Matemática Discreta

6/10

Lembre:

Função, Aplicação

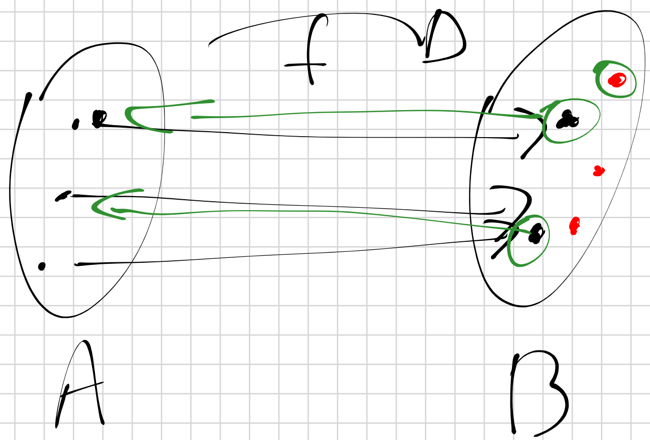
$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

A cada $x \in A$ corresponde um único $y \in B$.

Função sobrejetiva

$f: A \to B$ é sobrejetiva quando para cada $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$

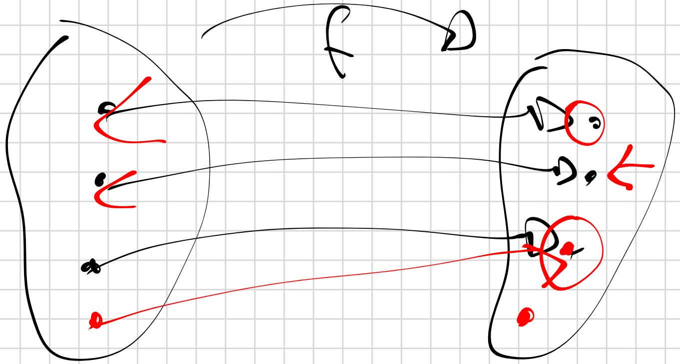
(todo y do contradomínio é imagem de algum x do domínio)



