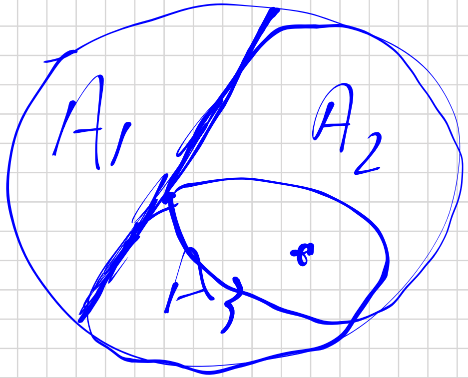
Lembre:

R relação em A é relação de equivalência quando R é:

- reflexiva,
- simétrica
- transitiva



$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$

$A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$

Mais um exemplo importante.

Def: Dado A conjunto, uma família de subconjuntos de A, digamos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \mathcal{F}$, dizemos que $\mathcal{F}$ é uma partição de A quando

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Exemplo de partição em $\mathbb{Z}$

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{x \equiv 0 \pmod 3}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid (x-0)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid x\}$$

$$A_0 = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\}$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{x \equiv 1 \pmod 3}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid (x-1)\}$$

$$= \{1, 4, 7, 10, \dots, -2, -5,$$

$$\boxed{A_1 = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}}$$

Rascunho

$3 \mid (4-1)$

$4 \in A_1$

$3 \mid (\underbrace{-4-1}_{-5})$

$-5 = 3 \cdot -$

$3 \mid (1-1)$

$1 \in A_1$

$6 = 3 \cdot 2$

$-6 = 3 \cdot (-2)$

$0 = 3 \cdot 0$

$-3+1 = -2$

$-3 = 3(-1)$

$-2 \equiv 1 \pmod 3$

$3 \mid (-2-1) \Rightarrow 3 \mid (-3)$

$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)\}$.

$= \{x \in \mathbb{Z} \,/\, \underbrace{3 | x-2}\}$

$= \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 3)\}$.

$3 | x - 3$

$6 - 3 = 3 = 3 \cdot 1$

0

3

6

$A_3 = A_0$

$f' = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$

$\begin{cases} -1 - 2 = 3 \cdot \_\_ \\ -4 - 2 = 3 \cdot \_\_ \\ -7 - 2 = 3 \cdot \_\_ \end{cases}$

$x - 2 = 3 \cdot \_\_$

Então temos

$f = \{A_0, A_1, A_2\}$

de tal forma que

- $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \mathbb{Z}$
- $\begin{cases} A_0 \cap A_1 = \emptyset \\ A_0 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset \end{cases}$.

Então

$\mathcal{F} = \{A_0, A_1, A_2\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

A_0	A_1	A_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-6	-5	-4
-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

