

Ejercicios sobre categorías

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo par 2019

Primera sesión: categorías, funtores, y transformaciones naturales

1. Demuestre que si f es un isomorfismo en \mathcal{C} y F es un funtor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} .
2. Demuestre que las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.
 - a) Si $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ son isomorfismos (resp. monomorfismos, epimorfismos), entonces la composición $g \circ f: X \rightarrow Z$ es un isomorfismo (resp. monomorfismo, epimorfismo).
 - b) Si para $m: X \rightarrow Y$, $f: Y \rightarrow Z$ la composición $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.
 - c) Si para $f: X \rightarrow Y$, $e: Y \rightarrow Z$ la composición $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.
 - d) Todo isomorfismo es automáticamente mono y epi. (En general, un mono- y epimorfismo no tiene por qué ser un isomorfismo.)
3. Demuestre que en la categoría $k\text{-Vect}$ de k -espacios vectoriales los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones k -lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente. Demuestre lo mismo para la categoría **Ab** de grupos abelianos. (Es también cierto para la categoría de grupos **Grp**, pero el argumento es más complicado.)
4. Demuestre con todos los detalles la versión covariante del lema de Yoneda. La versión contravariante se encuentra en mis apuntes.
5. Sea G un grupo. Definamos una categoría **G** donde hay un solo objeto $*$, los morfismos $g: * \rightarrow *$ corresponden a los elementos de G y su composición corresponde a la multiplicación en G . Demuestre que un funtor $F: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ corresponde a un G -conjunto y una transformación natural entre tales funtores es una aplicación G -equivariante. ¿Qué es un funtor representable en este caso? ¿Qué significa el encajamiento de Yoneda?

6. Para un conjunto X sea

$$P^+(X) := P^-(X) := 2^X$$

el conjunto de subconjuntos de X . Para una aplicación $f: X \rightarrow Y$ definamos

$$P^+(f): 2^X \rightarrow 2^Y, \quad Z \mapsto f(Z),$$

y

$$P^-(f): 2^Y \rightarrow 2^X, \quad Z \mapsto f^{-1}(Z).$$

Demuestre que P^+ y P^- son funtores $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, uno covariante y el otro contravariante.

7. Hay dos modos diferentes de asociar un grupo abeliano a un grupo G : tomar el centro $Z(G)$, o la abelianización $G^{ab} := G/[G, G]$. ¿Cuál de estas dos construcciones es funtorial?
8. Ejercicio de álgebra lineal. Sean $k\text{-}\mathbf{Vect}$ la categoría de k -espacios vectoriales y $k\text{-}\mathbf{vect}$ la categoría de k -espacios vectoriales de dimensión finita. La construcción del espacio dual es un funtor contravariante

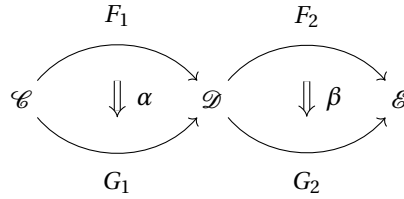
$$k\text{-}\mathbf{Vect}^{\text{op}} \rightarrow k\text{-}\mathbf{Vect}, \quad k\text{-}\mathbf{vect}^{\text{op}} \rightarrow k\text{-}\mathbf{vect}.$$

Analice si estos funtores son fieles o plenos.

9. Sean

- $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ tres categorías;
- F_1, G_1 dos funtores entre \mathcal{C} y \mathcal{D} ;
- F_2, G_2 dos funtores entre \mathcal{D} y \mathcal{E} ;
- $\alpha: F_1 \Rightarrow G_1$ y $\beta: F_2 \Rightarrow G_2$ dos transformaciones naturales.

Todo esto puede ser expresado mediante el diagrama

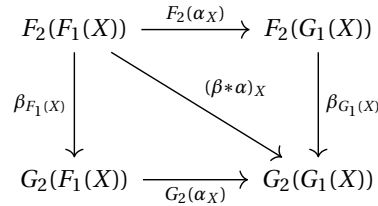


Entonces, el **producto de Godement** de α y β es la transformación natural

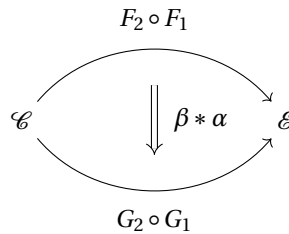
$$\beta * \alpha: F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$$

definida como

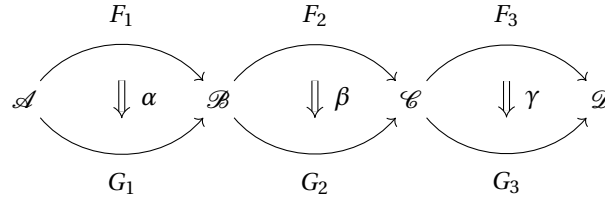
$$(\beta * \alpha)_X := \beta_{G_1(X)} \circ F_2(\alpha_X) = G_2(\alpha_X) \circ \beta_{F_1(X)}.$$



(Este diagrama conmuta gracias a la naturalidad de β .)



Verifique que $\beta * \alpha$ es de hecho natural y demuestre que el producto de Godement es asociativo: para un diagrama

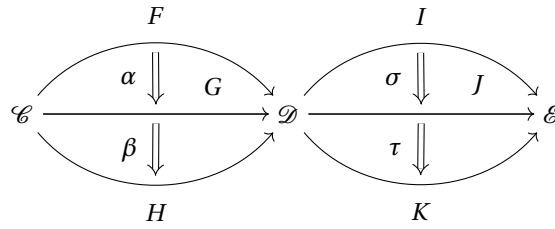


se cumple

$$(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha).$$

10. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ tres categorías. Sean F, G, H funtores $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y sean I, J, K tres funtores $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Consideremos transformaciones naturales

$$\alpha: F \Rightarrow G, \quad \beta: G \Rightarrow H, \quad \sigma: I \Rightarrow J, \quad \tau: J \Rightarrow K.$$



Demuestre que

$$(\tau \circ \sigma) * (\beta \circ \alpha) = (\tau * \beta) \circ (\sigma * \alpha).$$