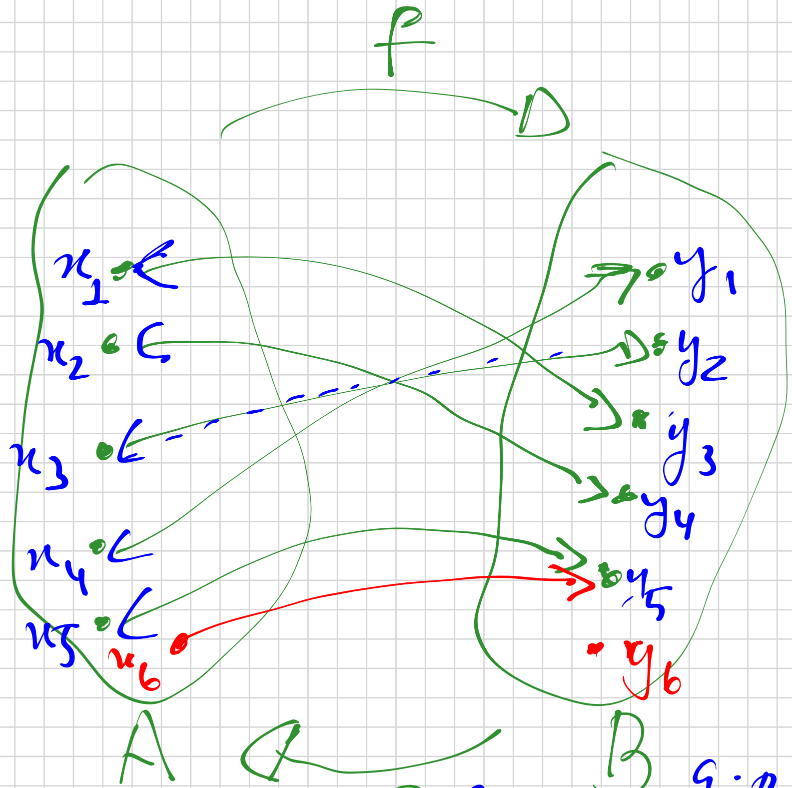
funções injetivas

$f: A \to B$ é injetiva quando

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



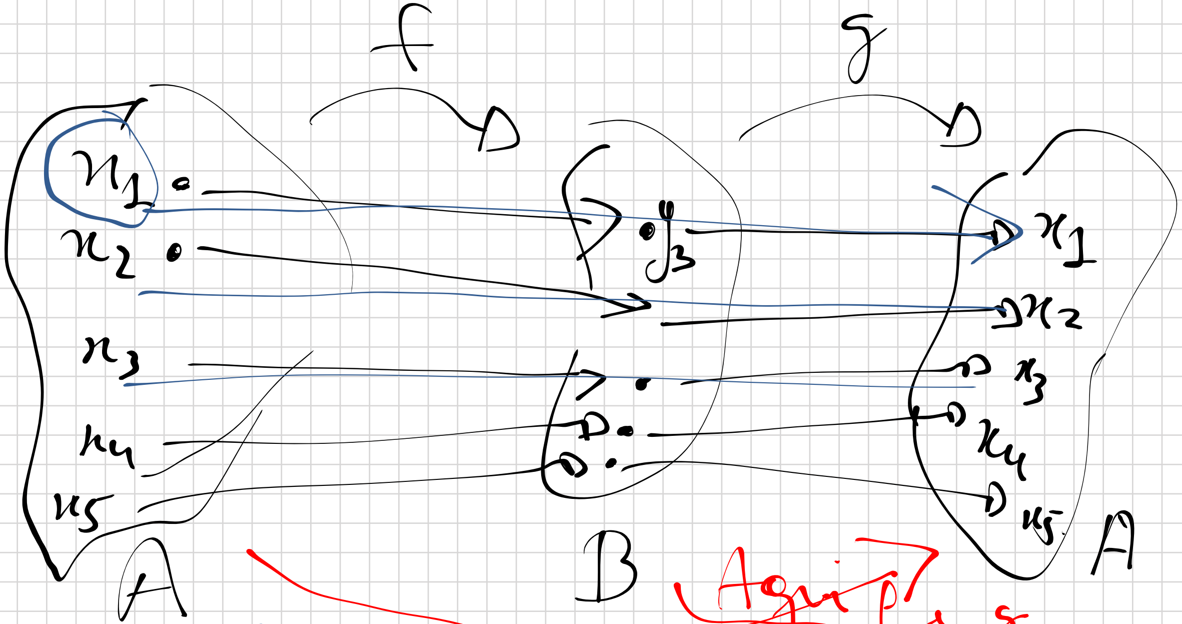
Definição: Dizemos que $f: A \to B$ é bijetora quando f é injetora e sobrejetora



? g

$g: B \to A$

$f(x_1) = y_3$	$g(y_1) = x_4$
$f(x_2) = y_4$	$g(y_2) = x_3$
$f(x_3) = y_2$	$g(y_3) = x_1$
$f(x_4) = y_1$	$g(y_4) = x_2$
$f(x_5) = y_5$	$g(y_5) = x_5$



