Discreta, 9/10

Antes para esquentar:

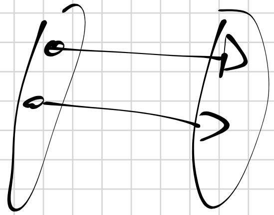
Exemplo: Mostre que

$$f : P \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto f(x) =$$
$$f(2k) = k$$

é bijetora!

$P = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ é par}\}$

x é par quando existe k tal que $x = 2k$.



RASC. $\underbrace{x_1 \neq x_2}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x_1) \neq f(x_2)}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

→ f é injetora?

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Suponha que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Perceba que

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot k_1 \\ x_2 = 2 \cdot k_2 \end{cases}$$

Então

$$f(x_1) = f(2k_1) = k_1$$
$$f(x_2) = f(2k_2) = k_2$$

Assim, se $f(x_1)=f(x_2)$ então $k_1 = k_2$. Logo

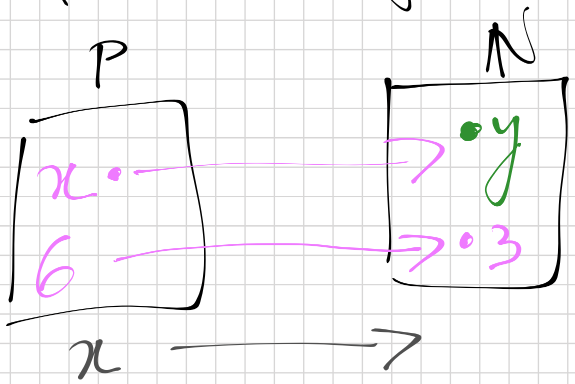
$$x_1 = \underbrace{2k_1}_{} = \underbrace{2k_2}_{} = \underbrace{x_2}_{}$$

Portanto, se $f(x_1)=f(x_2)$ então $x_1 = x_2$ e

<u>f é injetora.</u>

→ f é sobrejetora?

$f(6) = f(2\cdot 3) = 3$



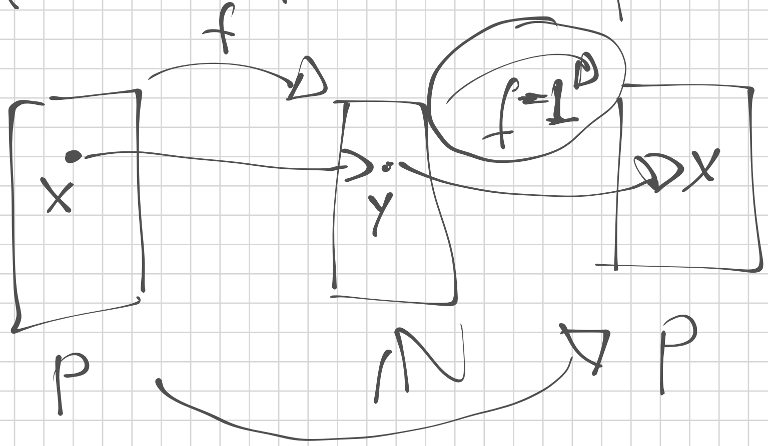
$f(x) = y$?

Seja $y \in \mathbb{N}$. Precisamos encontrar $x \in P$ tal que $f(x)=y$. Ora, faça

$x = 2y$. x é par e

$f(x) = f(2y) = y$ ///

Será que existe uma inversa para f?



Considere $\begin{cases} g: \mathbb{N} \longrightarrow P \\ x \longmapsto g(x) = 2x \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto f \circ g(x)$$

$$f \circ g(x) = f(\underbrace{g(x)}) =$$
$$f(\underbrace{2x}) = x = I_{\mathbb{N}}(x)$$

Assim

$$f \circ g = I_{\mathbb{N}}$$

Por outro lado,

$$g \circ f : P \longrightarrow P$$
$$x \longmapsto g \circ f(x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Como x é par, então

$x = 2k$ para algum k

$f(x) = f(2k) = k$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) =$$
$$g(f(x)) = g(k)$$
$$= 2k = x$$

