02/12/20 EQUIVALENCIA ARITMÉTICA.
(última sesión)

def K y K' son aritméticamente equivalentes si $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$.

$K \simeq K' \Rightarrow \zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$

Teorema La función zeta completa

$$Z_K(s) = |\Delta_K|^{s/2} \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1} \cdot \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2} \cdot \zeta_K(s)$$

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)$$

$Z_K(s)$ admite prolongación meromorfa

$$Z_K(s) = Z_K(1-s). \qquad \square$$

$$\zeta_K(s) = \prod_p \prod_{\mathfrak{p} \mid p} \frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

Lema Dados $1 < x_1 \leq \cdots \leq x_m$
$1 < y_1 \leq \cdots \leq y_n$

$$f(s) = \prod_i (1-x_i^{-s}) \qquad g(s) = \prod_j (1-y_j^{-s})$$

$h(s) = f(s)/g(s)$

Supongamos que existe $\varphi(s)$ meromorfa sin ceros o polos en $s =$ cero/polo de $h(s)$.

$h(s) = \varphi(s)\, h(1-s)$.

Luego, $f(s) = g(s)$ y $\varphi(s) = 1$.

Dem los ceros de $f(s)$ y $g(s)$ son $\frac{2\pi i k}{\log x_i}$, $\frac{2\pi i k}{\log y_j}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Los ceros de $h = \frac{f}{g}$ son ceros de $f(s)$, y no son ceros de $\varphi(s)$

$f(s)$ y $g(1-s)$ no tienen ceros en común $\Rightarrow$ ceros de $h(s)$ no coinciden con los ceros de $h(1-s)$

$h(s) = \varphi(s) \cdot h(1-s) \Rightarrow h(s)$ no tiene ceros.

De manera similar, $h(s)$ no tiene polos.

$\Rightarrow$ los ceros de $f(s)$ y $g(s)$ son los mismos, contando multiplicidad.

$(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow f(s) = g(s)$

$h(s) = 1$, $\varphi(s) = 1$. $\square$

Proposición Sean K y K' campos de #

Supongamos que

$$(*) \quad \prod_{\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_K} (1-N(\mathfrak{p})^{-s}) = \prod_{\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{K'}} (1-N(\mathfrak{p})^{-s})$$

salvo un # finito de $p \in \mathbb{Z}$.

Luego, $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$, $Z_K(s) = Z_{K'}(s)$,
$[K:\mathbb{Q}] = [K':\mathbb{Q}]$, $r_1 = r_1'$, $r_2 = r_2'$, $\Delta_K = \Delta_{K'}$.

Dem Sea S el conj. finito de los p donde $(*)$ no se cumple

$$f(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_K \\ p \in S}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s}) \qquad g(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{K'} \\ p \in S}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})$$

$\boxed{N(\mathfrak{p}) = p^f}$

$$\varphi(s) = \frac{Z_K(s) \cdot Z_{K'}(1-s)}{Z_{K'}(s)\, Z_K(1-s)} \frac{\zeta_{K'}(s)\,\zeta_K(1-s)}{\zeta_K(s)\,\zeta_{K'}(1-s)}$$

$$\boxed{\varphi(s) \cdot h(1-s) = h(s)} \qquad h(1-s) = \frac{g(1-s)}{f(1-s)}$$

$$f(1-s)\,\zeta_K(1-s) = \zeta_{K'}(1-s)\, g(1-s)$$

$\underline{\text{Lema}} \Longrightarrow \quad f(s) = g(s) \Longrightarrow$

$$\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$$

Recordemos que los ordenes de ceros de $\zeta_K(s)$ en $s = n = -1, -2, -3, \ldots$ son r_2 ó $r_1 + r_2$, dependiendo de la paridad de n.

$\Longrightarrow \quad r_1 = r_1', \quad r_2 = r_2'.$

$$\underset{r_1 + 2r_2}{\underset{\parallel}{[K:\mathbb{Q}]}} = \underset{r_1' + 2r_2'}{\underset{\parallel}{[K':\mathbb{Q}]}}$$

$$\underset{Z_K(s)^2}{\underset{\parallel}{Z_K(s) \cdot Z_K(1-s)}} = \underset{Z_{K'}(s)^2}{\underset{\parallel}{Z_{K'}(s)\, Z_{K'}(1-s)}}$$

$s \to 1^+$

$$Z_K(s)^2 \to |\Delta_K| \cdot \Big(\pi^{-1/2} \cdot \underbrace{\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big)}_{\sqrt{\pi}}\Big)^{2r_1} \Big(2(2\pi)^{-1} \cdot \underbrace{\Gamma(1)}_{=1}\Big)^{2r_2} \cdot \underbrace{\zeta_K^*(1)}_{= \zeta_{K'}^*(1)}$$

$$= |\Delta_K| \cdot \pi^{-2r_2}$$

$$|\Delta_K| \cdot \pi^{-2r_2} = |\Delta_{K'}| \cdot \pi^{-2r_2'}$$

$\Longrightarrow |\Delta_K| = |\Delta_{K'}| \Longrightarrow \Delta_K = \Delta_{K'}$ $\square$

$\operatorname{sgn} \Delta_K = (-1)^{r_2}.$

Si p no se ramifica en $K/\mathbb{Q}$ $(p \nmid \Delta_K)$

$\Longrightarrow \quad p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s \longrightarrow f_i = [\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i : \mathbb{F}_p].$

$$(\underbrace{f_1 + \cdots + f_s}_{\text{el tipo de descomp.}}) = [K:\mathbb{Q}].$$

Teorema Las siguientes condiciones son equivalentes.

