Discreta, Aula 7

13/10

Lembre

$f: A \to B$ tem inversa

$\Updownarrow$

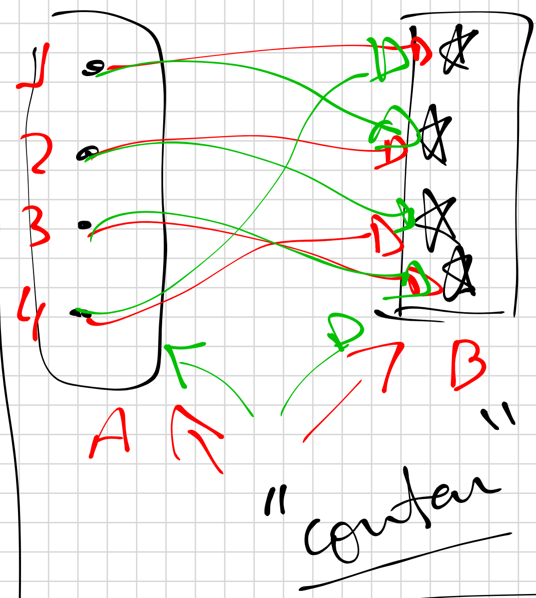
f é bijetora

Cardinalidade de conjuntos:

"quantidade de elementos" de um conjunto. $n(A)$

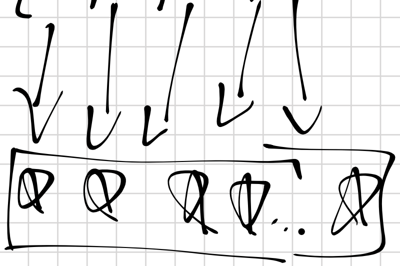
$\#A$

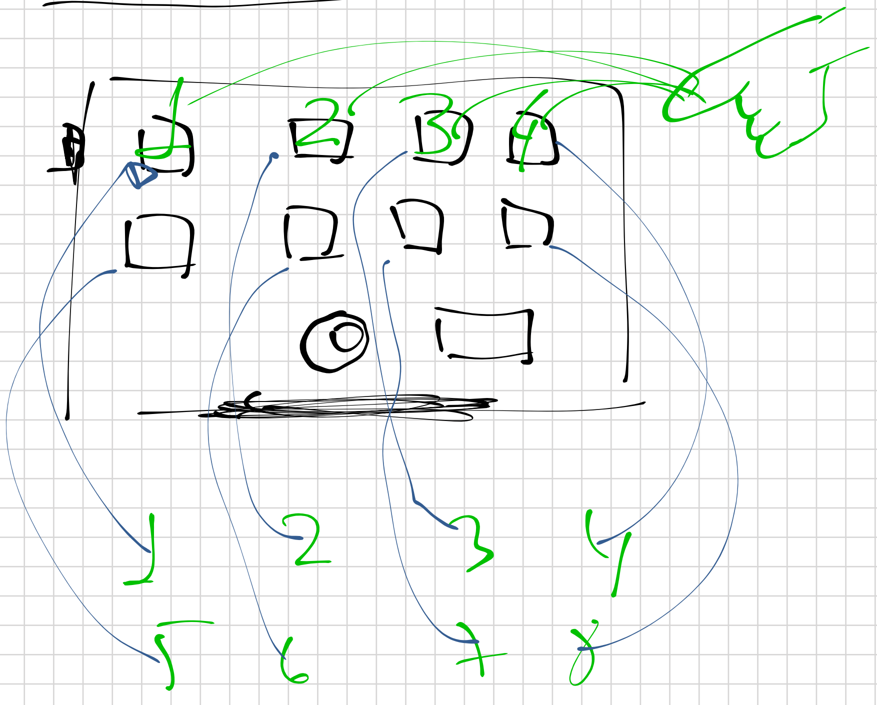
Relações biunívocas



→ finito

$\{1, 2, \ldots, n\}$





"contar" é estabelecer uma relação biunívoca entre o "conjunto a contar" e um certo conjunto numérico

$$I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

$$I_3 = \{1, 2, 3\}$$

$$I_{1000} = \{1, 2, \ldots, 1000\}$$

Um conjunto com 1000 elementos vai ser biunivocamente relacionado com o $\underline{I_{1000}}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$ INFINITO

Exemplos de bijeções

I Existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares.

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$
$$= \{2k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$$

ZERO É NATURAL?

