Álgebra homológica, día 1

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

8 de agosto de 2016

0. Definiciones básicas

Por la letra R siempre vamos a denotar un anillo. Para nosotros todos los anillos tienen unidad $1 \in R$ y son conmutativos. El álgebra homológica para módulos sobre anillos no conmutativos también tiene perfecto sentido (y de hecho la mayoría de nuestros argumentos no tiene nada que ver con la conmutatividad de R), pero en nuestras aplicaciones R va a ser conmutativo.

Las letras $K, L, M, N, \ldots$ normalmente van a denotar R-módulos, o objetos de cualquier categoría aditiva o abeliana (que vamos a definir más adelante). Esto puede ayudar psicológicamente a los principiantes: cuando hay una definición o proposición sobre categorías aditivas o abelianas, uno puede reflexionar sobre su significado para R-módulos o tratar de encontrar demostración más explícita para el caso de R-módulos.

En general vamos a ignorar los detalles sutiles de la teoría de conjuntos. Vamos a necesitar el **lema de Zorn**. A saber, si $(X, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un subconjunto $T \subset X$ es una **cadena** si para cada par de elementos $t, u \in T$ tenemos $t \preceq u$ o $u \preceq t$. Supongamos que para cada cadena no vacía $T \subset X$ existe una **cota superior** $x \in X$, que es un elemento tal que $t \preceq x$ para cada $t \in T$. Entonces el lema de Zorn dice que X contiene un **elemento maximal**, es decir un $m \in X$ para el cual no existe $x \in X$ tal que $m \prec x$.

En esta sección voy a recordar algunas definiciones y construcciones para R-módulos.

0.1. Definición. La estructura de un R**-módulo** M consiste en los siguientes datos.

- M es un grupo abeliano, es decir para cada $x, y \in M$ tenemos $x + y \in M$ y los axiomas habituales.
- Tenemos una acción de R sobre M que se denota por $r \cdot x$ para $r \in R$ y $x \in M$ y que satisface para cualesquiera $r, r_1, r_2 \in R$ y $x, y \in M$

$$\begin{aligned}(r_1 r_2) \cdot x &= r_1 \cdot (r_2 \cdot x),\\ 1 \cdot x &= x,\\ (r_1 + r_2) \cdot x &= r_1 \cdot x + r_2 \cdot x,\\ r \cdot (x + y) &= r \cdot x + r \cdot y.\end{aligned}$$

Un **morfismo** entre dos R-módulos es una aplicación $f\colon M \to N$ que es R**-lineal**, es decir para cualesquiera $x, y \in M$ y $r \in R$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(r \cdot x) = r \cdot f(x).$$

El conjunto de morfismos entre R-módulos $M \to N$ se denota por $\operatorname{Hom}_R(M, N)$. La composición de dos morfismos $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to L$ se denota por $g \circ f\colon M \to L$. Esto define una ley de composición asociativa

$$\circ\colon \operatorname{Hom}_R(M, N) \times \operatorname{Hom}_R(N, L) \to \operatorname{Hom}_R(M, L)$$

(es decir, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$). Tenemos el morfismo identidad $\mathrm{id}_N\colon N \to N$ tal que $\mathrm{id}_M \circ f = f$ y $g \circ \mathrm{id}_N = g$.

Como siempre, un **isomorfismo** de R-módulos $f\colon M \to N$ es un morfismo que tiene un morfismo inverso $f^{-1}\colon N \to M$ tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.

0.2. Ejemplo. Si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces un $\mathbb{K}$-módulo es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. ▲

Los R-módulos son como espacios vectoriales, pero definidos sobre anillos. Espero que el lector conozca álgebra lineal básica, sabe multiplicar matrices, etc. Sin embargo, les advierto desde el principio que casi todas las propiedades de R-módulos que van a tener un papel fundamental en este curso son banales en el caso $R = \mathbb{K}$.

0.3. Ejemplo. Si $R = \mathbb{Z}$, entonces un $\mathbb{Z}$-módulo es la misma cosa que un grupo abeliano. ▲

0.4. Definición. Para dos módulos se dice que $M \subset N$ es un **submódulo** de N si M es también un módulo respecto a la misma estructura de grupo abeliano y acción de R.

0.5. Observación. *Si $M \subset N$ es un R-submódulo, entonces se puede formar el cociente N/M como grupo abeliano, y luego se ve que N/M tiene una estructura natural de R-módulo.*

0.6. Ejemplo. Si R es un anillo conmutativo y $I \subset R$ es un ideal, entonces I es un R-submódulo de R y el anillo R/I es también un R-módulo. ▲

Una clase importante de módulos son los módulos libres:

0.7. Definición. Sea X un conjunto (posiblemente infinito). Entonces el **módulo libre** $R\langle X\rangle$ generado por los elementos de X consiste de sumas finitas formales $\sum_i r_i \cdot x_i$ donde $x_i \in X$ y $r_i \in R$. El elemento cero es la suma donde $r_i = 0$ para cada i.

0.8. Observación (Propiedad universal de los módulos libres). *La aplicación de conjuntos*

$$\begin{aligned} X &\to R\langle X\rangle, \\ x &\mapsto 1 \cdot x \end{aligned}$$

tiene la siguiente propiedad universal: cada aplicación de X a otro R-módulo M se factoriza de modo único a través de $X \to R\langle X\rangle$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & M \\ R\langle X\rangle \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

(Aquí la flecha punteada es un morfismo de R-módulos y otras flechas son aplicaciones entre conjuntos.)

0.9. Ejercicio. *$R\langle X\rangle$ se caracteriza de modo único, salvo isomorfismo, por la propiedad de arriba.*

0.10. Ejemplo. Sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ todo módulo es libre. Es lo que se estudia en el álgebra lineal: en cada espacio vectorial se puede escoger una base. ▲

Los R-módulos y morfismos entre ellos tienen ciertas propiedades muy especiales que van a jugar el papel principal en todo nuestro curso.

0.11. Observación. *Cada conjunto* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *es un grupo abeliano con adición "punto por punto"*

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m),$$

el cero es el morfismo $0\colon M \to N$ *definido por* $m \mapsto 0$ *y el morfismo opuesto está definido por* $(-f)(m) := -f(m)$. *La estructura de grupo abeliano es distributiva respecto a la composición:*

$$(g+g')\circ f = g\circ f + g'\circ f \quad y \quad g\circ(f+f') = g\circ f + g\circ f'.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & N \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & L \end{tikzcd}$$

En particular, el conjunto $\operatorname{End}(M) := \operatorname{Hom}_R(M,M)$ forma un anillo respecto a la adición de morfismos y la composición "$\circ$" como multiplicación (¡normalmente no conmutativa!). Notamos que una acción de R sobre M es la misma cosa que un homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \phi\colon R &\to \operatorname{End}(M), \\ r &\mapsto (\text{acción por } r\colon M \to M). \end{aligned}$$

De hecho, $\phi(r_1)\circ\phi(r_2) = \phi(r_1 r_2)$: la acción por $r_1 r_2$ es la acción por r_2 seguida por la acción por r_1.

0.12. Observación. *Sean* M *y* N *dos* R*-módulos. El conjunto de todos los morfismos* R*-lineales* $f\colon M\to N$ *es naturalmente un* R*-módulo que vamos a denotar por* $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)$*, con la acción de* R *definida por*

$$(r\cdot f)(m) := f(r\cdot m).$$

Demostración. De hecho, se ve que

$$\begin{aligned} (r_1\cdot(r_2\cdot f))(m) &= (r_2\cdot f)(r_1\cdot m) \\ &= f(r_2\cdot r_1\cdot m) \\ &= f(r_2 r_1\cdot m) \\ &= f(r_1 r_2\cdot m) \\ &= (r_1 r_2\cdot f)(m), \end{aligned}$$

y de la misma manera se puede verificar otros axiomas. ∎

Escribimos "$\underline{\operatorname{Hom}}_R$" en vez de "$\operatorname{Hom}_R$" para subrayar el hecho de que $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)$ no es simplemente un conjunto o grupo abeliano sino también un R-módulo. Esto es llamado el **Hom interno**.

Un comentario pedante para evitar posibles confusiones.

En realidad, lo que hemos definido se llama R**-módulo izquierdo**, porque la acción de R se escribe a la izquierda: $r\cdot x$. Hay también R**-módulos derechos**, donde la acción se escribe como $x\cdot r$. El axioma "$(r_1 r_2)\cdot x = r_1\cdot(r_2\cdot x)$" en el caso derecho se vuelve "$x\cdot(r_1 r_2) = (x\cdot r_1)\cdot r_2$" que no es la misma cosa: en el caso izquierdo la acción de $r_1 r_2$ es la acción de r_2 seguida por la acción de r_1, y en el caso derecho es lo contrario. Si el anillo R es conmutativo y $r_1 r_2 = r_2 r_1$, entonces no hay diferencia entre módulos izquierdos y derechos. Por eso en nuestros apuntes todos los módulos van a ser izquierdos.

En realidad, si M y N son módulos izquierdos sobre un anillo no conmutativo R, el módulo $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N)$ naturalmente tiene acción de R *por la derecha* por $(f \cdot r)(m) := f(r \cdot m)$. Y *solo para escribir la acción de R sobre $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N)$ por la izquierda*, hemos usado arriba la identidad $r_1 r_2 = r_2 r_1$.

No voy a hablar más de la izquierda y la derecha y siempre voy a trabajar con módulos izquierdos, pero esto no quiere decir que las construcciones de abajo no funcionan para anillos no conmutativos. Si el curso fuera más largo, pondría más atención y no usaría la hipótesis que R es conmutativo.

0.13. Observación (Funtorialidad de $\underline{\operatorname{Hom}}$). *1) Sea M un R-módulo fijo. Entonces cada morfismo de R-módulos $f\colon N \to N'$ induce un morfismo de R-módulos*

$$\begin{aligned} f_* := f \circ -\colon \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N) &\to \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N'), \\ (M \xrightarrow{h} N) &\mapsto (M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{f} N') \end{aligned}$$

Esta correspondencia satisface

$$(\mathrm{id}_N)_* = \mathrm{id}_{\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)}, \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

2) Sea N un R-módulo fijo. Entonces cada morfismo de R-módulos $f\colon M \to M'$ induce un morfismo de R-módulos en la otra dirección

$$\begin{aligned} f^* := - \circ f\colon \underline{\operatorname{Hom}}_R(M', N) &\to \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N), \\ (M' \xrightarrow{h} N) &\mapsto (M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{h} N) \end{aligned}$$

Esta correspondencia satisface

$$\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)}, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

Demostración. Por ejemplo, en el primer caso la formula $(\mathrm{id}_N)_* = \mathrm{id}_{\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)}$ es evidente y por otro lado

$$(g \circ f)_*(h) = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ f_*(h) = g_* \circ f_*(h).$$

El hecho de que f induzca un *morfismo de módulos* f_* es una consecuencia de la formula

$$f \circ (h + h') = f \circ h + f \circ h'.$$

■

0.14. Definición. Sean M y N dos R-módulos. El **producto tensorial** $M \otimes_R N$ es el grupo abeliano libre generado por los símbolos $m \otimes n$ para todo $m \in M$ y $n \in N$ módulo las relaciones

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, \\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \\ (r \cdot m) \otimes n &= m \otimes (r \cdot n). \end{aligned}$$

(Es decir, se toma el cociente por el subgrupo generado por elementos de la forma $(m_1 + m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n$, $m \otimes (n_1 + n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2$, $(r \cdot m) \otimes n - m \otimes (r \cdot n)$.) Entonces cada elemento $x \in M \otimes_R N$ puede ser expresado (¡no necesariamente de modo único!) como una suma finita de la forma $x = \sum_i m_i \otimes n_i$. Además, definamos la acción de R sobre $M \otimes_R N$ mediante

$$r \cdot x = r \cdot (\sum_i m_i \otimes n_i) := \sum_i r \cdot m_i \otimes n_i.$$

Puede verse que esta definición no depende de la expresión particular $x = \sum_i m_i \otimes n_i$ y nos da una estructura de R-módulo.

0.15. Ejemplo. Si m y n son dos números coprimos, entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$. En efecto, tenemos $1 = a\,m + b\,n$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$, por lo cual para cada $x \otimes y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x \otimes y &= 1 \cdot (x \otimes y) \\ &= (a\,m + b\,n) \cdot (x \otimes y) \\ &= a\,m \cdot (x \otimes y) + b\,n \cdot (x \otimes y) \\ &= (a\,\underbrace{m \cdot x}_{0}) \otimes y + x \otimes (b\,\underbrace{n \cdot y}_{0}) \\ &= 0 \otimes y + x \otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

▲

0.16. Ejercicio. *En general, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ donde $\ell = (m, n)$ es el máximo común divisor de m y n. Este grupo cíclico está generado por $1 \otimes 1$.*

0.17. Observación (Funtorialidad de $\otimes$). *1) Sea N un R-módulo fijo y $f\colon M \to M'$ un morfismo de R-módulos. Entonces f induce un morfismo de R-módulos*

$$\begin{aligned} f_* := f \otimes \mathrm{id}_N\colon M \otimes_R N &\to M' \otimes_R N, \\ m \otimes n &\mapsto f(m) \otimes n. \end{aligned}$$

2) Sea M un R-módulo fijo y $f\colon N \to N'$ un morfismo de R-módulos. Entonces f induce un morfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} f_* := \mathrm{id}_M \otimes f\colon M \otimes_R N &\to M \otimes_R N', \\ m \otimes n &\mapsto m \otimes f(n). \end{aligned}$$

(Obviamente) todo esto satisface

$$\mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}, \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

0.18. Observación (Adjunción entre $\otimes$ y $\underline{\mathrm{Hom}}$). *Sean L, M, N tres R-módulos. Tenemos una biyección entre conjuntos de morfismos*

$$\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N))$$

que es natural en el siguiente sentido:

1) Cada morfismo de R-módulos $f\colon L \to L'$ induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)) \\
\operatorname{Hom}_R(L' \otimes_R M, N) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u, "-\circ(f\otimes \mathrm{id}_M)"] & \operatorname{Hom}_R(L', \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)) \arrow[u, "-\circ f"']
\end{tikzcd}$$

2) Cada morfismo de R-módulos $f\colon N \to N'$ induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)) \arrow[d, "f_*\circ -"] \\
\operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N') \arrow[r, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N'))
\end{tikzcd}$$

Un comentario importante: los $\underline{\operatorname{Hom}}_R$ son R-módulos, pero los Hom_R denotan conjuntos. Entonces la observación es que hay una biyección entre ciertos conjuntos. A priori esto no quiere decir nada: tener una biyección $X \cong Y$ es la misma cosa que decir que X y Y tienen la misma cardinalidad. La parte clave es que la biyección de arriba es natural en un sentido preciso.

Demostración. Esta biyección es casi obvia: se ve que *por la definición de producto tensorial*, hay una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \cong \{\text{aplicaciones } R\text{-bilineales } L \times M \to N\},$$

donde una aplicación $f\colon L \times M \to N$ es R-**bilineal** si satisface las identidades habituales

$$r \cdot f(\ell, m) = f(r\cdot \ell, m) = f(\ell, r\cdot m),\; f(\ell+\ell', m) = f(\ell,m) + f(\ell', m),\; f(\ell, m+m') = f(\ell,m) + f(\ell,m').$$

Luego, vemos que un morfismo R-bilineal $L \times M \to N$ es la misma cosa que un morfismo R-lineal $L \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)$. Específicamente, si tenemos un morfismo R-lineal $\phi\colon L\otimes_R M \to N$, podemos definir un morfismo

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}\colon L &\to \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N), \\ \ell &\mapsto (m \mapsto \phi(\ell\otimes m)). \end{aligned}$$

A partir de un morfismo R-lineal $\psi\colon L \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)$, podemos definir

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}\colon L\otimes_R M &\to N, \\ \ell\otimes m &\mapsto \psi(\ell)(m). \end{aligned}$$

El hecho que estas aplicaciones estén bien definidas y sean R-lineales es consecuencia de las relaciones que definen a $L \otimes_R M$. Se ve que $\widetilde{\widehat{\phi}} = \phi$ y $\widehat{\widetilde{\psi}} = \psi$. La naturalidad la dejo como un ejercicio (fácil). ■

0.19. Observación. *Para R-módulos L, M, N hay isomorfismos naturales*

$$
\begin{aligned}
(L \otimes_R M) \otimes_R N &\cong L \otimes_R (M \otimes_R N),\\
(\ell \otimes m) \otimes n &\mapsto \ell \otimes (m \otimes n);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \otimes_R N &\cong N \otimes_R M,\\
m \otimes n &\mapsto n \otimes m;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M \otimes_R R &\cong M,\\
m \otimes r &\mapsto r \cdot m.
\end{aligned}
$$

1. Definición de categorías

Los módulos sobre un anillo fijo R forman una **categoría**. En estos apuntes no vamos a abusar del lenguaje categórico, pero vamos a dar las definiciones básicas e indispensables para cualquier curso de álgebra o geometría.

1.1. Definición. Una **categoría C** está definida por

- una clase de **objetos** $X, Y, Z, \ldots$;
- conjuntos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ de **morfismos** $X \xrightarrow{f} Y$ para cada par de objetos fijos X y Y;
- una ley de composición de morfismos

$$
\begin{aligned}
\circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z) &\to \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z),\\
(X \xrightarrow{f} Y,\ Y \xrightarrow{g} Z) &\mapsto (X \xrightarrow{g\circ f} Z).
\end{aligned}
$$

Estos datos tienen que satisfacer los siguientes axiomas:

- para cada objeto X tenemos el morfismo identidad $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ que es la identidad respecto a $\circ$:

$$
\begin{aligned}
(X \xrightarrow{f} Y) \circ (X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X) &= (X \xrightarrow{f} Y),\\
(Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y) \circ (X \xrightarrow{f} Y) &= (X \xrightarrow{f} Y);
\end{aligned}
$$

- la composición es asociativa:

$$(Z \xrightarrow{h} W) \circ (Y \xrightarrow{g} Z \ \circ\ X \xrightarrow{f} Y) = (Z \xrightarrow{h} W \ \circ\ Y \xrightarrow{g} Z) \circ (X \xrightarrow{f} Y).$$

Hemos dicho que tenemos una *clase* de objetos porque normalmente los objetos no forman un conjunto sino un "conjunto grande". El ejemplo más básico es la categoría donde los objetos son conjuntos y los morfismos $X \to Y$ son aplicaciones entre conjuntos. Como probablemente saben, todos los conjuntos no forman un conjunto. De hecho, si tal conjunto $\mathfrak{U}$ existiera, entonces existiría el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos $P := \{X \in \mathfrak{U} \mid X \notin X\}$, pero si $P \in P$, entonces $P \notin P$ y si

$P \notin P$, entonces $P \in P$; esto se llama **la paradoja de Russell** o **la paradoja del barbero** (si cada persona es afeitada por el barbero si y sólo si no se afeita a sí misma, ¿se afeita el barbero a sí mismo?). Por esto en una categoría se trata de una *clase* de objetos. Cuando los objetos forman un conjunto, se dice que $\mathbf{C}$ es una categoría **pequeña**. La mayoría de las categoría interesantes que aparecen en la naturaleza no son pequeñas.

1.2. Definición. Se dice que una categoría $\mathbf{C}$ es una **subcategoría** de $\mathbf{D}$ si los objetos de $\mathbf{C}$ forman una subclase de los objetos de $\mathbf{D}$, los morfismos en $\mathbf{C}$ son también morfismos en $\mathbf{D}$ (es decir, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(X,Y)$ para cada $X,Y \in \mathbf{C}$), y la composición de morfismos en $\mathbf{C}$ es la misma que en $\mathbf{D}$.

Si además $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(X,Y)$ para cada $X,Y \in \mathbf{C}$, entonces se dice que $\mathbf{C}$ es una **subcategoría plena** de $\mathbf{D}$.

1.3. Ejemplo. He aquí algunos ejemplos básicos de categorías que todos ya conocen:

categoría	objetos	morfismos
Set	conjuntos	aplicaciones entre conjuntos
Top	espacios topológicos	aplicaciones contínuas
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
Ring	anillos	homomorfismos de anillos
R-**Mód**	R-módulos	aplicaciones R-lineales
$\mathbb{K}$-**Vect** $= \mathbb{K}$-**Mód**	espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$	aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales
Ab $= \mathbb{Z}$-**Mód**	grupos abelianos	homomorfismos de grupos
...	...	...

