# **Ejercicios sobre categorías**

# Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

## Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

#### Iso-, epi-, mono-

**Ejercicio 1.** Demuestre que si f es un isomorfismo en  $\mathscr{C}$  y F es un funtor  $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ , entonces F(f) es un isomorfismo en  $\mathscr{D}$ .

**Ejercicio 2.** Demuestre que las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.

- 1) Si  $f: X \to Y$  e  $g: Y \to Z$  son isomorfismos, entonces  $g \circ f: X \to Z$  es un isomorfismo.
- 2) Si  $m: X \rightarrow Y$  y  $m': Y \rightarrow Z$  son monomorfismos, entonces  $m' \circ m: X \rightarrow Z$  es un monomorfismo.
- 3) Si  $e: X \rightarrow Y$  y  $e': Y \rightarrow Z$  son epimorfismos, entonces  $e' \circ e: X \rightarrow Z$  es un epimorfismo.
- 4) Si para  $m: X \to Y$ ,  $f: Y \to Z$  la composición  $f \circ m$  es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.
- 5) Si para  $f: X \to Y$ ,  $e: Y \to Z$  la composición  $e \circ f$  es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.

**Ejercicio 3.** Demuestre que en la categoría *k*-**Vect** los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones *k*-lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente.

#### Lema de Yoneda

**Ejercicio 4.** Demuestre con todos los detalles la versión covariante del lema de Yoneda.

**Ejercicio 5.** Sea G un grupo. Consideremos G como una categoría. Note que un funtor  $F: G \to \mathbf{Set}$  corresponde a un G-conjunto y una transformación natural entre tales funtores es una aplicación G-equivariante. ¿Qué es un funtor representable en este caso? ¿Qué significa el encajamiento de Yoneda?

**Ejercicio 6.** Sea *R* un anillo.

- a) Demuestre que el funtor olvidadizo R-Alg  $\rightarrow$  Set es representable.
- b) Supongamos que para cada R-álgebra A está especificada una aplicación entre conjuntos  $\alpha_A \colon A \to A$  de tal manera que para todo homomorfismo de R-álgebras  $\phi \colon A \to B$  se cumple  $\phi \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \phi$ .

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha_A} & A \\
\phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
B & \xrightarrow{\alpha_B} & B
\end{array}$$

Usando el lema de Yoneda, demuestre que existe un polinomio  $f \in R[x]$  tal que para toda R-álgebra A se tiene

$$\alpha_A \colon a \mapsto f(a).$$

c) Demuestre lo mismo sin recurrir a Yoneda.

#### Límites y colímites

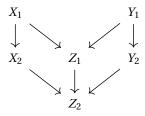
**Ejercicio 7.** Consideremos la categoría **Top**\* cuyos objetos  $(X, x_0)$  son espacios topológicos con un punto marcado  $x_0 \in X$  y cuyos morfismos  $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$  son aplicaciones continuas  $f: X \to Y$  tales que  $f(x_0) = y_0$ . Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en **Top**\*.

**Ejercicio 8.** Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en la categoría **Cat** de categorías pequeñas.

**Ejercicio 9.** Para un grupo fijo G, consideremos la categoría G-**Set** cuyos objetos son G-conjuntos (conjuntos con acción de G) y cuyos morfismos  $f: X \to Y$  son aplicaciones G-equivariantes (que satisfacen la condición  $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$  para cualesauiera  $g \in G$  y  $x \in X$ ). Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en G-**Set**.

**Ejercicio 10.** Para una categoría pequeña sea  $\widehat{\mathscr{C}}$  la categoría de funtores  $F \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ . Describa los objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en  $\widehat{\mathscr{C}}$ .

**Ejercicio 11.** Demuestre que los productos fibrados son funtoriales en el siguiente sentido: un diagrama conmutativo



induce un morfismo canónico  $X_1 \times_{Z_1} Y_1 \rightarrow X_2 \times_{Z_2} Y_2$ .

**Ejercicio 12.** Demuestre que en la categoría *k*-**Vect** se tiene

$$eq(f,g) = ker(f-g)$$
 y  $coeq(f,g) = coker(f-g)$ .

**Ejercicio 13.** Demuestre que los productos fibrados preservan isomorfismos: si la flecha  $Y \to Z$  es un isomorfismo, entonces  $X \times_Z Y \to X$  es también un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \longrightarrow & Y \\ \cong & & & \downarrow \cong \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

**Ejercicio 14.** Demuestre que los productos fibrados

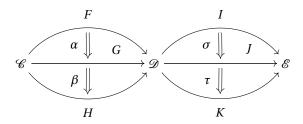
calculan el ecualizador de  $f,g:X\to Y$ . Formule y demuestre la propiedad dual para coecualizadores y coproductos fibrados.

