Aula 14 Discreta : 6/11

Relações de Recorrência $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$

Uma solução para uma relação de recorrência é uma fórmula fechada $a_n = g(n)$. $\cancel{f(n)}$

Exemplo: Para PG: $\boxed{a_n = q \cdot a_{n-1}}$ ← é a relação de recorrência

$\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$ ← é a solução da relação acima.

$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Para relações lineares de grau k, com coef. constantes homogêneas:

(1) $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$

$c_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, k$, faremos nas próximas páginas.

Vamos supor que (1) tenha uma solução do tipo

$$\boxed{a_n = r^n}$$

Assim, esta função deve satisfazer (1)

↳ a igualdade (1) continua verdadeira:

(1) $a_n = c_1 \cdot \boxed{a_{n-1}} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$

$r^n = c_1 \cdot r^{n-1} + c_2 \cdot r^{n-2} + \dots + c_k \cdot r^{n-k}$

$r^k \cdot r^{n-k} = c_1 \cdot r^{k-1} \cdot r^{n-k} + c_2 r^{k-2} \cdot r^{n-k} + \dots + c_k r^{n-k}$

$a_n = r^n$

$a_{n-1} = r^{n-1}$

$a_{n-2} = r^{n-2}$

$a_{n-k} = r^{n-k}$

$n = k + (n-k)$

$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

$a^n = a^{k+(n-k)}$

$= a^k \cdot a^{n-k}$

RASCUNHO

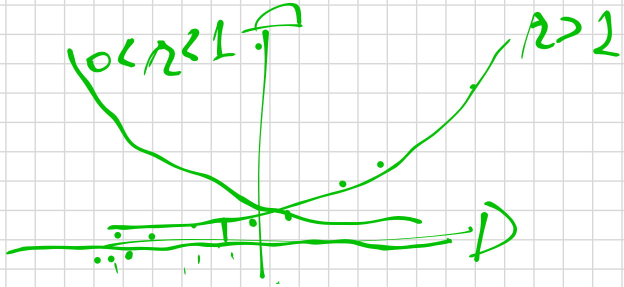
$n-1 = n-k+k-1$

$r^{n-1} = r^{(n-k)+(k-1)}$

$= r^{n-k} \cdot r^{k-1}$

$$r^k \cdot \cancel{r^{n-k}} = \cancel{r^{n-k}} \cdot \left(c_1 \cdot r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_{k-1} r^1 + c_k\right)$$

estamos supondo que $r^{n-k} \neq 0$



Assim, se r^n é solução da relação (1) necessariamente r satisfaz

$$r^k = c_1 \cdot r^{k-1} + c_2 \cdot r^{k-2} + c_3 r^{k-3} + \dots + c_{k-1} r + c_k$$

Ou seja, r é uma raiz do polinômio:

$$\boxed{x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_{k-1} x + c_k}$$

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DA RELAÇÃO (1)

Exemplo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $a_n = r^n$ é solução

então
$$\begin{cases} r^n = r^{n-1} + r^{n-2} \\ r^2 \cdot \cancel{r^{n-2}} = r^1 \cdot \cancel{r^{n-2}} + r^0 \cdot \cancel{r^{n-2}} \Rightarrow \\ r^2 = r + 1 \end{cases}$$

. Então r deve ser solução de

$\boxed{x^2 = x + 1}$ Polinômio característico

$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$r = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$r = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Vamos testar se $a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ é solução!

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

$$a_{n-1} = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_{n-2} = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_{n-1} + a_{n-2} =$$

$$\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}$$

$$= \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right] = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{2^2}{(1+\sqrt{5})^2}\right]$$

$$= \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left[\frac{2(1+\sqrt{5}) + 4}{(1+\sqrt{5})^2}\right] = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left[\frac{2+2\sqrt{5}+4}{1+2\sqrt{5}+5}\right] = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

$$\boxed{= a_n}$$

Resumindo: Se $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ então uma solução

é $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, Exercício: mostre que $b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

também é.

$\boxed{b_{n-1} + b_{n-2} = \ldots\ldots\ldots = b_n}$

O mais interessante é que:

dada a relação de recorrência (1),

se eu sei que $a_n = r^n$ é solução então

$b_n = \alpha \cdot r^n$ é solução também

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

No exemplo de cima, teste $c_n = 7 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $\boxed{c_{n-1} + c_{n-2} = c_n}$

$d_n = -7 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $\boxed{d_{n-1} + d_{n-2} = d_n}$ //

EXERCÍCIO

Tão bacana quanto isso é saber que se b_n e c_n são soluções de (1) então $d_n = b_n + c_n$ também é solução!