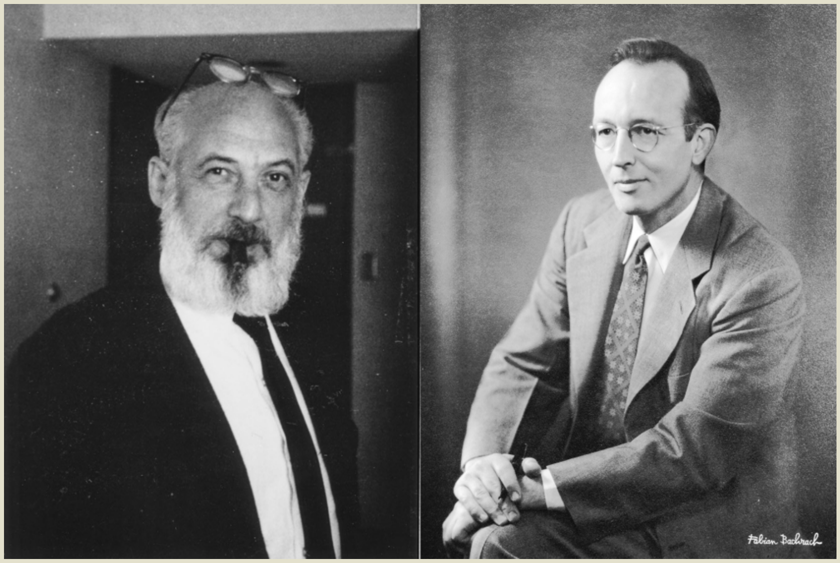
Todas las categorías de arriba son subcategorías de **Set** (porque sus objetos son conjuntos con cierta estructura especial y los morfismos son aplicaciones que preservan las estructuras); **Ab** es una subcategoría plena de **Grp**, la categoría de anillos conmutativos es una subcategoría plena de la categoría de anillos, etc. Nos va a interesar principalmente la categoría R-**Mód**; entonces en lugar de $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(M,N)$ voy a escribir simplemente $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. ▲

La teoría de categorías fue inventada por los matemáticos estadounidenses Samuel Eilenberg (1913–1998) y Saunders Mac Lane (1909–2005).

Eilenberg nació en Polonia donde en 1934 recibió su doctorado bajo la dirección de Kazimierz Kuratowski y Karol Borsuk. Sus intereses siempre estuvieron relacionados con topología y topología algebraica. En 1939 se mudó a los Estados Unidos.

Mac Lane nació en los Estados Unidos, pero recibió su doctorado en lógica en Göttingen bajo la dirección de Paul Bernays y Hermann Weyl. En 1933 tuvo que volver a los Estados Unidos por la situación en las universidades alemanes bajo los nazis (vean su articulo “Mathematics at Göttingen under the Nazis”). Gradualmente empezó a trabajar en el álgebra.

La colaboración entre Eilenberg y Mac Lane comenzó en 1940. Entre otras cosas, fundaron la teoría de categorías (en su artículo “General theory of natural equivalences” publicado en 1945). Para saber más sobre la historia de la teoría de categorías, pueden leer el libro “From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory” (Springer, 2009) escrito por Jean-Pierre Marquis. (Sus ideas filosóficas son cuestionables, pero de todas maneras, el autor recogió mucha información.)



Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane

Casi todas las estructuras en álgebra y geometría forman categorías. Es bueno saber cuándo ciertas propiedades son consecuencias formales de la teoría de categorías.

En la comedia "El burgués gentilhombre" (1670) del dramaturgo francés Molière se trata de un burgués cuarentañero, Monsieur Jourdain, cuyo sueño es de adquirir los modales de aristócratas.

En una de las escenas Monsieur Jourdain habla con un filósofo que le explica la diferencia entre verso y prosa:

> JOURDAIN: Os lo ruego. Y ahora es preciso que os haga una confidencia. Estoy enamorado de una dama de la mayor distinción, y desearía que me ayudárais a redactar una misiva que quiero depositar a sus plantas.
> FILÓSOFO: No hay inconveniente.
> JOURDAIN: Será una galantería, ¿verdad?
> FILÓSOFO: Sin duda alguna. ¿Y son versos los que queréis escribirle?
> JOURDAIN: No, no; nada de versos.
> FILÓSOFO: ¿Preferís la prosa?
> JOURDAIN: No. No quiero ni verso ni prosa.
> FILÓSOFO: ¡Pues una cosa u otra ha de ser!
> JOURDAIN: ¿Por qué?
> FILÓSOFO: Por la sencilla razón, señor mío, de que no hay más que dos maneras de expresarse: en prosa o en verso.
> JOURDAIN: ¿Conque no hay más que prosa o verso?
> FILÓSOFO: Nada más. Y todo lo que no está en prosa está en verso; y todo lo que no está en verso, está en prosa.
> JOURDAIN: Y cuando uno habla, ¿en qué habla?
> FILÓSOFO: En prosa.
> JOURDAIN: ¡Cómo! Cuando yo le digo a [mi nana] Nicolasa: "Tráeme las zapatillas" o "dame el gorro de dormir", ¿hablo en prosa?
> FILÓSOFO: Sí, señor.
> JOURDAIN: ¡Por vida de Dios! ¡Más de cuarenta años que hablo en prosa sin saberlo! No sé cómo pagaros esta lección...

La misma cosa pasa con la teoría de categorías: muchos hablan en la teoría de categorías sin saberlo.

2. Isomorfismos, monomorfismos y epimorfismos

2.1. Definición. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo en cualquier categoría.

- f es un **isomorfismo** si existe otro morfismo $f^{-1}\colon Y \to X$ tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$. (Ejercicio: si existe, este f^{-1} es únicamente definido por f.) En este caso escribimos $X \cong Y$.

- f es un **monomorfismo** si para cada par de morfismos $Z \xrightarrow{g,g'} X$ tenemos
$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'.$$

- f es un **epimorfismo** si para cada par de morfismos $Y \xrightarrow{g,g'} Z$ tenemos
$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'.$$

Un monomorfismo se denota por $\rightarrowtail$ y un epimorfismo se denota por $\twoheadrightarrow$.

2.2. Observación.

- *Si $m\colon X \rightarrowtail Y$ y $m'\colon Y \rightarrowtail Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m\colon X \to Z$ es también un monomorfismo.*

- *Si $e\colon X \twoheadrightarrow Y$ y $e'\colon Y \twoheadrightarrow Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e\colon X \to Z$ es también un epimorfismo.*

- *Si $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es también un monomorfismo.*

- *Si $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es también un epimorfismo.*

Demostración. Claro a partir de las definiciones. ■

En una categoría general los objetos no son conjuntos y entonces no tiene sentido la noción de subconjuntos. Pero existe una generalización natural:

2.3. Definición. Digamos que $X \preceq Y$ si existe un monomorfismo $X \rightarrowtail Y$. Para un objeto fijo Y sus **subobjetos** son todos los objetos $X \preceq Y$ módulo la relación de equivalencia

$$X_1 \sim X_2 \iff X_1 \preceq X_2 \text{ y } X_2 \preceq X_1.$$

Por ejemplo, en la categoría **Set** un subobjeto X de Y es simplemente un subconjunto $X \subseteq Y$ (más precisamente, la clase de todas las inyecciones $i\colon Z \hookrightarrow Y$ tales que $\operatorname{im} i = X$).

2.4. Ejercicio. *1) La definición implica que cada isomorfismo es automáticamente mono y epi.*

Sin embargo, mono y epi no siempre implica iso. Demuestre que en la categoría de anillos la inclusión $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es mono y epi (porque cada morfismo $f\colon \mathbb{Q} \to R$ está definido por su valor $f(1)$), pero los anillos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no son isomorfos.

2) $f\colon M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo de R-módulos precisamente si f es inyectivo (como aplicación entre conjuntos).

3) $f\colon M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo de R-módulos precisamente si f es sobreyectivo.

Note que en la categoría de anillos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un epimorfismo, pero no es una aplicación sobreyectiva entre conjuntos.

4) $f\colon M \xrightarrow{\cong} N$ es un isomorfismo de R-módulos si es una biyección. Entonces, para R-módulos mono y epi implica iso.

En general es falso: por ejemplo, en la categoría de espacios topológicos **Top***, si una aplicación continua $f\colon X \to Y$ es una biyección, no es necesariamente un isomorfismo (porque los isomorfismos en* **Top** *son homeomorfismos, es decir aplicaciones cuya aplicación inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ también es continua).*

2.5. Ejemplo. Si $M \subset N$ es un R-submódulo, entonces la inclusión $M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo. La proyección $N \twoheadrightarrow N/M$ es un epimorfismo. ▲

Sin embargo, la definición correcta es 2.1, y no se debe pensar en iso-, mono-, epi-morfismos como biyecciones, inyecciones y sobreyecciones (para R-módulos es algo inocuo, pero en el álgebra homológica hay otros contextos, en particular la *cohomología de haces*, donde los objetos de interés no son conjuntos).

3. Productos y coproductos

3.1. Definición. Para dos objetos $X, Y \in \mathbf{C}$ su **producto** es un objeto $X \times Y \in \mathbf{C}$ dotado de dos morfismos $p_X\colon X \times Y \to X$ y $p_Y\colon X \times Y \to Y$ que satisfacen la siguiente propiedad universal: si tenemos otro objeto $Z \in \mathbf{C}$ junto con morfismos $f\colon Z \to X$ y $g\colon Z \to Y$, entonces existe un único morfismo $\langle f, g\rangle : Z \to X \times Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f{,}g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

De modo similar, un **coproducto** es un objeto $X \sqcup Y \in \mathbf{C}$ dotado de dos morfismos $i_X \colon X \to X \sqcup Y$ y $i_Y \colon Y \to X \sqcup Y$ que satisfacen la propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & X \sqcup Y \arrow[d, dashed, "\exists!"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

3.2. Observación. *Si $X \times Y$ (resp. $X \sqcup Y$) existe, es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Por ejemplo, para $X \times Y$, supongamos que existen dos productos

$$X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y \quad \text{y} \quad X \xleftarrow{p'_X} X \times' Y \xrightarrow{p'_Y} Y.$$

Entonces tenemos morfismos únicos $X \times' Y \to X \times Y$ y $X \times Y \to X \times' Y$ que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& X \times' Y \arrow[dl, "p'_X"'] \arrow[dr, "p'_Y"] \arrow[d, dashed, "\langle p'_X, p'_Y \rangle"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[d, dashed, "\langle p_X, p_Y \rangle"] & \\
X & X \times' Y \arrow[l, "p'_X"'] \arrow[r, "p'_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Pero las composiciones $\langle p'_X, p'_Y \rangle \circ \langle p_X, p_Y \rangle$ y $\langle p_X, p_Y \rangle \circ \langle p'_X, p'_Y \rangle$ deben ser $\mathrm{id}_{X \times Y}$ y $\mathrm{id}_{X \times' Y}$ respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[d, "\langle p_X, p_Y \rangle"] \arrow[ddl, bend right, "p_X"'] \arrow[ddr, bend left, "p_Y"] \arrow[dd, dashed, bend right=50, "\exists!"', "=\mathrm{id}"] & \\
& X \times' Y \arrow[dl, "p'_X"'] \arrow[dr, "p'_Y"] \arrow[d, "\langle p'_X, p'_Y \rangle"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \times' Y \arrow[d, "\langle p'_X, p'_Y \rangle"] \arrow[ddl, bend right, "p'_X"'] \arrow[ddr, bend left, "p'_Y"] \arrow[dd, dashed, bend right=50, "\exists!"', "=\mathrm{id}"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[d, "\langle p_X, p_Y \rangle"] & \\
X & X \times' Y \arrow[l, "p'_X"'] \arrow[r, "p'_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

3.3. Ejercicio.

- *Los productos y coproductos son conmutativos (cuando existen):*

$$X \times Y \cong Y \times X \quad y \quad X \sqcup Y \cong Y \sqcup X.$$

- *Los productos y coproductos son asociativos (cuando existen):*

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z) \quad y \quad (X \sqcup Y) \sqcup Z \cong X \sqcup (Y \sqcup Z).$$

3.4. Ejemplo. En la categoría de conjuntos **Set** el producto de dos conjuntos $X \times Y$ es (salvo isomorfismo) el **producto cartesiano** $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ y el coproducto es la **unión disjunta** $X \sqcup Y$. ▲

De modo similar, se pueden definir productos y coproductos infinitos:

3.5. Definición. Sea $\{X_k\}_{k\in I}$ una familia de objetos indexada por un conjunto I. Entonces

- un **producto** $\prod_k X_k$ es un objeto junto con morfismos $p_k \colon \prod_k X_k \to X_k$ tal que para cualquier otro objeto Z junto con morfismos $\{f_k \colon Z \to X_k\}_{k\in I}$ existe un único morfismo $f \colon Z \to \prod_k X_k$ que satisface $p_k \circ f = f_k$ para cada $k \in I$.
- un **coproducto** $\coprod_k X_k$ es un objeto junto con morfismos $i_k \colon X_k \to \coprod_k X_k$ tal que para cualquier otro objeto Z junto con morfismos $\{f_k \colon X_k \to Z\}_{k\in I}$ existe un único morfismo $f \colon \coprod_k X_k \to Z$ que satisface $f \circ i_k = f_k$ para cada $k \in I$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dashed, "\exists!"', "f"] \arrow[dr, "f_k"] & \\
\prod_k X_k \arrow[r, "p_k"'] & X_k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[dr, "f_k"'] & \coprod_k X_k \arrow[d, dashed, "\exists!"', "f"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Álgebra homológica, día 2

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

9 de agosto de 2016

4. Funtores entre categorías

Para relacionar diferentes categorías, tenemos la noción de funtor:

4.1. Definición. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías. Un **funtor (covariante)** $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es una regla que

- para cada objeto X de $\mathbf{C}$ especifica un objeto $F(X)$ de $\mathbf{D}$,
- para cada morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathbf{C}$ especifica un morfismo $F(X) \xrightarrow{F(f)=:f_*} F(Y)$ en $\mathbf{D}$.

Y se piden los siguientes axiomas:

- F preserva los morfismos identidades: $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{F(X)}$ para cada X;
- F preserva la composición de morfismos: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

4.2. Ejercicio. *Si f es un isomorfismo en $\mathbf{C}$ y F es un funtor $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}$.*

4.3. Observación. *Si $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ son dos funtores, entonces $G \circ F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ (definido como aplicación de F seguida por aplicación de G) es también un funtor. Esta composición es asociativa. También para cada categoría tenemos el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ (que aplica un objeto X en el mismo objeto X y un morfismo f en el mismo morfismo f). Es la identidad respecto a la composición de funtores.*

4.4. Ejemplo. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y X un objeto fijo. Para cada objeto Y podemos considerar el conjunto de morfismos $X \to Y$:

$$Y \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y).$$

Cada morfismo $f\colon Y \to Y'$ induce una aplicación f_* definida por la composición con f:

$$(Y \xrightarrow{f} Y') \quad \rightsquigarrow \quad (\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y')).$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "f\circ g"'] & Y \arrow[dl, "f"] \\ Y' & \end{tikzcd}$$

Todo esto define un funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

(el morfismo identidad $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ obviamente induce el morfismo identidad $\mathrm{id}_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ y para la composición de morfismos $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ tenemos $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$).

En la primera lección hemos visto un caso especial cuando $\mathbf{C} = R$-**Mód** y tenemos funtores *con valores en la categoría de R-módulos*

$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, -)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$

La composición de este funtor con el **funtor olvidadizo** R-**Mód** $\to$ **Set** (que asocia a cada R-módulo su conjunto subyacente) es exactamente el funtor

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(M, -)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to \mathbf{Set}.$$

▲

4.5. Ejemplo. Como hemos observado en la primera lección, el producto tensorial $M \otimes_R N$ es funtorial en cada argumento:

$$\begin{aligned} - \otimes_R N\colon R\text{-}\mathbf{Mód} &\to R\text{-}\mathbf{Mód}, \\ M &\rightsquigarrow M \otimes_R N, \\ (M \xrightarrow{f} M') &\rightsquigarrow (M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M' \otimes_R N). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mód} &\to R\text{-}\mathbf{Mód}, \\ N &\rightsquigarrow M \otimes_R N, \\ (N \xrightarrow{g} N') &\rightsquigarrow (M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes g} M \otimes_R N'). \end{aligned}$$

▲

4.6. Ejemplo. La formación del R-módulo libre $R\langle X\rangle$ generado por los elementos de X define un funtor **Set** $\to R$-**Mód** porque cada morfismo de conjuntos $X \to Y$ induce (de modo funtorial) el morfismo correspondiente de R-módulos $R\langle X\rangle \to R\langle Y\rangle$ (definido por la propiedad universal):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & R\langle Y\rangle \\ R\langle X\rangle \arrow[urr, dashed, "\exists!"'] & & \end{tikzcd}$$

▲

Muy a menudo es útil considerar funtores que cambian la dirección de los morfismos:

4.7. Definición. Sean **C** y **D** dos categorías. Un **funtor contravariante** $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es una regla que para cada objeto X de **C** especifica un objeto $F(X)$ de **D**, y para cada morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en **C** especifica un morfismo $F(Y) \xrightarrow{F(f) =: f^*} F(X)$ en **D**.

Se pide que

$$\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{F(X)}, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Para tratar los funtores covariantes y contravariantes de la misma manera, es útil introducir la noción de categoría opuesta:

4.8. Definición. Sea **C** una categoría. Entonces su **categoría opuesta** $\mathbf{C}^\circ$ es la categoría donde

- los objetos son los mismos,

- un morfismo $f^\circ\colon X \to Y$ en $\mathbf{C}^\circ$ es un morfismo $f\colon Y \to X$ en $\mathbf{C}$ y la composición está definida por
$$g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ.$$

$$\mathbf{C}^\circ\colon \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^\circ"] \arrow[rr, bend left, "g^\circ \circ f^\circ"] & Y \arrow[r, "g^\circ"] & Z \end{tikzcd}$$
$$\mathbf{C}\colon \quad \begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "f"'] & Z \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "f \circ g"] \end{tikzcd}$$

4.9. Observación. *Un funtor contravariante $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ puede ser visto como un funtor covariante $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{D}$ o $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}^\circ$.*

(Muy a menudo se dice que un funtor F es contravariante y se escribe $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{D}$ para subrayar que es contravariante. En realidad, como funtor definido sobre $\mathbf{C}^\circ$, es covariante.)

4.10. Ejemplo. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y Y un objeto fijo. Para cada objeto X podemos considerar el conjunto de morfismos $X \to Y$:
$$Y \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y).$$
Cada morfismo $f\colon X \to X'$ induce una aplicación f^* por la composición con f. Noten que el único modo sensato de definirla es de tomar un morfismo $X' \xrightarrow{g} Y$ y componerlo con $X \xrightarrow{f} X'$:
$$(X \xrightarrow{f} X') \quad \rightsquigarrow \quad (\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)).$$

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, dashed, "g \circ f"'] \arrow[dl, "f"] \\ X' \arrow[u, "g"] & \end{tikzcd}$$

Vemos que esto define un funtor
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}.$$

En la primera lección hemos visto un caso especial cuando $\mathbf{C} = R\text{-}\mathbf{Mód}$ y tenemos funtores *con valores en la categoría de R-módulos*
$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(-, N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$
La composición de este funtor con el funtor olvidadizo $R\text{-}\mathbf{Mód} \to \mathbf{Set}$ es exactamente el funtor
$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(-, N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to \mathbf{Set}.$$

▲

5. Transformaciones naturales entre funtores

Resumamos nuestra situación. En las matemáticas clásicas normalmente se estudiaban conjuntos con ciertas estructuras. Por ejemplo, un R-módulo M es un conjunto con estructura de grupo abeliano y acción de R que satisfacen ciertos axiomas, etc. El punto de vista categórico supone que, en vez de estudiar elementos de cada objeto, hay que estudiar las aplicaciones entre objetos. La definición de categorías no menciona elementos que "pertenecen" a objetos y en realidad no habla de aplicaciones: se trata solo de algunas flechas formales $X \to Y$ que se pueden componer. Otro nivel de razonamiento es de dar más importancia no a las categorías particulares, sino a los funtores entre categorías. Pero en realidad, las cosas más importantes no son ni categorías ni funtores, sino morfismos entre funtores:

5.1. Definición. Si $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ dos funtores entre categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, entonces una **transformación natural** $\alpha\colon F \Rightarrow G$ entre F y G es una colección de morfismos $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ en $\mathbf{D}$ para cada objeto X de $\mathbf{C}$ tal que para cada morfismo $X \to Y$ en $\mathbf{C}$ el siguiente diagrama en $\mathbf{D}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ Y & F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

5.2. Ejemplo. Tenemos funtores $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$. Cada morfismo

$$X \to X' \quad \text{y} \quad Y \to Y'$$

induce transformaciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-) \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y').$$

Por ejemplo, en el primer caso, tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',Y') \arrow[r, "\alpha_{Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X' \to Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (X \to X' \to Y) \arrow[d, mapsto] \\ (X' \to Y \to Y') \arrow[r, mapsto] & (X \to X' \to Y \to Y') \end{tikzcd}$$

y el segundo caso corresponde a los mismos diagramas (pero la transformación natural corresponde a las flechas verticales). ▲

Si F y G son dos funtores $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$, vamos a usar la notación

$$\mathrm{Nat}(F,G) := \{\text{transformaciones naturales } F \Rightarrow G\}.$$

En general $\mathrm{Nat}(F,G)$ no es un conjunto porque a priori los objetos de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ no forman conjuntos.

5.3. Observación. *Si F, G, H son tres funtores $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $\alpha\colon F \Rightarrow G$ y $\beta\colon G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales, entonces $\beta \circ \alpha\colon F \Rightarrow H$ definida por*

$$(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X$$

es también una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Siempre existe la transformación natural identidad $\mathrm{Id}_F\colon F \Rightarrow F$ definida por $(\mathrm{Id}_F)_X := F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ para cada X. Es identidad respecto a la composición de transformaciones naturales.

