# Aula 11 discreta 27/10

**Exemplo:** Provar por indução que

$$0^2+1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{(2n+1)(n+1)\cdot n}{6} \quad \forall n$$

**1º PASSO:** $n=0$.

Do lado esquerdo: $0^2=0$

Do lado direito: $\frac{(2\cdot 0+1)\cdot(0+1)\cdot 0}{6}=0$ ✓

**2º PASSO**

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $\boxed{0^2+1^2+2^2+\dots+k^2}=\frac{(2k+1)\cdot(k+1)\cdot k}{6}$

TESE: $\boxed{0^2+1^2+2^2+\dots+k^2}+(k+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(2(k+1)+1)((k+1)+1)\cdot(k+1)}{6}$

$$0^2+1^2+\dots+k^2+(k+1)^2 \underset{\text{H.I.}}{=} \frac{(2k+1)\cdot(k+1)\cdot k}{6}+\frac{(k+1)^2}{1}=$$

$$\frac{(2k+1)(k^2+k)+6(k+1)^2}{6} = \frac{2k^3+\cancel{2k^2}+\cancel{k^2}+k+6(k^2+2k+1)}{6}=$$

$$\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} \quad \blacksquare$$

$$2k^3+9k^2+10k+6$$

$$\frac{2k^3+6k^2+4k+3k^2+6k+6}{6} = \frac{(2k+3)(k^2+k+2k+2)}{6}$$

$$= \frac{(2(k+1)+1)\cdot((k+1)+1)\cdot(k+1)}{6}$$

$$= \frac{(2k+2+1)(k+2)(k+1)}{6}$$

De novo, porque errei conta!

Por um lado:

$$\frac{(2k+1)(k+1)(k)}{6} + \frac{(k+1)^2}{1} = \frac{(2k+1)(k+1)k + 6(k^2+2k+1)}{6}$$

$$= \frac{(2k+1)(k^2+k) + 6k^2+12k+6}{6} = \frac{2\cancel{k^3} + 2\cancel{k^2} + \cancel{k^2} + k + 6\cancel{k^2} + 12k + 6}{6}$$

$$= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} = (*)$$

Do outro lado:

$$\frac{(2(k+1)+1)((k+1)+1)\cdot(k+1)}{6} = \frac{(2k+2+1)(k+2)(k+1)}{6} =$$

$$\frac{(2k+3)(k+2)(k+1)}{6} = \frac{(2k^2+4k+3k+6)(k+1)}{6} =$$

$$\frac{(2k^2+7k+6)(k+1)}{6} = \frac{2k^3+\cancel{7k^2}+6k+\cancel{2k^2}+7k+6}{6} =$$

$$\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} = (*) \text{. Logo}$$

$$0^2+1^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(2(k+1)+1)((k+1)+1)\cdot(k+1)}{6}$$

$$A = B = C = D = E$$

Exemplo: Mostrar por indução que

$$10^0 + 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^n < 10^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftarrow$$

$A < B$

$A + M < B + M$

PASSO BASE: Por um lado, $10^0 = 1$

Por outro, $10^{0+1} = 10^1 = 10$.

Como $1 < 10$

então $10^0 < 10^{0+1}$

PASSO DE INDUÇÃO: (H.I.) $10^0 + 10^1 + \ldots + 10^k < 10^{k+1}$

Tese: $10^0 + 10^1 + \ldots + 10^k + 10^{k+1} < 10^{k+1+1} = 10^{k+2}$

SERÁ QUE $2 \cdot 10^{k+1} < 10^{k+2}$ ?

Da H.I

$$10^0 + 10^1 + \ldots + 10^k < 10^{k+1}.$$ Somando $10^{k+1}$ a ambos os lados:

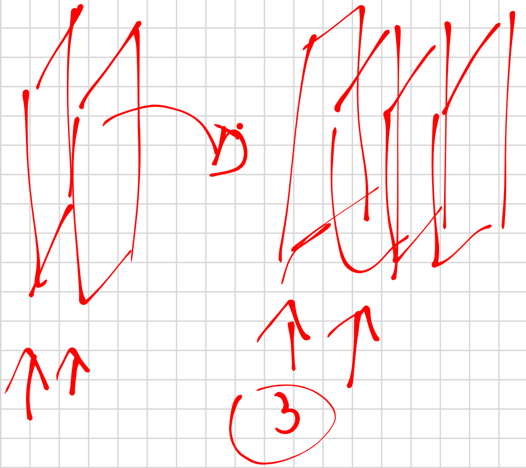
$$10^0 + 10^1 + \ldots + 10^k + 10^{k+1} < 10^{k+1} + 10^{k+1} = 2 \cdot 10^{k+1}$$

Como $2 < 10$ então $2 \cdot 10^{k+1} < 10 \cdot 10^{k+1} = 10^{k+2}$.

Assim

$$10^0 + 10^1 + \ldots + 10^k + 10^{k+1} < 2 \cdot 10^{k+1} < 10 \cdot 10^{k+1} = 10^{k+2}$$

///




Exemplo: Provar por indução que se $n \geq 4$, então

$$2^n < n! < n^n.$$

Divida em 2 problemas:

$$\underbrace{\boxed{2^n < n!}}_{A} \quad e \quad \underbrace{n! < n^n}_{B}$$

Vamos tentar fazer B

$n = 0$

$0! = 1$ $\quad \cancel{0^0}$ nem pode escrever!

$n = 1$ $\quad 1! = 1 = 1^1$ ✓

$n = 2$ $\quad 2! = 2 < 2^2 = 4$

$n = 3$ $\quad 3! = 6 \quad 3^3 = 27$

$n = 4$ $\quad 4! = 24 < 4^4 = 16 \cdot 16$
$= 196$

PASSO DE INDUÇÃO:

H.I.: $k! < k^k$

TESE: $(k+1)! < (k+1)^{k+1}$

RASCUNHO

$k! < k^k$

$\underbrace{k! \cdot (k+1)} < \underbrace{k^k \cdot (k+1)}$

$(k+1)!$

Preciso ver se

$k^k \cdot (k+1) \overset{?}{<} (k+1)^{k+1}$

$(k+1)^k \cdot (k+1)$

$k^k \cdot k + k^k$

A C

$(k+1)^k \cdot k + (k+1)^k$

B D

$A + C < B + D$

Sei que $k(k)^k < (k+1)^k \cdot k$

Da hipótese de indução, $k! < k^k$. Multiplicando ambos os lados por $k+1$ (que é positivo), temos

$$k! \cdot (k+1) < k^k \cdot (k+1) = k^k \cdot k + k^k. \text{ Assim}$$

$$(k+1)! < k \cdot k^k + k^k = *.$$

Sabemos que $k^k < (k+1)^k$. Multiplicando ambos os lados por $k$, temos: $k \cdot k^k < k \cdot (k+1)^k$. Somando $k^k$ a ambos os lados, temos:

$$\underline{k \cdot k^k + k^k} < k \cdot (k+1)^k + k^k < \underline{k(k+1)^k + (k+1)^k}. \text{ Daí}$$

$$\boxed{(k+1)!} < k \cdot k^k + k^k < k(k+1)^k + (k+1) < k(k+1)^k + (k+1)^k =$$

$$\boxed{(k+1)^k \cdot (k+1) = (k+1)^{k+1}}$$