Regresi Linear

Ali Akbar Septiandri

September 27, 2018

Universitas Al Azhar Indonesia

Daftar isi

”The only stupid question is the one you were afraid to ask but never did.”

- Richard Sutton

Model-based reflex agents

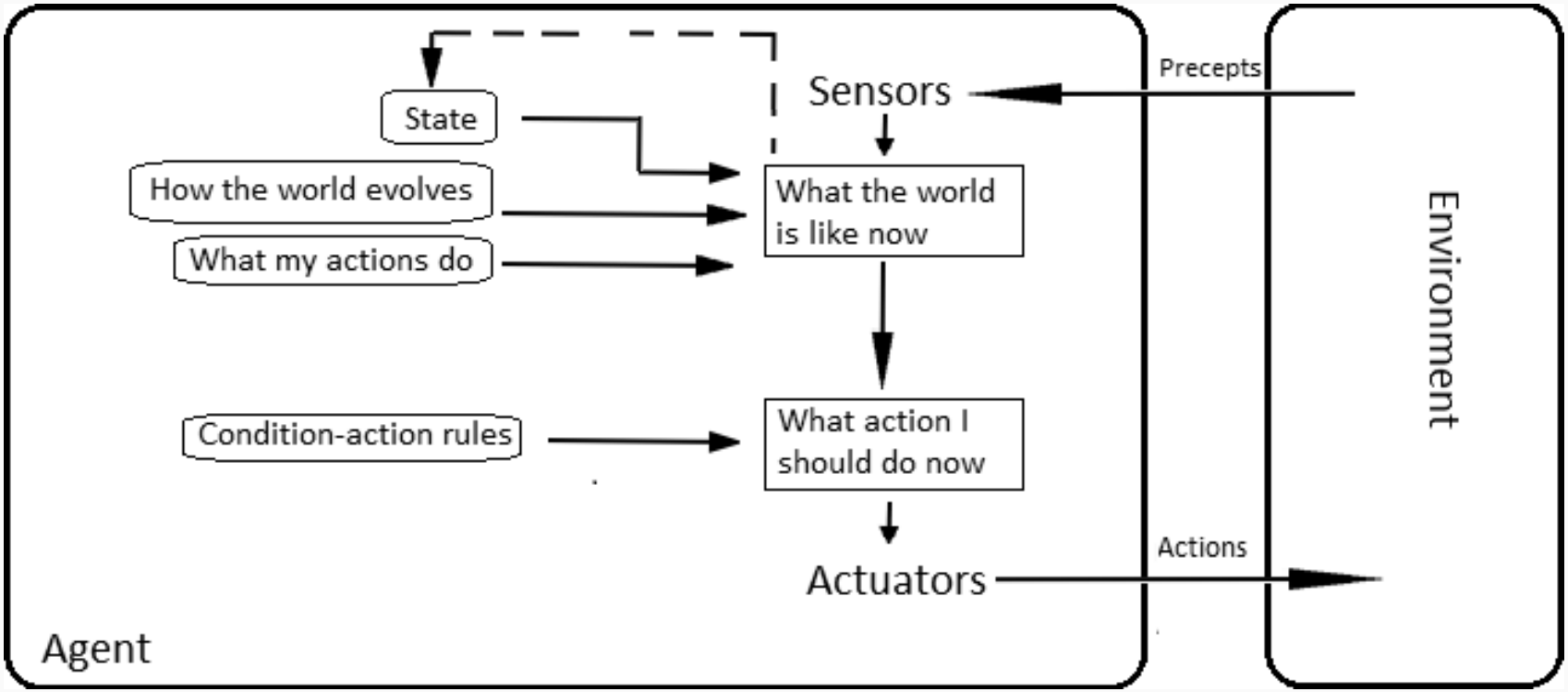


Figure 1: Model yang mengandalkan riwayat persepsi dan dampaknya

Ordinary Least Squares

Prediksi hubungan antara dua variabel

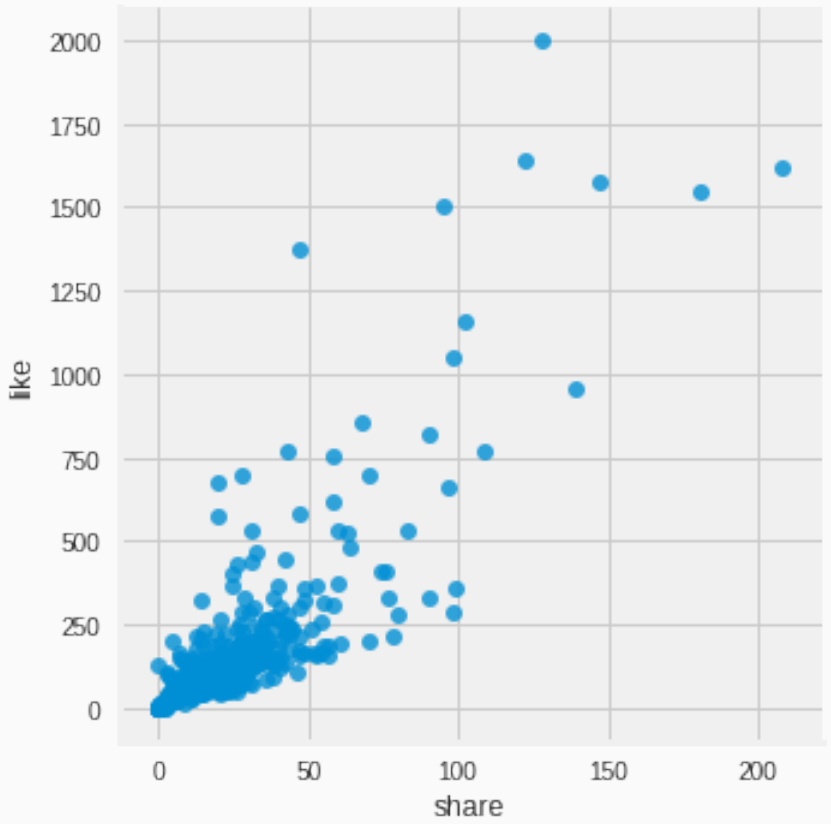


Figure 2: Data hubungan antara ‘share’ dengan ‘like’ pada Facebook

Prediksi hubungan antara dua variabel

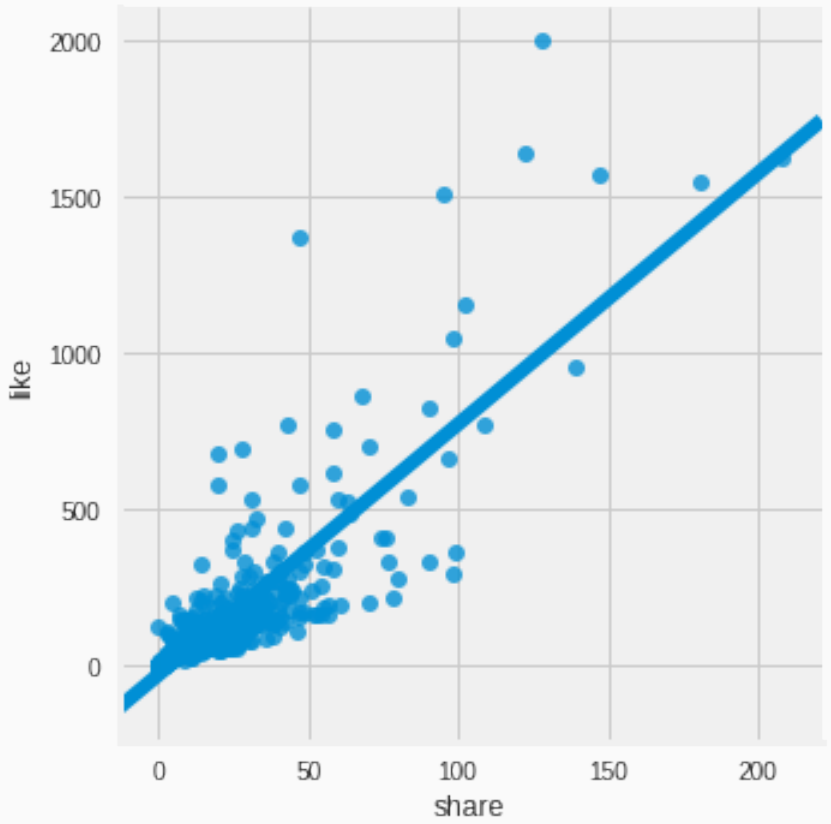