Todo esto nos permite comparar funtores:

5.4. Definición. Se dice que dos funtores $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ son **isomorfos** si existen transformaciones naturales $\alpha\colon F \Rightarrow G$ y $\beta\colon G \Rightarrow F$ tales que $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_F$ y $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_G$.

6. Funtores representables y el lema de Yoneda

Por fin estamos listos para demostrar el hecho más importante de la teoría de categorías básica:

6.1. Proposición (Lema de Yoneda).

- *Para cada $X \in \mathbf{C}$ y cada funtor covariante $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \xrightarrow{\cong} F(X).$$

Aquí la naturalidad quiere decir que para cada morfismo $f\colon X \to X'$ y cada transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-),F) \arrow[r, "\cong"] & F(X')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),G) \arrow[r, "\cong"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

($f\colon X \to X'$ induce una transformación natural $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$, y a su vez una aplicación entre conjuntos $f_*\colon \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-),F)$ por la pre-composición; la transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ induce un morfismo entre conjuntos $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \Rightarrow \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),G)$ por la post-composición con α.)

- *Para cada $Y \in \mathbf{C}$ y cada funtor contravariante $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y),F) \xrightarrow{\cong} F(Y).$$

Aquí la naturalidad quiere decir que para cada morfismo $f\colon X \to X'$ y cada transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] & F(X) \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "f^*"] & F(X') \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X),G) \arrow[r, "\cong"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Veamos, por ejemplo, el caso contravariante. Tenemos que definir una biyección

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y),F) \cong F(Y).$$

Voy a describir la construcción y dejo los detalles como un ejercicio.

A partir de una transformación natural $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y) \Rightarrow F$ debemos producir un elemento de $F(Y)$. De hecho, hay solo una posibilidad obvia: tenemos la aplicación $\alpha_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y) \to F(Y)$ y el único elemento que seguramente contiene el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y)$ es el morfismo identidad id_Y. Entonces, podemos considerar

$$\alpha_Y(\mathrm{id}_Y) \in F(Y).$$

Ahora bien, a partir de un elemento $y \in F(Y)$ tenemos que definir una transformación natural

$$\alpha^y\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y) \Rightarrow F,$$

es decir, una familia de morfismos

$$\alpha_X^y\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \to F(X).$$

Si tenemos un elemento $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$, entonces F nos da una aplicación entre conjuntos $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$. Podemos aplicar $F(f)$ a $y \in F(Y)$ para obtener un elemento de $F(X)$:

$$\alpha_X^y(f) := F(f)(y).$$

■

6.2. Ejercicio. *Provea los detalles necesarios:*

1) α_X^y *define una transformación natural* $\alpha^y\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y) \Rightarrow F$;

2) *las correspondencias que hemos definido dan una biyección entre los conjuntos* $\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y),F)$ *y* $F(Y)$;

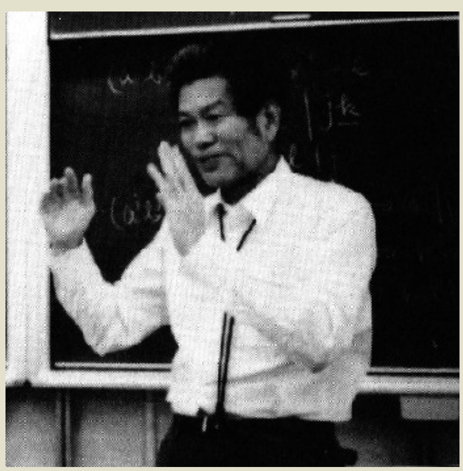
3) *esta biyección es natural.*

Nobuo Yoneda (1930–1996) fue un matemático japonés, conocido principalmente por el lema que lleva su nombre. Estudió matemáticas en la Universidad de Tokio y conoció a Eilenberg durante su visita a Japón. En ese tiempo empezó a estudiar el álgebra homológica, que todavía estaba en proceso de gestación como nueva área de las matemáticas (Eilenberg trabajaba junto con Cartan en su libro de texto “Homological algebra”). Yoneda obtuvo una beca para visitar a Eilenberg en Princeton, pero Eilenberg se había ido a París. Un año después Yoneda también se mudó a Francia donde conoció a Mac Lane. La leyenda dice que Mac Lane y Yoneda se encontraron en un café de la estación de París Norte y su conversación continuó en el tren de Yoneda justo antes de que este partiera. Fue en esta ocasión que Yoneda explicó a Mac Lane su famoso lema, cuyo origen es su artículo sobre el álgebra homológica

- Nobuo Yoneda. On the Homology Theory of Modules. Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics Vol. 7 No. 2, p. 193–227. MR 68832

Gracias a esta coincidencia, Mac Lane formuló el lema en términos de arriba y lo popularizó.

Después de su regreso a Japón, Yoneda trabajó en informática, en particular en el lenguaje de programación Algol, y tuvo posiciones en facultades de matemáticas e informática en varias universidades de Tokio.



Nobuo Yoneda

Lo siguiente es un caso particular del lema de Yoneda cuando $F = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)$ o $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y)$:

6.3. Corolario (Encajamiento de Yoneda).

- *Para $X, X' \in \mathbf{C}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', X).$$

- *Para $Y, Y' \in \mathbf{C}$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y')) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Y').$$

El último resultado puede ser interpretado de la manera siguiente. Si $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, entonces para dos funtores $F, G\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ las transformaciones naturales $\mathrm{Nat}(F, G)$ forman un conjunto. Por lo tanto podemos considerar la categoría $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Set})$ cuyos objetos son funtores $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ y cuyos morfismos son transformaciones naturales $F \Rightarrow G$. El lema de Yoneda nos dice que tenemos un funtor

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}\colon \mathbf{C} &\to \mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Set}), \\ X &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X), \end{aligned}$$

que es **fielmente pleno**, lo cual quiere decir que para cada par de objetos X, X' tenemos una biyección

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Set})}(\mathcal{Y}(X), \mathcal{Y}(X')), \\ f &\mapsto \mathcal{Y}(f). \end{aligned}$$

En consecuencia la categoría $\mathbf{C}$ puede ser vista como una subcategoría plena de la categoría más grande $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Set})$. El funtor $\mathcal{Y}$ recibe el nombre de **encajamiento de Yoneda** y tiene un rol fundamental en el álgebra. De modo similar, tenemos la versión contravariante

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}\colon \mathbf{C}^\circ &\to \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{Set}), \\ X &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -). \end{aligned}$$

6.4. Corolario.

- *Si $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ para algún objeto X, entonces X está definido de manera única salvo isomorfismo.*

- *Si $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ para algún objeto Y, entonces Y está definido de manera única salvo isomorfismo.*

Demostración. Por ejemplo, supongamos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) \cong F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -).$$

Este isomorfismo de funtores corresponde a un par de transformaciones naturales

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -), \quad \beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)$$

tales que

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)}, \quad \alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', -)}.$$

Por el encajamiento de Yoneda, α y β corresponden a morfismos $f\colon X' \to X$ y $g\colon X \to X'$, tales que $g \circ f = \mathrm{id}_{X'}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_X$. ∎

6.5. Definición. Si para un funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ (resp. $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$) tenemos un isomorfismo $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$ (resp. $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)$) para algún objeto $X \in \mathbf{C}$, se dice que F es un funtor **representable**[*], y que F es **representado** por X. (Y Yoneda nos dice que este X es único salvo isomorfismo.)

Terminamos nuestra discusión de los funtores $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,-)$[**], con una propiedad importante: $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Z)$ preserva productos y $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,-)$ convierte coproductos en productos (porque es un funtor contravariante):

6.6. Ejercicio. *Sea $Z \in \mathbf{C}$ un objeto fijo. Demuestre a partir de las propiedades universales de productos y coproductos que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,-)$ preserva productos y que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Z)$ convierte coproductos en productos. Es decir, si existen productos $X \times Y$ y coproductos $X \sqcup Y$, entonces tenemos biyecciones naturales entre conjuntos*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, X\times Y) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y),\\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X\sqcup Y, Z) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z).\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} X \xleftarrow{p_X} X\times Y \xrightarrow{p_Y} Y & \rightsquigarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X) \xleftarrow{p_{X*}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X\times Y) \xrightarrow{p_{Y*}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)\\ X \xrightarrow{i_X} X\sqcup Y \xleftarrow{i_Y} Y & \rightsquigarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z) \xleftarrow{i_X^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X\sqcup Y,Z) \xrightarrow{i_Y^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)\end{array}$$

En otras palabras, $X \times Y$ es el objeto que representa al funtor

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y)\colon \mathbf{C}^\circ &\to \mathbf{Set},\\ Z &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y).\end{aligned}$$

y $X \sqcup Y$ es el objeto que representa al funtor

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,-)\colon \mathbf{C} &\to \mathbf{Set},\\ Z &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z).\end{aligned}$$

De la misma manera, cuando productos $\prod_i X_i$ y coproductos $\coprod_i X_i$ existen, tenemos isomorfismos de funtores

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\prod_i X_i) &\cong \prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X_i),\\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\coprod_i X_i,-) &\cong \prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i,-).\end{aligned}$$

Entonces, los productos y coproductos pueden ser definidos como objetos que representan a los funtores $\prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X_i)$ y $\prod_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i,-)$.

Los funtores representables son un pilar de las matemáticas porque muchas construcciones universales pueden ser formuladas en términos de representabilidad. El lema de Yoneda tiene el privilegio de ser uno de los resultados más tautológicos y profundos al mismo tiempo.

[*] En el caso contravariante $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ algunos dicen que F es **correpresentado** por X, pero yo no voy a usar esta terminología.

[**] Note que $(-,-)$ parece un *smiley* japonés.

Álgebra homológica, día 3

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

10 de agosto de 2016

7. Funtores adjuntos

Como hemos notado en la primera lección, el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ está relacionado con el funtor $-\otimes_R M\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ por la biyección *natural*

$$\operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

Este es un caso particular de funtores adjuntos:

7.1. Definición. Sean $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ dos funtores entre categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$. Se dice que F es **adjunto por la izquierda** a G y que G es **adjunto por la derecha** a F si para cada $X \in \mathbf{C}$ y $Y \in \mathbf{D}$ tenemos una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)).$$

La naturalidad quiere decir que para X fijo la biyección

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), -) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(-))$$

es un isomorfismo de funtores $\mathbf{D} \to \mathbf{Set}$, y para Y fijo la biyección

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, G(Y))$$

es también un isomorfismo de funtores $\mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}$.

7.2. Ejemplo.

- En la primera lección hemos visto que el funtor $-\otimes_R M$ es adjunto por la izquierda a $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)$:

  $$\operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \cong \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

- Tenemos un isomorfismo *natural* $L \otimes_R M \cong M \otimes_R L$, de donde el funtor $M \otimes_R -$ es adjunto por la izquierda a $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)$:

  $$\operatorname{Hom}_R(M \otimes_R L, N) \cong \operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \cong \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

- El funtor contravariante $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)$ es adjunto... a sí mismo:

  $$\operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)) \cong \operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \cong \operatorname{Hom}_R(M \otimes_R L, N) \cong \operatorname{Hom}_R(M, \underline{\operatorname{Hom}}_R(L,N)).$$

  En efecto, el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)$ es contravariante y puede ser visto como un funtor $R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ o como un funtor $R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$. Entonces la biyección natural de arriba puede ser escrita como

  $$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ}(\underline{\operatorname{Hom}}_R(L,N), M) \cong \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

  y el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$ es adjunto por la izquierda al funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód}$. Es una situación bastante común cuando un funtor contravariante $F\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{C}$ es adjunto a sí mismo, precisamente porque F puede ser visto como un funtor $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^\circ$.

▲

Curiosamente, los funtores adjuntos fueron descubiertos por Daniel Kan (1927–2013) en los 50 cuando él asistió a lecciones de álgebra homológica de Eilenberg y vio la adjunción entre $- \otimes_R M$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$. Cuando Eilenberg y Mac Lane sentaron las bases de la teoría de categorías, ellos no se dieron cuenta de la importancia de las adjunciones ya que relacionan funtores $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ que van en direcciones *opuestas*. Kan era estudiante de Eilenberg y descubrió varias aplicaciones de métodos categóricos a geometría, específicamente la teoría de homotopías.

El término "funtores adjuntos" fue introducido por el categorista William Lawvere y viene del análisis funcional: se dice que dos operadores $A\colon H_1 \to H_2$ y $A^*\colon H_2 \to H_1$ entre espacios de Hilbert son **adjuntos** si

$$\langle Ah_1, h_2\rangle_2 = \langle h_1, A^* h_2\rangle_1.$$

Lawvere aprendió categorías mientras daba clases de análisis funcional. ¿No es un ejemplo espectacular de la utilidad del análisis?

7.3. Ejercicio. *Los funtores adjuntos aparecen en varios contextos en álgebra y geometría. Lamentablemente, no tenemos bastante tiempo para ver muchos ejemplos; aquí sugiero algunos como ejercicios. Verifique que en la lista de abajo los funtores son de verdad funtores, describa explícitamente las biyecciones* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y))$ *y demuestre que son naturales.*

- *Ya hemos visto otra adjunción en la primera lección. Tenemos el* ***funtor olvidadizo*** R-**Mód** $\to$ **Set** *que para cada R-módulo M "olvida" su estructura y asocia a M el conjunto subyacente M. La construcción del R-módulo libre* $R\langle X\rangle$ *a partir de un conjunto X es el funtor adjunto por la izquierda a este funtor:*

$$\mathrm{Hom}_R(R\langle X\rangle, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, M).$$

- *La adjunción entre* $- \otimes_R M$ *y* $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$ *tiene un análogo aún más sencillo. Para cada conjunto fijo X tenemos el funtor*

$$- \times X\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

que es adjunto por la izquierda al funtor

$$(-)^X := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, -)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set},$$

es decir, tenemos una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y \times X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z^X).$$

- *Si X es un espacio topológico, podemos olvidar su topología y considerar a X como un conjunto. Esto define el funtor olvidadizo*

$$Olv\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}.$$

Un funtor adjunto a Olv debe ir en la otra dirección: para un conjunto X definir alguna topología sobre el mismo. De hecho, hay dos modos canónicos de hacerlo: definir sobre X la ***topología discreta****, donde cada subconjunto* $U \subseteq X$ *es abierto, o la* ***topología indiscreta****, donde los únicos subconjuntos abiertos son* $\emptyset$ *y X. Esto define dos funtores diferentes*

$$Discr, Indiscr\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}.$$

Resulta que Olv es adjunto por la izquierda a Indiscr y por la derecha a Discr:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Olv(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Indiscr(Y)),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Discr(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Olv(Y)).$$

- *Tenemos el funtor de inclusión de la categoría de grupos abelianos en la categoría de grupos:*

$$i\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}.$$

*Un funtor adjunto a i debe construir un grupo abeliano a partir de un grupo G de manera canónica. Como sabemos, tenemos que considerar la **abelianización**:*

$$G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G].$$

Es un funtor $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ *que es adjunto por la izquierda a i:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G^{\mathrm{ab}}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, i(A)).$$

- *Si R es un anillo, entonces sus elementos invertibles forman un grupo* $R^\times$*. Es un funtor*

$$(-)^\times\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}.$$

Un funtor adjunto debe construir cierto anillo a partir de un grupo G de manera canónica. Es la construcción del anillo $\mathbb{Z}[G]$ *que consiste de las sumas formales* $\sum_{g\in G} n_g\, g$ *y la multiplicación está definida por la multiplicación en G. Esto es un funtor*

$$\mathbb{Z}[-]\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ring},$$

que es adjunto por la izquierda a $(-)^\times$*:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[G], R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, R^\times).$$

Los funtores adjuntos están relacionados con los funtores representables:

7.4. Observación.

1) *Para un funtor* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *existe un adjunto por la derecha si y solamente si para cada* $Y \in \mathbf{D}$ *el funtor*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y)\colon \mathbf{C}^\circ &\to \mathbf{Set},\\ X &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \end{aligned}$$

es representable, es decir isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X')$ *para algún* $X' \in \mathbf{C}$.

2) *Para un funtor* $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *existe un adjunto por la izquierda si y solamente si para cada* $X \in \mathbf{C}$ *el funtor*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(-))\colon \mathbf{D} &\to \mathbf{Set},\\ Y &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \end{aligned}$$

es representable, es decir isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Y', -)$ *para algún* $Y' \in \mathbf{D}$.

Demostración. Por ejemplo, veamos la primera parte. Si F es adjunto por la izquierda a G, entonces para cada $Y \in \mathbf{D}$ tenemos el isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, G(Y))$$

y $X' := G(Y)$ representa el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y)$. Recíprocamente, supongamos que para cada $Y \in \mathbf{D}$ tenemos isomorfismos

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X').$$

Sea $G(Y) := X'$. Un morfismo $f\colon Y_1 \to Y_2$ en $\mathbf{D}$ induce una transformación natural entre funtores

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X_1') \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y_1) \xRightarrow{f\circ -} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y_2) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X_2'),$$

que por el encajamiento de Yoneda corresponde a un morfismo único $X_1' \to X_2'$. Esto define un morfismo $G(f)\colon G(X_1) \to G(X_2)$, y se ve que G es un funtor $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$. ■

7.5. Observación (Uno de los adjuntos define al otro, salvo isomorfismo).

1) *Si $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es adjunto por la izquierda a dos funtores $G, G'\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, entonces $G \cong G'$.*

2) *Si $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ es adjunto por la derecha a dos funtores $F, F'\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, entonces $F \cong F'$.*

Demostración. Demostremos la primera parte y la segunda es idéntica. Si tenemos biyecciones naturales

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G'(Y)),$$

entonces por el lema de Yoneda tenemos isomorfismos $\alpha_Y\colon G(Y) \xrightarrow{\cong} G'(Y)$ para cada Y. Para que esto sea un isomorfismo de funtores $G \cong G'$, falta verificar que los α_Y definen una transformación natural, es decir que para cada morfismo $f\colon Y \to Y'$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "G(f)"'] & G'(Y) \arrow[d, "G'(f)"] \\
G(Y') \arrow[r, "\alpha_{Y'}"'] & G'(Y')
\end{tikzcd}$$

Pero, también gracias a Yoneda, este diagrama es conmutativo si y solamente si para cada X el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\alpha_{Y*}"] \arrow[d, "G(f)_*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G'(Y)) \arrow[d, "G'(f)_*"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y')) \arrow[r, "\alpha_{Y'*}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G'(Y'))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, y por la naturalidad de la biyección, el último diagrama corresponde a

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y') \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y')
\end{tikzcd}$$

■

7.6. Ejemplo. Todo esto quiere decir que el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, -)$ define, salvo isomorfismo, el funtor $- \otimes_R M$ y vice versa. ▲

La propiedad de ser un funtor adjunto (por la izquierda o por la derecha) es muy fuerte y tiene muchas consecuencias interesantes. Por ejemplo,

7.7. Observación. *Sea $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor adjunto por la izquierda a $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Entonces F preserva coproductos y G preserva productos, es decir para cualesquiera $X, X' \in \mathbf{C}$ y $Y, Y' \in \mathbf{D}$*

$$\begin{aligned} F(X \sqcup X') &\cong F(X) \sqcup F(X'),\\ G(Y \times Y') &\cong G(Y) \times G(Y'). \end{aligned}$$

Demostración. Según un ejercicio de la última lección, para cualquier objeto Z tenemos isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(Z, X \times X') &\cong \operatorname{Hom}(Z, X) \times \operatorname{Hom}(Z, Y'),\\ \operatorname{Hom}(X \sqcup X', Z) &\cong \operatorname{Hom}(X, Z) \times \operatorname{Hom}(X', Z). \end{aligned}$$

Ahora tenemos isomorfismos naturales para cada $Z \in \mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X \sqcup X'), Z) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X \sqcup X', G(Z))\\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Z)) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X', G(Z))\\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(F(X'), Z)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X) \sqcup F(X'), Z). \end{aligned}$$

Y el lema de Yoneda implica que $F(X \sqcup X') \cong F(X) \sqcup F(X')$. De modo similar se demuestra que $G(Y \times Y') \cong G(Y) \times G(Y')$. ■

A veces es útil otra descripción de adjunción de funtores:

7.8. Observación. *Consideremos una adjunción*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)).$$

En particular, tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X)) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X)),\\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(FG(Y), Y) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y)). \end{aligned}$$

- *Sea $\eta_X\colon X \to GF(X)$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon F(X) \to F(X)$ bajo la primera biyección.*
- *Sea $\epsilon_Y\colon FG(Y) \to Y$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon G(Y) \to G(Y)$ bajo la segunda biyección.*

*Entonces los η_X definen una transformación natural $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F$ (la **unidad de la adjunción**) y los ϵ_Y definen una transformación natural $F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ (las **counidad de la adjunción**), y la adjunción puede ser escrita como*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)),\\ &(F(X) \xrightarrow{f} Y) \mapsto (GF(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)) \circ (X \xrightarrow{\eta_X} GF(X)),\\ (FG(Y) \xrightarrow{\epsilon_Y} Y) \circ (F(X) \xrightarrow{F(g)} FG(Y)) \hookleftarrow (X \xrightarrow{g} G(Y)). \end{aligned}$$

Demostración. Por ejemplo, para ver que $\eta_X \colon X \to GF(X)$ define una transformación natural, tenemos que ver que los siguientes diagramas son conmutativos para cada morfismo $\phi \colon X \to X'$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\phi"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(\phi)"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & GF(X')
\end{tikzcd}$$

De hecho, por la definición de η_X, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "F(\phi)\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "GF(\phi)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X')) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X')) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X'), F(X')) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u, "-\circ F(\phi)"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', GF(X')) \arrow[u, "-\circ\phi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
F(\phi) \arrow[r, mapsto] & GF(\phi) \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ \phi \\
\mathrm{id}_{F(X')} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \eta_{X'} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

De modo similar, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "G(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & G(f) \circ \eta_X
\end{tikzcd}$$

Entonces $F(X) \xrightarrow{f} Y$ corresponde a $G(f) \circ \eta_X$. La verificación que ϵ es una transformación natural $F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ y que $X \xrightarrow{g} G(Y)$ corresponde a $\epsilon_Y \circ F(g)$ es similar. ∎

Nuestra introducción minimalista y pragmática a las categorías se termina aquí. A partir de ahora vamos a estudiar categorías con estructuras adicionales, en particular objetos cero y estrucura aditiva (cuando los $\operatorname{Hom}(X, Y)$ son grupos abelianos).

