Algunos ejercicios

Ejercicio 1. Enumere todos los grupos abelianos de orden ≤ 10 salvo isomorfismo.

Ejercicio 2. Supongamos que en un grupo se cumple $g_1 g_2 g_3 \cdots g_n = 1$. Demuestre que

$$g_2 g_3 \cdots g_n g_1 = g_3 g_4 \cdots g_n g_1 g_2 = g_4 g_5 \cdots g_n g_1 g_2 g_3 = \cdots = g_n g_1 g_2 \cdots g_{n-1} = 1.$$

Ejercicio 3. Sea G un grupo finito de orden n. ¿Cuántas ternas $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$ satisfacen $g_1 g_2 g_3 = 1$?

Ejercicio 4. Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos. Sea $K \subset H$ un subgrupo. Demuestre que $f^{-1}(K)$ es un subgrupo de G.

Ejercicio 5. Sea k un cuerpo. El **grupo afín** $\mathrm{Aff}_1(k)$ consiste en las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_{a,b}\colon k &\to k, \\ x &\mapsto ax + b, \end{aligned}$$

donde $a \in k^\times$ y $b \in k$ (recuerde el ejercicio 2.4 de las tareas).

1) Demuestre que las transformaciones con $a = 1$ forman un subgrupo normal $N \subset \mathrm{Aff}_1(k)$ y $N \cong k$.

2) Demuestre que las transformaciones con $b = 0$ forman un subgrupo $H \subset \mathrm{Aff}_1(k)$ y $H \cong k^\times$.

3) Demuestre que $N \cap H = \{\mathrm{id}\}$.

4) Demuestre que todo elemento de $\mathrm{Aff}_1(k)$ puede ser escrito como $f \circ g$ donde $f \in N$ y $g \in H$.

5) Deduzca de 1)–4) que $\mathrm{Aff}_1(k) \cong k \rtimes k^\times$.

Ejercicio 6. Supongamos que el grupo cíclico $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ actúa sobre un conjunto finito X de 30 elementos. Demuestre que el número de puntos fijos de esta acción es divisible por 3.

Ejercicio 7. Se dice que dos sucesiones exactas cortas (extensiones de grupos)

$$1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} K \to 1$$

y

$$1 \to H \xrightarrow{i'} G' \xrightarrow{p'} K \to 1$$

son **isomorfas** si existe un homomorfismo $f\colon G \to G'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "p'"] & K \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

es conmutativo (hemos probado en clase que en este caso f es un isomorfismo).

Encuentre todas las sucesiones exactas

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

salvo isomorfismo.

Temas para revisar bien

- Grupos cociente.
- Grupos simples.
- Acciones de grupos.
- Descomposición de un G-conjunto en órbitas.
- Productos semidirectos.
- Sucesiones exactas cortas (extensiones de grupos).
- Estructura de grupos abelianos finitamente generados. Cómo encontrar todos los grupos abelianos de orden fijo salvo isomorfismo.