Realizabilidad de grupos de homología y cohomología

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

23 de octubre de 2015

Para un espacio topológico conexo X (o mejor un complejo celular o simplicial) se pueden calcular sus **grupos de homología** (**singular**, **celular**, **simplicial**—como prefieran)

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z},\ H_1(X) \cong A_1,\ H_2(X) \cong A_2,\ \ldots$$

Aquí $A_1, A_2, \ldots$ son algunos grupos abelianos. ¿Qué tan arbitrarios pueden ser los A_n? Es decir,

- Dada una sucesión de grupos abelianos $A_1, A_2, \ldots$, ¿existe un espacio topológico X tal que $H_n(X) \cong A_n$?
- El mismo problema para cohomología: ¿existe X tal que $H^n(X) \cong A_n$?

En esta pequeña nota vamos a hablar de ambas preguntas.

1. Espacios de Moore

Las piezas fundamentales de los espacios con grupos de homología prescritos son los llamados **espacios de Moore** $M(A,n)$. Específicamente, para un grupo abeliano A (no necesariamente finitamente generado) y un número $n = 1, 2, \ldots$ existe un espacio topológico conexo $M(A,n)$ (de hecho un complejo celular o simplicial) tal que

$$H_k(M(A,n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ A, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Por ejemplo, la esfera S^n es un espacio de Moore $M(\mathbb{Z}, n)$.

Existe una construcción general $M(A,n)$ cuya descripción es probablemente más fácil si se utiliza **homología celular**. Si no saben qué es eso, pueden mirar el segundo capítulo del libro de Hatcher. Si lo conocen, aquí está la construcción. Representemos el grupo A como un cociente F/H de un grupo abeliano libre F por un subgrupo de relaciones H. Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una base de F. Empecemos con una suma conexa de n-esferas correspondientes a los f_i:

$$X^n := \bigvee_{i \in I} S^n_i.$$

Como un subgrupo de F, el grupo H es también libre. Sea $\{h_j\}_{j \in J}$ una base de H. Para cada h_j peguemos a X^n una célula de dimensión $n+1$. A saber, para cada $j \in J$ consideremos la expresión

$$h_j = \sum_i n_{ij} f_i.$$

La célula D^{n+1}_j se aplica primero a una suma conexa de n-esferas correspondientes a los coeficientes no nulos n_{ij}, y luego esta suma conexa se aplica a $\bigvee_{i \in I} S^n_i$, donde la esfera que corresponde a f_i con $n_{ij} \neq 0$

se aplica a la esfera S_i^n con grado de aplicación n_{ij}. Luego se puede ver que el complejo de cadenas que calcula la homología celular es exactamente lo que se busca:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \hookrightarrow & F & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & n+1 & & n & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Por ejemplo, consideremos el grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Según la construcción, para obtener un espacio de Moore $M(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, hay que empezar con el círculo S^1 y luego pegarle una célula *por aplicación de grado* 2. Lo que se obtiene es el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Esta construcción es bastante tonta y no es canónica (todo depende de la elección de una base), pero hemos resuelto el problema. Si empezamos con una sucesión de grupos abelianos $A_1, A_2, \ldots$, luego el espacio topológico

$$X = M(A_1, 1) \vee M(A_2, 2) \vee \cdots$$

tiene la homología deseada porque $H_n(X \vee Y) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y)$ para $n > 0$. En otras palabras,

Cualquier sucesión de grupos abelianos puede ser realizada como los grupos de homología de un espacio topológico.

Todavía nos queda otra pregunta:

¿Es cierto también para cohomología?

La respuesta, que al principio parece muy sorprendente, es **NO**.

Ahora vamos a hablar sobre un contraejemplo del artículo de dos paginas "On the realizability of singular cohomology groups" (1961) escrito por Daniel Kan y George Whitehead. Para comprenderlo, primero pensemos en la diferencia entre homología y cohomología...

2. Homología versus cohomología

Para un espacio topológico X su homología $H_\bullet(X)$ (**homología singular**, **homología simplicial**, **homología celular**—escojan su teoría de homología preferida) se calcula mediante un complejo de cadenas de grupos abelianos libres

$$\cdots \to A_3 \xrightarrow{d_3} A_2 \xrightarrow{d_2} A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \to 0$$

Según la teoría de homología escogida, estos grupos son generados por aplicaciones continuas $|\Delta^n| \to X$ del n-símplice, o por las n-células del complejo celular, o por los elementos de la triangulación, etcétera.

