Aula 12 Mat. Discreta

30/10

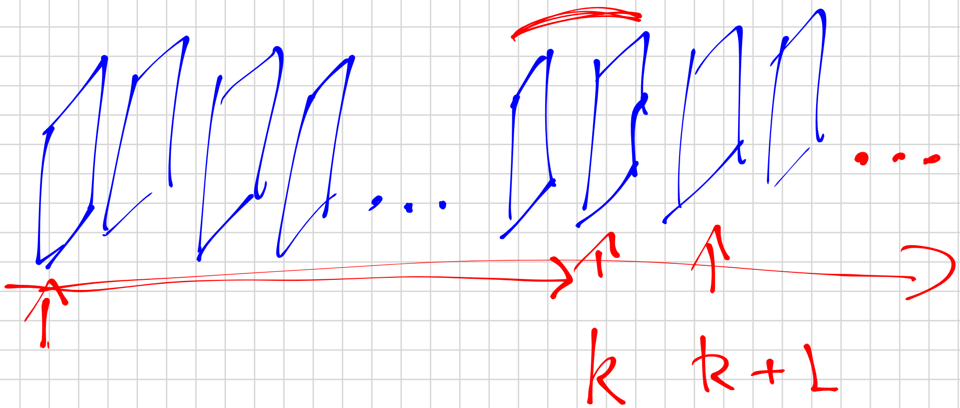
1º Princípio: Dado $A \subset \mathbb{N}$

se para A valem:

i) $0 \in A$

ii) se $k \in A$ então $k+1 \in A$

então $A = \mathbb{N}$



2º Princípio da indução:

Dado $A \subset \mathbb{N}$, se para A valem:

i) $0 \in A$

ii) se $r \in A$ com $0 \le r \le k$ então $k+1 \in A$.

HI

Então $A = \mathbb{N}$

Exemplos: Provar que

$$0! + 1! + 2! + \ldots + n! \leq (n+1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vamos usar indução:

i) PASSO BASE

se $n = 0$, $0! = 1$

e $(n+1)! = (0+1)! = 1! = 1$

Logo $0! \leq (0+1)!$

ii) PASSO DE INDUÇÃO:

H.I.: $0! + 1! + \ldots + k! \leq (k+1)!$

TESE: $0! + 1! + \ldots + k! + (k+1)! \leq (k+2)!$

Da H. de indução

$$0! + 1! + \ldots + k! \leq (k+1)!$$

Somando $(k+1)!$ a ambos os membros: (*)

$$0! + 1! + \ldots + k! + (k+1)! \leq (k+1)! + (k+1)!$$

$$= 2 \cdot (k+1)!$$

Será que $2 \cdot (k+1)! \leq (k+2)!$.

Observe

$$(k+1)!(k+2) = (k+2)!$$

e que $k > 0$ implica

$$2 < k+2 \text{ //}$$

Como $(k+1)! > 0$ e

$\boxed{2 \leq k+2}$ então

$$2 \cdot (k+1)! \leq (k+2) \cdot (k+1)!$$
$$= (k+2)!$$

Logo,

$$\boxed{0! + 1! + \dots + k! + (k+1)! \leq 2 \cdot (k+1)! \leq (k+2)!}$$

(4

Sequências dadas por recorrência:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 2 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} \end{cases} \quad n \geq 2$$

termos iniciais

$3, 2, 4, 8, \ldots$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$a_2 = 2 \cdot a_{2-1}$

$a_2 = 2 \cdot a_1$

$a_2 = 2 \cdot 2$

$a_2 = 4$

$a_3 = 2 \cdot a_{3-1} = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 4 = 8$

$\{3, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$ conjunto

$(3, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ sequência

$\boxed{a_n = 2 \cdot a_{n-1}}$

recorrência (termo geral)

$$\begin{cases} b_0 = 4 \\ b_1 = 1 \\ b_n = 2 b_{n-1} \end{cases}$$

termos iniciais

fórmula do termo geral.

$n \geq 2$

$(4, 1, 2, 4, 8, \ldots)$

Sequência de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

$$F_2 = F_{2-1} + F_{2-2}$$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Um maluco pede

$$F_{4937} = ?$$

$$F_{4937} = F_{4936} + F_{4935}$$

$$F_{4936} = F_{4935} + F_{4934}$$

$$F_{4935} = F_{4934} + F_{4933}$$

$n = 0$

for $i = 2$ to 4937

} não sei mais fazer!

$F_{4937} =$ faz aí.

$$F_{4937^{4937^{4937}}} = ?$$

Olha, eu acho que a fórmula na próxima folha gera os números de Fibonacci.

$$F_n = G_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$G_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$$\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\varphi} \qquad \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{1-\varphi}$$

$$G_0 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \cancel{\varphi^0} - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \cancel{(1-\varphi)^0} = 0 = F_0$$

$$G_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5} - \cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right) = \cancel{\frac{\sqrt{5}}{5}}\left(\cancel{\frac{2\sqrt{5}}{2}}\right) = 1 = F_1$$

$$G_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \ldots = 1 = F_2$$

Pesquise:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

é chamado número de ouro!