Figure 2: Data hubungan antara ‘share’ dengan ‘like’ pada Facebook

Simple linear regression

Fungsi linear

Kasus paling sederhana adalah mencocokkan garis lurus ke sekumpulan data

$$y = ax + b$$

dengan a adalah *slope*, gradien, atau kemiringan; sedangkan b dikenal dengan nama *intercept* atau bias.

Notasi lain

$$y = w_0 + w_1 x_1$$

dengan w adalah bobot atau koefisien.

Linear regresi dari fungsi yang diketahui

Example

```
rng = np.random.RandomState(1)
x = 10 * rng.rand(50)
y = 2 * x - 5 + rng.randn(50)
plt.scatter(x, y);
```

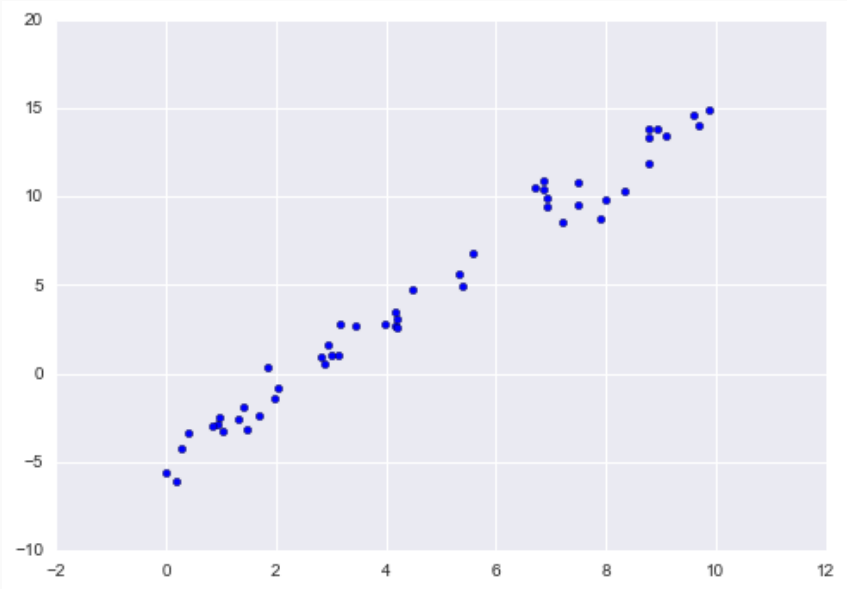


Figure 3: Data yang dimunculkan secara acak [VanderPlas, 2016]

