Alexius S. Academia

Generalized Hooke's Law:

(Solve for stresses)

Expanded form:

1) $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - v\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$ $\qquad E \cdot \varepsilon_x = \sigma_x - v \cdot \sigma_y - v \cdot \sigma_z$

2) $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - v\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right)$ $\qquad E \cdot \varepsilon_y = \sigma_y - v \cdot \sigma_z - v \cdot \sigma_x$

3) $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - v\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$ $\qquad E \cdot \varepsilon_z = \sigma_x - v \cdot \sigma_x - v \cdot \sigma_y$

In matrix form:

$$\begin{bmatrix} 1 & -v & -v \\ -v & 1 & -v \\ -v & -v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Rearranging the equation:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v & -v \\ -v & 1 & -v \\ -v & -v & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot \varepsilon_x \cdot (v-1)}{2 \cdot v^2 + v - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_y}{2 \cdot v^2 + v - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_z}{2 \cdot v^2 + v - 1} \\ \frac{E \cdot \varepsilon_y \cdot (v-1)}{2 \cdot v^2 + v - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_x}{2 \cdot v^2 + v - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_z}{2 \cdot v^2 + v - 1} \\ \frac{E \cdot \varepsilon_z \cdot (v-1)}{2 \cdot v^2 + v - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_x}{2 \cdot v^2 + v - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_y}{2 \cdot v^2 + v - 1} \end{bmatrix}$$

Substitute the condition:

$\varepsilon_z := 0 \qquad \sigma_z := 0$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E \cdot \varepsilon_x \\ E \cdot \varepsilon_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E \cdot \varepsilon_x}{v^2 - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_y}{v^2 - 1} \\ -\frac{E \cdot \varepsilon_y}{v^2 - 1} - \frac{E \cdot v \cdot \varepsilon_x}{v^2 - 1} \end{bmatrix}$$

Interpreting the result:

$$\sigma_x = -\frac{E \cdot \left(\varepsilon_x + v \cdot \varepsilon_y\right)}{v^2 - 1} = \frac{E}{1 - v^2} \cdot \left(\varepsilon_x + v\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{E \cdot \left(\varepsilon_y + v \cdot \varepsilon_x\right)}{v^2 - 1} = \frac{E}{1 - v^2} \cdot \left(\varepsilon_y + v\varepsilon_x\right)$$