

Conjuntos simpliciales

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo par 2019

(Más adelante voy a añadir alguna introducción?)

1 Categoría Δ

1.1. Definición. Definamos la categoría Δ cuyos objetos son conjuntos ordenados

$$\underline{n} := \{0 < 1 < \dots < n\}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ y cuyos morfismos son aplicaciones no decrecientes; es decir, aplicaciones

$$f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$$

que cumplen

$$i \leq j \implies f(i) \leq f(j).$$

Esta categoría se llama la **categoría simple** o simplemente ^{*} la **categoría Delta**.

1.2. Observación. En total, hay $\binom{m+n+1}{n+1}$ aplicaciones no decrecientes $\underline{n} \rightarrow \underline{m}$. □

1.3. Definición. Para $i = 0, \dots, n$ definamos las aplicaciones no decrecientes

$$\partial^i: \underline{n-1} \rightarrow \underline{n}, \quad \sigma^i: \underline{n+1} \rightarrow \underline{n}$$

mediante las fórmulas

$$\partial^i(j) := \begin{cases} j, & \text{si } j < i, \\ j+1, & \text{si } j \geq i. \end{cases} \quad \sigma^i(j) := \begin{cases} j, & \text{si } j \leq i, \\ j-1, & \text{si } j > i. \end{cases}$$

1.4. Proposición (Factorización epi-mono en la categoría Δ). Toda aplicación no decreciente $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ puede ser escrita como la composición

$$\underline{n} \xrightarrow{\epsilon} \underline{n'} \xrightarrow{\iota} \underline{m},$$

donde n' es el número de elementos en la imagen de f , la aplicación ϵ es sobreyectiva e ι es inyectiva. Además,

■ $\epsilon: \underline{n} \rightarrow \underline{n'}$ se expresa de manera única como

$$\epsilon = \sigma^{i_1} \circ \dots \circ \sigma^{i_k},$$

donde

$$0 \leq i_1 < \dots < i_k < n$$

son los elementos tales que

$$f(i_1) = f(i_1 + 1), \dots, f(i_k) = f(i_k + 1);$$

^{*};-;-)

■ $\iota: \underline{n}' \rightarrow \underline{m}$ se expresa de manera única como

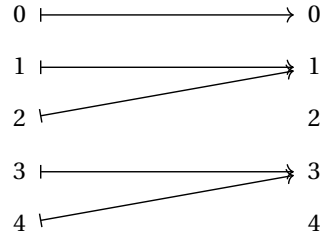
$$\iota = \partial^{j_\ell} \circ \dots \circ \partial^{j_1},$$

donde

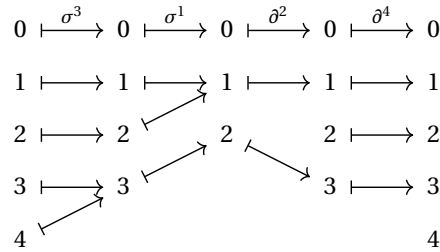
$$0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_\ell \leq m$$

son los elementos de \underline{m} que no están en la imagen de f . □

1.5. Ejemplo. Consideremos la aplicación no decreciente



Su factorización canónica como en la proposición será



▲

Eso significa que en vez de considerar todas las aplicaciones no decrecientes $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$, se pueden considerar solamente las aplicaciones σ^i y ∂^i . Una composición de tales aplicaciones puede ser reescrita en la forma canónica usando las siguientes identidades.

1.6. Proposición (Identidades cosimpliciales). Se cumplen las siguientes identidades.

$$\sigma^j \circ \partial^i = \begin{cases} \partial^i \circ \sigma^{j-1}, & \text{si } i < j, \\ \text{id}, & \text{si } i = j \text{ o } i = j+1, \\ \partial^{i-1} \circ \sigma^j, & \text{si } i > j+1; \end{cases}$$

$$\sigma^j \circ \sigma^i = \sigma^i \circ \sigma^{j+1} \quad \text{si } i \leq j;$$

$$\partial^j \circ \partial^i = \partial^i \circ \partial^{j-1} \quad \text{si } i < j. \quad \square$$

2 Objetos simpliciales

2.1. Definición. Para una categoría \mathcal{C} , un **objeto simplicial** en \mathcal{C} es un funtor contravariante $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$. Un morfismo de objetos simpliciales es una transformación natural de funtores.

Nos interesará principalmente la situación donde \mathcal{C} es la categoría de conjuntos.

2.2. Definición. Un **conjunto simplicial** es un funtor contravariante $X: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. La categoría de conjuntos simpliciales será denotada por **sSet**^{*}.

La definición de arriba es muy compacta, pero trae muchos datos. Un funtor contravariante $X: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ debe especificar lo siguiente.

- Un conjunto $X_n := X(\underline{n})$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Los elementos de X_n serán llamados los **n -símplices** de X .
- Una aplicación $f^*: X_m \rightarrow X_n$ para toda aplicación no decreciente $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$, de manera funtorial.