Ordinary least squares (OLS) regression

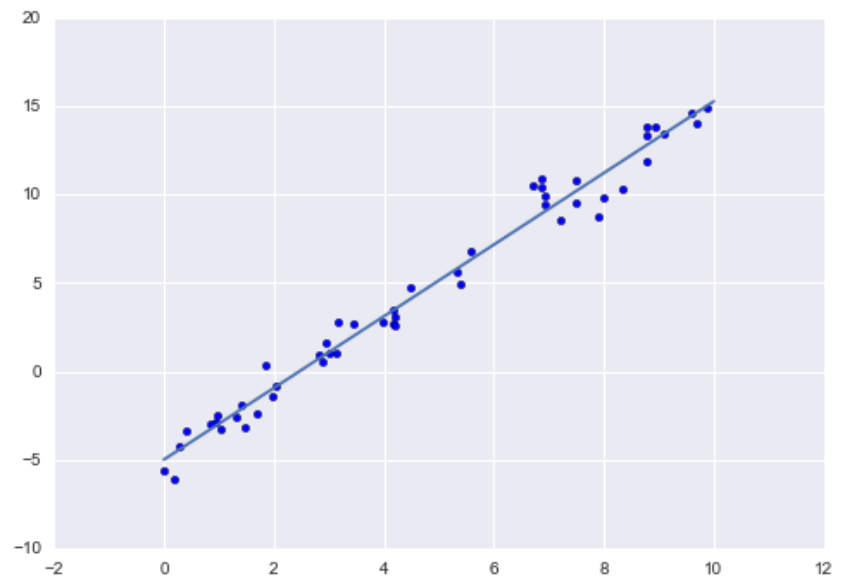


Figure 4: Hasil pencocokan garis [VanderPlas, 2016]

```
Model slope:  2.02720881036
Model intercept:  -4.99857708555
```

Bagaimana kalau ada lebih dari dua variabel
yang ingin kita lihat hubungannya?

Multidimensional linear regression

Model

$$y = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_D x_D = \sum_{j=0}^{D} w_j x_j$$

dengan $x_0 = 1$

Notasi matriks-vektor

$$y = \mathbf{w} \cdot \phi(x)$$

dengan $\phi(x)$ adalah vektor fitur (*feature vector*)

Regresi linear untuk dua variabel

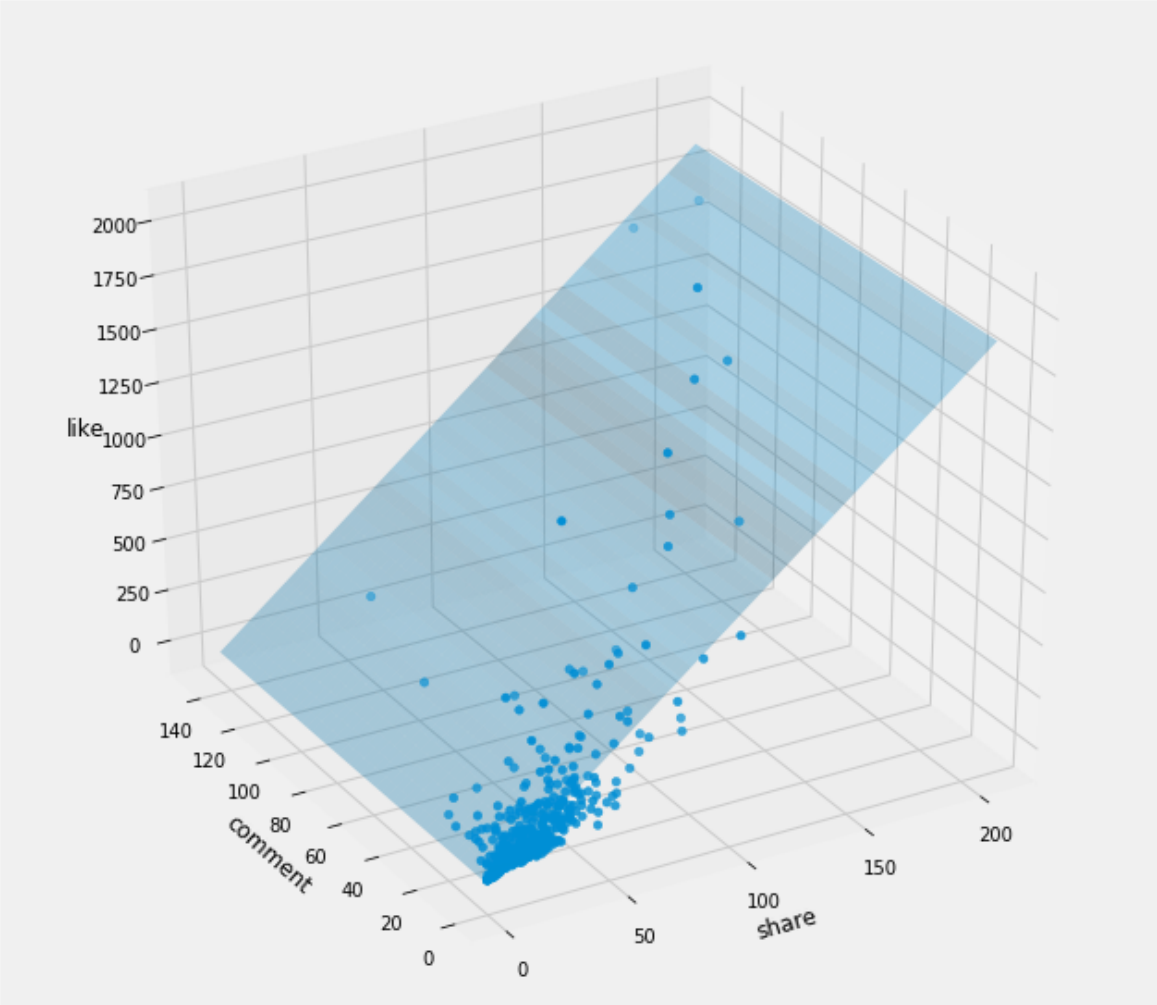


Figure 5: Hubungan antara ‘share’, ‘comment’, dan ‘like’ pada foto di Facebook

Prediktor linear (contoh)

