Ejercicio 1 (Álgebra lineal)**.** Consideremos una matriz de $(n+1)\times(n+1)$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Demuestre que para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & A^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Demuestre que el conjunto

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

es un anillo conmutativo.

Ejercicio 3. Consideremos la aplicación

$$N\colon a + b\sqrt{-5} \mapsto (a + b\sqrt{-5})\,(a - b\sqrt{-5})$$

sobre el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Demuestre que $N(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y que la aplicación es multiplicativa:

$$N(xy) = N(x)\,N(y) \quad \text{para cualesquiera } x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}].$$

Ejercicio 4. Demuestre que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

tiene orden infinito.

Ejercicio 5. Encuentre el orden de

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Ejercicio 6. Encuentre un subgrupo de $O_2(\mathbb{R})$ que sea isomorfo al grupo diédrico D_3. Describa sus elementos y sus órdenes.

Ejercicio 7. Consideremos el grupo $\mu_\infty(\mathbb{C})$ de todas las raíces de la unidad. Demuestre que todo subgrupo finitamente generado de $\mu_\infty(\mathbb{C})$ es un grupo cíclico finito. Concluya que $\mu_\infty(\mathbb{C})$ no es finitamente generado.

Ejercicio 8. Se sabe que el número 2017 es primo, mientras que

$$2018 = 2 \cdot 1009, \quad 2019 = 3 \cdot 673$$

donde 673 y 1009 son primos (lamentablemente, el siguiente año primo es 2027). Encuentre todos los subgrupos de $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2018\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2019\mathbb{Z}$.