Ejercicios sobre categorías

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo par 2019

Primera sesión: categorías, funtores, y transformaciones naturales

1. Demuestre que si f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$ y F es un funtor $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$.

2. Demuestre que las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.

   a) Si $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ son isomorfismos (resp. monomorfismos, epimorfismos), entonces la composición $g \circ f\colon X \to Z$ es un isomorfismo (resp. monomorfismo, epimorfismo).

   b) Si para $m\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z$ la composición $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.

   c) Si para $f\colon X \to Y$, $e\colon Y \to Z$ la composición $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.

   d) Todo isomorfismo es automáticamente mono y epi. (En general, un mono- y epimorfismo no tiene por qué ser un isomorfismo.)

3. Demuestre que en la categoría k-**Vect** de k-espacios vectoriales los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones k-lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente.

   Demuestre lo mismo para la categoría **Ab** de grupos abelianos. (Es también cierto para la categoría de grupos **Grp**, pero el argumento es más complicado.)

4. Demuestre con todos los detalles la versión covariante del lema de Yoneda. La versión contravariante se encuentra en mis apuntes.

5. Sea G un grupo. Definamos una categoría **G** donde hay un solo objeto $*$, los morfismos $g\colon * \to *$ corresponden a los elementos de G y su composición corresponde a la multiplicación en G.

   Demuestre que un funtor $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Set}$ corresponde a un G-conjunto y una transformación natural entre tales funtores es una aplicación G-equivariante. ¿Qué es un funtor representable en este caso? ¿Qué significa el encajamiento de Yoneda?

6. Para un conjunto X sea
$$P^+(X) := P^-(X) := 2^X$$
   el conjunto de subconjuntos de X. Para una aplicación $f\colon X \to Y$ definamos
$$P^+(f)\colon 2^X \to 2^Y, \quad Z \mapsto f(Z),$$
   y
$$P^-(f)\colon 2^Y \to 2^X, \quad Z \mapsto f^{-1}(Z).$$
   Demuestre que P^+ y P^- son funtores $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, uno covariante y el otro contravariante.

7. Hay dos modos diferentes de asociar un grupo abeliano a un grupo G: tomar el centro $Z(G)$, o la abelianización $G^{ab} := G/[G,G]$. ¿Cuál de estas dos construcciones es funtorial?

8. Ejercicio de álgebra lineal. Sean k-**Vect** la categoría de k-espacios vectoriales y k-**vect** la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita. La construcción del espacio dual es un funtor contravariante

$$k\text{-}\mathbf{Vect}^{\mathrm{op}} \to k\text{-}\mathbf{Vect}, \quad k\text{-}\mathbf{vect}^{\mathrm{op}} \to k\text{-}\mathbf{vect}.$$

   Analice si estos funtores son fieles o plenos.

9. Sean

   - $\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E}$ tres categorías;
   - F_1, G_1 dos funtores entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$;
   - F_2, G_2 dos funtores entre $\mathscr{D}$ y $\mathscr{E}$;
   - $\alpha\colon F_1 \Rightarrow G_1$ y $\beta\colon F_2 \Rightarrow G_2$ dos transformaciones naturales.

   Todo esto puede ser expresado mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "F_1"] \arrow[r, bend right=50, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=50, "F_2"] \arrow[r, bend right=50, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

   Entonces, el **producto de Godement** de α y β es la transformación natural

$$\beta * \alpha\colon F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$$

   definida como

$$(\beta * \alpha)_X := \beta_{G_1(X)} \circ F_2(\alpha_X) = G_2(\alpha_X) \circ \beta_{F_1(X)}.$$

$$\begin{tikzcd}
F_2(F_1(X)) \arrow[r, "F_2(\alpha_X)"] \arrow[d, "\beta_{F_1(X)}"'] \arrow[dr, "(\beta*\alpha)_X"] & F_2(G_1(X)) \arrow[d, "\beta_{G_1(X)}"] \\
G_2(F_1(X)) \arrow[r, "G_2(\alpha_X)"'] & G_2(G_1(X))
\end{tikzcd}$$

   (Este diagrama conmuta gracias a la naturalidad de β.)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "F_2 \circ F_1"] \arrow[r, bend right=50, "G_2 \circ G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

Verifique que $\beta * \alpha$ es de hecho natural y demuestre que el producto de Godement es asociativo: para un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left=50, "F_1"] \arrow[r, bend right=50, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left=50, "F_2"] \arrow[r, bend right=50, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "F_3"] \arrow[r, bend right=50, "G_3"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \gamma"] & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

se cumple

$$(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha).$$

10. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ tres categorías. Sean F, G, H funtores $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y sean I, J, K tres funtores $\mathscr{D} \to \mathscr{E}$. Consideremos transformaciones naturales

$$\alpha \colon F \Rightarrow G, \quad \beta \colon G \Rightarrow H, \quad \sigma \colon I \Rightarrow J, \quad \tau \colon J \Rightarrow K.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\alpha \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\beta \Downarrow"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=60, "I"] \arrow[r, "J"] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\sigma \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\tau \Downarrow"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

Demuestre que

$$(\tau \circ \sigma) * (\beta \circ \alpha) = (\tau * \beta) \circ (\sigma * \alpha).$$