Vektor bobot $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^D$

bias: -20.24

share: 6.65

comment: 3.53

Vektor fitur $\phi(x) \in \mathbb{R}^D$

bias: 1

share: 147

comment: 58

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \mathbf{w} \cdot \phi(x) \\ &= \sum_{j=1}^{D} w_j \phi_j(x) \\ &= -20.24(1) + 6.65(147) + 3.53(58) = 1162.05\end{aligned}$$

Jadi, *diprediksi* bahwa untuk foto dengan *share* $= 147$ dan *comment* $= 58$, foto tersebut akan mendapatkan ≈ 1162.05 *likes*.

Bagaimana cara mendapatkan nilai w?

Error Minimisation

(Supervised) Learning

- Kita ingin mencari $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$
  X: data masukan
  Y: data keluaran
  dari data latih yang i.i.d.[1]

$$\mathcal{D} = (x_1, y_1), ..., (y_N, y_N)$$

- Objektif: Meminimalkan *generalisation error* dengan menggunakan *loss function* ℓ, contohnya:

$$\ell(y, f(x)) = (y - f(x))^2$$

  yang juga dikenal dengan nama *squared loss*

[1] independent and identically distributed

Meminimalkan error pada data latih

- Untuk meminimalkan *generalisation error*

$$w^* = \arg\min_w \mathbb{E}_{X,Y}[(Y - w^T X)^2]$$

- Kita tidak punya data untuk seluruh kemungkinan pasangan nilai X dan Y!
- Ide: Minimalkan error pada data latih

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{|\mathcal{D}_{train}|} \sum_{(x,y)\in\mathcal{D}_{train}} \ell(y, x, \mathbf{w})$$

Optimasi analitis

- Didefinisikan fungsi error

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mathbf{w}\cdot\phi(x_i))^2$$

Optimasi analitis

- Didefinisikan fungsi error

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mathbf{w}\cdot\phi(x_i))^2$$

- Nilainya dapat dioptimasi dengan mencari turunan pertama, lalu atur nilainya menjadi 0, i.e. $\frac{\partial E}{\partial w} = 0$ atau $\nabla_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w}) = 0$

Optimasi analitis

- Didefinisikan fungsi error

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mathbf{w}\cdot\phi(x_i))^2$$

- Nilainya dapat dioptimasi dengan mencari turunan pertama, lalu atur nilainya menjadi 0, i.e. $\frac{\partial E}{\partial w} = 0$ atau $\nabla_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w}) = 0$
- Solusi tertutupnya:

$$\hat{\mathbf{w}} = (\phi^T\phi)^{-1}\phi^T\mathbf{y}$$

Optimasi analitis

- Didefinisikan fungsi error

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mathbf{w}\cdot\phi(x_i))^2$$

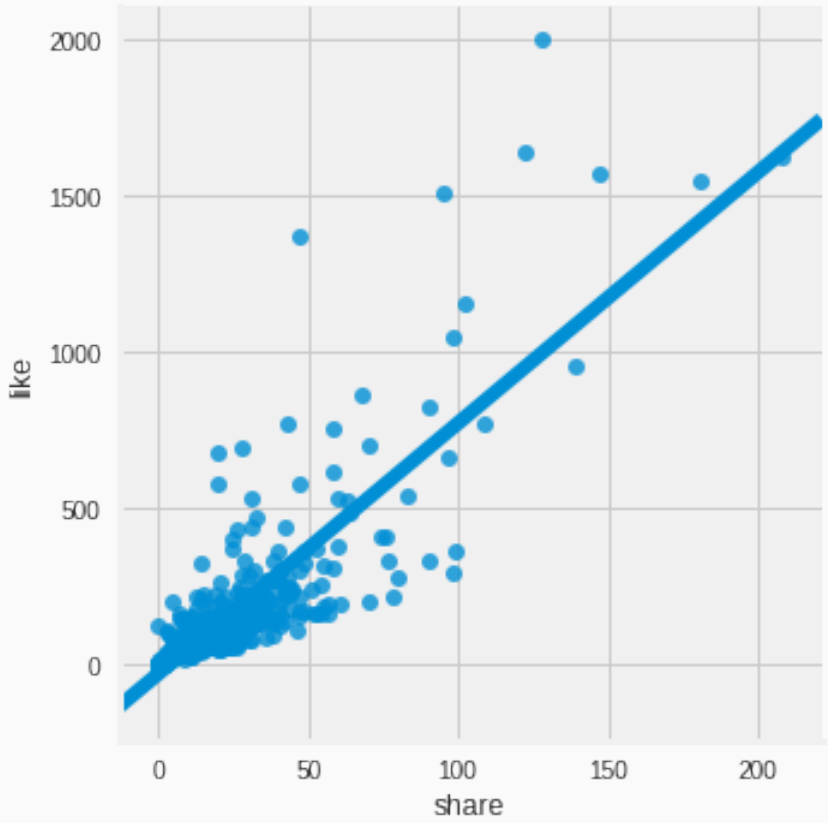
- Nilainya dapat dioptimasi dengan mencari turunan pertama, lalu atur nilainya menjadi 0, i.e. $\frac{\partial E}{\partial w} = 0$ atau $\nabla_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w}) = 0$
- Solusi tertutupnya:

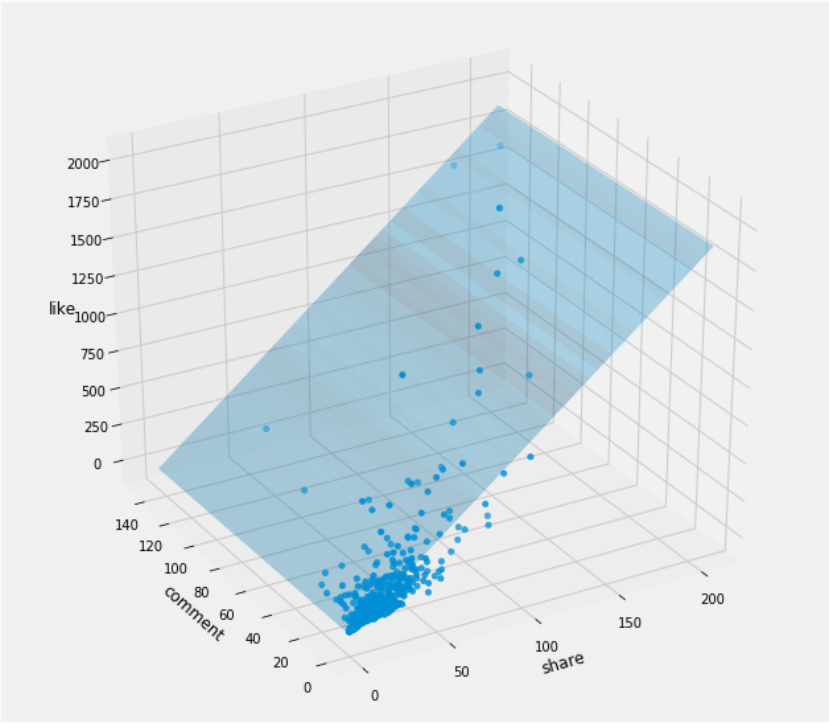
$$\hat{\mathbf{w}} = (\phi^T\phi)^{-1}\phi^T\mathbf{y}$$

- Bagian $(\phi^T\phi)^{-1}\phi^T$ dikenal sebagai *pseudo-inverse*

Non-linear Functions

Perhatikan kembali





Apa kekurangan dari regresi linear sederhana seperti ini?

Non-linearity

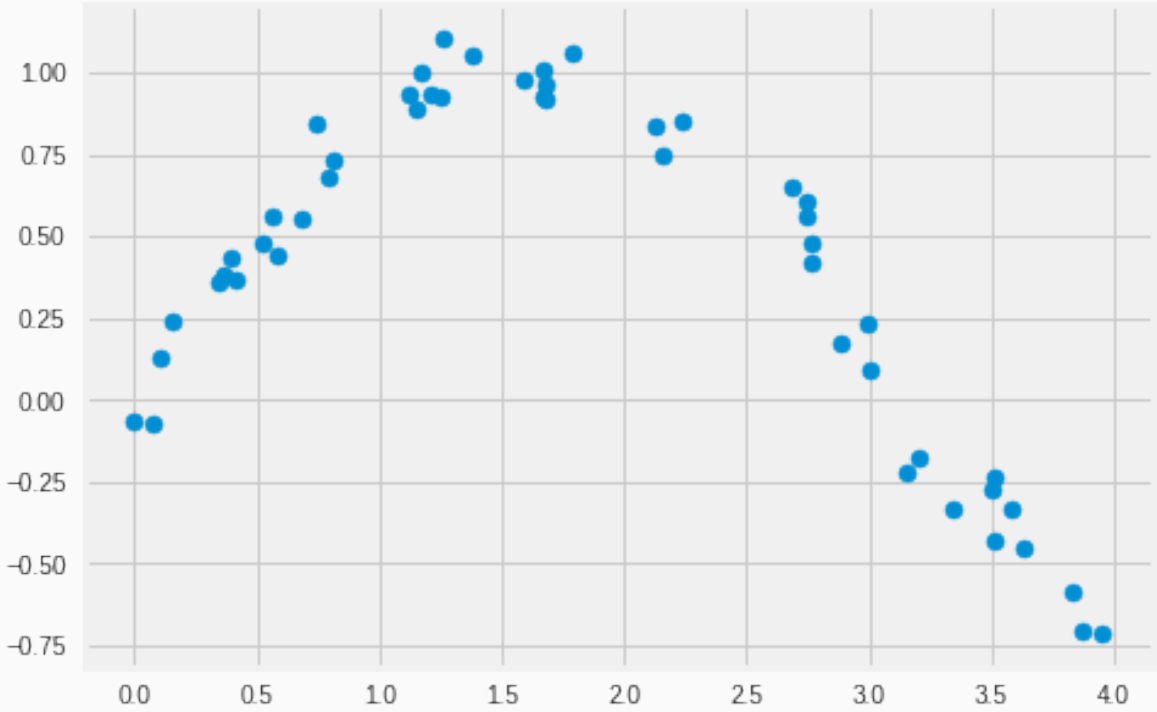


Figure 6: Data yang dihasilkan dari fungsi sin dengan *noise*

Bagaimana kalau datanya seperti ini?