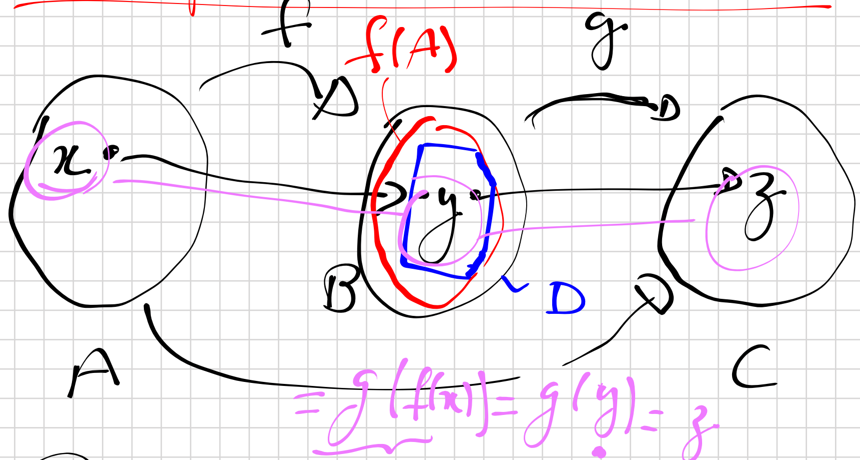
Aqui f e g são bijetoras

Definição: A função identidade em A é a função

$$I_A : A \longrightarrow A$$

$$x \longmapsto I_A(x) = x$$

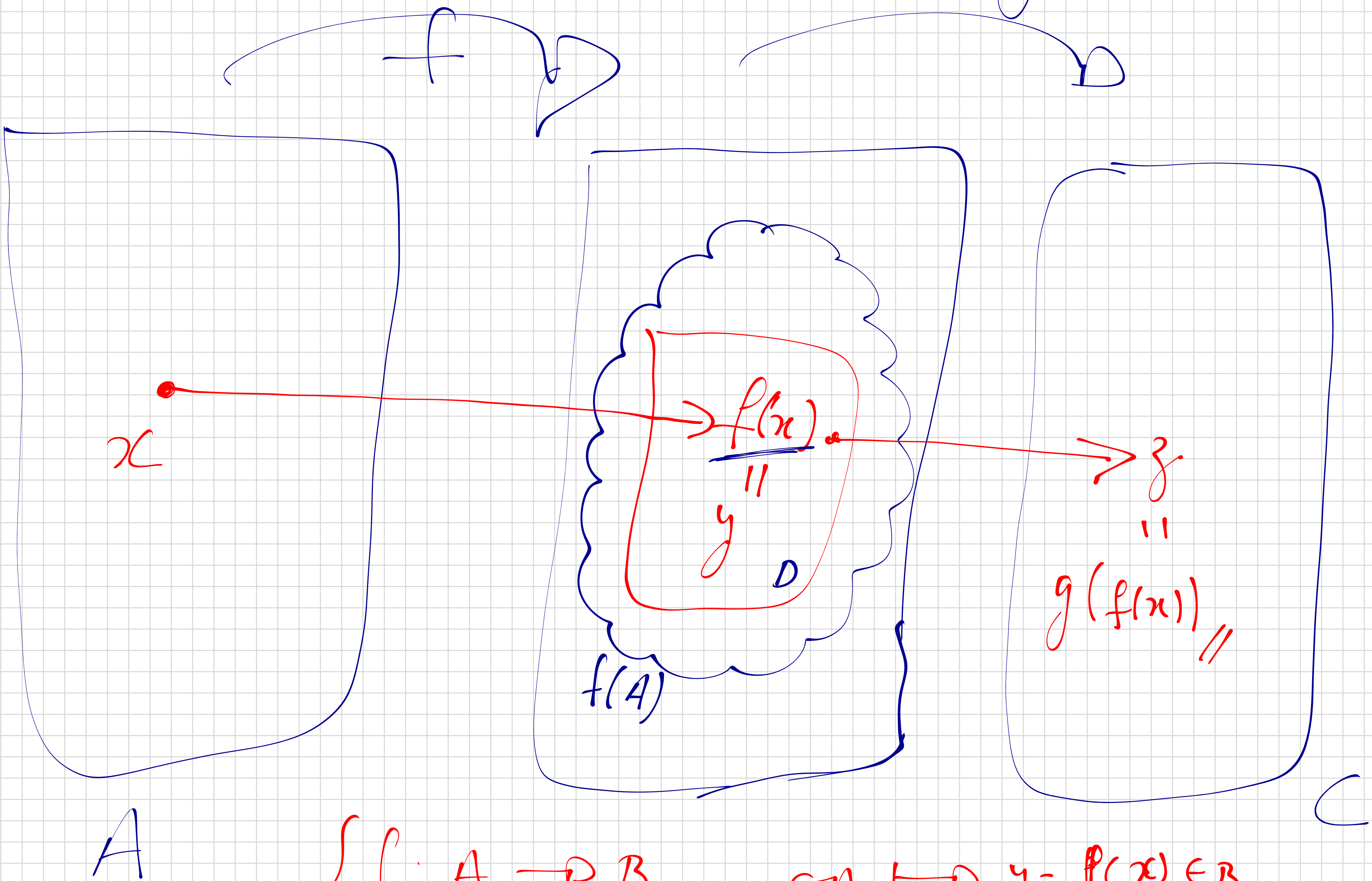
Composição de funções



Definição: Dadas $f : A \to B$ e $g : D \to C$ tais que $D \subset f(A)$, podemos construir uma nova função $\boxed{g \circ f} : A \longrightarrow C$ fazendo para cada $x \in A$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$g : D \to C$



$$\begin{cases} f : A \to B \\ g : B \to C \end{cases}$$

$x \in A \mapsto y = f(x) \in B$

$\mapsto g(y) = g(f(x))$

Exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x$

$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x} = g(x)$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$l: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$

