# Discreta, Aula 9

20/10/20

Lembre: #A é a cardinalidade de A.

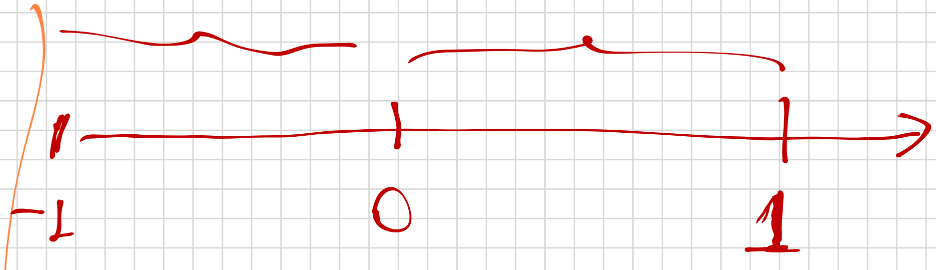
Se A é finito, a cardinalidade é a quantidade de elementos

Se A é infinito a coisa pode complicar:

Infinitos enumeráveis:

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$ ← A

Infinitos não enumeráveis



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \underset{\subsetneq}{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ não é enumerável

A é enumerável quando $(\exists f: \mathbb{N} \to A)$ f é bijeção.

A não é enumerável quando

$\forall f: \mathbb{N} \to A$ f não é bijeção

Redução ao absurdo:

$\underset{v}{P} \overset{\text{v}}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} \underset{v}{Q}$

$\boxed{\sim Q \to \sim P}$

$\underset{v}{P}$ e $\sim \underset{v}{\cancel{Q}}$ ⇒ Contradição.

Compostas de bijeções são bijeções

$$A \equiv B \qquad \Longrightarrow \boxed{A \equiv C}$$
$$B \equiv C$$

$\varphi : A \longrightarrow B$

$\psi : B \longrightarrow C$ Bijeções

$$\Downarrow$$

$\psi \circ \varphi : A \longrightarrow C$ é bijeção

Lembre que $]a,b[ \equiv ]c,d[$. Em particular: $\boxed{]0,1[ \equiv ]-1,1[}$

Lembre: $]-1,1[ \equiv \mathbb{R}$

$$\Uparrow$$

$$\varphi : ]-1,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1-|x|}$$

Então

$$]0,1[ \equiv ]-1,1[ \equiv \mathbb{R}$$

Já sabemos que

$$\mathbb{R} \equiv ]0,1[$$

Existe uma bijeção entre $]0,1[$ e $\mathbb{R}$. Seja $f : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal bijeção.

Vamos mostrar que
]0,1[ não é enumerável.
Não existe bijeção entre
$\mathbb{N}$ e ]0,1[.

Assim, podemos garantir que
$\mathbb{R}$ não é enumerável, pois
se fosse, existiria $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
bijeção e
portanto, existiria bijeção $f \circ \varphi$
entre $\mathbb{N}$ e ]0,1[

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, bend right] & \mathbb{R} \\ & ]0,1[ \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

$f \circ \varphi : \mathbb{N} \to ]0,1[$

Vamos usar uma
ideia atribuída a
CANTOR

Argumento da diagonalização de CANTOR.

Afirmação: ]0,1[ não é enumerável

Demonstração: (por absurdo)

Suponha, por absurdo, que ]0,1[ é enumerável.

Então existe uma bijeção, digamos $\varphi : \mathbb{N} \to ]0,1[$. ∎

$$X = 0,4937\,4937\,4937\ldots \overset{?}{=} \frac{a}{b}$$

$$10000X = 4937,49374937\ldots$$

$$1000X - X = 9999X =$$

$$\begin{array}{r} 4937,49374937\ldots \\ - \quad 0,49374937\ldots \\ \hline \to 4937\,0006\,0000 \end{array}$$

## Rascunho

Sabemos que se $x \in ]0,1[$ então existe uma única representação decimal para $x$: a não ser que o período seja 9.

Exemplo: $0,333\ldots = \frac{1}{3}$

$\frac{2}{3} = 0,666\ldots$

Para escrever dízimas periódicas como fração, use

FRAÇÕES GERATRIZES

$$999X = 4937$$

$$X = 4937/9999$$

$0{,}43\underbrace{99999}\ldots = 0{,}440000\ldots$

$0{,}7\underbrace{9999}\ldots = 0{,}8000\ldots$

$\boxed{0{,}0\underbrace{9999}\ldots = X}$

$100X = 9{,}999\ldots$

$10X = 0{,}999\ldots$

$\boxed{100X - 10X = 90X}$

$$\begin{array}{r} 9{,}99999\ldots \\ -0{,}99999\ldots \\ \hline 9 \end{array}$$

$90X = 9$

$\boxed{X = 9/90 = \frac{1}{10} = 0{,}1}$

$\underbrace{0{,}0999999\ldots} = X = 0{,}10000\ldots$

$0{,}3742 =$

$\underbrace{0{,}37419999\ldots}$

# Continuando

Se $\varphi : \mathbb{N} \to ]0,1[$ é uma bijeção então escreva nominalmente tal bijeção usando este esquema:

$$\varphi(1) = 0,d_{11}\, d_{12}\, d_{13}\, d_{14} \dots$$

$$\varphi(2) = 0,d_{21}\, d_{22}\, d_{23}\, d_{24} \dots$$

$$\varphi(3) = 0,d_{31}\, d_{32}\, d_{33}\, d_{34} \dots$$

$\vdots$

$$\varphi(i) \neq \varphi(j)$$

Escreva $y = 0,d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$ tal que

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{se } d_{ii} \neq 4 \\ 5, & \text{se } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

$$\varphi(?) = 0,d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$$

## RASCUNHO

$d_{11}$

$$\varphi(1) = 0,\boxed{2}341235\dots$$

$d_{21}$

$$\varphi(2) = 0,4\boxed{4}3210101\dots$$

$$\varphi(3) = 0,43\boxed{3}21010101,\dots$$

$$\varphi(4) = 0,321\boxed{4}7834576\dots$$

$$\varphi(5) = 0,0999\boxed{4}9999\dots$$

$$\varphi(6) = 0,34257\boxed{2}1\dots$$

$$y = 0,454554\dots$$

$d_{11} = 2$

$d_{22} = 4$

$d_{33} = 3$

$d_{44} = 4$

$d_{55} = 4$

$d_{66} =$

$$\varphi(\;) = 0,454.$$

Percebe que

$y \in ]0,1[$.

Como $\varphi$ é bijeção, então deveria existir $x \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x) = y$

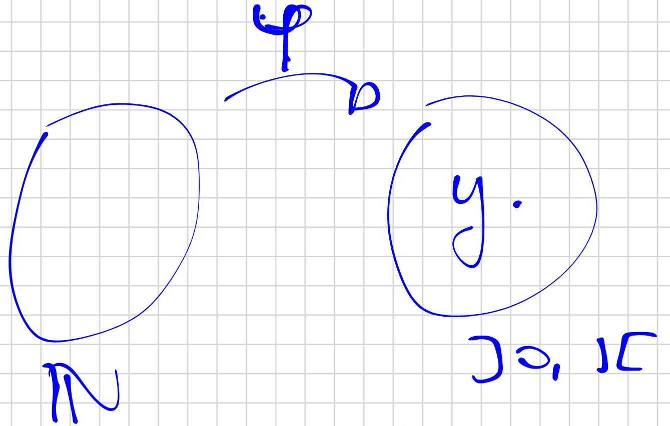
Mas observe que

$d_{11} \neq d_1$, logo

$\varphi(1) \neq y$.

E $d_{22} \neq d_2$. Logo

$\varphi(2) \neq y$



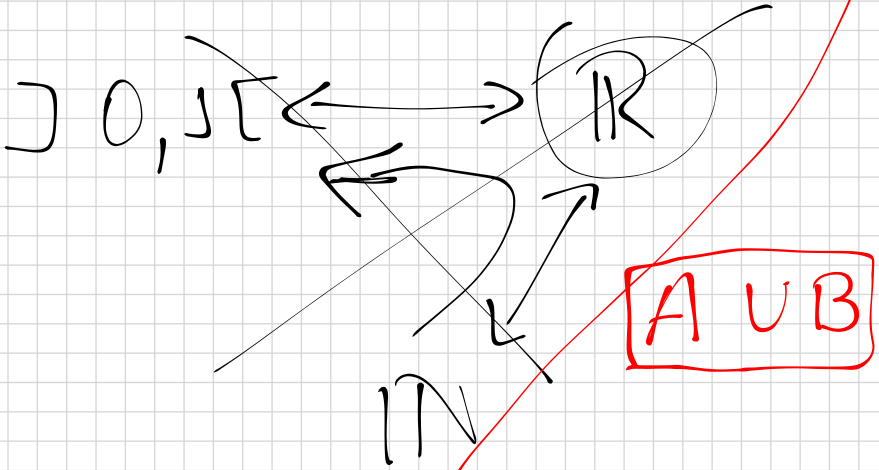
De maneira genérica

$d_{ii} \neq d_i$. E portanto

$\varphi(i) \neq y \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Assim, por construção, não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x) = y$ o que é uma contradição!

Assim, $]0,1[$ não pode ser enumerável!



E concluímos que

ℝ não é enumerável

→ Dizemos que

$\#\mathbb{N} = \aleph_0$ ← aleph zero

$\mathbb{N}$ é infinito enumerável

$\mathbb{R}$ é infinito não-enumerável

($\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis)

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ têm cardinalidade diferente

Dizemos que

- $\mathbb{R}$ tem a cardinalidade do contínuo! $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$

| A | B |
|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ |
| $a_2$ | $b_2$ |
| $a_3$ | $b_3$ |
| $a_4$ | $b_4$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

$A \cup B =$

$$\begin{array}{ccccccc} \{a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & b_3, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \uparrow & & & \\ \{j_1, & j_2, & j_3, & j_4, & \dots & & \end{array}$$

Parece que se $A$ e $B$ são enumeráveis então $A \cup B$ é enumerável

(já sabemos que $A \cap B$ é enumerável, pois...)

↑ faça!

---

Será que $A \times B$ é enumerável?

---

$A \cup B \cup C$ é enumerável?

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ é enumerável? ←

Na próxima aula,

INDUÇÃO,