Underfitting

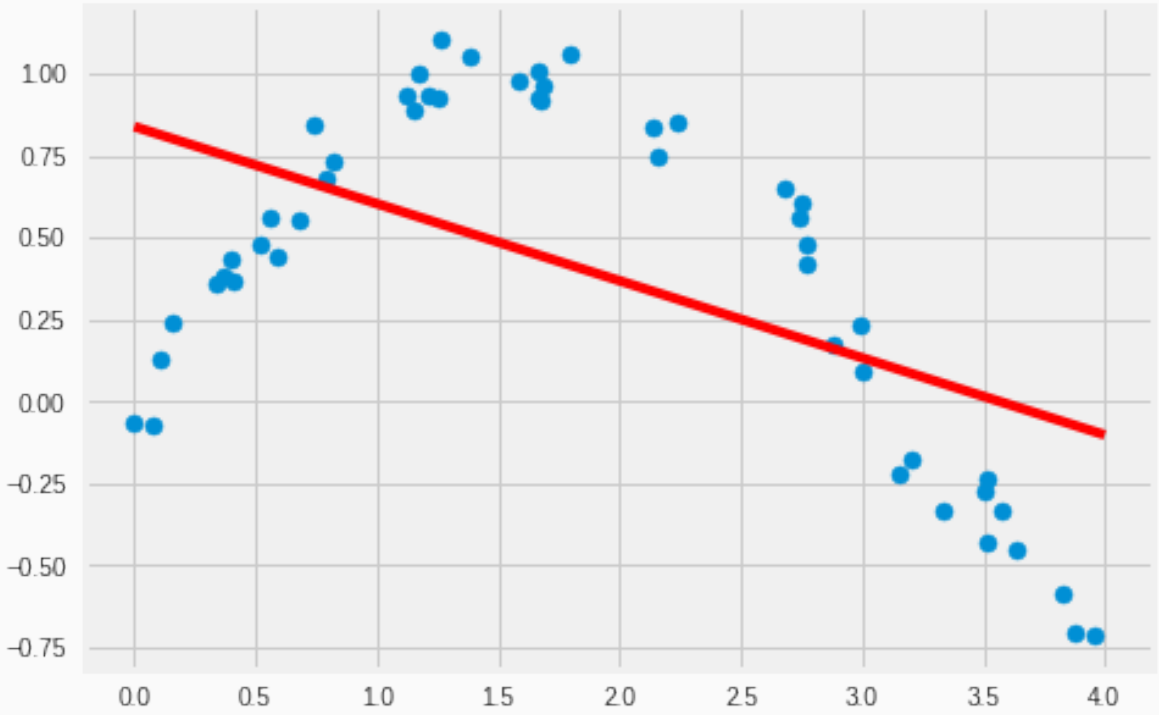


Figure 7: Hasil *fitting* regresi linear sederhana

Jika model yang dihasilkan **lebih sederhana** dibandingkan data yang **seharusnya** dicocokkan, maka model tersebut disebut mengalami **underfitting**.

Polynomial Basis Functions

Regresi linear dengan fungsi basis polinomial

Jika kita mengubah $x_p = f_p(x)$, dengan $f_p()$ adalah fungsi transformasi, maka untuk $f_p() = x^p$ dan x adalah input berdimensi satu, modelnya menjadi

$$y = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + w_3 x^3 + ...$$

Polynomial Basis Functions

In

```
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
x = np.array([2, 3, 4])
poly = PolynomialFeatures(3, include_bias=False)
poly.fit_transform(x[:, None])
```

Out

```
array([[  2.,   4.,   8.],
       [  3.,   9.,  27.],
       [  4.,  16.,  64.]])
```