DEPENDE DA VONTADE DO AUTOR.

$$f: \mathbb{N} \to P$$
$$n \mapsto f(n) = 2n$$

(mostre que é bijeção)

II Existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

PARECE BIJEÇÃO

RASCUNHO

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
0	0
1	1
2	-1
3	2
4	-2
5	3
6	-3
7	4
8	-4
9	5
10	-5
11	6

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$

$4937 \to \dfrac{4937+1}{2}$

$\to \boxed{4937}$

$$\frac{n+1}{2}$$

$$\frac{1+1}{2} = 1 \checkmark$$

$$\frac{3+1}{2} = 2 \checkmark$$

$$\frac{9+1}{2} = 5 \checkmark$$

$$\frac{11+1}{2} = 6$$

$$f(x)=\begin{cases} -x/2 & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar}\end{cases}$$

f é injetora? SIM!

$$\boxed{f(a)=f(b) \Rightarrow a=b}$$

Suponha que $f(a)=f(b)$

i) e que a e b são pares: ✓

$f(a) = -\frac{a}{2}$

$f(b) = \frac{-b}{2}$

$\Rightarrow$ $f(a)=f(b)$

$\Downarrow$

$\frac{-a}{2} = \frac{-b}{2}$

$\Leftarrow$ $\times(-2)$

$\Rightarrow$ $a=b$

iv) a é ímpar e b é par (faça você)

ii) e a e b são ímpares:

$f(a) = \frac{a+1}{2}$

$\parallel$

$f(b) = \frac{b+1}{2}$ $\Rightarrow$

$\frac{a+1}{2} = \frac{b+1}{2} \Rightarrow$

$a+1 = b+1 \Rightarrow a=b$//

iii) e que a é par e b é ímpar:

$f(a) = -\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ Aqui $f(a)\neq f(b)$

$f(b) = \frac{b+1}{2}$. Perceba:

$\frac{a}{2} \leq 0$ enquanto $\frac{b+1}{2} > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{2} & \text{se } \underbrace{x \text{ é par}} \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{se } \underbrace{x \text{ é ímpar}} \end{cases}$$

$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

f é sobrejetora? SIM

$\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = y$

Seja $y \in \mathbb{Z}$.

Se $y \leq 0$, tome

$\Rightarrow x = -2y = 2(-y)$ que é positivo (par) ou zero.

Daí $f(x) = -\dfrac{x}{2} = \dfrac{-(-2y)}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{2\cancel{y}}{2} = y$

RASCUNHO

$y > 0$

$\dfrac{x+1}{2} = y \Rightarrow$

$x + 1 = 2y$

$x = 2y - 1$

Se $y > 0$, tome

$\Rightarrow x = 2y - 1$ que é positivo e ímpar!

Daí

$f(x) = \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{(2y - \cancel{1}) + \cancel{1}}{2}$

$= \dfrac{2y}{2} = y = f(x)$

$\boxed{\text{Logo existe uma bijeção entre } \mathbb{N} \text{ e } \mathbb{Z}.}$

III Existe uma bijeção entre $(-1,1)$ e $\mathbb{R}$.

$$f:(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

$$\boxed{f(-2) \not\exists \quad -2 \notin (-1,1)}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

f é bijetora:

1. f é injetora ✓

Suponha que $f(a) = f(b)$ e

i) $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Assim $|a| = a$, $|b| = b$ e

$$f(a) = f(b) \Rightarrow$$
$$\frac{a}{1-|a|} = \frac{b}{1-|b|} \Rightarrow$$
$$\frac{a}{1-a} = \frac{b}{1-b} \Rightarrow$$
$$a(1-b) = b(1-a) \Rightarrow$$
$$a - \cancel{ab} = b - \cancel{ab} \Rightarrow a = b$$

ii) $a < 0$ e $b < 0$

$|a| = -a$ $\quad$ $|b| = -b$

e

$f(a) = f(b) \Rightarrow$

$$\frac{a}{1-|a|} = \frac{b}{1-|b|} \Rightarrow \frac{a}{1-(-a)} = \frac{b}{1-(-b)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} \Rightarrow a(1+b) = b(1+a)$$

$$a + \cancel{ab} = b + \cancel{ab} \Rightarrow$$

$$a = b$$

se $f(a) = f(b)$

iii) $\Rightarrow a \geq 0$ e $-1 < b < 0$

$|a| = a$ e $|b| = -b$.

$$f(a) = \frac{a}{1-a} \begin{matrix}(>0)\\(>0)\end{matrix} \geq 0$$

$$f(b) = \frac{b}{1+b} \begin{matrix}(<0)\\(>0)\end{matrix} < 0$$

Aqui, $f(a) \neq f(b)$ pois... (*)

iv) $a < 0$ e $b \geq 0$

é similar ao anterior

(*) Como $f(a) \geq 0$ e $f(b) < 0$
então $f(a) \neq f(b)$

c) f é sobrejetora

Seja $y \in \mathbb{R}$.