$g(f(x)) = x = I_P(x)$. Daí

$$g \circ f = I_P$$

Logo $g = f^{-1}$

Teorema: Seja $f: A \to B$.

f tem inversa f^{-1} se e só se f é bijetora

Demonstração:

1. ($\Rightarrow$) Se f tem inversa então f é bijetora

$\boxed{I \checkmark \quad S \checkmark}$

(a) f é injetora: Se

$$\underbrace{f(x_1)}_{y_1} = \underbrace{f(x_2)}_{y_2},$$

aplicando f^{-1} a ambos os elementos,

$$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)).$$

Como

$$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}\circ f(x_1) = I_A(x_1) = x_1$$

e

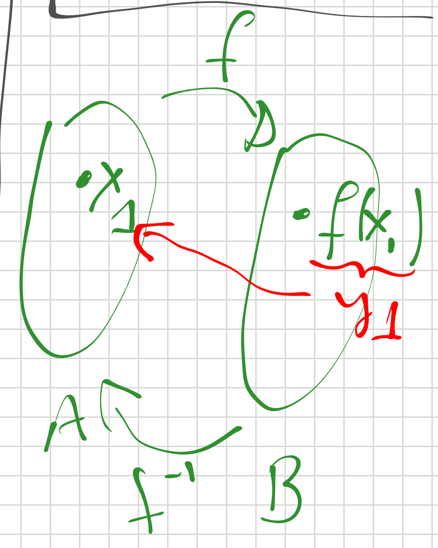
$$f^{-1}(f(x_2)) = x_2$$

então

$$x_1 = f^{-1}\circ f(x_1) = f^{-1}\circ f(x_2) = x_2 \checkmark$$

$$f\circ f^{-1} = I$$

$$f^{-1}\circ f = I$$



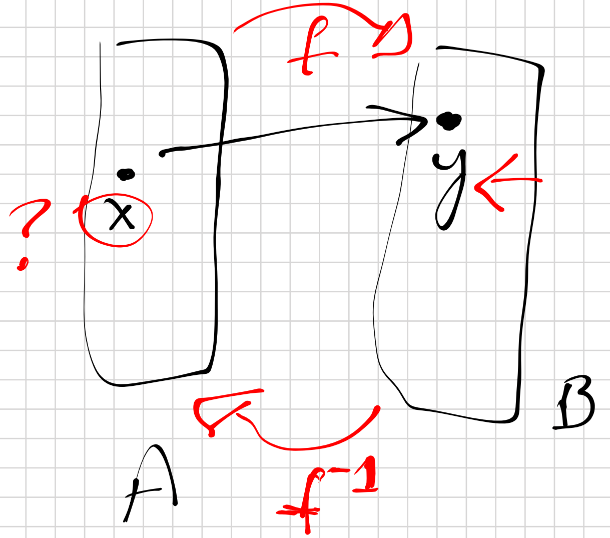
$$y_1 = f(x_1)$$

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$$

(b) f é sobrejetora.

Seja $y \in B$. Como $y \in D(f^{-1})$ então $x = f^{-1}(y) \in A$. Se $x = f^{-1}(y)$ então