$-x > 0$

$$\underbrace{h}(f(x)) = [f(x)]^2$$

$$= (-x)^2 = x^2$$

$$\underbrace{h(f(x))}_{h \circ f} = x^2$$

$h \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto h \circ f(x) = x^2$

$$g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}) =$$

$$= \sqrt{f(x)} = \sqrt{-x}$$

não está definido em $\mathbb{R}$.

$$g \circ l(x) = g(l(x)) =$$

$$\sqrt{l(x)} = \sqrt{-x} \text{ OK}$$

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

$$g \circ h(x) = g(h(x)) =$$
$$= \sqrt{h(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$g \circ h(x) = |x|$$

$$\boxed{g \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

$$h \circ g(x) =$$
$$h(g(x)) = [g(x)]^2$$
$$= (\sqrt{x})^2 = x$$

$$h \circ g(x) = x$$

$$\boxed{h \circ g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}}$$

Observe que

$g \circ h \neq h \circ g$ pois

duas funções são iguais quando têm mesmo domínio, mesmo contradomínio e mesma regra.

Definição: Dizemos que $f : A \to B$ tem inversa $g : B \to A$ quando

$$\begin{cases} \underbrace{g \circ f}_{} = I_A & \text{e} \\ \underbrace{f \circ g}_{} = I_B \end{cases}$$

Assim escrevemos neste caso

$$g = f^{-1} \left(\neq \frac{1}{f} \right)$$

$$\cancel{g = f^{\leftarrow}}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(-5)^{-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

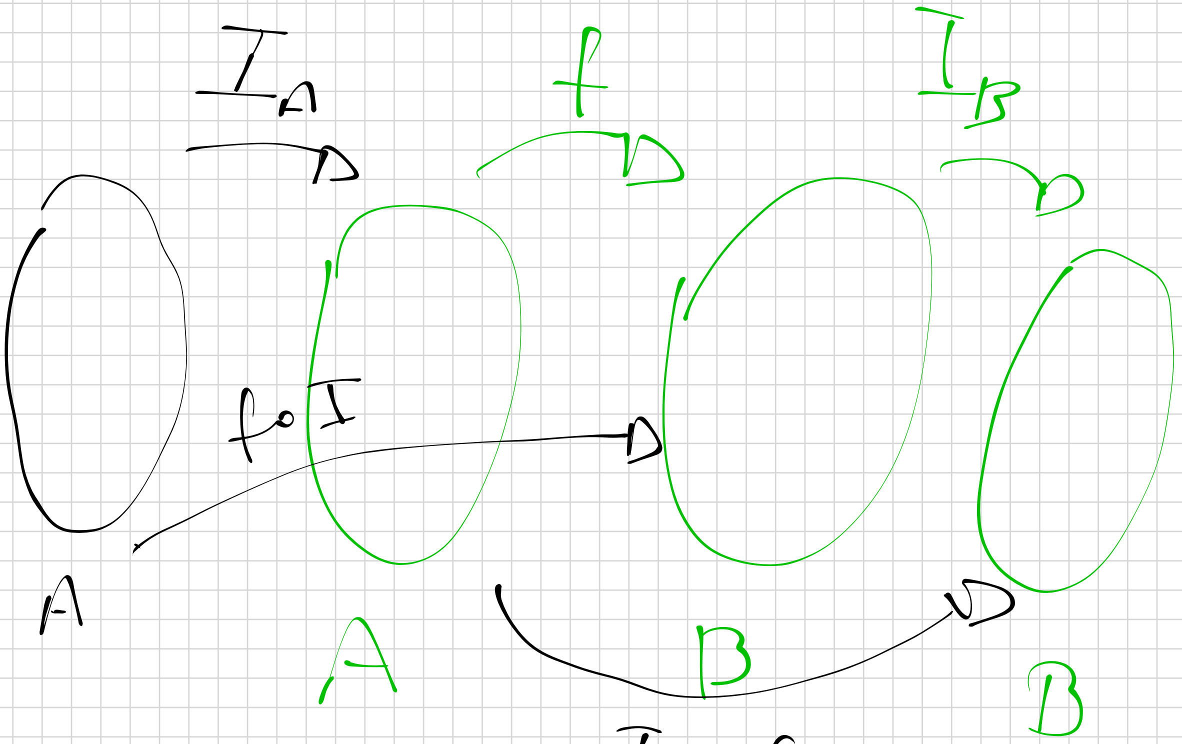
$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{})$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