Best-fit

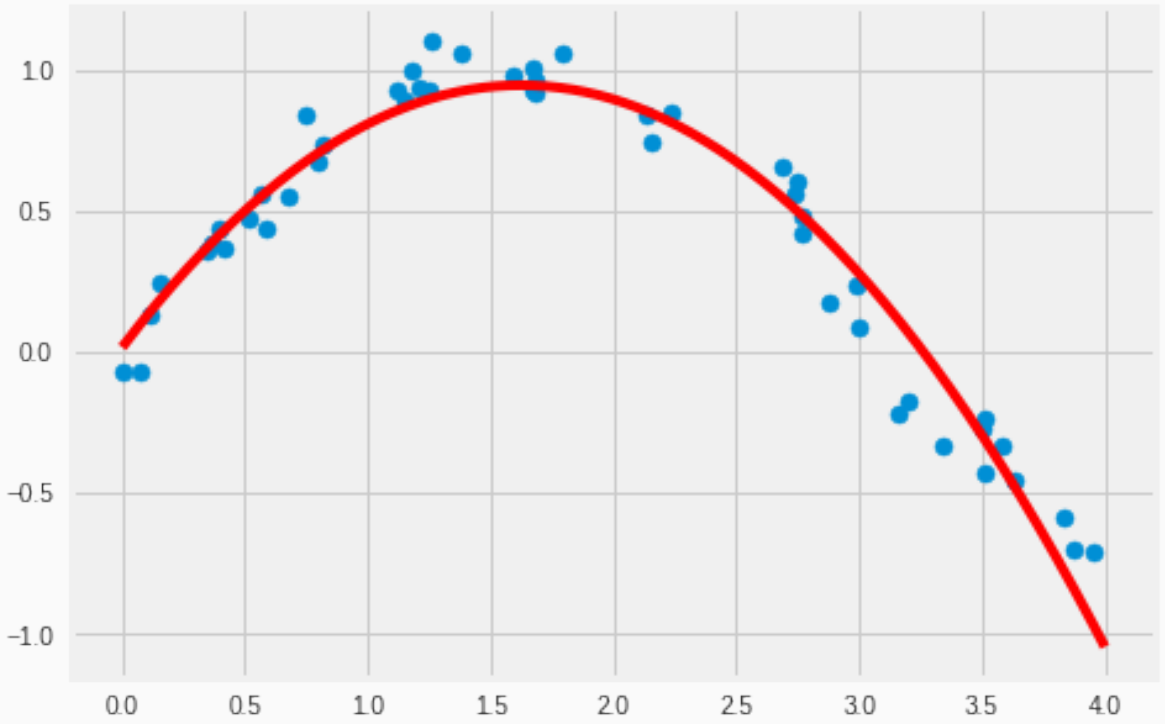


Figure 8: Hasil *fitting* fungsi basis polinomial $p = 2$

Apa yang terjadi jika p dibuat lebih besar?

Overfitting

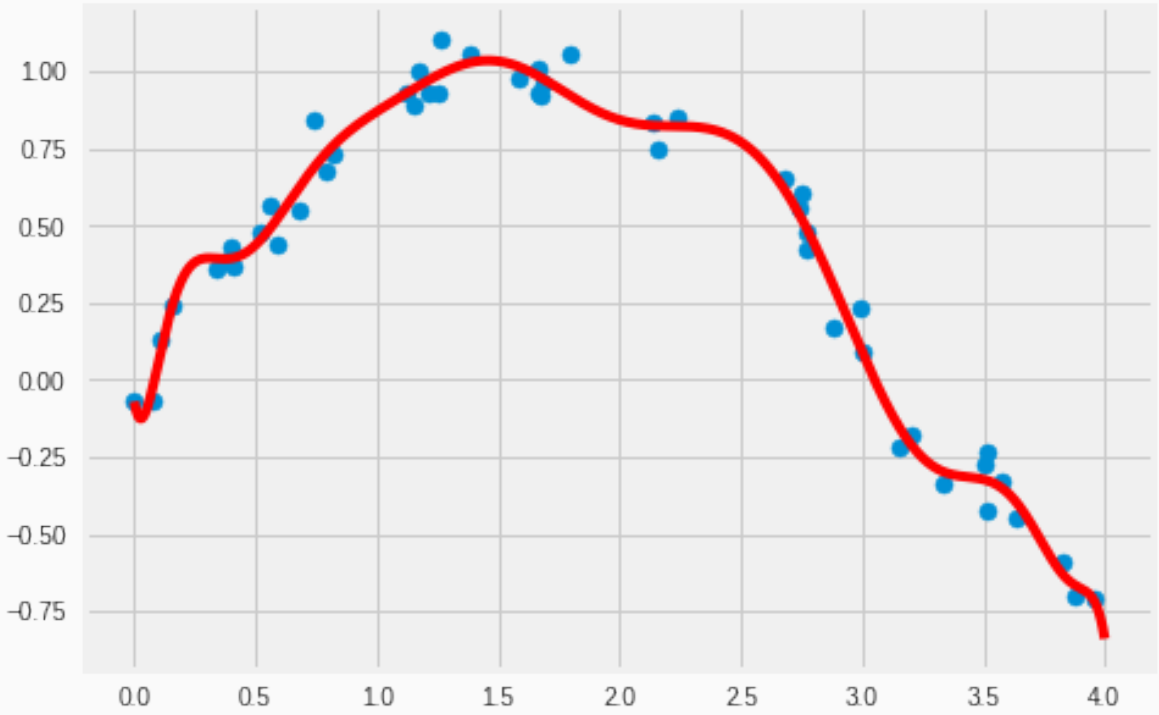


Figure 9: Hasil *fitting* fungsi basis polinomial $p = 15$

Jika model yang dihasilkan **lebih kompleks** ($\sim$ parameternya banyak) dibandingkan data yang **seharusnya** dicocokkan, maka model tersebut disebut mengalami **overfitting**.

Kita dapat mengatasi masalah *overfitting*
pada regresi linear dengan melakukan regularisasi.
(*non-examinable*)

Bagaimana kalau atributnya bersifat kategori?

Contoh kasus

Buatlah model untuk memprediksi jumlah *likes* yang akan didapatkan sebuah foto jika diketahui usia pembuat pos, jenis kelaminnya, dan kategori gambarnya (pemandangan, orang, benda).

Solusi

- usia $= \{x_1 \in \mathbb{N}\}$

Solusi

- usia $= \{x_1 \in \mathbb{N}\}$
- jenis kelamin $= \{\text{laki-laki, perempuan}\} = \{0, 1\}$

Solusi

- usia $= \{x_1 \in \mathbb{N}\}$
- jenis kelamin $= \{\text{laki-laki, perempuan}\} = \{0, 1\}$
- kategori $= \{\text{pemandangan, orang, benda}\} = \{0, 1, 2\}$?

Solusi

- usia $= \{x_1 \in \mathbb{N}\}$
- jenis kelamin $= \{\text{laki-laki, perempuan}\} = \{0, 1\}$
- kategori $= \{\text{pemandangan, orang, benda}\} = \{0, 1, 2\}$?
- Apakah benda $>$ pemandangan?