En particular, las aplicaciones ∂^i y σ^i investigadas en la sección anterior deben inducir ciertas aplicaciones entre los símplices de X :

$$\begin{aligned} \partial^i: \underline{n-1} \rightarrow \underline{n} &\rightsquigarrow \partial_i: X_n \rightarrow X_{n-1}, \\ \sigma^i: \underline{n+1} \rightarrow \underline{n} &\rightsquigarrow \sigma_i: X_n \rightarrow X_{n+1}. \end{aligned}$$

Vamos a decir que los ∂_i son **operadores de caras** y σ_i son **operadores de degeneración**. La funtorialidad significa solo que los ∂_i y σ_i deben satisfacer las mismas relaciones que ∂^i y σ^i respectivamente, con una sola diferencia: las flechas van al revés porque el funtor es contravariante.

$$\partial_i \circ \sigma_j = \begin{cases} \sigma_{j-1} \circ \partial_i, & \text{si } i < j, \\ \text{id}, & \text{si } i = j \text{ o } i = j+1, \\ \sigma_j \circ \partial_{i-1}, & \text{si } i > j+1, \end{cases}$$

$$\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_{j+1} \circ \sigma_i \quad \text{para } i \leq j.$$

$$\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{para } i < j.$$

Esas fórmulas se llaman las **identidades simpliciales**.

Para resumir, un conjunto simplicial es lo mismo que una familia de conjuntos X_0, X_1, X_2, \dots junto con ciertas aplicaciones ∂_i y σ_i que cumplen las identidades simpliciales. Un morfismo de conjuntos simpliciales $f: X \rightarrow Y$ será una familia de aplicaciones $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ que conmutan con los ∂_i y σ_i .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \longleftarrow \partial_0^2 \longrightarrow & & & \\ & & \longleftarrow \partial_0^1 \longrightarrow & & \longleftarrow \sigma_0^2 \longrightarrow & & \\ X_0 & \xrightarrow{\sigma_0^1} & X_1 & \xleftarrow{\partial_1^2} & X_2 & & \dots \\ & \longleftarrow \partial_1^1 \longrightarrow & & \longleftarrow \sigma_1^2 \longrightarrow & & & \\ & & & \longleftarrow \partial_2^2 \longrightarrow & & & \end{array}$$

Ya que los conjuntos simpliciales son ciertos funtores $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, podemos aislar los funtores representados por $\underline{n} \in \Delta$.

2.3. Definición. El conjunto simplicial

$$\Delta^n := \text{Hom}_{\Delta}(-, \underline{n})$$

se llama el **n -símplice**.

2.4. Proposición (Lema de Yoneda). Para todo conjunto simplicial X hay una biyección natural entre los n -símplices de X y morfismos de conjuntos simpliciales $\Delta^n \rightarrow X$:

$$X_n \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, X).$$

□

^{*} Del inglés *simplicial sets*.

3 Conjunto simplicial singular

A cada $\underline{n} \in \Delta$ asociemos el n -**símplice geométrico**

$$|\Delta^n| := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\}.$$

Notamos que esta es la envolvente convexa de los puntos

$$e_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_1 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n.$$

Dada una aplicación no decreciente $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$, podemos definir la aplicación

$$f_*: |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^m|, \quad f_*(e_i) \mapsto e_{f(i)}.$$

La aplicación entre los vértices se extiende a una aplicación entre $|\Delta^n| \rightarrow |\Delta^m|$: específicamente,

$$f_*(t_0, \dots, t_n) = (u_0, \dots, u_m), \quad \text{donde } u_i = \sum_{f(j)=i} t_j.$$

Esto define un funtor covariante

$$\Delta \rightarrow \mathbf{Top}, \quad \underline{n} \rightsquigarrow |\Delta^n|.$$

Ahora si X es un espacio topológico, pongamos para $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Sing}(X)_n := \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, X) = \{\text{aplicaciones continuas } |\Delta^n| \rightarrow X\}.$$

(Sí, estos conjuntos serán muy grandes.) Una aplicación no decreciente $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ induce entonces una aplicación entre conjuntos

$$- \circ f_*: \text{Sing}(X)_m \rightarrow \text{Sing}(X)_n.$$

De esta manera $\text{Sing}(X)$ es un conjunto simplicial.

3.1. Definición. $\text{Sing}(X)$ se llama el **conjunto simplicial singular** de X .

De la misma manera, una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ induce aplicaciones $\text{Sing}(X)_n \rightarrow \text{Sing}(Y)_n$ que conmutarán con las de arriba. Hemos entonces construido un funtor

$$\text{Sing}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}, \quad X \rightsquigarrow \text{Sing}(X).$$

Resulta que el funtor $\text{Sing}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ tiene adjunto por la izquierda $\mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$. El último construye un espacio topológico a partir de un conjunto simplicial y por esto se llama la **realización geométrica**. Nuestro objetivo es definir y entenderlo.