$$f \circ g(x) = f(\underbrace{g(x)}_{})$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$



$$I_B \circ f = f$$

$$f^{-1} \circ f = I_A$$

$$f \circ f^{-1} = I_B$$

$$1 \cdot x = x$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot x^{-1} = 1 \\ x^{-1} \cdot x = 1 \end{array}\right\} \quad x \neq 0$$

$$B \to B$$

Exercício

$$f : A \to B$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{I_B} \circ f = f \quad \text{e} \\ f \circ I_A = f \end{array}\right.$$

Álgebra

$\boxed{\text{Anel}}$ 1

unidade

identidade

Exemplo:

$$g \quad f : \overset{A}{\mathbb{R}_+} \longrightarrow \overset{B}{\mathbb{R}_+}$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

$$f \quad g : \overset{B}{\mathbb{R}_+} \longrightarrow \overset{A}{\mathbb{R}_+}$$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$f \circ g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2$$

$$= \cancel{(\sqrt{x})^2} = x \in \mathbb{R}_+$$

$$\boxed{f \circ g(x) = x} = I_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Por outro lado

$$g \circ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)}$$

$$= \sqrt{x^2} = |x|$$

$$= x$$

$$g \circ f(x) = x = I_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Assim

$$\begin{cases} g \circ f = I_{\mathbb{R}_+} \\ f \circ g = I_{\mathbb{R}_+} \end{cases}$$ Logo

$$g = f^{-1}$$

$$f = g^{-1}$$

Perceba que

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Exemplo: Mostre que $f = f^{-1}$

onde

$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

De fato,

$$f\circ f(x) = f(\underbrace{f(x)}) = \frac{\cancel{f(x)}+1}{\cancel{f(x)}-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{1}}{\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{1}} =$$

$$\frac{\cancel{f(x)}+1}{\cancel{f(x)}-1} = \frac{3+1}{3-1}$$

$$x = 2 \qquad = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{\frac{2+1}{2-1}+1}{\frac{2+1}{2-1}-1} = 2$$

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{1}}{\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{1}} = \frac{\frac{x+1+1\cdot(x-1)}{x-1}}{\frac{x+1-1(x-1)}{x-1}} =$$

$$\frac{\frac{x+\cancel{1}+x-\cancel{1}}{x-1}}{\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} =$$

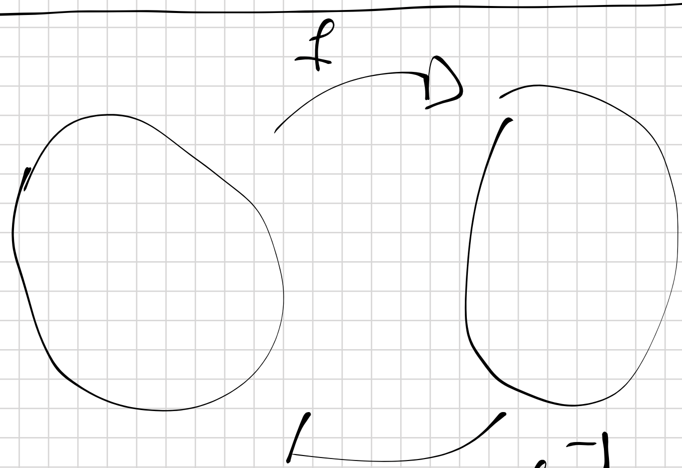
$$\frac{2x}{\cancel{x-1}}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = x$$

tem inversa $\Leftrightarrow$ é bijetiva.

$$f\circ f(x) = x$$

Cenas do próximo capítulo

$\rightarrow$ $f\circ f^{-1} = I_B \qquad f^{-1}\circ f = I_A$



$$g = f^{-1}$$

~~PARECE QUE~~

$\rightarrow$ tem inversa se for bijetiva.

Se tem inversa, é bijetiva??
SIM