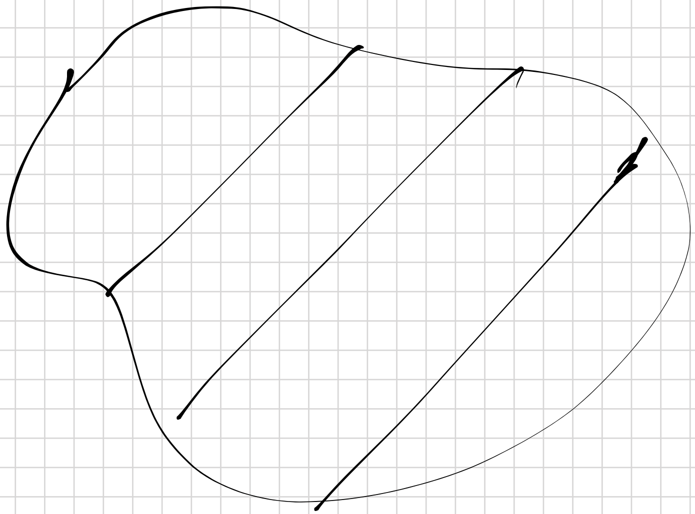
$A_3 = A_0$

$\Uparrow$

$\{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \equiv 3 \pmod{3}\}$

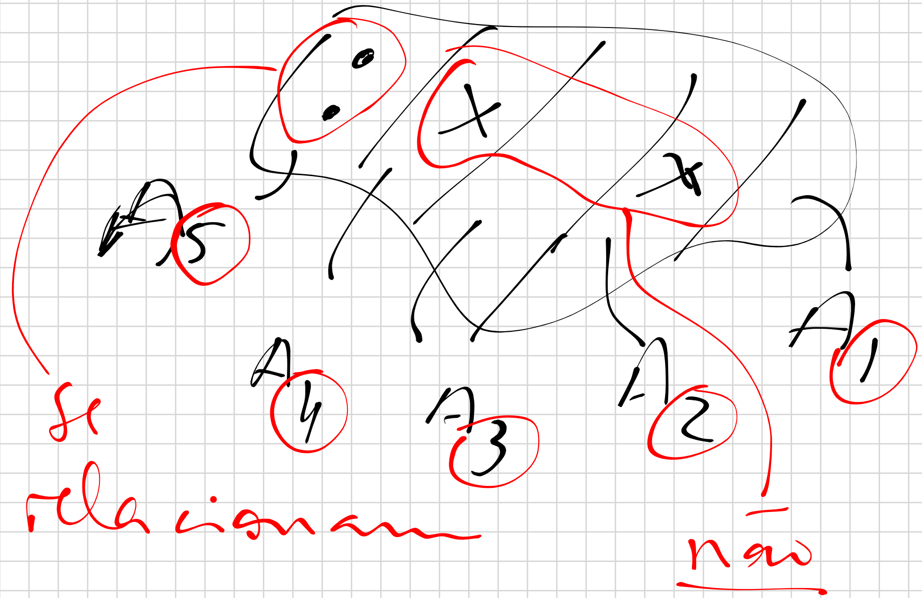
$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \cancel{A_3}\}$

A_{36}



O exemplo de fato:

Dado A, escolha uma partição $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de A.



Vamos definir uma relação R em A da seguinte forma:

$$(a,b) \in R \iff \left(\exists\, i \in \{1, \dots, n\}\ \ \underbrace{a \in A_i}\ \wedge\ \underbrace{b \in A_i} \right)$$

(dois elementos a e b se relacionam quando estão no mesmo subconjunto de A)

Vamos provar agora que R é uma relação de equivalência:

$(a,b)\in R \Leftrightarrow (\exists i \in \{1,\dots,n\})\,(a\in A_i)\wedge(b\in A_i)$

reflexiva ✓
simétrica ✓
transitiva

→ R é simétrica:

→ Suponha que $\boxed{(a,b)\in R}$.

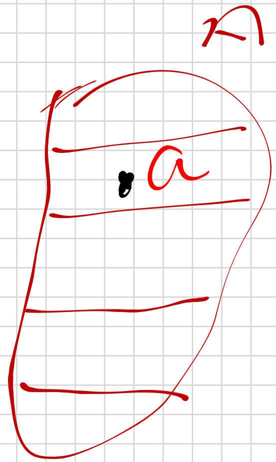
Então $\exists\, i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $(a\in A_i)\wedge(b\in A_i)$.

Logo $\exists\, i\in\{1,\dots,n\}$ tal que $(b\in A_i)\wedge(a\in A_i)$

E daí $\boxed{(b,a)\in R}$

$P(V) \Rightarrow P\wedge P$ é verd.

→ R é reflexiva



Seja $a\in A$.

Como $\mathcal{P}$ é partição,

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n.$$

Se $a\in A$, então

$$\boxed{a\in \bigcup_{i=1}^{n} A_i.}$$

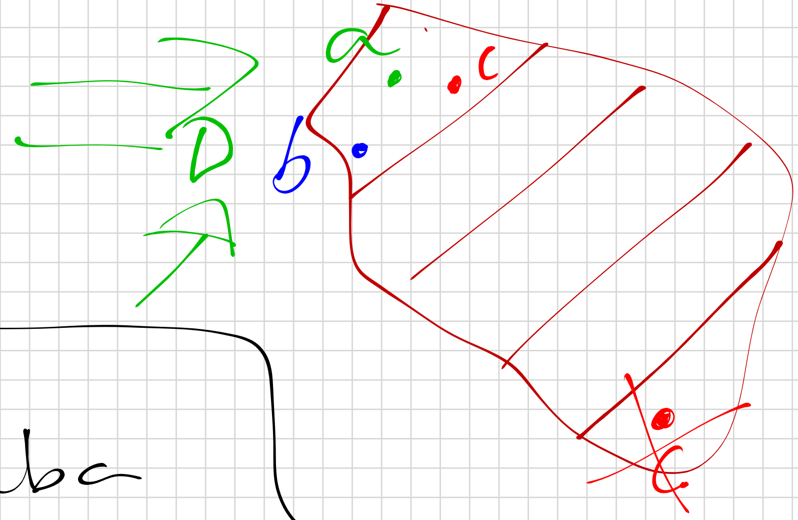
Assim, existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tal que $a\in A_i$. Logo existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tal que $a\in A_i$ e $a\in A_i$. Portanto $(a,a)\in R$ //

