

Discreta Aula 13

3/11

BESTEIRA:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

é falso!

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

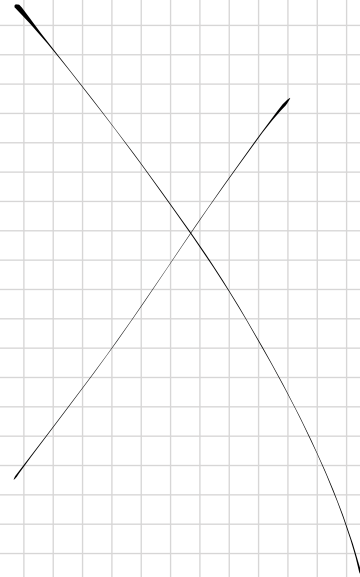
$$\neq \neg(p \leftrightarrow q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv$$

$$\neg[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \equiv$$

$$\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p) \equiv$$

$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ que é logicamente eq. ao "ou exclusivo".



Todo mundo lembra de
P.A. e P.G.

Progressão Aritmética:

termo inicial: a_0

Razão: r

$$\begin{cases} a_1 = a_0 + r \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ \vdots \\ \rightarrow a_n = a_{n-1} + r \\ n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_0 = 2$$

$$r = 3$$

2, 5, 8, 11, 14, 17...

NA ESCALINHA

a_1

$$a_n = a_0 + \underline{(n-1)} \cdot r$$

P.A. dada por recorrência:

$$\begin{cases} \underline{a_0 = p} \\ a_n = a_{n-1} + r \quad n \geq 1 \end{cases} \quad p, r \in \mathbb{R}$$

$$a_{4937} = ?$$

Buscando o termo geral:

$$a_0 = a_0 + 0 \cdot r$$

a_1

$$a_1 = a_0 + r = a_0 + 1 \cdot r$$

a_2

$$a_2 = a_1 + r = a_0 + r + r = a_0 + 2r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_0 + 2r) + r$$

$$a_3 = a_0 + 3 \cdot r$$

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

Lembre:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$



$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\varphi^n - (1-\varphi)^n \right)$$



$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 1-\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

usamos indução para verificar a validade da expressão.

No caso da PA

$$\begin{cases} a_0 = p \\ a_n = a_{n-1} + r \quad n \geq 1 \end{cases}$$



$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

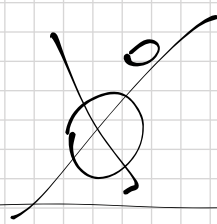
$$a_{4937} = 0 + 4937 \cdot r$$

e preciso garantir que isto funciona para todo

$n \in \mathbb{N}$

Exercício: USE INDUÇÃO
p/ MOSTRAR A VALIDADE DE $\frac{n(n+1)}{2}$

É para Progressões Geométricas?



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\begin{cases} a_0 = p \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \quad q \neq 0 \end{cases} \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$a_0 = p \quad \triangleleft$$

$$a_1 = a_0 \cdot q$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = (a_0 \cdot q) \cdot q = a_0 \cdot q^2$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_0 \cdot q^2) \cdot q = a_0 \cdot q^3$$

$\vdots \leftarrow$ "parece que"

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$$

Para validar, use
INDUÇÃO.

PASSO BASE: se $n=0$

$a_0 = p$, por um lado

Por outro,

$$a_0 = [a_0 \cdot q^0 = a_0 \cdot 1 = p]$$

PASSO DE INDUÇÃO

Hipótese: $0 \leq n \leq k \Rightarrow$

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Tese: $a_{k+1} = a_0 \cdot q^{k+1}$

Seique $a_k = a_0 \cdot q^k$. Multipli-
cando por q ambos os lados,

$$a_k \cdot x = a \cdot x^k \cdot x$$

Como

$$a_{k+1} = a_k \cdot x = a \cdot x^k \cdot x$$

$$= a \cdot x^{k+1} \quad \text{CQD}$$

Como queremos demonstrar.

$$H. 0 \leq r \leq k$$

$$T. \quad k+1 \rightarrow k$$

$$(k, k-1, k-2, \dots, 1, 0)$$

P.S.:

$$a_n = x \cdot a_{n-1}$$

coef. termo anterior.

formula de recorrência

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2}$$

coeficientes constantes.

dois termos anteriores

Recorrências lineares, de grau k , com coeficientes constantes e homogêneas ←

$$a_n = C_1 \cdot a_{n-1} + C_2 \cdot a_{n-2} + \dots + C_k \cdot a_{n-k} + \boxed{F(n)}$$

$$C_i \in \mathbb{R}$$

$$\forall i = 1, \dots, k$$

$$F(n) = 0 \cdot n + n \cdot n$$

$$a_n = C_1 \cdot a_{n-1} \quad (P6)$$

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$$

$$C_i = 1 \quad (\text{da seq. de Fibonacci})$$

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + \underbrace{n}_{\substack{\uparrow \\ F(n)}}$$

C_2 não é constante

$$a_n = 2^n \cdot a_{n-1}$$

não é com coef. constante

Mas é linear de grau 1

Vamos aprender como encontrar fórmulas fechadas para recorrências lineares, com coef. constantes...

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} \quad (PA) \quad \leftarrow$$

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3} + c_4 \cdot a_{n-4} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$$

PESQUISE

BRIOTT-RUFFINI

$$X^2 = X + 1 \Leftrightarrow X^2 - X - 1 = 0$$

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

é divisão de polinômios

$$\Rightarrow X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

ou

$$X = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$X^2 = X - 1 \Leftrightarrow X^2 - X + 1 = 0$$

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \quad X = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

$$X = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C} \quad \leftarrow$$

Você vai precisar relembrar como se encontram raízes de polinômios

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ ax^4 + bx + d &= 0 \end{aligned}$$