10. Categorías con objeto cero

10.1. Definición. Se dice que 0 es un **objero cero** de una categoría si para cada objeto M existe un morfismo único $0 \to M$ y $M \to 0$.

10.2. Observación. *Supongamos que un objeto cero 0 existe.*

1) *Entre cada par de objetos M y N existe un morfismo único 0_{MN} (**morfismo cero**) que se factoriza a través de 0:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "0_{MN}"] \arrow[dr, "\exists!"'] & & N \\ & 0 \arrow[ur, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

2) *Tenemos*

$$(L \xrightarrow{0_{LM}} M \xrightarrow{f} N) = (L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{0_{MN}} N) = 0_{LN}$$

y en particular, $0_{MN} \circ 0_{LM} = 0_{MN}$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr] \arrow[dr, "\exists!"'] & & M \arrow[rr] \arrow[dr, "\exists!"] & & N \\ & 0 \arrow[ur, "\exists!"] \arrow[rr, "\exists!", "=\mathrm{id}_0"'] & & 0 \arrow[ur, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

3) *Un objeto cero es único salvo isomorfismo.*

Demostración. 1) y 2) están claros. Para 3) notemos que si 0 y $0'$ son dos objetos ceros, entonces existen morfismos únicos $0 \to 0'$ y $0' \to 0$. Pero sus composiciones $0 \to 0' \to 0$ y $0' \to 0 \to 0'$ deben ser id_0 y $\mathrm{id}_{0'}$. ■

10.3. Ejemplo. En la categoría R-**Mód** un módulo cero 0 es objeto cero en el sentido de arriba. En teoría, cada módulo cero puede tener cualquier conjunto subyacente $\{*\}$, pero todos son obviamente isomorfos. Por eso solemos decir "*el* modulo cero", y "*el* objeto cero" en general. El morfismo cero $0_{MN}\colon M \to N$ es el morfismo que aplica cada elemento $x \in M$ a $0 \in N$. ▲

10.4. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** el grupo trivial $\{e\}$ es un objeto cero. ▲

10.5. Ejemplo. En la categoría de conjuntos **Set** no hay objeto cero. Específicamente, se ve que si I es un conjunto tal que para cualquier otro conjunto X tenemos una sola aplicación $I \to X$, entonces $I = \emptyset$. Si T es un conjunto tal que para cualquier otro conjunto X tenemos una sola aplicación $X \to T$, entonces $T = \{*\}$ es algún conjunto compuesto de un elemento. ▲

10.6. Ejercicio.

1) *Si m es un monomorfismo y $m \circ f = 0$ para algún f, entonces $f = 0$.*

2) *Si e es un epimorphismo y $g \circ e = 0$ para algún g, entonces $g = 0$.*

11. Núcleos y conúcleos

En una categoría con objeto cero, tiene sentido la noción de núcleos y conúcleos:

11.1. Definición. En cualquier categoría con objeto cero, sea $f\colon M \to N$ un morfismo. Entonces su **núcleo** es un objeto $\ker f$ junto con morfismo $\ker f \to M$ que tiene la siguiente propiedad universal: la composición $\ker f \to M \xrightarrow{f} N$ es el morfismo cero, y si $k\colon L \to M$ es otro morfismo tal que $f \circ k = 0$, entonces k se factoriza de modo único por $\ker f \to M$:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
L \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

El **conúcleo** de f es un objeto $\operatorname{coker} f$ junto con morfismo $N \to \operatorname{coker} f$ que tiene la siguiente propiedad universal: la composición $M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f$ es cero, y si $k\colon N \to L$ es otro morfismo tal que $k \circ f = 0$, entonces k se factoriza de modo único por $N \to \operatorname{coker} f$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, "0"'] & N \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{coker} f \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
& & L
\end{tikzcd}$$

11.2. Ejemplo. Si $f\colon M \to N$ un morfismo de R-módulos, entonces se ve que el núcleo está definido por

$$\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\},$$

y el morfismo $\ker f \to M$ es la inclusión. El conúcleo está definido por

$$\operatorname{coker} f = N/\operatorname{im} f,$$

donde $\operatorname{im} f$ es la **imagen**, que es el submódulo de N definido por

$$\operatorname{im} f = \{f(x) \mid x \in M\}.$$

El morfismo $N \to \operatorname{coker} f$ es la proyección. ▲

11.3. Observación.

1) *Si* $\ker(M \xrightarrow{f} N)$ *existe, entonces el morfismo* $\ker f \to M$ *es mono y el objeto* $\ker f$ *es único salvo isomorfismo.*

2) *Si* $\operatorname{coker}(M \xrightarrow{f} N)$ *existe, entonces el morfismo* $N \to \operatorname{coker} f$ *es epi y el objeto* $\operatorname{coker} f$ *es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Para el lector que no había sufrido antes argumentos categóricos, voy a demostrar la parte sobre $\ker f$ y dejo la parte sobre $\operatorname{coker} f$ como un ejercicio (invirtiendo las flechas).

Sean $L \xrightarrow{g,g'} \ker f$ dos flechas tales que $k \circ g = k \circ g'$. En particular, $f \circ k \circ g = f \circ k \circ g' = 0$, y por la propiedad universal del núcleo, debe existir un morfismo único $L \xrightarrow{h} \ker f$ tales que $k \circ g = k \circ g' = k \circ h$. Entonces $h = g = g'$.

$$L \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \ker f \xrightarrow{k} M \xrightarrow{f} N$$

Ahora sean K y K' dos objetos con morfismos $K \xrightarrow{k} M$ y $K' \xrightarrow{k'} M$ que satisfacen la propiedad universal del núcleo. Entonces existen morfismos únicos $K' \xrightarrow{i} K$ y $K \xrightarrow{j} K'$ tal que $k \circ i = k'$ y $k' \circ j = k$. Tenemos $k \circ i \circ j = k \circ \mathrm{id}_K$, pero k es un monomorfismo, y por lo tanto $i \circ j = \mathrm{id}_K$. De modo similar, $k' \circ j \circ i = k' \circ \mathrm{id}_{K'}$ y $j \circ i = \mathrm{id}_{K'}$. Las flechas i y j definen un isomorfismo $K \cong K'$. ■

Aquí están algunas propiedades inmediatas:

11.4. Ejercicio.

1) *Si $m\colon M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo, entonces su núcleo es el morfismo cero $0 \to M$.*

2) *Si $e\colon M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo, entonces su conúcleo es el morfismo cero $N \to 0$.*

3) *Para el morfismo cero $0_{MN}\colon M \to N$ el morfismo $\ker(0_{MN}) \to M$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad $\mathrm{id}_M\colon M \to M$.*

4) *Para el morfismo cero $0_{MN}\colon M \to N$ el morfismo $N \to \operatorname{coker}(0_{MN})$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad $\mathrm{id}_N\colon N \to N$.*

Álgebra homológica, día 4

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

11 de agosto de 2016

12. Categorías aditivas: objeto cero, adición de morfismos, (bi)productos

12.1. Definición. Una **categoría aditiva A** es una categoría que satisface las siguientes propiedades:

1) Existe un **objeto cero** $0 \in \mathbf{A}$.

2) Cada $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$ admite una estructura de grupo abeliano que es bilineal respecto a la composición:
$$(g+g') \circ f = g \circ f + g' \circ f \quad \text{y} \quad g \circ (f+f') = g \circ f + g \circ f'.$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & M \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & N \end{tikzcd}$$

3) Para cada par de objetos M y N existe su producto $M \times N$.

12.2. Ejemplo. Sea R un anillo (no necesariamente conmutativo). Podemos ver R como una categoría donde hay un objeto $*$, cada morfismo $* \to *$ corresponde a algún elemento $r \in R$, y la composición $r \circ s$ corresponde a la multiplicación en R. En particular, $\mathrm{id}_* \colon * \to *$ corresponde a la identidad $1 \in R$. La adición en R corresponde a una estructura de grupo abeliano sobre $\operatorname{Hom}(*, *)$ y es bilineal, por la definición de anillos.

Empero, no es una categoría aditiva: el único objeto $*$ no es objeto cero (a menos que $R = 0$ sea el anillo trivial). ▲

12.3. Ejemplo. En la categoría de R-módulos, los morfismos $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ forman un grupo abeliano respecto a la adición "punto por punto":
$$(f \pm f')(x) := f(x) \pm f'(x).$$

Y esta operación es compatible con la composición de morfismos. Finalmente, para cada pareja M, N de R-módulos se ve que su producto es el R-módulo definido por
$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, \ y \in N\}$$
con estructura de grupo abeliano $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$ y con acción de R definida por $r \cdot (x, y) := (r \cdot x, r \cdot y)$. ▲

12.4. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** (no necesariamente abelianos), los homomorfismos entre dos grupos no abelianos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ no forman un grupo abeliano en ningún sentido natural. Más adelante vamos a ver que de hecho, **Grp** no es una categoría aditiva. ▲

12.5. Observación. *Si una categoría* $\mathbf{A}$ *tiene un objeto cero y si* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$ *tienen estructura de grupo abeliano, entonces* 0_{MN} *es el cero respecto a esta estructura.*

Demostración. Si $0 \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$ es el elemento cero respecto a la estructura de grupo abeliano, entonces $0 \circ f = g \circ 0 = 0$ para cada $f\colon M' \to M$ y $g\colon N \to N'$, porque la composición es distributiva respecto a la adición, y por lo tanto $0 \circ f = (0-0) \circ f = 0 \circ f - 0 \circ f = 0$ y $g \circ 0 = g \circ (0-0) = g \circ 0 - g \circ 0 = 0$.

Notamos que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,0) = \{M \to 0\}$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(0,N) = \{0 \to N\}$ son grupos abelianos triviales, entonces la composición $M \to 0 \to N$ debe ser el elemento cero en $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$. ■

12.6. Observación. *En una categoría aditiva, si* $\ker f = 0$*, entonces* f *es un monomorfismo. Si* $\operatorname{coker} f = 0$*, entonces* f *es un epimorfismo.*

Demostración. Si $\ker f = 0$, entonces para dos morfismos $g, g'\colon L \to M$ tales que $f \circ g = f \circ g'$ tenemos $f \circ (g - g') = 0$, y entonces la propiedad universal del núcleo dice que, $g - g'$ se factoriza por 0, y por lo tanto $g - g' = 0$ y $g = g'$. El mismo argumento demuestra que $\operatorname{coker} f = 0$ implica que f es un epimorfismo. ■

La existencia de la estructura de grupo abeliano sobre $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$ es una propiedad muy fuerte que implica que productos y coproductos binarios son isomorfos:

12.7. Proposición. *Sea* $\mathbf{A}$ *una categoría aditiva. Entonces para cada par de objetos* M, N *las siguientes cosas son isomorfas:*

- *el producto* $M \xleftarrow{p_M} M \times N \xrightarrow{p_N} N$
- *el coproducto* $M \xrightarrow{i_M} M \sqcup N \xleftarrow{i_N} N$
- *el* ***biproducto*** $M \oplus N$*, que es un objeto junto con morfismos* $\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift right, "i_M"'] & M \oplus N \arrow[l, shift right, "p_M"'] \arrow[r, shift left, "p_N"] & N \arrow[l, shift left, "i_N"] \end{tikzcd}$ *que satisfacen las identidades*

  $$p_M \circ i_M = \mathrm{id}_M, \quad p_N \circ i_N = \mathrm{id}_N, \quad p_N \circ i_M = 0_{MN}, \quad p_M \circ i_N = 0_{NM}, \quad i_M \circ p_M + i_N \circ p_N = \mathrm{id}_{M \oplus N}.$$

  (en particular, i_M *y* i_N *son monomorfismos y* p_N *y* p_M *son epimorfismos.)*

Más precisamente, $M \xleftarrow{p_M} M \oplus N \xrightarrow{p_N} N$ *es un producto,* $M \xrightarrow{i_M} M \oplus N \xleftarrow{i_N} N$ *es un coproducto, y cada producto (coproducto) es un biproducto.*

Demostración. Si $M \oplus N$ es un biproducto, entonces para demostrar que es un producto, para cada objeto L y morfismos $L \xrightarrow{f} M$ y $L \xrightarrow{g} N$ tenemos que ver que existe un morfismo único $\binom{f}{g}\colon L \to M \oplus N$ tal que $p_M \circ \binom{f}{g} = f$ y $p_N \circ \binom{f}{g} = g$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift right, "i_M"'] & M \oplus N \arrow[l, shift right, "p_M"'] \arrow[r, shift left, "p_N"] & N \arrow[l, shift left, "i_N"] \\
& L \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\binom{f}{g}"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que en este caso tendríamos

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathrm{id}_{M \oplus N} \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (i_M \circ p_M + i_N \circ p_N) \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = i_M \circ f + i_N \circ g,$$

y por lo tanto la única posibilidad es definir

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := i_M \circ f + i_N \circ g.$$

Luego

$$p_M \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = p_M \circ (i_M \circ f + i_N \circ g) = \underbrace{p_M \circ i_M}_{=\mathrm{id}} \circ f + \underbrace{p_M \circ i_N}_{=0} \circ g = f,$$

$$p_N \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = p_N \circ (i_M \circ f + i_N \circ g) = \underbrace{p_N \circ i_M}_{=0} \circ f + \underbrace{p_N \circ i_N}_{=\mathrm{id}} \circ g = g.$$

La demostración de que $M \oplus N$ es un coproducto es similar: para cada objeto L y cada par de morfismos $f\colon M \to L$ y $g\colon N \to L$ existe un morfismo único (f,g) tal que $(f,g) \circ i_M = f$ y $(f,g) \circ i_N = g$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift right, "i_M"'] \arrow[dr, "f"'] & M \oplus N \arrow[l, shift right, "p_M"'] \arrow[r, shift left, "p_N"] \arrow[d, dashed, "{(f,g)}"] & N \arrow[l, shift left, "i_N"] \arrow[dl, "g"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

De hecho, se ve que la única opción es definir

$$(f,g) := f \circ p_M + g \circ p_N.$$

Ahora tenemos que ver que cada producto $M \times N$ define un biproducto. A saber, por la propiedad universal del producto podemos considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, "0_{MN}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\ i_M"] & \\
M & M \times N \arrow[l, "p_M"'] \arrow[r, "p_N"] & N \\
& N \arrow[ul, "0_{NM}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_N"'] \arrow[u, dashed, "\exists!\ i_N"'] &
\end{tikzcd}$$

Tenemos $p_N \circ i_N = \mathrm{id}_N$, $p_M \circ i_M = \mathrm{id}_M$, $p_M \circ i_N = 0_{NM}$, $p_N \circ i_M = 0_{MN}$. Además, $\mathrm{id}_{M\times N} = i_M \circ p_M + i_N \circ p_N$:

$$p_M \circ \mathrm{id}_{M\times N} = p_M = \underbrace{p_M \circ i_M}_{=\mathrm{id}} \circ p_M + \underbrace{p_M \circ i_N}_{=0} \circ p_N = p_M \circ (i_M \circ p_M + i_N \circ p_N),$$

$$p_N \circ \mathrm{id}_{M\times N} = p_N = \underbrace{p_N \circ i_M}_{=0} \circ p_M + \underbrace{p_N \circ i_N}_{=\mathrm{id}} \circ p_N = p_N \circ (i_M \circ p_M + i_N \circ p_N).$$

De modo similar, cada coproducto $M \sqcup N$ es un biproducto:

$$
\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"'] \arrow[d, "i_M"] \arrow[dr, "0_{MN}"] & \\
M & M \sqcup N \arrow[l, dashed, "p_M", "\exists!"'] \arrow[r, dashed, "p_N", "\exists!"'] & N \\
& N \arrow[ul, "0_{NM}"] \arrow[u, "i_N"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_N"'] &
\end{tikzcd}
$$

■

12.8. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** el producto $G \times H$ es el producto de grupos habitual, pero el coproducto es el **producto libre** $G * H$, que es una cosa muy diferente (por ejemplo, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). Entonces **Grp** no es una categoría aditiva. ▲

A partir de ahora, si **A** es una categoría aditiva, vamos a denotar el producto, coproducto y biproducto de M y N por el mismo símbolo $M \oplus N$, porque es la misma cosa.

12.9. Ejemplo. En la categoría de R-módulos, el producto $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M,\ y \in N\}$ es también coproducto y biproducto.

Notemos que en la proposición 12.7 se trata de productos y coproductos *finitos*. Si $\{M_k\}_{k \in I}$ es una familia infinita de R-módulos, se ve que el producto $\prod_k M_k$ es isomorfo al conjunto de sucesiones

$$\prod_k M_k = \{(x_k \in M_k)_{k \in I}\}$$

con la estructura obvia de R-módulo

$$
\begin{aligned}
(x_k)_{k \in I} + (x'_k)_{k \in I} &:= (x_k + x'_k)_{k \in I}, \\
r \cdot (x_k)_{k \in I} &:= (r \cdot x_k)_{k \in I}.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, el coproducto $\coprod_k M_k$ no es la misma cosa: es isomorfo al submódulo de $\prod_k M_k$

$$\coprod_k M_k = \{(x_k \in M_k)_{k \in I} \mid x_k = 0 \text{ para cada } k \in I, \text{ excepto un número finito}\}.$$

Entonces, en las categorías abelianas productos infinitos no son la misma cosa que coproductos. ▲

12.10. Ejercicio. *Demuestre que $\prod_k M_k$ definido arriba satisface la propiedad universal de productos en la categoría de R-módulos y que $\coprod_k M_k$ satisface la propiedad universal de coproductos.*

Para R-módulos normalmente $\bigoplus_k M_k$ denota el coproducto $\coprod_k M_k$. Para productos (coproductos, biproductos) finitos se usa la notación $M \oplus N$. Recordamos la notación que hemos usado en la demostración de 12.7:

12.11. Notación. En una categoría aditiva con productos (coproductos, biproductos)

- para morfismos $f\colon L \to M$ y $g\colon L \to N$, el morfismo $\binom{f}{g}\colon L \to M \oplus N$ es el único morfismo que satisface
$$p_M \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f \quad \text{y} \quad p_N \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = g,$$
y tenemos $\binom{f}{g} = i_M \circ f + i_N \circ g$;

- para morfismos $f\colon M \to L$ y $g\colon N \to L$ el morfismo $(f,g)\colon M \oplus N \to N$ es el único que satisface

$$(f,g) \circ i_M = f \quad \text{y} \quad (f,g) \circ i_N = g,$$

  y tenemos $(f,g) = f \circ p_M + g \circ p_N$.

12.12. Notación. A veces vamos a usar "matrices"

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2.$$

Es el morfismo que está definido de modo único por los cuatro morfismos

$$\begin{aligned}
f_{11} &= p_1 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_1\colon M_1 \to N_1,\\
f_{12} &= p_1 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_2\colon M_2 \to N_1,\\
f_{21} &= p_2 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_1\colon M_1 \to N_2,\\
f_{22} &= p_2 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_2\colon M_2 \to N_2.
\end{aligned}$$

12.13. Ejercicio. *1) La composición de estos morfismos corresponde al producto habitual de matrices:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}_{Y} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} \circ f_{11} + g_{12} \circ f_{21} & g_{11} \circ f_{12} + g_{12} \circ f_{22} \\ g_{21} \circ f_{11} + g_{22} \circ f_{21} & g_{21} \circ f_{12} + g_{22} \circ f_{22} \end{pmatrix}}_{Y \cdot X}$$

2) Esta notación con matrices es consistente con nuestras notaciones de arriba: para morfismos $g_1\colon L \to M_1$, $g_2\colon L \to M_2$ y $h_1\colon N_1 \to L$, $h_2\colon N_2 \to L$ tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &:= i_1 \circ g_1 + i_2 \circ g_2\colon L \to M_1 \oplus M_2\\
(h_1, h_2) &:= h_1 \circ p_1 + h_2 \circ p_2\colon N_1 \oplus N_2 \to L.
\end{aligned}$$

Las composiciones de estos morfismos con $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2$ corresponden a productos de matrices

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{11} \circ g_1 + f_{12} \circ g_2 \\ f_{21} \circ g_1 + f_{22} \circ g_2 \end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1 \circ f_{11} + h_2 \circ f_{21} & h_1 \circ f_{12} + h_2 \circ f_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3) Si quieren, pueden generalizar a la situación al caso de un morfismo

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \to N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$$

que se escribe en términos de una matriz de $m \times n$.
(Indicación: puede ser útil la identidad $\mathrm{id} = i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$*.)*

En términos de elementos, cuando se trabaja con R-módulos, pensamos en un elemento $x \in M_1 \oplus M_2$ como un vector columna $\binom{m_1}{m_2}$ para $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$, y para aplicar una matriz como arriba, tenemos que multiplicarla por la izquierda a $\binom{m_1}{m_2}$:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2) \\ f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2) \end{pmatrix}.$$

Aquí seguimos la tradición del álgebra lineal de escribir la acción de las matrices por la izquierda, de modo que los vectores son columnas. Muchos algebristas prefieren usar vectores fila y la acción de matrices por la derecha; en su notación todas nuestras matrices están transpuestas.