R é transitiva

Sejam $a, b, c \in A$ tais que $\boxed{(a,b) \in R \text{ e } (b,c) \in R}$.

Se $(a,b) \in R$, então existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a \in A_i$ e $b \in A_i$

Se $(b,c) \in R$, então existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $b \in A_j$ e $c \in A_j$



Perceba que $b \in A_i$ e $b \in A_j$. Então $b \in A_i \cap A_j$.

Já que se $m \neq n$ então $A_m \cap A_n = \emptyset$ necessariamente

$i = j$ pois se i e j fossem diferentes, $A_i \cap A_j$ deveria ser vazia.

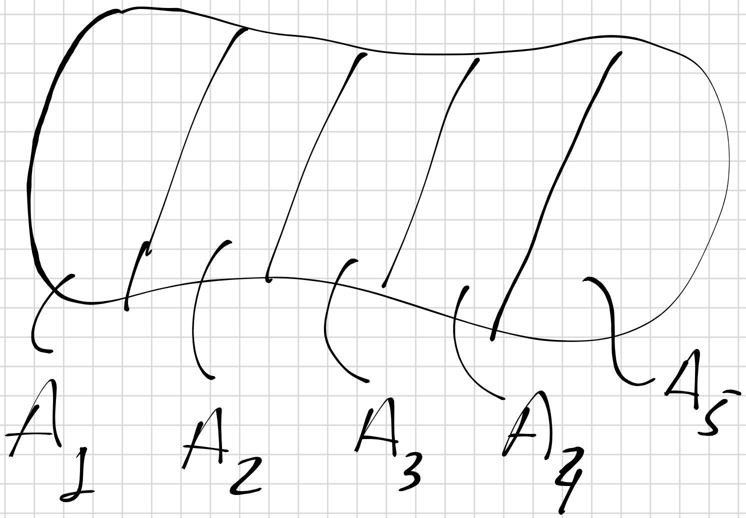
Assim, $A_i = A_j$.

Como $a \in A_i$ e $c \in A_j = A_i$

então existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a \in A_i$ e $c \in A_i$.

Portanto $\boxed{(a, c) \in R.}$ ///

Assim, a partição f definiu uma relação de equivalência em A.



CLASSES DE EQUIVALÊNCIA
(conjunto quociente)

Seja R uma relação de equivalência em A.

Vamos considerar, para dado $a \in A$, o conjunto

$$\{x \in A \,/\, (x,a) \in R\} = \overline{a}$$

$\overline{-2} \in \overline{6}$ pois $4 \mid (-2-6)$

Exemplo:

R a congruência módulo 4.

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 4 \Leftrightarrow 4 \mid (a-b)$$

$$\overline{6} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, (x,6) \in R\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 4 \mid (x-6)\}$$

$2 \in \overline{6}$ pois $(4 \mid (2-6))$

$6 \in \overline{6}$ pois $(4 \mid (6-6))$

$\rightarrow \underline{10} \in \overline{6}$ pois $4 \mid (10-6)$

Assim

$\overline{6} = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$

$\overline{2} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \equiv 2 \pmod 4\}$ $-10 \; -2$

$= \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10\}$ -14

$= \overline{10} = \overline{-10} = \overline{1002} = \overline{-14}$

$\overline{0} = \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, \ldots\}$

$\overline{1} = \{\ldots, 1, 5, -3, 9, \ldots\}$ -7

$4 \mid (-3 - 1)$

DIVISÃO DE EUCLIDES

$-9 \,\lfloor\, 4$
-2

$-3 \,\lfloor\, 4$
1

$9 \,\lfloor\, 4$
$-8 \quad 2$
1

16:20
17:10
18:00

$-30 \,\lfloor\, 4$
?

$7 \,\lfloor\, 4$
$\vdots$
3

$-7 \,\lfloor\, 4$
$\vdots$
1