Conjuntos simpliciales

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo par 2019

(Más adelante voy a añadir alguna introducción?)

1 Categoría Δ

3/09/19

1.1. Definición. Definamos la categoría $\mathbf{\Delta}$ cuyos objetos son conjuntos ordenados

$$\underline{n} := \{0 < 1 < \cdots < n\}$$

para $n = 0,1,2,3,\ldots$ y cuyos morfismos son aplicaciones no decrecientes; es decir, aplicaciones

$$f \colon \underline{n} \to \underline{m}$$

que cumplen

$$i \le j \Longrightarrow f(i) \le f(j).$$

Esta categoría se llama la **categoría símplice** o simplemente[*] la **categoría Delta**.

1.2. Observación. *En total, hay $\binom{m+n+1}{n+1}$ aplicaciones no decrecientes $\underline{n} \to \underline{m}$.* □

1.3. Definición. Para $i = 0,\ldots,n$ definamos las aplicaciones no decrecientes

$$\partial^i \colon \underline{n-1} \rightarrowtail \underline{n}, \qquad \sigma^i \colon \underline{n+1} \twoheadrightarrow \underline{n}$$

mediante las fórmulas

$$\partial^i(j) := \begin{cases} j, & \text{si } j < i, \\ j+1, & \text{si } j \ge i. \end{cases} \qquad \sigma^i(j) := \begin{cases} j, & \text{si } j \le i, \\ j-1, & \text{si } j > i. \end{cases}.$$

1.4. Proposicion (Factorización epi-mono en la categoría Δ). *Toda aplicación no decreciente $f \colon \underline{n} \to \underline{m}$ puede ser escrita como la composición*

$$\underline{n} \xrightarrow{\epsilon} \underline{n'} \xrightarrow{\iota} \underline{m},$$

donde n' es el número de elementos en la imagen de f, la aplicación ϵ es sobreyectiva e ι es inyectiva. Además,

- *$\epsilon \colon \underline{n} \twoheadrightarrow \underline{n'}$ se expresa de manera única como*

  $$\epsilon = \sigma^{i_1} \circ \cdots \circ \sigma^{i_k},$$

  donde

  $$0 \le i_1 < \cdots < i_k < n$$

  son los elementos tales que

  $$f(i_1) = f(i_1+1), \ldots, f(i_k) = f(i_k+1);$$

[*] ;-) ;-)

- *$\iota\colon \underline{n'} \rightarrowtail \underline{m}$ se expresa de manera única como*

$$\iota = \partial^{j_\ell} \circ \cdots \circ \partial^{j_1},$$

donde

$$0 \le j_1 \le \cdots \le j_\ell \le m$$

son los elementos de $\underline{m}$ que no están en la imagen de f. ☐

1.5. Ejemplo. Consideremos la aplicación no decreciente

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
0 \arrow[rr, mapsto] & & 0 \\
1 \arrow[rr, mapsto] & & 1 \\
2 \arrow[urr, mapsto] & & 2 \\
3 \arrow[rr, mapsto] & & 3 \\
4 \arrow[urr, mapsto] & & 4
\end{tikzcd}$$

Su factorización canónica como en la proposición será

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
0 \arrow[r, mapsto, "\sigma^3"] & 0 \arrow[r, mapsto, "\sigma^1"] & 0 \arrow[r, mapsto, "\partial^2"] & 0 \arrow[r, mapsto, "\partial^4"] & 0 \\
1 \arrow[r, mapsto] & 1 \arrow[r, mapsto] & 1 \arrow[r, mapsto] & 1 \arrow[r, mapsto] & 1 \\
2 \arrow[r, mapsto] & 2 \arrow[ur, mapsto] & 2 \arrow[dr, mapsto] & 2 \arrow[r, mapsto] & 2 \\
3 \arrow[r, mapsto] & 3 \arrow[ur, mapsto] & & 3 \arrow[r, mapsto] & 3 \\
4 \arrow[ur, mapsto] & & & & 4
\end{tikzcd}$$

▲

Eso significa que en vez de considerar todas las aplicaciones no decrecientes $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$, se pueden considerar solamente las aplicaciones σ^i y ∂^i. Una composición de tales aplicaciones puede ser reescrita en la forma canónica usando las siguientes identidades.

1.6. Proposicion (Identidades cosimpliciales). *Se cumplen las siguientes identidades.*

$$\sigma^j \circ \partial^i = \begin{cases} \partial^i \circ \sigma^{j-1}, & \textit{si } i < j, \\ \mathrm{id}, & \textit{si } i = j \quad \textit{o} \quad i = j+1, \\ \partial^{i-1} \circ \sigma^j, & \textit{si } i > j+1; \end{cases}$$

$$\sigma^j \circ \sigma^i = \sigma^i \circ \sigma^{j+1} \quad \textit{si } i \le j;$$

$$\partial^j \circ \partial^i = \partial^i \circ \partial^{j-1} \quad \textit{si } i < j.$$ ☐

2 Objetos simpliciales

2.1. Definición. Para una categoría $\mathscr{C}$, un **objeto simplicial** en $\mathscr{C}$ es un funtor contravariante $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$. Un morfismo de objetos simpliciales es una transformación natural de funtores.

Nos interesará principalmente la situación donde $\mathscr{C}$ es la categoría de conjuntos.

2.2. Definición. Un **conjunto simplicial** es un funtor contravariante $X\colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. La categoría de conjuntos simplicaiales será denotada por **sSet**[*].