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = I_B(y) = y$$



$$x = f^{-1}(y) \in A$$

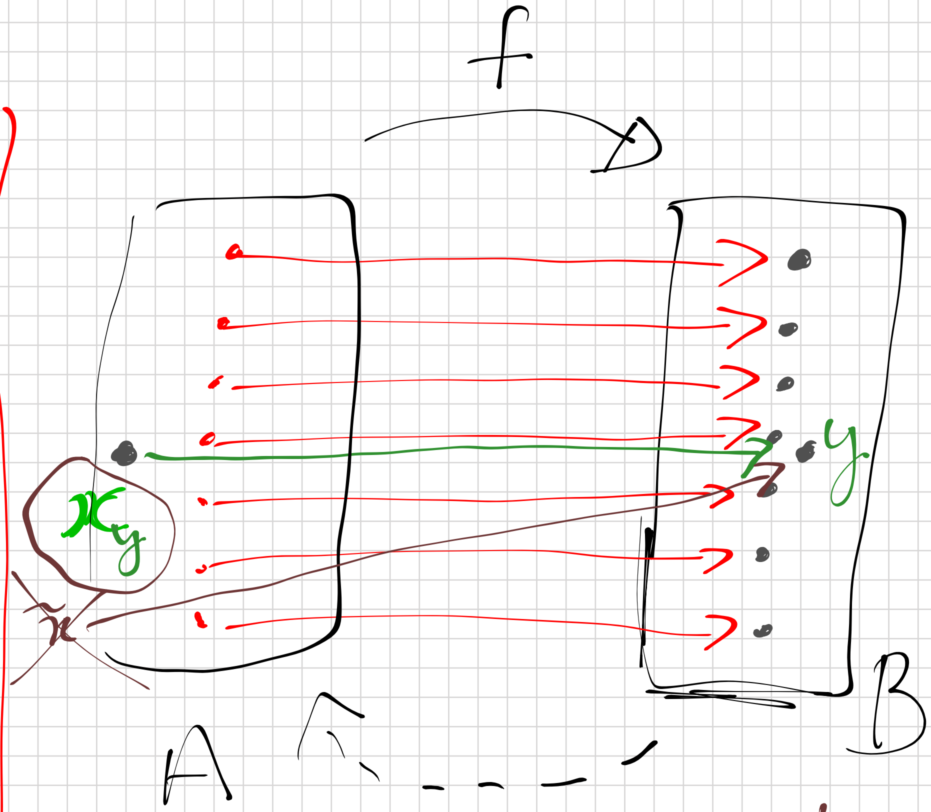
$$f(x) = \underbrace{f(f^{-1}(y))} = \underbrace{f \circ f^{-1}}(y) = I(y) = y$$

② ($\Leftarrow$) Se f é bijetora, então f tem inversa

Primeiro vamos construir uma função $g: B \to A$ candidata a inversa de f.

Depois testamos se g é de fato inversa.

Observe que dado $y \in B$, porque f é sobrejetora, existe $x_y \in A$ tal que $\boxed{f(x_y) = y}$



$g(y)$

CADA $y \in B$

ÚNICO $g(y) \in A$,

$\exists\ x_y \in A$

$f(x_y) = y$

$g(y) = x_y$

Perceba também que se existisse $\tilde{x} \in A$ tal que $f(\tilde{x}) = y$ então

$$f(\tilde{x}) = y = f(x_y).$$

Como f é injetora, teríamos

$$\tilde{x} = x_y \leftarrow$$

Assim, para CADA $y \in B$ EXISTE UM ÚNICO x_y tal que $\boxed{f(x_y) = y}$

Logo podemos escrever

$g: B \to A$ tal que

$$g(y) = x_y.$$

g é a nossa função candidata à inversa de f

Para provar que g é a inversa de f, precisamos mostrar que

$$\boxed{g \circ f = I_A}$$

e

$$f \circ g = I_B$$

Seja $x \in A$.

$g \circ f(x) =$

$g(\underbrace{f(x)}_{y}) = g(y)$

com $y = f(x)$

$g \circ f(x) = g(y) = x_y$. ✪

com $f(x_y) = y$

Daí $f(x_y) = f(x)$

e $x_y = x$

Assim, $g \circ f(x) \overset{✪}{=} x_y = x = I_A(x)$

Ou seja

$$\boxed{g \circ f = I_A}$$

Seja $y \in B$.

$f \circ g(y) =$

$f(\underbrace{g(y)}_{x_y}) = f(x_y) = y$

$f \circ g(y) = y$ e assim

$$\boxed{f \circ g = I_B}$$

////

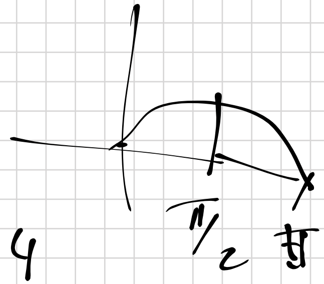
Conjuntos infinito

Conjuntos numeráveis

OK?

math.h

↳ $\sin(x)$



$(\underbrace{\text{arc sen}(0)}_{\pi =}) \leq 4$

arc (sen(

. . . .

(2^{π})

$\boxed{e}$

e

$\pi = 3,\underbrace{141592}_{\text{infinito}}$?

$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$