La **co-homología** correspondiente $H^\bullet(X)$ es definida por una especie de dualización: al complejo $A_\bullet$ se aplica el funtor contravariante $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z})\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ y así se obtiene un **complejo de cocadenas**

$$0 \to \operatorname{Hom}(A_0, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^0 = d_1^*} \operatorname{Hom}(A_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^1 := d_2^*} \operatorname{Hom}(A_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^2 := d_3^*} \operatorname{Hom}(A_3, \mathbb{Z}) \to \cdots$$

Ahora ¿cuál es la relación entre homología $H_\bullet(X)$ y cohomología $H^\bullet(X)$? La respuesta viene dada por el **teorema de coeficientes universales** que dice que existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \to H^n(X) \to \operatorname{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \to 0$$

que **se escinde** (que es *split*). Es decir, existe un isomorfismo (¡no canónico!)

$$H^n(X) \cong \operatorname{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}).$$

Este es un resultado estándar y la demostración es bastante fácil una vez se conoce la definición de Ext y cómo se utiliza, por lo que no voy a hablar del teorema de coeficientes universales—vean por ejemplo la sección 3.6 del libro de Weibel. Aun así vamos a revisar las propiedades de Ext que se utilizan en el artículo de Kan y Whitehead.

Para dar un ejemplo, sea $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ el plano real proyectivo. Su homología puede ser calculada por el complejo de cadenas

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, \\ H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) &= 0. \end{aligned}$$

Y sus grupos de cohomología son los siguientes

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, \\ H^1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) &= \underbrace{\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{=0} \oplus \underbrace{\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{=0} = 0, \\ H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) &= \underbrace{\operatorname{Hom}(0, \mathbb{Z})}_{=0} \oplus \underbrace{\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En general, para un grupo abeliano finitamente generado

$$A = \mathbb{Z}^r \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}}_{\operatorname{Tors}(A)}$$

se tiene $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ y $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Tors}(A)$. Entonces, cuando $H_n(X)$ son finitamente generados, el teorema de coeficientes universales

$$H^n(X) \cong \operatorname{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z})$$

simplemente dice que cohomología es homología con las partes de torsión desplazadas. Pero cuando los grupos de homología no son finitamente generados, pueden ocurrir cosas muy raras.

3. Algunos hechos sobre Ext (toda la algebra homológica que vamos a utilizar)

Sea L un R-módulo. Hay dos funtores $\operatorname{Hom}_R(-, L)$ y $\operatorname{Hom}_R(L, -)$—contravariante y covariante—R-**Mod** $\to$ R-**Mod**, que son **exactos por la izquierda** pero no son exactos por la derecha. Por lo tanto podemos calcular sus **funtores derivados derechos**:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^n_R(-, L) &:= R^n \operatorname{Hom}(-, L) \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}, \\ \operatorname{Ext}^n_R(L, -) &:= R^n \operatorname{Hom}_R(L, -) \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}. \end{aligned}$$

No se preocupen si no conocen la definición de funtores derivados porque eso simplemente significa que si tenemos unas sucesiones exactas cortas de R-módulos

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

entonces existen sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M'',L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M',L) \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=2, overlay] \\ & \mathrm{Ext}^1_R(M'',L) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M,L) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M',L) \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=2, overlay] \\ & \mathrm{Ext}^2_R(M'',L) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_R(M,L) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_R(M',L) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(L,N') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(L,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(L,N'') \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=2, overlay] \\ & \mathrm{Ext}^1_R(L,N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(L,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(L,N'') \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=2, overlay] \\ & \mathrm{Ext}^2_R(L,N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_R(L,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_R(L,N'') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Las dos definiciones coinciden; es decir $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ es lo mismo si lo calculamos usando $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ o $\mathrm{Hom}_R(-,N)$. Las definiciones con funtores derivados tambien implican que

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = 0 \quad \text{para } n > 0 \text{ si } M \text{ es un } R\text{-módulo proyectivo o } N \text{ es inyectivo.}$$

Si trabajamos con $\mathbb{Z}$-módulos, es decir con grupos abelianos, entonces $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ para $n > 1$, y por eso tendría sentido simplificar la notación:

$$\mathrm{Ext}(A,B) := \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,B).$$

Resumiendo todo, una sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \quad \text{o} \quad 0 \to B' \to B \to B'' \to 0$$

nos da una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'',B) \to \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(A',B) \to \mathrm{Ext}(A'',B) \to \mathrm{Ext}(A,B) \to \mathrm{Ext}(A',B) \to 0$$

o

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,B') \to \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(A,B'') \to \mathrm{Ext}(A,B') \to \mathrm{Ext}(A,B) \to \mathrm{Ext}(A,B'') \to 0$$

Jugando con esas sucesiones exactas, se pueden demostrar todas las propiedades de $\mathrm{Ext}(A,B)$. Por ejemplo,

- Un monomorfismo de grupos abelianos $f\colon A' \rightarrowtail A$ induce un epimorphismo $f^*\colon \mathrm{Ext}(A,B) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(A',B)$.