La definición de arriba es muy compacta, pero trae muchos datos. Un funtor contravariante $X\colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ debe especificar lo siguiente.

- Un conjunto $X_n := X(\underline{n})$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Los elementos de X_n serán llamados los n-**símplices** de X.
- Una aplicación $f^*\colon X_m \to X_n$ para toda aplicación no decreciente $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$, de manera funtorial.

En particular, las aplicaciones ∂^i y σ^i investigadas en la sección anterior deben inducir ciertas aplicaciones entre los símplices de X:

$$\begin{aligned} \partial^i\colon \underline{n-1} \to \underline{n} \quad &\rightsquigarrow \quad \partial_i\colon X_n \to X_{n-1}, \\ \sigma^i\colon \underline{n+1} \to \underline{n} \quad &\rightsquigarrow \quad \sigma_i\colon X_n \to X_{n+1}. \end{aligned}$$

Vamos a decir que los ∂_i son **operadores de caras** y σ_i son **operadores de degeneración**. La funtorialidad significa solo que los ∂_i y σ_i deben satisfacer las mismas relaciones que ∂^i y σ^i respectivamente, con una sola diferencia: las flechas van al revés porque el funtor es contravariante.

$$\partial_i \circ \sigma_j = \begin{cases} \sigma_{j-1} \circ \partial_i, & \text{si } i < j, \\ \mathrm{id}, & \text{si } i = j \quad \text{o} \quad i = j+1, \\ \sigma_j \circ \partial_{i-1}, & \text{si } i > j+1, \end{cases}$$

$$\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_{j+1} \circ \sigma_i \quad \text{para } i \le j.$$

$$\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{para } i < j.$$

Esas fórmulas se llaman las **identidades simpliciales**.

Para resumir, un conjunto simplicial es lo mismo que una familia de conjuntos $X_0, X_1, X_2, \ldots$ junto con ciertas aplicaciones ∂_i y σ_i que cumplen las identidades simpliciales. Un morfismo de conjuntos simpliciales $f\colon X \to Y$ será una familia de aplicaciones $f_n\colon X_n \to Y_n$ que conmutan con los ∂_i y σ_i.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
X_0 \arrow[r, "\sigma_0^1"] & X_1 \arrow[l, shift right=3, "\partial_0^1"'] \arrow[l, shift left=3, "\partial_1^1"] \arrow[r, shift left=2, "\sigma_0^2"] \arrow[r, shift right=2, "\sigma_1^2"'] & X_2 \arrow[l, shift right=5, "\partial_0^2"'] \arrow[l, "\partial_1^2"] \arrow[l, shift left=5, "\partial_2^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ya que los conjuntos simpliciales son ciertos funtores $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, podemos aislar los funtores representados por $\underline{n} \in \mathbf{\Delta}$.

2.3. Definición. El conjunto simplicial

$$\Delta^n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(-, \underline{n})$$

se llama el n-**símplice**.

2.4. Proposicion (Lema de Yoneda). *Para todo conjunto simplicial X hay una biyección natural entre los n-símplices de X y morfismos de conjuntos simpliciales $\Delta^n \to X$:*

$$X_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, X). \qquad \square$$

[*] Del inglés *simplicial sets*.

3 Conjunto simplicial singular

A cada $\underline{n} \in \mathbf{\Delta}$ asociemos el n-**símplice geométrico**

$$|\Delta^n| := \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \le t_i \le 1, \ \sum t_i = 1\}.$$

Notamos que esta es la envolvente convexa de los puntos

$$e_0 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_1 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n.$$

Dada una aplicación no decreciente $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$, podemos definir la aplicación

$$f_*\colon |\Delta^n| \to |\Delta^m|, \quad f_*(e_i) \mapsto e_{f(i)}.$$

La aplicación entre los vértices se extiende a una aplicación entre $|\Delta^n| \to |\Delta^m|$: específicamente,

$$f_*(t_0, \ldots, t_n) = (u_0, \ldots, u_m), \quad \text{donde } u_i = \sum_{f(j)=i} t_j.$$

Esto define un funtor covariante

$$\mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}, \quad \underline{n} \rightsquigarrow |\Delta^n|.$$

Ahora si X es un espacio topológico, pongamos para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{Sing}(X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, X) = \{\text{aplicaciones continuas } |\Delta^n| \to X\}.$$

(Sí, estos conjuntos serán muy grandes.) Una aplicación no decreciente $f\colon \underline{n} \to \underline{m}$ induce entonces una aplicación entre conjuntos

$$- \circ f_*\colon \mathrm{Sing}(X)_m \to \mathrm{Sing}(X)_n.$$

De esta manera $\mathrm{Sing}(X)$ es un conjunto simplicial.

3.1. Definición. $\mathrm{Sing}(X)$ se llama el **conjunto simplicial singular** de X.

De la misma manera, una aplicación continua $f\colon X \to Y$ induce aplicaciones $\mathrm{Sing}(X)_n \to \mathrm{Sing}(Y)_n$ que conmutarán con las de arriba. Hemos entonces construido un funtor

$$\mathrm{Sing}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}, \quad X \rightsquigarrow \mathrm{Sing}(X).$$

Resulta que el funtor $\mathrm{Sing}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$ tiene adjunto por la izquierda $\mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$. El último construye un espació topológico a partir de un conjunto simplicial y por esto se llama la **realización geométrica**. Nuestro objetivo es definir y entenderlo.