Terminamos con una observación importante: si tenemos una categoría con productos y coproductos y alguna estructura de grupos abelianos sobre $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$, tal estructura es rígida. En efecto, la adición de morfismos es una propiedad intrínseca de la categoría, porque $f + f'$ se expresa como composición de morfismos definidos por las propiedades universales de productos (coproductos, biproductos):

12.14. Observación. *Para cualquier categoría aditiva* $\mathbf{A}$ *con productos (coproductos, biproductos) el morfismo* $f + f'$ *es la composición*

$$M \xrightarrow{\Delta_M} M \oplus M \xrightarrow{f \oplus f'} N \oplus N \xrightarrow{\nabla_N} N$$

donde

- $\Delta_M := \binom{\mathrm{id}_M}{\mathrm{id}_M}$ *es el* ***morfismo diagonal****.*
- $\nabla_N := (\mathrm{id}_N, \mathrm{id}_N)$ *es el* ***morfismo codiagonal****.*
- $f \oplus f' := \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$.

Demostración.

$$\nabla_N \circ (f \oplus f') \circ \Delta_M = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_N & \mathrm{id}_N \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_M \\ \mathrm{id}_M \end{pmatrix} = f + f'.$$

∎

13. Funtores aditivos

13.1. Definición. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos categorías aditivas, entonces se dice que un funtor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es **aditivo** si las aplicaciones correspondientes

$$\begin{gathered} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M), F(N)), \\ f \mapsto F(f) \end{gathered}$$

son homomorfismos de grupos abelianos.

Hay otra caracterización de los funtores aditivos que suele ser más fácil de verificar:

13.2. Observación. $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es aditivo si y solamente si* F *preserva (co)productos, es decir para cada* $M, N \in \mathbf{A}$ *tenemos isomorfismos naturales*

$$F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N).$$

Demostración. El biproducto

$$M \underset{i_M}{\overset{p_M}{\leftrightarrows}} M \oplus N \underset{i_N}{\overset{p_N}{\rightleftarrows}} N$$

se caracteriza por las identidades

$$p_M \circ i_M = \mathrm{id}_M, \quad p_N \circ i_N = \mathrm{id}_N, \quad p_N \circ i_M = 0_{MN}, \quad p_M \circ i_N = 0_{NM}, \quad i_M \circ p_M + i_N \circ p_N = \mathrm{id}_{M \oplus N}.$$

Si F es aditivo, entonces aplicando F al diagrama de arriba se obtiene el biproducto

$$F(M) \underset{F(i_M)}{\overset{F(p_M)}{\leftrightarrows}} F(M \oplus N) \underset{F(i_N)}{\overset{F(p_N)}{\rightleftarrows}} F(N)$$

con identidades

$$\begin{aligned} F(p_M) \circ F(i_M) &= \mathrm{id}_{F(M)}, \\ F(p_N) \circ F(i_N) &= \mathrm{id}_{F(N)}, \\ F(p_N) \circ F(i_M) &= 0_{F(M)F(N)}, \\ F(p_M) \circ F(i_N) &= 0_{F(N)F(M)}, \\ F(i_M) \circ F(p_M) + F(i_N) \circ F(p_N) &= \mathrm{id}_{F(M \oplus N)}. \end{aligned}$$

Entonces, $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$. Finalmente, 12.14 demuestra que si F preserva (co)productos, entonces F preserva la adición de morfismos. ■

13.3. Ejemplo. Hemos observado en la segunda lección que para cada categoría **C** tenemos funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set} \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) \colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}.$$

Ahora si tenemos una categoría aditiva **A**, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$ son grupos abelianos, y de hecho, si $f \colon N \to N'$ y $g \colon M \to M'$ son morfismos en **A**, se ve que los morfismos correspondientes

$$f_* \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N') \quad \text{y} \quad g^* \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$$

son homomorfismos de grupos abelianos (porque la composición es distributiva respecto a la suma de morfismos). Entonces tenemos funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, -) \colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ab} \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, M) \colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab}.$$

Son aditivos porque

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, N \oplus N') \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, N) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, N'), \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M \oplus M', -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, -) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', -)$$

(porque en general $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, \prod_i X_i) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X_i)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\coprod_i X_i, -) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, -)$ en cualquier categoría **C**). ▲

14. Funtores adjuntos y funtores aditivos

Recordemos que tenemos adjunciones

$$\begin{gathered}
\operatorname{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \cong \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N)),\\
\operatorname{Hom}_R(M \otimes_R L, N) \cong \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N)),\\
\operatorname{Hom}_{R\textbf{-Mód}^\circ}(\underline{\operatorname{Hom}}_R(L, N), M) \cong \operatorname{Hom}_{R\textbf{-Mód}}(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N)).
\end{gathered}$$

Entonces la teoría general implica que $- \otimes_R M$ y $M \otimes_R -$ preservan coproductos, $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, -)$ preserva productos, y el funtor contravariante $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-, N)\colon R\textbf{-Mód}^\circ \to R\textbf{-Mód}$ preserva productos en $R\textbf{-Mód}^\circ$, es decir, convierte coproductos de R-módulos en productos. En una categoría aditiva productos y coproductos finitos coinciden con biproductos, por lo que tenemos isomorfismos naturales

$$\begin{gathered}
(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N),\\
M \otimes_R (N \oplus N') \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N'),\\
\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N \oplus N') \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N) \oplus \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N'),\\
\underline{\operatorname{Hom}}_R(M \oplus M', N) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N) \oplus \underline{\operatorname{Hom}}_R(M', N).
\end{gathered}$$

Esto quiere decir que $- \otimes_R N$, $M \otimes_R -$, $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, -)$, $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-, N)$ son funtores aditivos. En general tenemos la siguiente

14.1. Observación. *Sean $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ dos funtores adjuntos entre categorías aditivas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M), N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, G(N)).$$

Entonces

1) F y G son automáticamente funtores aditivos;

2) la biyección natural de arriba es automáticamente un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. En efecto, como adjunto por la izquierda, F preserva coproductos (y por lo tanto productos, biproductos); como adjunto por la derecha, G preserva productos (y por lo tanto coproductos, biproductos).

Luego, como hemos observado en la última lección, la biyección es dada por

$$\begin{gathered}
\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M), N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, G(N)),\\
f \mapsto G(f) \circ \eta_X.
\end{gathered}$$

Pero aquí G es un funtor aditivo, entonces $G(f + f') = G(f) + G(f')$. Y ya que η_X es un morfismo en la categoría aditiva $\mathbf{A}$, se sigue que $(G(f) + G(f')) \circ \eta_X = G(f) \circ \eta_X + G(f') \circ \eta_X$. ∎

14.2. Ejercicio. *1) Describa explícitamente los isomorfismos naturales*

$$\begin{gathered}
(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N),\\
M \otimes_R (N \oplus N') \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N'),\\
\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N \oplus N') \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N) \oplus \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N'),\\
\underline{\operatorname{Hom}}_R(M \oplus M', N) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N) \oplus \underline{\operatorname{Hom}}_R(M', N).
\end{gathered}$$

2) *Verifique directamente que para los funtores* $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$ *y* $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, N)$ *tenemos*

$$(f+g)_* = f_* + g_*, \quad (f+g)^* = f^* + g^*,$$

y que para los funtores $- \otimes_R N$ *y* $M \otimes_R -$

$$(f_1 + f_2) \otimes \mathrm{id}_N = (f_1 \otimes \mathrm{id}_N) + (f_2 \otimes \mathrm{id}_N), \quad \mathrm{id}_M \otimes (g_1 + g_2) = (\mathrm{id}_M \otimes g_1) + (\mathrm{id}_M \otimes g_2).$$

Álgebra homológica, día 5

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

12 de agosto de 2016

15. Categorías abelianas: imagenes y coimagenes

15.1. Definición. Sea **A** una categoría aditiva. Supongamos que para cada morfismo $f\colon M \to N$ existen su núcleo $\ker f \rightarrowtail M$ y conúcleo $N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$. Entonces definimos la **imagen** y **coimagen** de f como

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &:= \ker(N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f), \\ \operatorname{coim} f &:= \operatorname{coker}(\ker f \rightarrowtail M). \end{aligned}$$

15.2. Observación. *Sea* **A** *una categoría aditiva con núcleos y conúcleos. Entonces para cada morfismo* $f\colon M \to N$ *existe un único morfismo* $\overline{f}\colon \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, tail, "i"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} f \\ & \operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, tail, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Antes de todo, tal $\overline{f}$ es único porque q es epi y j es mono. Para construir $\overline{f}$, notamos que $f \circ i = 0$; entonces por la propiedad universal de $\operatorname{coker}(\ker f \to M) =: \operatorname{coim} f$ existe un único morfismo $\operatorname{coim} f \xrightarrow{g} N$ tal que $g \circ q = f$. Luego $p \circ f = p \circ g \circ q = 0$. El morfismo q es epi, por lo que $p \circ g = 0$. Por la propiedad universal de $\ker(N \to \operatorname{coker} f) =: \operatorname{im} f$, existe un único morfismo $\overline{f}$ tal que $j \circ \overline{f} = g$.

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, tail, "i"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} f \\ & \operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] \arrow[ur, dashed, "g"] & \operatorname{im} f \arrow[u, tail, "j"'] & \end{tikzcd}$$

∎

Por fin estamos listos para definir las categorías abelianas:

15.3. Definición. Una categoría **A** es **abeliana** si

1) **A** es aditiva (tiene objeto cero, adición de morfismos, (bi)productos);

2) para cada morfismo $f\colon M \to N$ existen su núcleo $\ker f \rightarrowtail M$ y conúcleo $N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$;

3) para cada morfismo $f\colon M \to N$ el morfismo canónico $\overline{f}\colon \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ es un isomorfismo.

La condición 3) parece un poco rara, pero quiere decir lo siguiente. Supongamos que $m\colon M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo. Entonces se ve que la condición 3) impone que m, salvo isomorfismo, debe ser el núcleo del morfismo $N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} m$:

$$m \cong \ker(N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} m).$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\cong"'] & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} m \\
& M \arrow[r, "\overline{f}", "\cong"'] & \operatorname{im} f \arrow[u, tail, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

De modo similar, si $e\colon M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo, la condición 3) nos dice que

$$e \cong \operatorname{coker}(\ker e \rightarrowtail N).$$

Entonces la condición 3) básicamente significa que

3*) cada monomorfismo en $\mathbf{A}$ es un núcleo y cada epimorfismo es un conúcleo.

La condición 3*) implica que en las categorías abelianas

$$\text{isomorfismo} = \text{epimorfismo} + \text{monomorfismo}$$

En general tenemos solo la implicación "$\Rightarrow$", mientras que la implicación "$\Leftarrow$", tal y como hemos mencionado, es falsa en muchas categorías. Sin embargo, en las categorías abelianas, si f es mono, entonces $f = \ker g$ para algún morfismo g, en particular $g \circ f = 0$. Pero si f es también epi, esto implica $g = 0$. Y como el núcleo del morfismo cero, f debe ser un isomorfismo.

De hecho, 3*) es equivalente a 3), pero la demostración es un poco tediosa; véase por ejemplo [Borceux, vol. II, Theorem 1.5.5].

15.4. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** (no necesariamente abelianos) se ve fácilmente que el núcleo de un homomorfismo de grupos $f\colon G \to H$ es (isomorfo a) $\{x \in G \mid f(x) = 1\}$. Además, es fácil observar que los monomorfismos son inclusiones de subgrupos $H \subset G$. Como sabemos, los núcleos de morfismos $f\colon G \to H$ corresponden a los subgrupos normales de G. Entonces, si $H \subset G$ es un subgrupo que no es normal, la inclusión $H \rightarrowtail G$ es un monomorfismo que no es un núcleo. Es otra razón por qué **Grp** no es abeliana, pero, como hemos notado en la última lección, ni siquiera es aditiva. ▲

15.5. Ejemplo. Existen categorías que son aditivas pero no son abelianas. Por ejemplo, en la categoría de R-módulos libres los conúcleos no existen porque el cociente de dos módulos libres M/N no es libre en general (ni siquiera sobre buenos anillos como $\mathbb{Z}$ y módulos finitamente generados). Sin embargo, si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces tenemos la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ que es abeliana (cada módulo sobre un cuerpo es automáticamente libre). ▲

15.6. Ejemplo. Hemos observado que la categoría de R-módulos es aditiva, y para cada morfismo existen su núcleo y conúcleo. Cada morfismo $f\colon M \to N$ se factoriza por su imagen $\operatorname{im} f \subset N$:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, tail] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & N \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker} f \\
& & \operatorname{im} f \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

Y por el **teorema del isomorfismo**

$$\operatorname{im} f \cong \ker(N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f) \cong \operatorname{coker}(\ker f \rightarrowtail M) \cong M/\ker f.$$

▲

Cuando todos los núcleos y conúcleos existen, son funtoriales:

15.7. Observación. *Supongamos que tenemos el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, "d"'] & N
\end{tikzcd}$$

Entonces

1) f *induce un único morfismo* $\ker d' \to \ker d$ *tal que el diagrama correspondiente es conmutativo;*

2) h *induce un único morfismo* $\operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ *tal que el diagrama correspondiente es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\ker d' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, dashed] & M' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h"] & \operatorname{coker} d' \arrow[d, dashed] \\
\ker d \arrow[r, tail, "i"'] & M \arrow[r, "d"'] & N \arrow[r, two heads, "p"'] & \operatorname{coker} d
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tenemos

$$d \circ f \circ i' = h \circ \underbrace{d' \circ i'}_{0} = 0,$$

y entonces por la propiedad universal del núcleo el morfismo $f \circ i'$ se factoriza de modo único por $\ker d$. Para $\operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ usamos la propiedad universal del conúcleo. ■

El hecho de que cada morfismo de R-módulos $f\colon M \to N$ se factoriza de modo único (salvo isomorfismo) en la composición de un epimorfismo $M \twoheadrightarrow \operatorname{im} f$ y monomorfismo $\operatorname{im} f \rightarrowtail N$ se generaliza a cualquier categoría abeliana:

15.8. Observación (factorización epi-mono). *Sea* $f\colon M \to N$ *un morfismo en una categoría abeliana. Entonces* f *se factoriza de modo único como una composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo.*

Demostración. Ya hemos observado en 15.2 que tal factorización existe: es dada por

$$M \twoheadrightarrow \operatorname{coim} f \cong \operatorname{im} f \rightarrowtail N;$$

tenemos que demostrar que es única. Supongamos que existe otra factorización $M \twoheadrightarrow I \rightarrowtail N$. Tenemos $p \circ j' \circ q' = p \circ f = 0$, pero q' es epi, entonces $p \circ j' = 0$. Entonces existe un único morfismo $j'' \colon I \to \operatorname{im} f$ tal que $j' = j \circ j''$, y j'' es mono porque j' es mono. De la misma manera, existe un único morfismo $q'' \colon \operatorname{coim} f \to I$ tal que $q'' \circ q = q'$, y q'' es epi.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, tail, "i"] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q'"] \arrow[dd, two heads, "q"'] & & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} f \\
& & I \arrow[ur, tail, "j'"'] \arrow[dr, dashed, tail, "j''"] & & \\
& \operatorname{coim} f \arrow[ur, dashed, two heads, "q''"] \arrow[rr, "\overline{f}", "\cong"'] & & \operatorname{im} f \arrow[uu, tail, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego $j \circ j'' \circ q'' \circ q = j' \circ q' = f$, entonces $j'' \circ q'' = \overline{f}$ porque $\overline{f}$ está definido de manera única (15.2). Pero $\overline{f}$ es un isomorfismo, por tanto epi y mono, y esto quiere decir que q'' es también mono y j'' es también epi. Concluimos que q'' y j'' son isomorfismos, porque son epi y mono al mismo tiempo. ∎

15.9. Ejercicio. *Observe que las nociones de núcleo y conúcleo son duales: las definiciones son las mismas, solo que las flechas van en la dirección opuesta. Entonces los núcleos en una categoría abeliana* $\mathbf{A}$ *corresponden a los conúcleos en* $\mathbf{A}^\circ$*. La categoría* $\mathbf{A}$ *es abeliana si y solamente si* $\mathbf{A}^\circ$ *es abeliana.*

Un poco de la historia. El álgebra homológica fue sistemáticamente desarollada por Henri Cartan y Samuel Eilenberg en el libro “Homological algebra” que fue publicado en 1953 pero había sido escrito mucho tiempo antes, con resultados solamente para R-módulos. En los años 50 los matemáticos se dieron cuenta de que una teoría similar podía ser desarollada para **haces** de R-módulos y otros contextos. David Buchsbaum, un estudiante de Eilenberg, descubrió en su tesis “Exact Categories and Duality” (1954) una lista de axiomas abstractos que eran suficientes para el álgebra homológica. En 1957 Alexander Grothendieck publicó en la revista matemática de la Universidad de Tohoku (Japón) su famoso artículo “Sur quelques points d’algèbre homologique”, que hoy en día se conoce como “el artículo de Tohoku”. Grothendieck demostró que era posible de aplicar las mismas construcciones a los haces y otras situaciones y dio una lista de axiomas (similar a la de Buchsbaum) bajo el término “categoría abeliana”. En particular, Grothendieck demostró que los haces también formaban una categoría abeliana. Por cierto, Cartan y Eilenberg, como geómetras, ya sabían que la cohomología de haces tenía que ser otro caso particular de cierta teoría general, pero no sabían resolver algunos problemas técnicos (existencia de suficientes objetos inyectivos en la categoría de haces de R-módulos).

17. Sucesiones exactas

17.1. Definición. Consideremos una sucesión de morfismos en una categoría abeliana (por ejemplo, una sucesión de morfismos de R-módulos)

$$(M^\bullet, f^\bullet) \colon \cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1} \to \cdots$$

Supongamos que $f^n \circ f^{n-1} = 0$. Entonces la composición $\operatorname{im} f^{n-1} \rightarrowtail M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1}$ es también cero y $\operatorname{im} f^{n-1} \rightarrowtail M^n$ se factoriza por $\ker f^n$. De la misma manera, $M^n \twoheadrightarrow \operatorname{im} f^n$ se factoriza por $\operatorname{coker} f^n$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{im} f^{n-1} \arrow[rr, tail, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, tail] & & \ker f^n \arrow[dl, tail] & \\
M^{n-1} \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "f^{n-1}"] & & M^n \arrow[rr, "f^n"] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & & M^{n+1} \\
 & \operatorname{coker} f^{n-1} \arrow[rr, two heads, dashed, "\exists!"] & & \operatorname{im} f^n \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
$$

Se dice que la sucesión es **exacta en** M^n si se cumple una de las siguientes propiedades (ejercicio: son equivalentes):

1) la composición $\ker f^n \rightarrowtail M^n \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f^{n-1}$ es cero,

2) $\operatorname{im} f^{n-1} \rightarrowtail \ker f^n$ es un isomorfismo,

3) $\operatorname{coker} f^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} f^n$ es un isomorfismo.

Si la sucesión es exacta en M^n para cada n, se dice simplemente que $(M^\bullet, f^\bullet)$ es una **sucesión exacta**.

17.2. Ejemplo. En el caso de R-módulos $\operatorname{im} f^{n-1}$ y $\ker f^n$ se identifican con submódulos de M^n y la sucesión $M^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \xrightarrow{f^n} M_{n+1}$ es exacta si y solamente si $\operatorname{im} f^{n-1} = \ker f^n$ (esto implica en particular $f^n \circ f^{n-1} = 0$, es decir $\operatorname{im} f^{n-1} \subseteq \ker f^n$). ▲

17.3. Ejemplo. Todo morfismo $f\colon M \to N$ forma parte de la sucesión exacta

$$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f \to 0$$

▲

17.4. Ejemplo. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

se llama una **sucesión exacta corta** y va a tener un rol fundamental en nuestro curso. En la categoría R-**Mód** esto significa que L puede ser visto como un submódulo de M y que p induce un isomorfismo $N \cong M/L$. ▲

17.5. Ejercicio. *1)* $0 \to M \xrightarrow{f} N$ *es exacta si y solamente si* f *es un monomorfismo.*

2) $M \xrightarrow{f} N \to 0$ *es exacta si y solamente si* f *es un epimorfismo.*

3) $0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} N$ *es exacta si y solamente si* $i = \ker g$.