2

#### **Transformaciones naturales**

**Ejercicio 15.** Sean  $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$  tres categorías. Sean F, G, H funtores  $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$  y sean I, J, K tres funtores  $\mathscr{D} \to \mathscr{E}$ . Consideremos transformaciones naturales

$$\alpha: F \Rightarrow G, \quad \beta: G \Rightarrow H, \quad \sigma: I \Rightarrow J, \quad \tau: J \Rightarrow K.$$

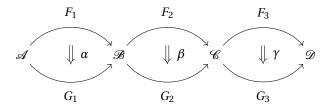


Demuestre que

$$(\tau \circ \sigma) * (\beta \circ \alpha) = (\tau * \beta) \circ (\sigma * \alpha),$$

donde \* denota el producto de Godement.

Ejercicio 16. Demuestre que el producto de Godement es asociativo: para un diagrama



se cumple

$$(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha).$$

Ejercicio 17. Sea *I* una categoría pequeña. Consideremos el funtor

$$\Delta \colon \mathscr{C} \to \operatorname{Fun}(\mathscr{I}, \mathscr{C}),$$

$$X \leadsto \Delta_X$$

que a cada objeto  $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$  asocia el funtor constante  $\Delta_X \colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$  (tal que  $\Delta_X(i) = X$  para cada  $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})$ ). Demuestre que para todo funtor  $F \colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$  hay biyecciones naturales

$$\operatorname{Nat}(\Delta_X, F) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \lim_{\mathscr{J}} F),$$
  
 $\operatorname{Nat}(F, \Delta_X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, X).$ 

## **Adjunciones**

**Ejercicio 18.** Sea  $\mathbf{Ring}_1$  la categoría de anillos con identidad donde los morfismos son los homomorfismos  $f \colon R \to S$  que satisfacen  $f(1_R) \to 1_S$  y **Ring** la categoría de anillos que no necesariamente tienen identidad. Para un anillo R consideremos el conjunto  $\widehat{R} := \mathbb{Z} \times R$  con la multiplicación

$$(n_1, r_1) \cdot (n_2, r_2) := (n_1 n_2, n_1 r_1 + n_2 r_1 + r_1 r_2).$$

Note que es un anillo con identidad (1,0). Demuestre que  $R \leadsto \widehat{R}$  es un funtor  $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ring}_1$  y es adjunto por la izquierda a la inclusión  $\mathbf{Ring}_1 \hookrightarrow \mathbf{Ring}$ .

**Ejercicio 19.** Digamos que en una categoría  $\mathscr{C}$  dos objetos X e Y están en la misma componente conexa si existe una cadena de morfismos de X a Y, que no necesariamente van en la misma dirección, por ejemplo

$$X \to \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \to \bullet \leftarrow Y$$

Para una categoría pequeña  $\mathscr{C}$  sea  $\pi_0(\mathscr{C})$  el conjunto de sus componentes conexas. Demuestre que  $\pi_0$  es un funtor  $\mathbf{Cat} \to \mathbf{Set}$ . Demuestre que es adjunto por la izquierda al funtor  $\mathbf{Set} \to \mathbf{Cat}$  que a cada conjunto X asocia la categoría donde los objetos son los elementos de X y los únicos morfismos son los morfismos identidad.

**Ejercicio 20.** Sean X e Y dos conjuntos. Consideremos  $2^X$  y  $2^Y$  como conjuntos parcialmente ordenados por la relación  $\subseteq$ , y en particular como categorías.

Sea  $f: X \to Y$  una aplicación. Para  $A \in 2^X$  definamos

$$f_*(A) := \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A \},$$
  
 $\operatorname{im}(A) := \{ f(x) \mid x \in A \},$ 

y para  $B \in 2^Y$  definamos

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Demuestre que  $f_*$  e im son funtores  $2^X \to 2^Y$  y  $f^{-1}$  es un funtor  $2^Y \to 2^X$ . Demuestre que

- 1) im es adjunto por la izquierda a  $f^{-1}$ ,
- 2)  $f^{-1}$  es adjunto por la izquierda a  $f_*$ .

¿Qué significa en este caso la preservación de objetos iniciales y coproductos (resp. objetos terminales y productos) por adjunto por la izquierda (resp. adjunto por la derecha)?

# Equivalencias de categorías

**Ejercicio 21.** Demuestre que si  $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$  es una equivalencia de categorías, entonces F envía un objeto terminal (resp. inicial) de  $\mathscr{C}$  en un objeto terminal (resp. inicial) de  $\mathscr{D}$ .

Supongamos que existe una equivalencia de categorías  $F \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ . Note que en este caso para cada conjunto X tendríamos

$$X \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), \emptyset).$$

Concluya que las categorías **Set** y **Set**<sup>op</sup> no son equivalentes.

### Equivalencias de categorías

**Ejercicio 22.** Demuestre que si  $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$  es una equivalencia de categorías, entonces F envía un objeto terminal (resp. inicial) de  $\mathscr{C}$  en un objeto terminal (resp. inicial) de  $\mathscr{D}$ .

Supongamos que existe una equivalencia de categorías  $F \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ . Note que en este caso para cada conjunto X tendríamos

$$X \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), \emptyset).$$

Concluya que las categorías **Set** y **Set**<sup>op</sup> no son equivalentes.