1) $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$.

2) $\forall p$ no ram. en K y K' el tipo de descomp. es el mismo.

3) —— // ——
salvo posiblemente un # finito de p.

Dem 1) $\Rightarrow$ 2)

$$\zeta_K(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \neq I \subseteq \mathcal{O}_K} \frac{1}{N(I)^s}$$

de $I \subseteq \mathcal{O}_K$ de norma n.

$$\zeta_K(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$
$$\|$$
$$\zeta_{K'}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a'_n}{n^s}$$

$\Rightarrow a_n = a'_n \quad \forall n$

$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$. $\quad a_p = \#$ de ideales primos con $f = 1$.

de ideales primos con $f = 2$ $\qquad \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$, $\quad \mathfrak{p}^2$

$$a_{p^2} - \binom{a_p}{2} - a_p. \qquad N(\mathfrak{p}) = p^2$$

....

Los a_n determinan tipo de descomp.

$1 \Rightarrow 2)$.

2) $\Rightarrow$ 3) trivial

3) $\Rightarrow$ 1) En ese caso.

$$\prod_{\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_K} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s}) = \prod_{\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{K'}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})$$

salvo # finito de p

$$\Longrightarrow \zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s). \qquad \square$$

§ Triplas de Gassmann

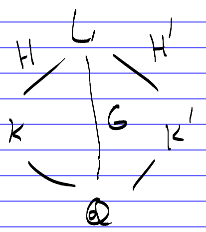
(Fritz Gassmann 1926)

def G gpo finito $H, H' \subset G$ subgrupos.
(G, H, H') es una triple de Gassmann si

$$\forall g \quad \#(H \cap g^G) = \#(H' \cap g^G).$$

Nota Si H y H' son subgrupos conjugados, entonces (G, H, H') es una triple de Gassmann, trivialmente. Pero hay triples no triviales.

Teorema (Gassmann) Sean k, k' campos de números, $L/\mathbb{Q}$ extn de Galois t.q. $k, k' \subseteq L$ (por ejemplo, la cerradura de Galois kk').



$\zeta_k(s) = \zeta_{k'}(s) \iff$ (G, H, H') es una tripla de Gassmann.

$k \simeq k' \iff$ H y H' son subgp. conjugados en G.

$[k : \mathbb{Q}] = [G : H]$

•) Si (G, H, H') es una tripla de G. no trivial (H no es conjugado con H')

•) Si existe $L/\mathbb{Q}$ t.q. $G \simeq Gal(L/\mathbb{Q})$

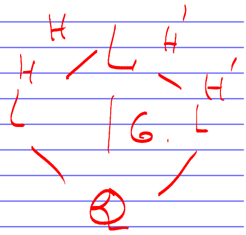
$k = L^H, \quad k' = L^{H'} \Rightarrow \zeta_k(s) = \zeta_{k'}(s)$

$k \not\simeq k'$

Ejemplo El G más pequeño $\# G = 32$,

$[G : H] = 8$.

$(G, H, H') \Rightarrow L^H \sim L^{H'}$



$G \simeq C_8 \rtimes (C_2 \times C_2)$

$f = x^8 - x^4 - 1$

$f' = x^8 - 4x^6 + 5x^4 - 2x^2 - 1$

Ejemplo Perlis: necesariamente $[G : H] \geq 7$.

(G, H, H')

Para $[k : \mathbb{Q}] \leq 6$

$\zeta_k(s) = \zeta_{k'}(s) \Rightarrow k \simeq k'$.

("campos solitario")

Perlis: $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$. $\# G = 168$.

(G, H, H') $\quad \# H = H' = 24$

$[G : H] = 7$.

$$\begin{cases} f = x^7 - 7x - 3 \\ f' = x^7 - 7x^4 - 21x^3 + 21x^2 + 42x - 3. \end{cases}$$

(Teoreme de Gassmann $\Longrightarrow$
$$\begin{cases} \zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s) \\ \Downarrow \\ \mu_K \cong \mu_{K'} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_K^\times & \simeq & \mathcal{O}_{K'}^\times \\ \wr\!\!\mid & & \wr\!\!\mid \\ \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1} \oplus \mu_K & \simeq & \mathbb{Z}^{r_1'+r_2'-1} \oplus \mu_{K'} \end{array}$$

$$\zeta_K^*(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} \cdot \mathrm{Reg}_K \cdot h_K}{\# \mu_K \cdot \sqrt{|\Delta_K|}}$$

$$\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s) \Longrightarrow \boxed{\mathrm{Reg}_K \cdot h_K = \mathrm{Reg}_{K'} \cdot h_{K'}}$$

$$\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s) \not\Longrightarrow h_K = h_{K'}$$

Perlis, de Smit: $K = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{-15})$ $\quad K' = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{-240})$

$$\zeta_K(s) \simeq \zeta_{K'}(s)$$