Se $y \geq 0$, tome $x = \dfrac{y}{y+1}$.

Como $y < y+1$, $\dfrac{y}{y+1} < 1$

Como $y \geq 0$, $\dfrac{y}{y+1} \geq 0$

Daí

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|} = \frac{\frac{y}{y+1}}{1 - \left|\frac{y}{y+1}\right|} = \frac{\frac{y}{y+1}}{1 - \left(\frac{y}{y+1}\right)} =$$

$\downarrow$

RASCUNHO

$y \in \mathbb{R} \leftarrow f(x) = y$

$f(x) = y$

$|x| = x$ se $x \geq 0$

$-x$ se $x < 0$

$$\frac{x}{1-\cancel{|x|}} = y \geq 0$$

$x > 0$

$$\frac{x}{1-x} = y$$

$x = y(1-x) = y - yx$

$x = \dfrac{y}{y+1}$

$x = y - yx$

$x + yx = y$

$x(1+y) = y$

$y + 1 \neq 0$

$\boxed{y \neq -1}$

$$f(x) = \frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{1}{1} - \frac{y}{y+1}} = $$

$$\frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{\cancel{y}+1-\cancel{y}}{y+1}} = \frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{1}{y+1}}$$

$$= \frac{y}{\cancel{y+1}} \cdot \frac{\cancel{y+1}}{1} = y$$

Se $y \geq 0$.

Se $y < 0$,

tome $x = ?$

fica como exercício terminar!

DICA $y<0$ (tente $x<0$)

$$f(x) = \frac{x}{1-(-x)} = \boxed{\frac{x}{1+x} = y}$$

isole x.

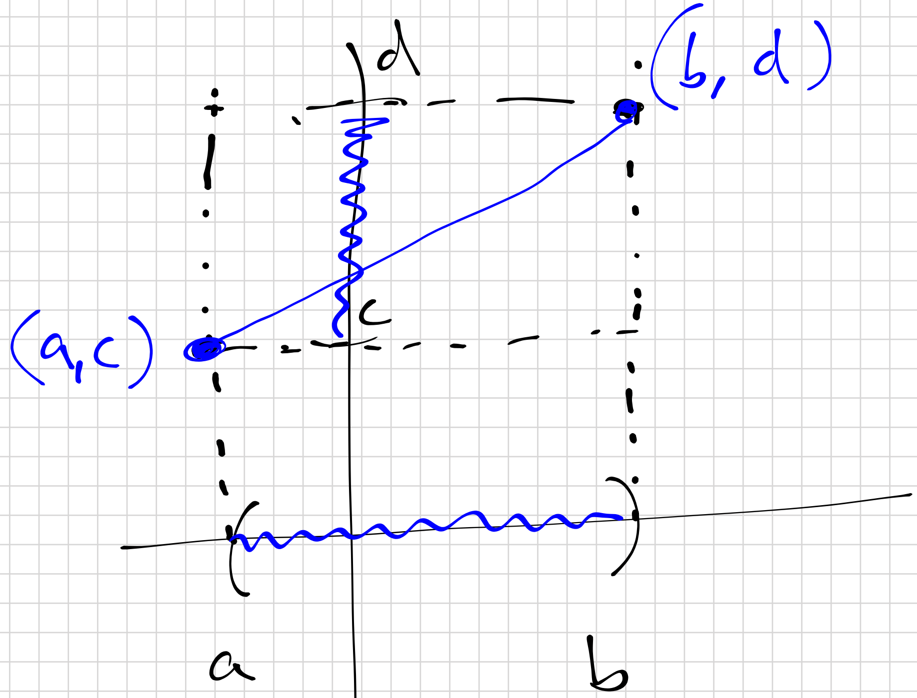
ACABOU ESTE EXEMPLO.

BÔNUS:

Dados dois intervalos abertos $]a, b[$ (a, b) e $]c, d[$ (c, d), existe uma bijeção entre eles.

É um exercício de GA, de Matemática C, de cálculo...

É só encontrar a reta que passa pelos pontos (a, c) e (b, d)



CUIDADO PARA NÃO MISTURAR NOTAÇÃO DE PONTO COM NOTAÇÃO DE INTERVALO!!!