4) $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} N \to 0$ *es exacta si y solamente si* $p = \operatorname{coker} f$.

19. Funtores exactos

19.1. Definición. Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo entre dos categorías abelianas. Consideremos una sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$:

$$(*) \qquad 0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

1) Se dice que F es **exacto por la izquierda** si para cada sucesión exacta corta (*) la sucesión correspondiente en $\mathbf{B}$
$$0 \to F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N)$$
es también exacta.

2) Se dice que F es **exacto por la derecha** si para cada sucesión exacta corta (*) la sucesión correspondiente en $\mathbf{B}$
$$F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N) \to 0$$
es también exacta.

3) Se dice que F es **exacto** si es exacto por la derecha y por la izquierda. Es decir, si F preserva la exactitud de cada sucesión (*):
$$0 \to F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N) \to 0$$
es también exacta.

A veces se usa otra definición un poco diferente, pero equivalente:

19.2. Ejercicio. *Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas.*

1) F es exacto por la izquierda si y solamente si para cada sucesión exacta
$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$$
la sucesión correspondiente
$$0 \to F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{f_*} F(N)$$
es también exacta. Esto es equivalente a la preservación del núcleo de todo morfismo $f\colon M \to N$:
$$\ker(F(M) \xrightarrow{f_*} F(N)) = F(\ker(M \xrightarrow{f} N)).$$

2) F es exacto por la derecha si para cada sucesión exacta
$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} N \to 0$$
la sucesión correspondiente
$$F(L) \xrightarrow{f_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N) \to 0$$
es también exacta. Esto es equivalente a la preservación del conúcleo de todo morfismo $f\colon L \to M$:
$$\operatorname{coker}(F(L) \xrightarrow{f_*} F(M)) = F(\operatorname{coker}(L \xrightarrow{f} M)).$$

Cuando F es un funtor contravariante $\mathbf{A}^\circ \to \mathbf{B}$, la noción de exactitud F es la misma, solo que hay que tener en cuenta que en la categoría $\mathbf{A}^\circ$ los morfismos van en la dirección opuesta:

- F es exacto por la izquierda si
$$0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ exacta} \quad \Rightarrow \quad F(N) \to F(M) \to F(L) \to 0 \text{ exacta;}$$
- F es exacto por la derecha si
$$0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ exacta} \quad \Rightarrow \quad 0 \to F(N) \to F(M) \to F(L) \text{ exacta;}$$
- F es exacto si
$$0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ exacta} \quad \Rightarrow \quad 0 \to F(N) \to F(M) \to F(L) \to 0 \text{ exacta.}$$

19.3. Ejemplo. El funtor olvidadizo R-**Mód** $\to$ **Ab** (que olvida la acción de R sobre M y trata a M solo como un grupo abeliano) es exacto, porque la definición del núcleo y conúcleo no tiene nada que ver con la acción de R, sino con la estructura de grupo abeliano. ▲

Aquí hay un ejemplo fundamental de funtor exacto:

19.4. Ejercicio.

1) *El funtor* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,-)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ab}$ *es exacto por la izquierda, es decir, para cada sucesión exacta corta en* $\mathbf{A}$
$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$
la sucesión correspondiente de grupos abelianos
$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,L) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,N)$$
es también exacta.

2) *El funtor (contravariante)* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,K)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab}$ *es también exacto por la izquierda, es decir, para cada sucesión exacta corta en* $\mathbf{A}$
$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$
la sucesión correspondiente de grupos abelianos
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(N,K) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,K) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L,K) \to 0$$
es también exacta.

19.5. Ejemplo. En general, el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,-)$ (resp. $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N)$) es exacto por la izquierda y no es exacto por la derecha.

Para $n \geq 2$ consideremos una sucesión exacta corta de grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos)
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$
Apliquemos el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},-)$:
$$0 \to \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

El grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es de torsión y el grupo $\mathbb{Z}$ es libre de torsión; por lo tanto el único morfismo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es 0 y $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. Sin embargo, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (en general, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z}$ donde (m,n) es el máximo común divisor de m y n). Entonces el epimorfismo $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ deja de ser epimorfismo después de aplicación de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, -)$.

Si a la misma sucesión exacta corta apliquemos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$, tenemos la sucesión

$$0 \to \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{0} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$$

donde el último morfismo no es epi. ▲

Sin embargo, si en los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, -)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, K)$ podemos variar el objeto K, entonces tenemos

19.6. Observación. *Consideremos una sucesión de morfismos en* $\mathbf{A}$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

1) *La sucesión es exacta en M si para* <u>*cada objeto*</u> *K la sucesión correspondiente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, N)$$

es exacta en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, M)$.

2) *La sucesión es exacta en M si para cada objeto K la sucesión correspondiente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N, K) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, K) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(L, K)$$

es exacta en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, K)$.

Demostración. Demostremos la parte covariante. Consideremos $K = L$. Tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(L, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(L, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(L, N)$$

En particular, $g \circ f = (g \circ f)_*(\mathrm{id}_L) = g_* \circ f_*(\mathrm{id}_L) = 0$, entonces $\mathrm{im}\, f \subseteq \ker g$.

Luego consideremos $K = \ker g$. Tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\ker g, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\ker g, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\ker g, N)$$

En particular, para el morfismo canónico $i\colon \ker g \to M$ tenemos $g_*(i) = g \circ i = 0$ y por lo tanto $i = f_*(\phi) = f \circ \phi$ para algún morfismo $\phi\colon \ker g \to L$. Entonces $\ker g = \mathrm{im}\, i \subseteq \mathrm{im}\, f$. ■

19.7. Corolario. 1) *Una sucesión*

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} N$$

es exacta si y solamente si la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, L) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, N)$$

es exacta para cada K.

2) *Una sucesión*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

es exacta si y solamente si la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N, K) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, K) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(L, K)$$

es exacta para cada K.

20. Funtores adjuntos y exactitud

Recordemos que tenemos funtores aditivos

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód} \quad \text{y} \quad \underline{\mathrm{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód},$$

exactos por la izquierda, pero en general no exactos por la derecha. $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)$ es adjunto por la derecha a $-\otimes_R M$:

$$\mathrm{Hom}_R(L\otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)).$$

Resulta que $-\otimes_R M$ es también exacto por la derecha, y esto no es una coincidencia:

20.1. Observación (Adjunto por la izquierda es exacto por la derecha; adjunto por la derecha es exacto por la izquierda). *Supongamos que tenemos una adjunción entre dos funtores $F\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ y $G\colon \mathbf{B}\to\mathbf{A}$ entre categorías abelianas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,G(K)).$$

(Como ya sabemos, F y G son automáticamente aditivos y la biyección de arriba es un isomorfismo de grupos abelianos.) Entonces F es exacto por la derecha y G es exacto por la izquierda.

Demostración. Por ejemplo, veamos por qué F es exacto por la derecha. Si tenemos una sucesión exacta

$$(*) \qquad L\to M\to N\to 0$$

tenemos que ver que la sucesión correspondiente

$$F(L)\to F(M)\to F(N)\to 0$$

es también exacta. Pero, como hemos observado en 19.7, esto es equivalente al hecho que para cada $K\in\mathbf{B}$ la sucesión

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(N),K)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),K)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(L),K)$$

es exacta. Ahora la adjunción entre F y G dice que hay un diagrama conmutativo de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(N),K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(L),K) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N,G(K)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,G(K)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(L,G(K))
\end{tikzcd}$$

—aquí los cuadrados son conmutativos porque las biyecciones $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(-),K)\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-,G(K))$ son naturales. La segunda fila es exacta porque la sucesión (*) es exacta y el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-,G(K))$ es exacto por la izquierda. Entonces la primera fila es también exacta. ∎

En particular, tenemos

20.2. Corolario. *El funtor $-\otimes_R M\colon R\text{-}\mathbf{Mód}\to R\text{-}\mathbf{Mód}$ es exacto por la derecha.*

En particular, si $N'\subset N$ es un submódulo, entonces

$$(N/N')\otimes_R M \cong \frac{N\otimes_R M}{\mathrm{im}(N'\otimes_R M\to N\otimes_R M)}.$$

Si R es un anillo y $I\subset R$ un ideal, entonces

$$M\otimes_R (R/I)\cong M/IM.$$

Demostración. Porque $-\otimes_R M$ es adjunto por la izquierda a $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)$. ■

20.3. Ejercicio. *Demuestre directamente que $-\otimes_R M$ es exacto por la derecha sin usar el argumento con adjunciones: si tenemos una sucesión exacta*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} N'' \to 0$$

entonces la sucesión

$$N' \otimes_R M \xrightarrow{f_*} N \otimes_R M \xrightarrow{p_*} N'' \otimes_R M \to 0$$

es también exacta.

20.4. Ejemplo. En general, un monomorfismo $N' \rightarrowtail N$ no siempre induce un monomorfismo $N' \otimes_R M \to N \otimes_R M$. Por ejemplo, consideremos nuestra sucesión exacta preferida

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Si aplicamos $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, entonces la multiplicación por n induce el morfismo trivial $0\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ▲

Entonces $-\otimes_R M$ en general no es exacto por la izquierda. Los R-módulos M tales que $-\otimes_R M$ es exacto se llaman **módulos planos**.

20.5. Ejemplo. Un ejemplo importante del álgebra conmutativa: cada localización $S^{-1}R$ respecto a un subconjunto $S \subset R$ es un R-módulo plano. En particular, para $R = \mathbb{Z}$ el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ es plano. ▲

Gracias al isomorfismo natural $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$, el funtor $M \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ es también exacto por la derecha porque es también adjunto por la izquierda a $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)$.

La adjunción entre $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,N)$ y sí mismo

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(L,N),M) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(L,\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N))$$

nos dice que $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$ es exacto por la derecha y $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ es exacto por la izquierda. Es un poco confuso, pero ser exacto por la izquierda sobre la categoría opuesta $R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$ es la misma cosa que ser exacto por la derecha sobre $R\text{-}\mathbf{Mód}$.

Álgebra homológica, día 6

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

15 de agosto de 2016

22. Funtores derivados como δ-funtores universales

Hasta este punto hemos estudiado sucesiones exactas en categorías abelianas y funtores exactos. Las sucesiones exactas permiten de construir objetos a partir de objetos más sencillos. Por ejemplo, una sucesión exacta corta en una categoría abeliana $\mathbf{A}$

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

es en cierto sentido una decomposición del objeto M en objetos K y N. Si F es un funtor aditivo exacto $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, la sucesión exacta de arriba induce otra sucesión exacta en $\mathbf{B}$

$$0 \to F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

y entonces el objeto $F(M)$ consiste de $F(K)$ y $F(N)$. Todo se vuelve más complicado (y más interesante) cuando F no es exacto. Si F es exacto por la derecha pero no es exacto por la izquierda, tenemos una sucesión exacta

$$??? \to F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

dónde el morfismo $F(K) \to F(M)$ no es necesariamente mono. Afortunadamente, bajo ciertas hipótesis, existe un modo natural y universal de continuar la sucesión exacta de arriba: vamos a tener una sucesión exacta larga en $\mathbf{B}$

$$\cdots \to L_2F(K) \to L_2F(M) \to L_2F(N) \xrightarrow{\delta_2} L_1F(K) \to L_1F(M) \to L_1F(N) \xrightarrow{\delta_1} F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

Aquí los $L_nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ son los **funtores derivados por la izquierda** de F. En particular, para $n = 0$ tenemos $L_0F \cong F$. Los morfismos en la última sucesión exacta están inducidos por los morfismos de la sucesión $K \to M \to N$, y los $\delta_n\colon L_nF(N) \to L_{n-1}F(K)$ son ciertos morfismos especiales llamados **morfismos de conexión**.

De la misma manera, si $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un funtor aditivo exacto por la derecha, entonces cada sucesión exacta en $\mathbf{A}$ produce una sucesión exacta en $\mathbf{B}$

$$0 \to F(K) \to F(M) \to F(N) \xrightarrow{\delta^0} R^1F(K) \to R^1F(M) \to R^1F(N) \xrightarrow{\delta^1} R^2F(K) \to R^2F(M) \to R^2F(N) \to \cdots$$

Aquí los $R^nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ son los **funtores derivados por la derecha** del funtor F. En particular, para $n = 0$ tenemos $R^0F \cong F$.

Sobre la categoría R-**Mód**, para cada funtor exacto por la derecha (por ejemplo $- \otimes_R M$) existen funtores derivados por la izquierda L_nF y para cada funtor exacto por la izquierda F (por ejemplo $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)$) existen funtores derivados por la derecha R^nF. Antes de desarrollar el cálculo de funtores derivados, demos las definiciones generales.

22.1. Definición. Un δ**-funtor izquierdo** (o **homológico**) (T_n, δ_n) consiste en los siguientes datos.

- Una colección de funtores aditivos $T_n \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Morfismos $\delta_n \colon T_n(N) \to T_{n-1}(K)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y para cada sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$

$$(*) \qquad 0 \to K \to M \to N \to 0$$

Y se piden las siguientes propiedades:

- Cada sucesión exacta corta (*) induce una sucesión exacta larga en $\mathbf{B}$

$$\cdots \to T_2(K) \to T_2(M) \to T_2(N) \xrightarrow{\delta_2} T_1(K) \to T_1(M) \to T_1(N) \xrightarrow{\delta_1} T_0(K) \to T_0(M) \to T_0(N) \to 0$$

- Las sucesiones exactas largas son naturales: cada diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_2"] & T_1(K) \arrow[r] \arrow[d] & T_1(M) \arrow[r] \arrow[d] & T_1(N) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & T_0(K) \arrow[r] \arrow[d] & T_0(M) \arrow[r] \arrow[d] & T_0(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\delta_2"] & T_1(K') \arrow[r] & T_1(M') \arrow[r] & T_1(N') \arrow[r, "\delta_1"] & T_0(K') \arrow[r] & T_0(M') \arrow[r] & T_0(N') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

22.2. Definición. Sea $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo exacto por la derecha. Entonces sus **funtores derivados por la izquierda** forman un δ-funtor izquierdo $(L_n F, \delta_n)$ tal que $L_0 F \cong F$ y que satisface la siguiente propiedad universal. Para cualquier otro δ-funtor izquierdo (T_n, ∂_n) una transformación natural $L_0 F \Rightarrow T_0$ se extiende de modo único a transformaciones naturales $L_n F \Rightarrow T_n$ para $n > 0$ que conmutan con los δ_n y ∂_n:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_2"] & L_1F(K) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & L_1F(M) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & L_1F(N) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, dashed] & L_0F(K) \arrow[r] \arrow[d] & L_0F(M) \arrow[r] \arrow[d] & L_0F(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\partial_2"] & T_1(K) \arrow[r] & T_1(M) \arrow[r] & T_1(N) \arrow[r, "\partial_1"] & T_0(K) \arrow[r] & T_0(M) \arrow[r] & T_0(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

22.3. Observación. *Para cada funtor aditivo exacto por la derecha $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, si sus funtores derivados por la izquierda $L_n F$ existen, son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración. Si $(L_n^1 F, \delta_n^1)$ y $(L_n^2 F, \delta_n^2)$ son dos funtores derivados de F, tenemos transformaciones naturales únicas $L_n^1 F \Rightarrow L_n^2 F$ y $L_n^2 F \Rightarrow L_n^1 F$ y las composiciones $L_n^1 F \Rightarrow L_n^2 F \Rightarrow L_n^1 F$ y $L_n^2 F \Rightarrow L_n^2 F \Rightarrow L_n^2 F$ deben ser las transformaciones identidad. Entonces $L_n^1 F \cong L_n^2 F$. ■

Las definiciones para δ-funtores derechos son las mismas, solo que las flechas van en la otra dirección:

22.4. Definición. Un **δ-funtor derecho** (o **cohomológico**) (T^n, δ^n) consiste en los siguientes datos.

- Una colección de funtores aditivos $T^n \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Morfismos $\delta^n \colon T^n(N) \to T^{n+1}(K)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y para cada sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$

$$(*) \qquad 0 \to K \to M \to N \to 0$$

Y se piden las siguientes propiedades:

- Cada sucesión exacta corta (*) induce una sucesión exacta larga en $\mathbf{B}$

$$0 \to T^0(K) \to T^0(M) \to T^0(N) \xrightarrow{\delta^0} T^1(K) \to T^1(M) \to T^1(N) \xrightarrow{\delta^1} T^2(K) \to T^2(M) \to T^2(N) \to \cdots$$

- Las sucesiones exactas largas son naturales: cada diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^0(K) \arrow[r] \arrow[d] & T^0(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^0(N) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d] & T^1(K) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(N) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & T^0(K') \arrow[r] & T^0(M') \arrow[r] & T^0(N') \arrow[r, "\delta^0"] & T^1(K') \arrow[r] & T^1(M') \arrow[r] & T^1(N') \arrow[r, "\delta^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

22.5. Definición. Sea $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo exacto por la izquierda. Entonces sus **funtores derivados por la derecha** forman un δ-funtor derecho $(R^n F, \delta^n)$ tal que $R^0 F \cong F$ y que satisface la siguiente propiedad universal. Para cualquier otro δ-funtor derecho (T^n, ∂^n) una transformación natural $T^0 \Rightarrow R^0 F$ se extiende de modo único a transformaciones naturales $T^n \Rightarrow R^n F$ para $n > 0$ que conmutan con los δ^n y ∂^n:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^0(K) \arrow[r] \arrow[d] & T^0(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^0(N) \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[d] & T^1(K) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T^1(M) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T^1(N) \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[d, dashed] & \cdots \\
0 \arrow[r] & R^0F(K) \arrow[r] & R^0F(M) \arrow[r] & R^0F(N) \arrow[r, "\delta^0"] & R^1F(K) \arrow[r] & R^1F(M) \arrow[r] & R^1F(N) \arrow[r, "\delta^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

22.6. Observación. *Para cada funtor exacto por la izquierda $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, si sus funtores derivados por la derecha $R^n F$ existen, son únicos salvo isomorfismo.*

Las sucesiones exactas con $L_n F$ y $R^n F$ nos dan inmediatamente el siguiente resultado:

22.7. Observación. *Sea $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un funtor exacto por la derecha. Supongamos que sus funtores derivados $L_n F$ existen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *F es exacto.*

2) $L_1F = 0$.

3) $L_nF = 0$ *para cada* $n > 0$.

Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un funtor exacto por la izquierda. Supongamos que sus funtores derivados* R^nF *existen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) F *es exacto.*

2) $R^1F = 0$.

3) $R^nF = 0$ *para cada* $n > 0$.

Demostración. Por ejemplo, en el caso de los funtores derivados por la izquierda, tenemos 2) ⇒ 1): si $L_1F = 0$, entonces cada sucesión exacta corta

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

induce el siguiente diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & L_1F(N) \arrow[r, "\delta_1"] & L_0F(K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & L_0F(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & L_0F(N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ & & F(K) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & F(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

pero $L_1F = 0$, y por lo tanto $F(K) \to F(M)$ es mono. Esto demuestra que F es también exacto por la izquierda.

Luego, tenemos la implicación trivial 3) ⇒ 2). Y en fin, 1) ⇒ 3): si F es exacto, entonces se ve que poniendo $L_0F := F$ y $L_n := 0$ para $n > 0$ se obtiene un δ-funtor universal. ∎

La definición de δ-funtore universal implica en particular la siguiente

22.8. Observación.

1) *Sean* $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *dos funtores aditivos exactos por la derecha. Supongamos que sus funtores derivados* L_nF *y* L_nG *existen. Entonces una transformación natural* $F \Rightarrow G$ *induce transformaciones naturales* $L_nF \Rightarrow L_nG$ *tales que cada diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

induce el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & L_nF(K) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & L_nF(M) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & L_nF(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & L_{n-1}F(K) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & L_nG(K) \arrow[rr] \arrow[dd] & & L_nG(M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & L_nG(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd] & & L_{n-1}G(K) \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L_nF(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_nF(M') \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_nF(N') \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & L_{n-1}F(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & L_nG(K') \arrow[rr] & & L_nG(M') \arrow[rr] & & L_nG(N') \arrow[rr, "\delta"] & & L_{n-1}G(K') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2) *Sean $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ dos funtores aditivos exactos por la izquierda. Supongamos que sus funtores derivados R^nF y R^nG existen. Entonces una transformación natural $F \Rightarrow G$ induce transformaciones naturales $R^nF \Rightarrow R^nG$ tales que cada diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & R^nF(K) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & R^nF(M) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & R^nF(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & R^{n+1}F(K) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & L_nG(K) \arrow[rr] \arrow[dd] & & R^nG(M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & R^nG(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd] & & R^{n+1}G(K) \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R^nF(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^nF(M') \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^nF(N') \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & R^{n+1}F(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & R^nG(K') \arrow[rr] & & R^nG(M') \arrow[rr] & & R^nG(N') \arrow[rr, "\delta"] & & R^{n+1}G(K') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

El término “δ-funtor” fue introducido por Grothendieck en el artículo de Tohoku (1957), pero esta noción ya estaba tácita en el libro de texto de Cartan y Eilenberg (publicado en 1956, pero el trabajo había empezado mucho tiempo antes).