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

Exemplo: Para $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, já sei que

$$b_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad e \quad c_n = \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

são soluções. Então

combinação linear de b_n e c_n.

$$d_n = \alpha \cdot b_n + \beta \cdot c_n \text{ é solução}$$

$$d_{n-1} + d_{n-2} = d_n$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exercício: teste $\boxed{d_n = b_n + c_n}$, $d_n = 2 b_n + 3 c_n$!

$d_n = -b_n + 15 c_n \ldots$

Se $d_n = 2b_n + 3c_n$ onde $b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $c_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$d_{n-1} = \underbrace{2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}_{2\,\varphi^{n-1}} + \underbrace{3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}_{3\,\psi^{n-1}}$$

$$d_{n-2} = \underbrace{2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}_{2\,\varphi^{n-2}} + \underbrace{3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}_{3\,\psi^{n-2}}$$

SIMPLIFICANDO

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618\ldots$$

$$\boxed{d_{n-1} + d_{n-2}} = 2\cdot\varphi^{n-1} + 3\,\psi^{n-1} + 2\,\varphi^{n-2} + 3\,\psi^{n-2}$$

$$2\,(\underbrace{\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}}) + 3\,(\psi^{n-1} + \psi^{n-2}) =$$

$$2\cdot(b_{n-1} + b_{n-2}) + 3\,(c_{n-1} + c_{n-2}) =$$

$$2\,b_n + 3\,c_n = \boxed{d_n}$$

Em álgebra linear, vocês vão ver que o que temos é um espaço vetorial de soluções!

Resumindo: Somas de soluções são soluções.

Produto de solução por número também é solução

Definição: Dada a relação de recorrência

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k},$$

se o polinômio característico (de grau k) tem k raízes diferentes, digamos $r_1, r_2, \dots, r_k$ então

$$\boxed{a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n + \dots + \alpha_k \cdot r_k^n} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

é chamada solução geral da relação a_n

Exemplo: Encontre a solução geral da relação de recorrência $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

Solução: 1 Encontre o polinômio característico

$$r^n = -5r^{n-1} - 6r^{n-2} \Rightarrow r^2 \cdot \cancel{r^{n-2}} = -5 \cdot r \cdot \cancel{r^{n-2}} - 6 \cdot r^0 \cdot \cancel{r^{n-2}}$$

2 Encontre as raízes do polinômio característico.

$$r^2 = -5r - 6 \Rightarrow r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} =$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$r = \frac{-5 \pm 1}{2} \begin{cases} r = -2 \\ r = -3 \end{cases}$$

$$b_n = (-2)^n$$

$$c_n = (-3)^n$$

3 A solução geral é

$$\boxed{a_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta(-3)^n}$$

$$x^2 = -5x - 6$$

$$(x+2)(x+3)$$

$$x^2 + 5x + 6$$

Exemplo: Calcule o centésimo termo da sequência dada por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -2 \\ a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

$a_3 = -5\cdot(-2) - 6\cdot(1) = 4$

$a_4 = -5\cdot 4 - 6\cdot(-2) = -8$

$a_5 = \vdots$

$a_{100} = ?$

esquece isso!

Já sabemos que para recorrência

$a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

seu termo geral é

$$a_n = \alpha\cdot(-2)^n + \beta\cdot(-3)^n$$

Aplicando nesta sequência:

$a_1 = \alpha\cdot(-2)^1 + \beta\cdot(-3)^1 = 1 \quad a_1$

$$\boxed{-2\alpha - 3\beta = 1}$$

$a_2 = \alpha\cdot(-2)^2 + \beta\cdot(-3)^2 = -2 \quad a_2$

$$\boxed{4\alpha + 9\beta = -2}$$

$$\begin{cases} \boxed{-2\alpha - 3\beta = 1} \\ \boxed{4\alpha + 9\beta = -2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha - 6\beta = 2 \\ 4\alpha + 9\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3\beta = 0 \\ \boxed{\beta = 0} \end{array} \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2}$$

Assim, $a_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot (-3)^n \Rightarrow$

$$a_n = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^n. \longrightarrow a_1 = 1$$

$$a_2 = -2$$

$$a_3 = \frac{-1}{2} \cdot (-2)^3 = \frac{-1 \cdot (-8)}{2} = 4$$

$$a_4 = \cdots = -8$$

O que é mais rápido?

Calcular a_{1000} por um laço ou pela fórmula fechada?

$$a_{100} = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^{100} = \underbrace{-6{,}338 \ldots \times 10^{29}}$$

$$a_{1000} = -1/2 \cdot (-2)^{1000}$$