Solusi

- usia $= \{x_1 \in \mathbb{N}\}$
- jenis kelamin $= \{\text{laki-laki, perempuan}\} = \{0, 1\}$
- kategori $= \{\text{pemandangan, orang, benda}\} = \{0, 1, 2\}$?
- Apakah benda $>$ pemandangan?
- Apakah perempuan $>$ laki-laki?

One-of-k encoding

- Dikenal juga dengan nama "one-hot encoding"

One-of-k encoding

- Dikenal juga dengan nama "one-hot encoding"
- Mengubah masing-masing nilai dari suatu atribut menjadi atribut tersendiri

One-of-k encoding

- Dikenal juga dengan nama "one-hot encoding"
- Mengubah masing-masing nilai dari suatu atribut menjadi atribut tersendiri
- e.g. kategori $= \{$pemandangan, orang, benda$\}$ menjadi
  - kategori_pemandangan $= \{0, 1\}$
  - kategori_orang $= \{0, 1\}$
  - kategori_benda $= \{0, 1\}$
- sehingga...

Formula

$$y = w_0x_0 + w_1x_1 + ... + w_6x_6 = \sum_{j=0}^{6} w_jx_j$$

dengan $x_0 = 1$, $x_1 =$ usia, $x_2 =$ jk_laki, $x_3 =$ jk_perempuan,
$x_4 =$ kategori_pemandangan, $x_5 =$ kategori_orang, dan
$x_6 =$ kategori_benda.

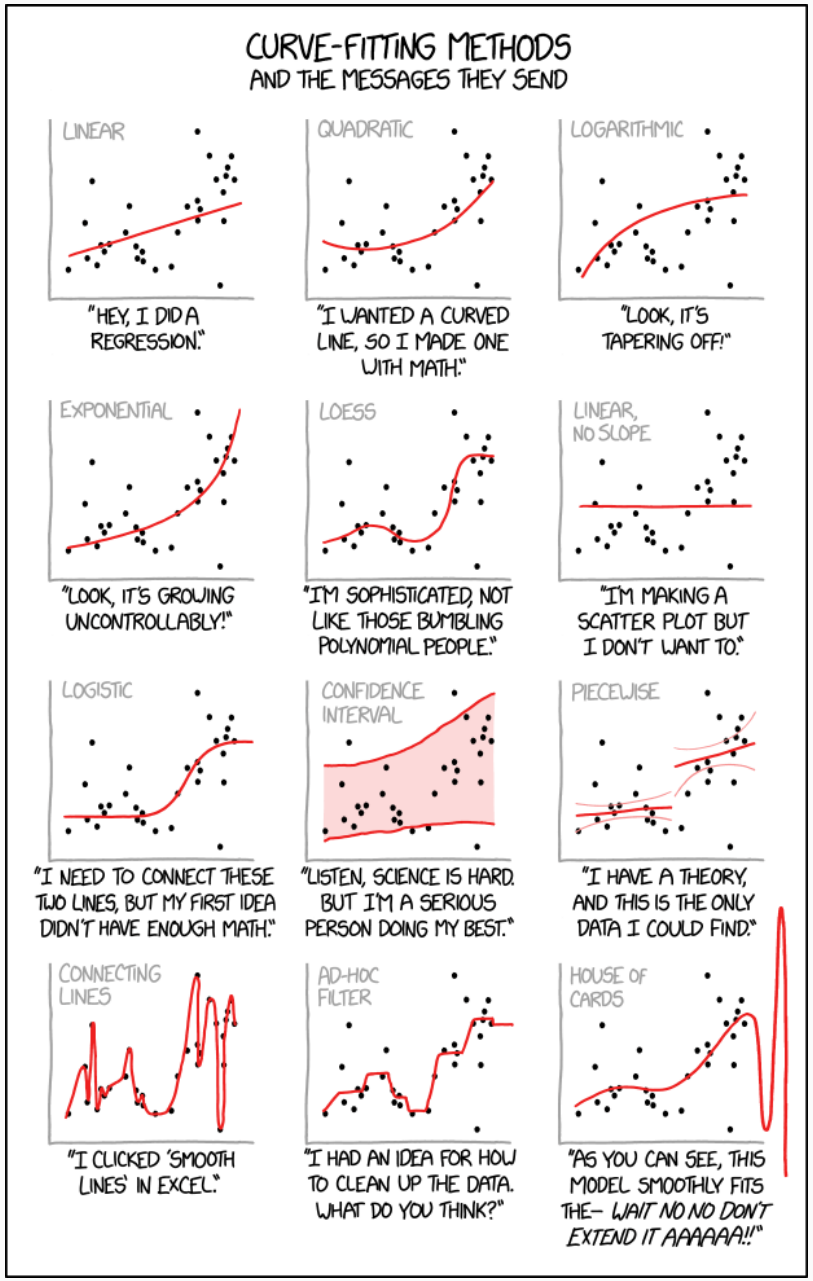


Figure 10: Sumber: `https://xkcd.com/2048/`

Ikhtisar

- Regresi linear dapat digunakan untuk memprediksi nilai riil
- Regresi linear mempunyai solusi tertutup untuk mencari nilai bobot
- Kasus non-linear dapat ditangani oleh regresi linear dengan melakukan transformasi terhadap fitur, e.g. dengan fungsi basis polinomial
- Konfigurasi parameter yang tepat dibutuhkan untuk menghindari *underfitting* dan *overfitting*
- Gunakan *one-hot encoder* untuk mengubah atribut bertipe kategori

Pertemuan berikutnya

- Klasifikasi: regresi logistik
- Optimasi numerik

Referensi

Jake VanderPlas (2016)

In Depth: Linear Regression

Python Data Science Handbook

Terima kasih