23. Teorema de Grothendieck sobre δ-funtores borrables

Como hemos visto, los funtores derivados $L_nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $R^nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tienen propiedades muy naturales y útiles para estudiar sucesiones exactas. El único problema es que todavía no sabemos si los funtores derivados existen. El modo más común de construirlos son resoluciones proyectivas e inyectivas, que existen bajo ciertas hipótesis sobre la categoría abelana **A**. También vamos a necesitar más construcciones relacionadas con complejos de (co)cadenas. Terminamos esta parte con un criterio útil de universalidad de δ-funtores.

23.1. Definición. Un δ-funtor izquierdo $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ es **borrable** si para cada $n > 0$ y cada $M \in \mathbf{A}$ existe un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ (¡no necesariamente único!) tal que $E_n(N) = 0$.

Un δ-funtor derecho $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ es **borrable** si para cada $n > 0$ y cada $M \in \mathbf{A}$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail N$ (¡no necesariamente único!) tal que $E^n(N) = 0$.

23.2. Proposición (Grothendieck). *Sea $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ un δ-funtor izquierdo borrable. Entonces $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ es universal.*

Sea $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ un δ-funtor derecho borrable. Entonces $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ es universal.

Demostración. Vamos a ver la parte con los funtores izquierdos. Sea $(T_\bullet, \partial_\bullet)$ otro δ-funtor izquierdo. Tenemos que ver que una transformación natural $f_0 \colon T_0 \Rightarrow E_0$ se extiende de modo único a transformaciones naturales $f_n \colon T_n \Rightarrow E_n$ que conmutan con δ y ∂. La construcción es inductiva: suponemos que para $i < n$ tenemos transformaciones $f_i \colon T_i \Rightarrow E_i$ y construimos $f_n \colon T_n \Rightarrow E_n$.

Sea $M \in \mathbf{A}$ cualquier objeto. Ya que E_n es borrable, existe un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ tal que $E_n(N) = 0$. Sea K el núcleo de este epimorfismo:

$$0 \to K \rightarrowtail N \twoheadrightarrow M \to 0$$

$(E_\bullet, \delta_\bullet)$ y $(T_\bullet, \partial_\bullet)$ son δ-funtores, de donde tenemos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & T_n(K) \arrow[r] & T_n(N) \arrow[r] & T_n(M) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, dashed, "?"] & T_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1,K}"] & T_{n-1}(N) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1,N}"] & T_{n-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1,M}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_n(K) \arrow[r] & E_n(N) \arrow[r] & E_n(M) \arrow[r, "\delta_n"] & E_{n-1}(K) \arrow[r] & E_{n-1}(N) \arrow[r] & E_{n-1}(M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Y como $E_n(N) = 0$, se sigue que $E_n(M)$ es el núcleo del morfismo $E_{n-1}(K) \to E_{n-1}(N)$. Luego, la composición $T_n(M) \xrightarrow{\partial_n} T_{n-1}(K) \xrightarrow{f_{n-1,K}} E_{n-1}(K) \to E_{n-1}(N)$ es 0, y entonces por la propiedad universal del núcleo existe un morfísmo único $f^K_{n,M} \colon T_n(M) \to E_n(M)$ tal que el diagrama es conmutativo.

Tenemos que ver que nuestra elección del epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ tal que $E_n(N) = 0$ no afecta el resultado. Sean $N_1 \twoheadrightarrow M$ y $N_2 \twoheadrightarrow M$ dos epimorfismos tales que $E_n(N_1) = E_n(N_2) = 0$. Tenemos dos sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea $N := N_1 \oplus N_2$. Entonces $E_n(N) = E_n(N_1 \oplus N_2) = E_n(N_1) \oplus E_n(N_2) = 0$, y tenemos un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$. Para $i = 1, 2$ hay diagramas conmutativos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & N_i \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Notamos que la sucesión exacta

$$E_n(N) \to E_n(M) \xrightarrow{\delta_n} E_{n-1}$$

y $E_n(N) = 0$ implican que δ_n es un monomorfismo. El diagrama de arriba induce a su vez el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T_n(M) \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, "f^{K_i}_{n,M}"'] & & T_{n-1}(K_i) \arrow[dr] \arrow[dd, "f_{n-1,K_i}"] & \\
& T_n(M) \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dd, "f^{K}_{n,M}"] & & T_{n-1}(K) \arrow[dd, "f_{n-1,K}"] \\
E_n(M) \arrow[rr, tail, "\delta_n"] \arrow[dr, equal] & & E_{n-1}(K_i) \arrow[dr] & \\
& E_n(M) \arrow[rr, tail, "\delta_n"'] & & E_{n-1}(K)
\end{tikzcd}
$$

Aquí la cara de arriba es conmutativa porque $(T_\bullet, \partial_\bullet)$ es un δ-funtor y la cara de abajo es conmutativa porque $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ es un δ-funtor; la cara frontal y la cara posterior conmutan por la construcción de los morfismos f_n; la cara a la derecha es conmutativa porque f_{n-1} es natural por nuestra hipótesis de inducción. En el diagrama se ve que $\delta_n \circ f^{K_i}_{n,M} = \delta_n \circ f^{K}_{n,M}$, de donde $f^{K_i}_{n,M} = f^{K}_{n,M}$, ya que δ_n es un monomorfismo. Hemos demostrado que los morfismos $f_{n,M}$ construidos a partir de K_1 y K_2 coinciden:

$$f^{K_1}_{n,M} = f^{K_2}_{n,M} = f^{K}_{n,M}.$$

En conclusión, la elección del epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ tal que $E_n(N) = 0$ no afecta el resultado.

Ahora veamos por qué los morfismos $f_{n,M} \colon T_n(M) \to E_n(M)$ definen una transformación natural de funtores. Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

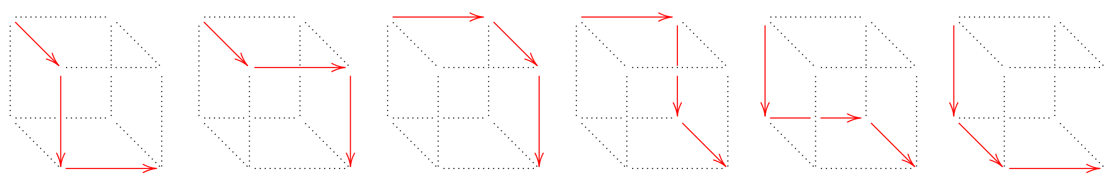
$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"'] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_n(M_1) \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dr, "T_n(\phi)"] \arrow[dd, "f_{n,M_1}"'] & & T_{n-1}(K_1) \arrow[dr, "T_{n-1}(\phi')"] \arrow[dd, "f_{n-1,K_1}" near start] & \\
& T_n(M_2) \arrow[rr, "\partial_n" near start] \arrow[dd, "f_{n,M_2}" near start] & & T_{n-1}(K_2) \arrow[dd, "f_{n-1,K_2}"] \\
E_n(M_1) \arrow[rr, tail, "\delta_n" near end] \arrow[dr, "E_n(\phi)"'] & & E_{n-1}(K_1) \arrow[dr, "E_{n-1}(\phi')"] & \\
& E_n(M_2) \arrow[rr, tail, "\delta_n"'] & & E_{n-1}(K_2)
\end{tikzcd}$$

Aquí sabemos que todo es conmutativo, excepto la cara a la derecha, cuya conmutatividad tenemos que verificar. Pero por la conmutatividad de otras caras, se ve que

$$\delta_n \circ f_{n,M_2} \circ T_n(\phi) = \delta_n \circ E_n(\phi) \circ f_{n,M_1}.$$



Pero δ_n es un monomorfismo, y así

$$f_{n,M_2} \circ T_n(\phi) = E_n(\phi) \circ f_{n,M_1}.$$

■

La palabra "borrable" es mi traducción literal del término francés "effaçable" que también viene del artículo de Tohoku (en inglés se usa el mismo término: "effaceable").

Álgebra homológica, día 7

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

16 de agosto de 2016

24. La categoría de complejos $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$

24.1. Definición. Un **complejo de cocadenas** en una categoría abeliana es una sucesión de morfismos

$$(M^\bullet, d^\bullet)\colon (\cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \to \cdots)$$

tal que $d^n \circ d^{n-1} = 0$ para cada n.

En particular, las sucesiones exactas son casos muy particulares de complejos.

24.2. Definición. Notamos que si $(M^\bullet, d^\bullet)$ es un complejo de cocadenas, entonces existen morfismos canónicos $\operatorname{im} d^{n-1} \rightarrowtail \ker d^n$ y $\operatorname{coker} d^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^n$

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im} d^{n-1} \arrow[rr, tail, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, tail] & & \ker d^n \arrow[dl, tail] & \\
M^{n-1} \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "d^{n-1}"] & & M^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & & M^{n+1} \\
& \operatorname{coker} d^{n-1} \arrow[rr, two heads, dashed, "\exists!"] & & \operatorname{im} d^n \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

La **cohomología** de $(M^\bullet, d^\bullet)$ en el grado n es el objeto

$$H^n(M^\bullet, d^\bullet) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} d^{n-1} \rightarrowtail \ker d^n) \cong \ker(\operatorname{coker} d^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^n).$$

Note que $(M^\bullet, d^\bullet)$ es una sucesión exacta si y solamente si $H^n(M^\bullet, d^\bullet) = 0$ para cada n. La cohomología sirve para medir la inexactitud de un complejo.

En el caso de R-módulos la condición $d^n \circ d^{n-1} = 0$ significa que

$$\operatorname{im}(M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n) \subseteq \ker(M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1})$$

y la cohomología correspondiente es dada por

$$H^n(M^\bullet, d^\bullet) = \frac{\ker(M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1})}{\operatorname{im}(M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n)}.$$

La palabra “cadena” viene de topología y para nosotros no tiene ningún significado especial. Los elementos de $Z^n := \ker d^n$ también se llaman **cociclos** y los elementos de $B^n := \operatorname{im} d^{n-1}$ se llaman **cofronteras**; es también terminología topológica.

Decimos co-cadenas, co-ciclos, co-fronteras y co-homología porque también hay complejos de cadenas, con ciclos, fronteras y homología. Un **complejo de cadenas** es la misma cosa, solo con numeración opuesta, a saber una sucesión de morfismos

$$(M_\bullet, d_\bullet)\colon (\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \to \cdots)$$

tal que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ para cada n. Su **homología** es dada por $H_n(M_\bullet, d_\bullet) := Z_n/B_n := \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$. Para evitar cualquier confusión, vamos trabajar solo con complejos de cocadenas (que vamos a llamar simplemente “complejos”) y cohomología. Obviamente, todos nuestros resultados pueden ser escritos con la numeración homológica.

El término “homología” viene del griego ὁμολογία, “correspondencia” (ὁμός = “mismo” y λόγος = “relación”) y fue introducido por Poincaré en su artículo “Analysis Situs” (1895). En biología “homología” significa una “relación de correspondencia que ofrecen entre sí partes que en diversos organismos tienen el mismo origen aunque su función pueda ser diferente” (el diccionario de la RAE).

Los morfismos d^n y d_n se llaman **diferenciales** porque en geometría a cada variedad lisa se puede asociar un complejo, llamado el **complejo de de Rham**, donde d^n son las derivadas exteriores (definidas como diferenciales df para funciones lisas f y por la regla del producto $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}(\alpha \wedge d\beta)$ para las formas diferenciales).

Muchas ideas y la terminología (por ejemplo, “morfismos homotópicos” y “cono” abajo) vienen de topología. De hecho, el álgebra homológica nació en el siglo XIX en los trabajos de Riemann, Betti y Poincaré. Solo en 1925 Heinz Hopf (1884–1971) visitó la universidad de Gotinga donde encontró a Emmy Noether, quien hizo la observación que los topólogos en realidad estaban trabajando con ciertos complejos de R-módulos. El punto de vista puramente algebraico se cristalizó en los años 40–50, sobre todo con el libro de texto “Homological Algebra” de Cartan y Eilenberg publicado en 1956.

Para mayor información sobre la historia del álgebra homológica y sus varias facetas véase el ensayo de Weibel `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0245/`

Los complejos son ubicuos en topología algebraica, topología diferencial, análisis y, por supuesto, en álgebra. No tenemos tiempo para ver muchos ejemplos; para nosotros la mayoría de complejos van a surgir de la siguiente manera. Supongamos que $(M^\bullet, d^\bullet)$ es una sucesión exacta:

$$\cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \to \cdots$$

es decir, $\operatorname{im} d^{n-1} = \ker d^n$ para cada n. La cohomología $H^n(M^\bullet)$ es entonces trivial. Ahora sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo. Tenemos

$$F(d^n) \circ F(d^{n-1}) = F(d^n \circ d^{n-1}) = F(0) = 0.$$

Entonces F induce un complejo

$$\cdots \to F(M^{n-1}) \xrightarrow{F(d^{n-1})} F(M^n) \xrightarrow{F(d^n)} F(M^{n+1}) \xrightarrow{F(d^{n+1})} F(M^{n+2}) \to \cdots$$

que no es necesariamente exacto si F no es exacto, y es interesante calcular la homología del complejo $F(M^\bullet)$. En general, si $(M^\bullet, d^\bullet)$ es un complejo, entonces $(F(M^\bullet), F(d^\bullet))$ es también un complejo.

24.3. Definición. Un **morfismo de complejos** $f^\bullet\colon (M^\bullet, d_M^\bullet) \to (N^\bullet, d_N^\bullet)$ es una colección de morfismos $f^n\colon M^n \to N^n$ que conmuta con los diferenciales; es decir, una “escalera conmutativa”:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{n-1} \arrow[r, "d_M^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & M^n \arrow[r, "d_M^n"] \arrow[d, "f^n"] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"] & N^n \arrow[r, "d_N^n"] & N^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$f^{n+1} \circ d_M^n = d_N^n \circ f^n \quad \text{para cada } n.$$

Los complejos de objetos de una categoría abeliana $\mathbf{A}$ forman una categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ que es también abeliana:

24.4. Observación. *Sea $\mathbf{A}$ una categoría abeliana.*

0) *Un monomorfismo $f^\bullet\colon M^\bullet \rightarrowtail N^\bullet$ en la categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ es un morfismo de complejos tal que $f^n\colon M^n \rightarrowtail N^n$ es un monomorfismo para cada n.*

   Un epimorfismo $f^\bullet\colon M^\bullet \twoheadrightarrow N^\bullet$ en la categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ es un morfismo de complejos tal que $f^n\colon M^n \twoheadrightarrow N^n$ es un epimorfismo para cada n.

1) *Si $f^\bullet, g^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ son morfismos de complejos, entonces*

$$(f^\bullet \pm g^\bullet)^n := f^n \pm g^n$$

   es también un morfismo de complejos $M^\bullet \to N^\bullet$.

2) *El complejo formado por objetos cero de $\mathbf{A}$*

$$\cdots \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots$$

   es un objeto cero en $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$.

3) *El producto (coproducto, biproducto) de complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ es el complejo definido por*

$$(M^\bullet \oplus N^\bullet)^n := M^n \oplus N^n$$

   con los diferenciales $d_M^n \oplus d_N^n := \begin{pmatrix} d_M^n & 0 \\ 0 & d_N^n \end{pmatrix} : M^n \oplus N^n \to M^{n+1} \oplus N^{n+1}$.

4) *Si $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ es un morfismo de complejos, su núcleo es el complejo*

$$\ker f^\bullet \rightarrowtail M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet$$

   donde

$$(\ker f^\bullet)^n = \ker f^n.$$

   El conúcleo es el complejo

$$M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f^\bullet$$

   donde

$$(\operatorname{coker} f^\bullet)^n = \operatorname{coker} f^n.$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & \ker f^{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & \ker f^{n} \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & \ker f^{n+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M^{n-1} \arrow[r, "d_M^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & M^{n} \arrow[r, "d_M^{n}"] \arrow[d, "f^{n}"'] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"] \arrow[d, two heads] & N^{n} \arrow[r, "d_N^{n}"] \arrow[d, two heads] & N^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} f^{n-1} \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} f^{n} \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} f^{n+1} \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Todo esto define una estructura de categoría abeliana sobre $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$*.*

Para nuestros objetivos las siguientes subcategorías abelianas de $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ van a ser importantes:

- $\mathbf{Com}^{\geq 0}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{Com}(\mathbf{A})$: complejos $M^\bullet$ tales que $M^n = 0$ para $n < 0$.
- $\mathbf{Com}^{\leq 0}(\mathbf{A})$: complejos $M^\bullet$ tales que $M^n = 0$ para $n > 0$.

Morfismos de complejos inducen morfismos en cohomología:

24.5. Observación. *Un morfismo de complejos $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ induce morfismos en cohomología $f^n_*\colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$ para cada n, de tal modo que la cohomología es una familia de funtores aditivos*

$$H^n\colon \mathbf{Com}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$$

(es decir, $(f^n \circ g^n)_* = f^n_* \circ g^n_*$, $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ y $(f^n \pm g^n)_* = f^n_* \pm g^n_*$).

Demostración. Tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
M^{n-1} \arrow[r, "d_M^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & M^{n} \arrow[r, "d_M^{n}"] \arrow[d, "f^{n}"'] & M^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"'] \\
N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"'] & N^{n} \arrow[r, "d_N^{n}"'] & N^{n+1}
\end{tikzcd}
$$

Se ve que f^n induce morfismos canónicos $\ker d^n_M \to \ker d^n_N$ ("restricción" de f^n a $\ker d^n$) y $\operatorname{im} d^{n-1}_M \to \operatorname{im} d^{n-1}_N$ ("restricción" de f^n a $\operatorname{im} d^{n-1}$) de tal modo que tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{im} d_M^{n-1} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \ker d_M^{n} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H^n(M^\bullet) \arrow[d, dashed, "f^n_*"] \\
\operatorname{im} d_N^{n-1} \arrow[r, tail] & \ker d_N^{n} \arrow[r, two heads] & H^n(N^\bullet)
\end{tikzcd}
$$

Dejo los detalles al lector; en términos de elementos (en la categoría de R-módulos) todo debe ser obvio:

$$\begin{gathered} f_*^n\colon H^n(M^\bullet) := \frac{\ker d_M^n}{\operatorname{im} d_M^{n-1}} \to H^n(N^\bullet) := \frac{\ker d_N^n}{\operatorname{im} d_N^{n-1}}, \\ x + \operatorname{im} d_M^{n-1} \mapsto f^n(x) + \operatorname{im} d_N^{n-1}. \end{gathered}$$

De hecho, si $x \in \ker d_M^n$, entonces $d_N^n(f^n(x)) = f^{n+1}(d_M^n(x)) = 0$ y $f^n(x) \in \ker d_N^n$, y si $x = d_M^{n-1}(x') \in \operatorname{im} d_M^{n-1}$, entonces $f^n(x) = f^n(d_M^{n-1}(x')) = d_N^{n-1}(f^{n-1}(x')) \in \operatorname{im} d_N^{n-1}$. ■

25. Homotopías y cuasi-isomorfismos

Morfismos entre complejos $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ inducen morfismos en cohomología $f_*^n\colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$. Es importante saber cuándo diferentes $f^\bullet, g^\bullet$ inducen los mismos morfismos $f_*^n = g_*^n$, o cuándo un morfismo $f^\bullet$ induce un isomorfismo $f_*^n\colon H^n(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n(N^\bullet)$. Esta sección está dedicada a tales situaciones.

25.1. Definición.

1) Sea $s^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ un morfismo entre complejos. Se dice que $s^\bullet$ es **homotópico a cero** (notación: $s^\bullet \simeq 0$) si existe una familia de morfismos

$$h^n\colon M^n \to N^{n-1}$$

tal que para cada n

$$s^n = d_N^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_M^n.$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & M^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "s^{n-1}"'] & M^n \arrow[r, "d_M^n"] \arrow[dl, "h^n"'] \arrow[d, "s^n"'] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] \arrow[d, "s^{n+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"'] & N^n \arrow[r] & N^{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(¡cuidado! no es un diagrama conmutativo: los morfismos s^n conmutan con $d^\bullet$, pero los morfismos h^n solo deben satisfacer la identidad de arriba; en otras palabras, solo "$d \circ h + h \circ d$" conmuta con los diferenciales.)

2) Si $f^\bullet$ y $g^\bullet$ son morfismos de complejos $M^\bullet \to N^\bullet$ tales que $s^\bullet := f^\bullet - g^\bullet$ es homotópico a cero, entonces se dice que $f^\bullet$ y $g^\bullet$ son **homotópicos** (notación: $f^\bullet \simeq g^\bullet$).