Ahora no se asusten con algebra homológica porque el contenido del teorema de Kan y Whitehead está basado en observaciones sencillas sobre grupos abelianos: $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son **grupos divisibles**, pero $\mathbb{Q}$ es **libre de torsión** y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un **grupo de torsión**. Entonces, hay pocos homomorfismos $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ como grupos abelianos (se ve que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$) pero hay *mucho más* homomorfismos $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

4. Grupos divisibles y libres de torsión

Recordemos dos definiciones para grupos abelianos:

- Se dice que A es **libre de torsión** si para cada $x \in A$ y $n = 2, 3, 4, \ldots$

  $$n \cdot x = 0 \text{ implica } x = 0.$$

  Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Q}$ de los números racionales respecto a la adición es libre de torsión.

- Se dice que A es **divisible** si para cada $x \in A$ y $n = 2, 3, 4, \ldots$ existe $y \in A$ (¡no necesariamente único!) tal que $n \cdot y = x$.

  Por ejemplo, los grupos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles. Los grupos abelianos divisibles son *exactamente* los $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos, y por lo tanto para cualquier grupo abeliano A automáticamente se tiene

  $$\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Q}) = \operatorname{Ext}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0.$$

  Un no-ejemplo importante: sea A un grupo abeliano no trivial. Entonces el grupo $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z})$ nunca es divisible (hagan este ejercicio si no habían pensando antes en esas cosas).

Notemos que un grupo que es libre de torsión y divisible al mismo tiempo es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. A saber, en ese caso para cada $x \in A$ y $n = 1, 2, 3 \ldots$ existe un *único* $y \in A$ tal que $n \cdot y = x$, entonces se puede definir $\frac{1}{n} \cdot x := y$, y eso nos da una acción de $\mathbb{Q}$.

Aquí hay una definición alternativa de ser libre de torsión y divisible. Para $n = 2, 3, 4, \ldots$ consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{n} A, \\ x &\mapsto n \cdot x. \end{aligned}$$

Sea ${}_nA$ su núcleo y A_n su conúcleo:

$$0 \to {}_nA \to A \xrightarrow{n} A \to A_n \to 0$$

Entonces

- A es libre de torsión si y solo si ${}_nA = 0$ para todo $n = 2, 3, 4, \ldots$.
- A es divisible si y solo si $A_n = 0$ para todo $n = 2, 3, 4, \ldots$.

La noción opuesta de "grupo libre de torsión" es de "grupo de torsión". Se dice que A es **de torsión** si cada uno de sus elementos es de orden finito; es decir para cada $x \in A$ existe $n = 1, 2, 3, \ldots$ tal que $n \cdot x = 0$. Por ejemplo, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo de torsión. Aquí hay un hecho útil:

Lema: *Si A es un grupo abeliano de torsión, entonces* $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$ *implica* $A = 0$.

De hecho, podemos elegir un homomorfismo sobreyectivo $F \twoheadrightarrow A$ de un grupo abeliano libre F a nuestro grupo de torsión A. Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de F. Tenemos una sucesión exacta corta (**resolución libre**)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & e_i & \longmapsto & n_i e_i & \longmapsto & \text{un elemento de orden } n_i & & \end{array}$$

Noten que dado que A es de torsión, tenemos $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) = 0$. Junto con la suposición $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) = 0$, eso nos da un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(F,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(F,\mathbb{Z})$$

Supongamos que esta aplicación manda $f\colon F \to \mathbb{Z}$ a $f'\colon F \to \mathbb{Z}$. Entonces $f'(e_i) = n_i f(e_i)$. Sin embargo, es un isomorfismo y por eso $n_i = \pm 1$ lo cual significa que todos los elementos son de orden 1, es decir $A = 0$, QED.

El contraejemplo de Kan y Whitehead está basado en el siguiente

Lema clave: *Sea A un grupo abeliano tal que* $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) = 0$ *y el grupo* $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})$ *es divisible y libre de torsión. Entonces A es también divisible y libre de torsión.*

Para demostrarlo, examinemos las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \to nA \to A \to A_n \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to {}_nA \to A \xrightarrow{n} nA \to 0$$

Apliquemos el funtor $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ para obtener sucesiones exactas con los Ext correspondientes:

$$0 \to \mathrm{Hom}(A_n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(nA,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A_n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(nA,\mathbb{Z}) \to 0$$

y

$$0 \to \mathrm{Hom}(nA,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}({}_nA,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(nA,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}({}_nA,\mathbb{Z}) \to 0$$

Según nuestra hipótesis, $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(nA,\mathbb{Z}) = 0$, y también $\mathrm{Hom}({}_nA,\mathbb{Z}) = 0$ porque ${}_nA$ es de torsión, entonces tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \to \mathrm{Ext}(A_n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(nA,\mathbb{Z}) \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to \mathrm{Ext}(nA,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}({}_nA,\mathbb{Z}) \to 0$$

Compongámoslas para obtener una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(A_n,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}({}_nA,\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathrm{Ext}(nA,\mathbb{Z}) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Aquí la aplicación $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})$ es exactamente la multiplicación por n, y por lo tanto

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) &= \mathrm{Ext}(A_n,\mathbb{Z}), \\ \mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})_n &= \mathrm{Ext}({}_nA,\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Y si $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})$ es divisible y libre de torsión, entonces $\mathrm{Ext}(A_n,\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}({}_nA,\mathbb{Z}) = 0$, que por el lema de arriba implica $A_n = {}_nA = 0$ (porque A_n y ${}_nA$ son grupos de torsión), QED.

