSTER, P. (2010). “MATH38062, Multivariate Statistics, Lecture: The Generalized Likelihood Ratio (GLRT)”. [Página Web en línea]. Revisado el 18 de Julio de 2014. Disponible en: <http://www.maths.manchester.ac.uk/~peterf/MATH38062/MATH38062%20GLRT.pdf>.
- HUŠKOVÁ, M. (2014). Lecture: “Change Point Problem” [Página Web en línea]. Univerzita Karlova v Praze. Revisado el 28 de Julio mayo de 2014. Disponible en: [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~huskova/backup\\_files/doktor1.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~huskova/backup_files/doktor1.pdf).

ISO 9000:2006 “Sistemas de gestión de calidad: Fundamentos y vocabulario”. Revisado el 27 de Noviembre de 2014 [Página Web en línea]. Disponible en: <http://www.iso.org>.

JENSEN, U.; LÜTKEBOHMERT, C. (2007). “Change Point Models”. [Página Web en línea]. Universität Hohenheim. Revisado el 6 de mayo de 2014. Disponible en: <https://www.uni-hohenheim.de/~jensen/Publikationen/eqr076.pdf>.

KANZLER, L. (1998). “DFCRIT: MATLAB module to calculate Critical Dickey-Fuller values and level of significance”. [Página Web en línea]. Boston College, Department of Economics. [Página Web en línea] Revisado el 25 de noviembre de 2014. Disponible en: <https://ideas.repec.org/c/boc/bocode/t871804.html>.

KUNST, R. M. (2007). “Vector autoregressions” [Página Web en línea]. Universität Wien. Revisado el 13 de septiembre de 2014. Disponible en: <http://homepage.univie.ac.at/robert.kunst/var.pdf>.

LETELIER, P. (2004) “Proceso de desarrollo de software”. [Página Web en línea]. Universidad Politécnica de Valencia. Revisado el 29 de octubre de 2014. Disponible en: <http://ldc.usb.ve/~abianc/materias/ci4712/ProcesoSW-Letelier.pdf>.

NAM, C.; KILLICK R.; ECKLEY I.; ASTON J. The Changepoint Repository (2014). [Página Web en línea]. Revisado el 9 de agosto de 2014. Disponible en: <http://www.changepoint.info>.

NOWAK, R. (2011). “ECE 830, Statistical Signal Processing, Lecture 11: The Generalized Likelihood Ratio”. [Página Web en línea]. University of Wisconsin in Madison. Revisado el 13 de agosto de 2014. Disponible en: <http://nowak.ece.wisc.edu/ece830/.index.html>.

ROONEY, J. J.; KUBIAK, T.M.; WESTCOTT, R.; REID, R. D.; WAGONER, K.; PYLIPOW, P. E.; PLSEK P. (2009). “Building from basics”. [Página Web en línea] Revisado el 20 de julio de 2014. Disponible en: [www.qualityprogress.com](http://www.qualityprogress.com).

RUIZ, M. (2005-2006). “Apuntes: Tema 5, Procesos Estocásticos”. [Página Web en línea]. Universidad Politécnica de Cartagena. Revisado el 29 de Junio de 2014. Disponible en: [http://www.dmae.upct.es/~mcruiz/Telem06/Teoria/apuntes\\_procesos.pdf](http://www.dmae.upct.es/~mcruiz/Telem06/Teoria/apuntes_procesos.pdf).