25.2. Observación. *Si $s^\bullet \simeq 0$, entonces los morfismos inducidos en cohomología $s_*^n\colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$ son nulos. En particular, si $f^\bullet \simeq g^\bullet$, entonces $f^\bullet$ y $g^\bullet$ inducen los mismos morfismos en cohomología:*

$$f_*^n = g_*^n\colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$$

Demostración. En términos de elementos: sea $x + \operatorname{im} d_M^{n-1} \in H^n(M^\bullet) := \ker d_M^n / \operatorname{im} d_M^{n-1}$ para algún $x \in \ker d_M^n$. El morfismo s_*^n está definido por $x + \operatorname{im} d_M^{n-1} \mapsto s^n(x) + \operatorname{im} d_M^{n-1}$. Si $s^\bullet$ es homotópico a cero, tenemos

$$s^n(x) = \underbrace{d_N^{n-1} \circ h^n(x)}_{\in \operatorname{im} d_N^{n-1}} + h^{n+1} \circ \underbrace{d_M^n(x)}_{=0} = 0 \pmod{\operatorname{im} d_N^{n-1}}.$$

■

25.3. Definición. Se dice que un morfismo de complejos $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ es un **cuasi-isomorfismo** si $f^\bullet$ induce isomorfismos $f_*^n \colon H^n(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n(N^\bullet)$ para todo n.

Se dice que dos complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son **homotópicos** si existen morfismos de complejos $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ y $g^\bullet \colon N^\bullet \to M^\bullet$ tales que $g^\bullet \circ f^\bullet \simeq \mathrm{id}_{M^\bullet}$ y $f^\bullet \circ g^\bullet \simeq \mathrm{id}_{N^\bullet}$.

Por supuesto, el término "homotopía" viene de topología. Para cada espacio topológico X se puede definir cierto complejo $C_\bullet(X)$ (con numeración homológica), que se llama el **complejo singular**. Su homología $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$ es la **homología singular** de X. Cada aplicación continua $X \to Y$ induce un morfismo de complejos $f_\bullet \colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, y además, a partir de una homotopía (en el sentido topológico) entre dos aplicaciones continuas $f, g \colon X \to Y$ se puede construir una homotopía entre morfismos de complejos $f_\bullet \simeq g_\bullet$. Esto quiere decir que si dos espacios X y Y son homotópicamente equivalentes, entonces $H_n(X) \cong H_n(Y)$.

Para mayor información pueden leer cualquier libro de topología algebraica; recomiendo "A Concise Course in Algebraic Topology" de J.P. May que es bastante... conciso: `http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`

Cuidado: en la noción de cuasi-isomorfismo no se trata simplemente de isomorfismos $H^n(M^\bullet) \cong H^n(N^\bullet)$ para cada n, sino del hecho que estos isomorfismos están inducidos por cierto morfismo de complejos $M^\bullet \to N^\bullet$. Si dos complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son homotópicos, entonces $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son cuasi-isomorfos. Pero dos complejos pueden ser cuasi-isomorfos sin ser homotópicos:

25.4. Ejemplo. Consideremos el siguiente morfismo entre dos complejos de grupos abelianos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Estos complejos tienen los mismos grupos de cohomología, que son $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en una posición y 0 en las otras. Además, el morfismo de arriba induce isomorfismos en cohomología, y entonces es un cuasi-isomorfismo. Pero, como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo de torsión y $\mathbb{Z}$ es libre de torsión, entonces el único morfismo de complejos en la otra dirección es nulo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por tanto, aunque nuestros complejos son cuasi-isomorfos, no pueden ser homotópicos. Además, este ejemplo demuestra que si existe un cuasi-isomorfismo $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$, esto no implica existencia de un cuasi-isomorfismo $g^\bullet \colon N^\bullet \to M^\bullet$. ▲

De la misma manera, si para un complejo $M^\bullet$ el morfismo identidad $\mathrm{id}_{M^\bullet}$ es homotópico a cero, entonces $M^\bullet$ es exacto. Pero puede ser que $M^\bullet$ es exacto y $\mathrm{id}_{M^\bullet} \not\simeq 0$:

25.5. Ejemplo. Consideramos nuestra sucesión exacta preferida de grupos abelianos:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Una homotopía $\mathrm{id}_{M^\bullet} \simeq 0$ sería una familia de morfismos $h^n\colon M^n \to M^{n-1}$ que satisfacen

$$\mathrm{id}_{M^n} = d^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n.$$

Fijémonos bien en el diagrama correspondiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] \arrow[dl] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, "h^1"'] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, "h^0"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El único morfismo posible $h^0\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es 0, y entonces la homotopía implicaría que la composición $\mathbb{Z} \xrightarrow{h^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$ coincide con $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, lo cual es absurdo. ▲

Para resumir: tenemos implicaciones *estrictas*

$$\begin{aligned}
M^\bullet \simeq N^\bullet \quad &\Longrightarrow \quad H^n(M^\bullet) \cong H^n(N^\bullet), \\
\mathrm{id}_{M^\bullet} \simeq 0 \quad &\Longrightarrow \quad H^n(M^\bullet) = 0
\end{aligned}$$

Notemos que si $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son homotópicos, entonces para cualquier funtor aditivo F los complejos $F(M^\bullet)$ y $F(N^\bullet)$ son también homotópicos (porque los funtores aditivos preservan las relaciones de la forma "$g \circ f - \mathrm{id} = d \circ h + h \circ d$"). Para cuasi-isomorfismos es más complicado: si $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son cuasi-isomorfos, los complejos $F(M^\bullet)$ y $F(N^\bullet)$ pueden no ser cuasi-isomorfos.

Un breve comentario. Se puede considerar los complejos $M^\bullet$ módulo cuasi-isomorfismos: dos complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ se identifican si existe un cuasi-isomorfismo entre $M^\bullet$ y $N^\bullet$. Esto a partir de nuestra categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ produce otra categoría

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) := \text{“}\mathbf{Com}(\mathbf{A}) \text{ módulo cuasi-isomorfismos”},$$

que se llama la **categoría derivada** de $\mathbf{A}$. La construcción de $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ es un poco técnica, porque hay que precisar qué quiere decir considerar $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ módulo cierta clase de morfismos (esto se llama **localización** de categorías). A veces $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ se construye en dos pasos, primero se considera la **categoría homotópica**

$$\mathbf{K}(\mathbf{A}) := \text{“}\mathbf{Com}(\mathbf{A}) \text{ módulo homotopías”}$$

y después se toma $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ módulo cuasi-isomorfismos (les recuerdo que complejos homotópicos son casos particulares de complejos cuasi-isomorfos).

Las categorías $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ son aditivas, mas no abelianas. Sin embargo, estas categorías satisfacen otros axiomas especiales de **categorías trianguladas**, que son suficientes para construcciones fundamentales del álgebra homológica. De hecho, el punto de vista correcto del álgebra homológica es el de categorías derivadas y trianguladas. Por ejemplo, los funtores derivados que vamos a estudiar más adelante son más naturales en el lenguaje de categorías derivadas. Pero todo esto haría parte de otro curso de álgebra homológica, un poco más avanzado que nuestra breve introducción.

Una pregunta natural es si los funtores aditivos $H^n\colon \mathbf{Com}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ son exactos. A saber, si tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \to K^\bullet \to M^\bullet \to N^\bullet \to 0$$

que es un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_K^{n-1}"'] & M^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_M^{n-1}"'] & N^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_N^{n-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^n \arrow[r] \arrow[d, "d_K^n"'] & M^n \arrow[r] \arrow[d, "d_M^n"'] & N^n \arrow[r] \arrow[d, "d_N^n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

¿es verdad que las sucesiones correspondientes

$$??? \to H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet) \to ???$$

son también exactas? Es fácil ver que $\operatorname{im}(H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet)) = \ker(H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet))$ (¡ejercicio!), pero en general $H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet)$ no es mono y $H^n(M^\bullet) \to H^n(N\bullet)$ no es epi. Entonces, el funtor H^n es solamente "exacto en el medio". Sin embargo, en vez de sucesiones exactas cortas con H^n, tenemos sucesiones exactas largas de la forma

$$\cdots \to H^{n-1}(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(K\bullet) \to \cdots$$

Esto ayuda a hacer cálculos de cohomología. La parte delicada son los **morfismos de conexión** $\delta^n\colon H^n(N^\bullet) \to H^{n+1}(K^\bullet)$ y su construcción necesita un poco de trabajo.

26. * Elementos y el encajamiento de Freyd–Mitchell

Hemos visto que R-**Mód** es una categoría abeliana, y para nosotros es el ejemplo fundamental: en nuestro curso vamos a trabajar solamente con R-módulos. En cierto sentido, es el único ejemplo de categorías abelianas:

26.1. Hecho (El encajamiento de Freyd–Mitchell). *Si $\mathbf{A}_0$ es una categoría abeliana pequeña (cuyos objetos forman un conjunto), entonces existe un anillo R y un funtor fielmente pleno y exacto*

$$F\colon \mathbf{A}_0 \to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$

Esto quiere decir que cada categoría abeliana pequeña puede ser vista como una subcategoría plena de la categoría de ciertos R-módulos. Pero hay que tener cuidado: es importante que $\mathbf{A}_0$ sea pequeña. El teorema a veces se invoca para usar elementos de objetos $x \in M$ en las demostraciones (por ejemplo para decir cosas como "en tal diagrama conmutativo, si tenemos una parte exacta $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ y para un elemento $x \in M$ tenemos $g(x) = 0$, entonces existe algún $x' \in M'$ tal que $f(x') = x''$). En general, los objetos de $\mathbf{A}$ no son conjuntos y no tienen elementos, pero para demostrar alguna propiedad que trata de un *numero finito* de objetos y morfismos de $\mathbf{A}$, podemos considerar la subcategoría abeliana plena $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$ generada por estos objetos y morfismos e interpretar los objetos de $\mathbf{A}_0$ como R-módulos.

En realidad, esta aplicación del teorema de Freyd–Mitchell es un poco inapropiada: el teorema tiene valor puramente teórico, y para trabajar con "elementos" se puede definir la noción abstracta de elementos en cada categoría abeliana, sin encajarla en ninguna categoría R-**Mód**. Para esto véase [Borceux, vol. II, 1.9–1.10] o [Mac Lane, §VIII.4]

Nosotros vamos a usar el tercer método: simplemente trabajar con elementos cuando es necesario, sin justificarlo, porque nos interesan solamente las categorías de R-módulos, donde objetos son conjuntos con cierta estructura, monomorfismos son inyecciones y epimorfismos son sobreyecciones, etc.

La posibilidad de trabajar con elementos y el teorema de Freyd–Mitchell no implican que todas las categorías abelianas se comportan como R-**Mód**. Hay propiedades que no se fórmulan en términos de un numero finito de objetos y morfismos, por ejemplo la propiedad de tener suficientes objetos proyectivos o inyectivos que vamos a estudiar más adelante.

27. Lema de la serpiente

27.1. Proposición (Lema de la serpiente). *Supongamos que en una categoría abeliana tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r, "k"'] & N'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las dos filas son exactas. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \dashrightarrow \ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{h}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{k}} \operatorname{coker} d'' \dashrightarrow 0$$

donde δ se llama el ***morfismo de conexión*** *y está definido por*

$$\delta(x'') := [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'')],$$

y los otros morfismos son los inducidos por f, g, h, k: a saber, $\overline{f} = f|_{\ker d'}$, $\overline{g} = g|_{\ker d}$, y

$$\begin{aligned} \overline{h}\colon \operatorname{coker} d' := \frac{N'}{\operatorname{im} d'} &\to \operatorname{coker} d := \frac{N}{\operatorname{im} d}, \\ (y' + \operatorname{im} d') &\mapsto (h(y') + \operatorname{im} d); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{k}\colon \operatorname{coker} d := \frac{N}{\operatorname{im} d} &\to \operatorname{coker} d'' := \frac{N''}{\operatorname{im} d''}, \\ (y + \operatorname{im} d) &\mapsto (k(y) + \operatorname{im} d''). \end{aligned}$$

(Las lineas punteadas significan que si f es mono y k es epi en el diagrama, entonces $\overline{f}$ y $\overline{k}$ son también mono y epi.) Esto se llama el **lema de la serpiente** porque el diagrama de arriba puede ser escrito como

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \ker d' \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, tail, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, tail, "i"] & \ker d'' \arrow[d, tail, "i''"] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
0 \arrow[r, dashed] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, two heads, "p'"] & N \arrow[r, "k"] \arrow[d, two heads, "p"] & N'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, two heads, "p''"] & 0 \\
& \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\overline{h}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\overline{k}"] & \operatorname{coker} d'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}
$$

La construcción del morfismo δ aparece en la película estadounidense "It's My Turn" (1980). Pueden ver esta parte en YouTube: http://www.youtube.com/watch?v=etbcKWEKnvg El nombre "diagrama de la serpiente" probablemente viene de Bourbaki ("diagramme du serpent" en francés).

27.2. Ejercicio. *No lea la demostración de abajo y demuestre el lema de la serpiente usted mismo: verifique que δ está bien definido y que la sucesión con núcleos y conúcleos es exacta.*

Demostración. La demostración usa el método conocido como la **caza de diagramas**. Antes de todo, demostremos la exactitud en las partes sin el morfismo misterioso δ.

<u>Exactitud en $0 \to \ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d$</u>. Si $f\colon M' \rightarrowtail M$ es un monomorfismo, entonces el morfismo inducido $\overline{f}\colon \ker d' \to \ker d$ es también un monomorfismo.

<u>Exactitud en $\operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{k}} \operatorname{coker} d'' \to 0$</u>. Si $k\colon N \twoheadrightarrow N''$ es un epimorfismo, entonces el morfismo inducido $\overline{k}\colon \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ es también un epimorfismo.

<u>Exactitud en $\ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d''$</u>. Para ver que $\operatorname{im} \overline{f} \subseteq \ker \overline{g}$, tenemos que demostrar que $\overline{g} \circ \overline{f} = 0$. El morfismo i'' es mono, y entonces es suficiente demostrar que $i'' \circ \overline{g} \circ \overline{f} = 0$. Pero $i'' \circ \overline{g} \circ \overline{f} = \underbrace{g \circ f}_{0} \circ i' = 0$.

Para ver que $\ker \overline{g} \subseteq \operatorname{im} \overline{f}$, consideremos $x \in M$ tal que $d(x) = 0$ y $\overline{g}(x) = 0$. Entonces $g(x) = 0$ y por la exactitud de $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$, existe $x' \in M'$ tal $f(x') = x$. Ahora $h \circ d'(x') = d \circ f(x') = 0$ y h es mono, de donde $d'(x') = 0$ y $x' \in \ker d'$. Tenemos $x = \overline{f}(x')$.

<u>Exactitud en $\operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{h}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{k}} \operatorname{coker} d''$</u>. Primero, $\overline{k} \circ \overline{h} \circ p' = p'' \circ \underbrace{k \circ h} = 0$. Pero p' es epi, de donde $\overline{k} \circ \overline{h} = 0$ y por lo tanto $\operatorname{im} \overline{h} \subseteq \ker \overline{k}$. Veamos otra inclusión $\ker \overline{k} \subseteq \operatorname{im} \overline{h}$. El morfismo $\overline{k}$ está definido por $y + \operatorname{im} d \mapsto k(y) + \operatorname{im} d''$. Si tenemos $(y + \operatorname{im} d) \in \ker \overline{k}$, esto quiere decir que $k(y) \in \operatorname{im} d''$, por ejemplo $k(y) = d''(x'')$ para algún $x'' \in N''$. El morfismo g es sobreyectivo, de donde $x'' = g(x)$ para algún $x \in M$. Luego por la conmutatividad del diagrama

$$d'' \circ g(x) = k \circ d(x) = k(y) = d''(x'').$$

Entonces $k(d(x)-y)=0$, y por la exactitud de $N' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} N''$ tenemos $d(x)-y \in \operatorname{im} h$, por ejemplo $d(x)-y=h(y')$ para algún $y' \in N'$. En fin,

$$\overline{h}(y'+\operatorname{im} d') = h(y') + \operatorname{im} d = y + \operatorname{im} d.$$

Entonces $(y+\operatorname{im} d) \in \operatorname{im} \overline{h}$.

<u>El morfismo δ está bien definido</u>. Tenemos que ver que la definición

$$\begin{aligned} \delta\colon\ \ker d'' &\to \operatorname{coker} d', \\ x'' &\mapsto [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'')] \end{aligned}$$

tiene sentido. Aquí $x'' \in M''$ es un elemento tal que $d''(x'')=0$. El morfismo g es sobreyectivo por nuestra hipótesis, y entonces podemos escoger un elemento $x \in M$ tal que $g(x)=x''$. Después apliquemos este elemento a $d(x) \in N$. Por la conmutatividad del diagrama, $k(d(x)) = d''(g(x)) = d''(x'') = 0$, de donde $d(x) \in \ker k$. Pero $\ker k = \operatorname{im} h$, y h es mono por nuestra hipótesis, y entonces existe un elemento único $y' \in N'$ tal que $h(y') = d(x)$. Finalmente, definimos $\delta(x'') := (y' + \operatorname{im} d') \in \operatorname{coker} d'$.

En la definición hay una elección arbitraria cuando escogemos un elemento $x \in g^{-1}(x'')$. Sean $x_1, x_2 \in M$ dos elementos diferentes tales que $g(x_1) = g(x_2) = x''$. Tenemos que ver que $h^{-1} \circ d(x_1) = h^{-1} \circ d(x_2) \pmod{\operatorname{im} d'}$, es decir $h^{-1}(d(x_1-x_2)) \in \operatorname{im} d'$. De hecho $x_1 - x_2 \in \ker g$, de donde $x_1 - x_2 \in \operatorname{im} f$ por la exactitud de $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ y existe $x' \in M'$ tal que $f(x') = x_1 - x_2$. Ahora $h \circ d'(x') = d \circ f(x') = d(x_1 - x_2)$. Pero h es una aplicación inyectiva, así que $h^{-1}(d(x_1-x_2)) = d'(x')$.

Entonces δ está bien definido, y se ve que es un morfismo R-lineal (en general, si tenemos un morfismo de R-módulos $f\colon M \to N$, entonces $f^{-1}(N_1 + r \cdot N_2) = f^{-1}(N_1) + r \cdot f^{-1}(N_2)$ para submódulos $N_1, N_2 \subseteq N$).

<u>Exactitud en $\ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d'$</u>. Para ver que $\operatorname{im} \overline{g} \subseteq \ker \delta$, sea $x \in M$ tal que $d(x)=0$. Entonces

$$\delta(\overline{g}(x)) = [h^{-1} \circ d \circ g^{-1} \circ g(x)] = [h^{-1} \circ d(x)] = 0.$$

Hay que ver que también $\ker \delta \subseteq \operatorname{im} \overline{g}$. Sea $x'' \in M''$ un elemento tal que $d''(x'')=0$ y $\delta(x'')=0$, es decir $h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'') \in \operatorname{im} d'$. Sea $x' \in M'$ tal que $h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'') = d'(x')$. Sea $x \in M$ tal que $g(x) = x''$. Tenemos $d(x) = h \circ d'(x') = d \circ f(x')$. Consideremos el elemento $x - f(x') \in M$. Tenemos $d(x - f(x')) = 0$ y $g(x - f(x')) = g(x) - \underbrace{g \circ f}_{0}(x') = g(x) = x''$. Entonces $x - f(x') \in \ker d$ es el elemento buscado con $\overline{g}(x - f(x')) = x''$.

<u>Exactitud en $\ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{h}} \operatorname{coker} d$</u>. Para ver que $\operatorname{im} \delta \subseteq \ker \overline{h}$, sea para algún $x'' \in M''$ tal que $d''(x'')=0$. Tenemos

$$\overline{h}(\delta(x'')) = h(h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'')) + \operatorname{im} d = d \circ g^{-1}(x'') + \operatorname{im} d = 0 + \operatorname{im} d.$$

Tenemos que ver que también $\ker \overline{h} \subseteq \operatorname{im} \delta$. Si $(y' + \operatorname{im} d') \in \ker \overline{h}$, entonces $h(y') \in \operatorname{im} d$, digamos $h(y') = d(x)$ para algún $x \in M$. Luego, si tomamos $g(x) \in M''$, se ve que $g(x) \in \ker d''$, porque

$$d'' \circ g(x) = k \circ d(x) = \underbrace{k \circ h}_{0}(y') = 0,$$

y tenemos

$$\delta(g(x)) = [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(g(x))] = [h^{-1} \circ d(x)] = [y'].$$

■

En la demostración hemos usado la caza de diagramas, y a priori nuestro argumento no se aplica a todas categorías abelianas. Para otras demostraciones, más elegantes, véase [Kashiwara–Schapira], [Borceux, vol. II], o [Mac Lane].

27.3. Ejercicio. *De hecho, la sucesión exacta del lema de la serpiente es **natural**. Específicamente, si tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & M_1' \arrow[r] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[ddr] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] \arrow[ddr] & M_1'' \arrow[r] \arrow[d, "d_1''"'] \arrow[ddr] & 0 & \\
0 \arrow[r] & N_1' \arrow[r] \arrow[ddr] & N_1 \arrow[r] \arrow[ddr] & N_1'' \arrow[r, dashed] \arrow[ddr] & 0 & \\
& 0 \arrow[r, dashed] & M_2' \arrow[r] \arrow[d, "d_2'"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d_2''"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & N_2' \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_2'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

con filas exactas, entonces las sucesiones exactas correspondientes con ker *y* coker *forman un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \ker d_1' \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_1'' \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & \ker d_2' \arrow[r] & \ker d_2 \arrow[r] & \ker d_2'' \arrow[r, "\delta_2"] & \operatorname{coker} d_2' \arrow[r] & \operatorname{coker} d_2 \arrow[r] & \operatorname{coker} d_2'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$