5. El grupo Ext (Q,Z)

Consideremos una sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},-)$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

Noten que el único homomorfismo $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ es 0, entonces $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = 0$. También $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \operatorname{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ porque $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos (pues son grupos divisibles). Lo que queda es una sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \to 0$$

El grupo $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Q}$ y es numerable. Ahora vamos a demostrar que $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ no es numerable y por lo tanto $\operatorname{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ no es numerable. Consideremos sucesiones de números $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tales que a_1 es arbitrario, $2\,a_2 = a_1$, $3\,a_3 = a_2$, …, $n\,a_n = a_{n-1}$, … Para a_{n-1} fijo, existen n diferentes posibilidades para a_n, y entonces el conjunto de tales sucesiones no es numerable.

Ahora cada sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ define un homomorfismo $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por

$$f(1/n!) := a_n.$$

De hecho, por la construcción de las sucesiones, $n! \cdot a_n = a_1$, entonces $n! \cdot f(1/n!) = f(1)$ y $f(1/n) = (n-1)! \cdot f(1/n!)$. Así los valores $f(1/n!) := a_n$ definen f en todo el grupo $\mathbb{Q}$. Concluimos que existe un conjunto no numerable de homomorfismos $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y entonces

$$\operatorname{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \text{ no es numerable.}$$

Notemos que el conjunto no numerable de homomorfismos $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ha sido construido gracias al hecho que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo divisible pero es un grupo de torsión y cada ecuación $n\,a_n = a_{n-1}$ tiene n soluciones. El grupo $\mathbb{Q}$ es divisible y libre de torsión, y por lo tanto cada homomorfismo $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es únicamente definido pos su valor $f(1)$. Así $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$.

6. El contraejemplo de Kan y Whitehead

Kan y Whitehead demuestran que

> Para $n = 2, 3, 4, \ldots$ no existe un espacio topológico X tal que
>
> $$H^{n-1}(X,\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{y} \quad H^n(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}.$$

De hecho, si tal X existiera, el teorema de coeficientes universales implicaría

$$\begin{aligned} 0 = H^{n-1}(X) &\cong \operatorname{Hom}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(H_{n-2}(X),\mathbb{Z}), \\ \mathbb{Q} = H^n(X) &\cong \operatorname{Hom}(H_n(X),\mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

En particular, de la primera fórmula concluimos que $\operatorname{Hom}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}) = 0$. Con respecto a la segunda fórmula, noten que $\mathbb{Q}$ no puede ser descompuesto como una suma directa no trivial de dos grupos abelianos $\mathbb{Q} = A \oplus B$ donde $A, B \neq 0$ (¡ejercicio para el lector!). Eso significa que o bien $\operatorname{Hom}(H_n(X),\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ o bien $\operatorname{Ext}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. Pero el primer caso no es posible porque $\operatorname{Hom}(A,\mathbb{Z})$ nunca es un grupo divisible para cualquier grupo abeliano no trivial A. Entonces, el grupo de homología $H_{n-1}(X)$ tiene las propiedades siguientes:

$$\operatorname{Hom}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}.$$

Luego $\text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z})$ es divisible y libre de torsión, y por el **lema clave** concluimos que $H_{n-1}(X)$ es también divisible y libre de torsión. Es un grupo no trivial, y por eso $H_{n-1}(X)$ contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Q}$ y hay una sobreyección

$$\text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$$

Pero $\text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ no es numerable y $\text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ es numerable. Hemos obtenido una contradicción, QED.

* * * * *

Noten que hemos supuesto que $H^n(X) = \mathbb{Q}$ y $H^{n-1}(X) = 0$. Una pregunta natural es si existe un espacio X tal que $H^n(X) = \mathbb{Q}$ para algún n. Como hemos visto arriba, es lo mismo que preguntar si existe un grupo abeliano A tal que $\text{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. ¡Resulta que la respuesta depende de los axiomas de teoría de conjuntos que se utilicen! Eso ha sido estudiado por el matemático israelí Saharon Shelah. Para mayor información, vean su artículo "The consistency of $\text{Ext}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$" (1981).