$$1 - \varphi =$$

$$1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$$

$$\frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$$

Para provar que o maluco estava certo, prove por indução que

se
$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases} \qquad n \geq 2$$

e se

$$G_{n} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

$k+1$ $k+1$ $k+1$

então

$$\boxed{F_n = G_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PASSO BASE

$n=0 \quad F_0 = 0 \qquad F_1 = 1$

$G_0 = 0 \qquad G_1 = 1$

PASSO DE INDUÇÃO: $(n \geq 2)$

HI: SUPOR QUE

$\forall\ 0 \leq n \leq k$, vale

$\boxed{F_k = G_k}$ $\quad \boxed{F_{k-1} = G_{k-1}}$

$F_{k-2} = G_{k-2}$

$\vdots$

TESE:

$$F_{k+1} = G_{k+1}$$

Ora, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1} = G_k + G_{k-1} =$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] + \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] = \text{TERMINE}$$

LEMBRE

$$A^k + A^{k-1} =$$

$$A^k + A^k \cdot A^{-1} =$$

$$A^k + \frac{A^k}{A} = \frac{A^k \cdot A + A^k}{A}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] = G_{k+1}$$

PAG 8

Este foi um exemplo que usa indução na 2.ª forma.

Quem foi o gênio que encontrou aquela fórmula fechada doida?

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

φ $\quad$ α

irracional

$x^2 = x + 1$ $\quad$ φ, $1-\varphi$

naturais

0, 1, 1, 2, 3, ...!!

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2}$$

$$\boxed{a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 6a_{n-3} - 8a_{n-4}}$$

$a_0 = 0$

$\boxed{a_1 = 0}$

$\boxed{a_2 = 0}$

$\boxed{a_3 = 1}$

$$G_n = \boxed{}$$

$a_4 = 3a_3 + 4a_2 - 6a_1 - 8 \cdot a_0$

$\boxed{a_4 = 3}$

$a_5 = 3 \cdot a_4 + 4 \cdot a_3 - 6a_2 - 8 \cdot a_1$

$a_5 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$

$\boxed{a_5 = 13}$

0, 0, 0, 1, 3, 13, ...

$G_n = \ldots$

$a_n = 3a_{n-2} + 4a_{n-3}$ ← Recorrência

$\boxed{a_n = G(n)}$ ← Fórmula mágica!

Fórmulas mágicas tendem a falhar!

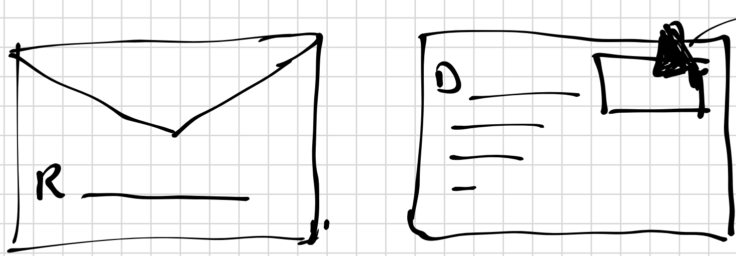
$a_n = G(n) \quad \forall n$ por indução

Neste curso, toda fórmula fechada que represente uma sequência dada por recorrência deve ser $\boxed{\text{provada válida}}$ $\boxed{\text{usando indução}}$.

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

→ SIGA OS PASSOS DAS PÁGINAS 7 e 8 desta aula! ←

Um último exemplo:



SELOS

Este correio só tem selos de 3 e de 5 reais.

Quero mandar uma carta para uma cidade cujo custo de envio é de: 10 reais: USO DOIS SELOS DE 5!

: 11 reais: Dois de 3 e um de 5!

$6 + 5 = 11$

12 : 4×3

4937 : $\boxed{x \cdot 3 + y \cdot 5 = 4937}$

Pergunta:

Dá pra mandar para qualquer custo?

$32 = 9 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 32$.

NÃO! 0, 1, 2, 4, 7. $\Leftarrow$ AFIRMAÇÃO: SÓ ESTES DÃO PROBLEMA!

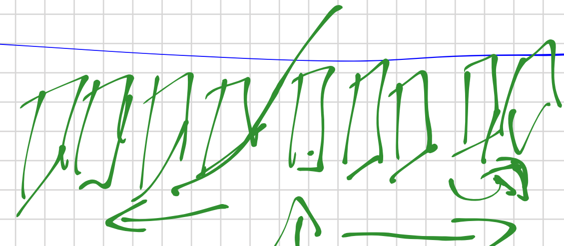
Afirmação: Para todo $n \geq 8$, existem x, y naturais tais que

$$3 \cdot x + 5 \cdot y = n$$
$$\quad 1 \qquad\quad 1$$

($4937 = 3x + 5y$?)

ENCONTRE

Demonstração: Por indução para $n \geq 8$



$n = 8$

PASSO BASE: se $n = 8$, faça $x = 1$ e $y = 1$.

$3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$ //

PASSO DE INDUÇÃO: H.I.: Existem x_0, y_0 naturais tais que $\boxed{3x_0 + 5y_0 = k}$.

TESE: Existem x, y naturais tais que

$$3x + 5y = k + 1$$

$1 = 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2$ $\longleftrightarrow$ $3x_0 + 5y_0 + 1 = k + 1$

$3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$

$3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 12$

$3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13$

$3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 14$

$3 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 15$

$3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16$

Se $x_0 \geq 3$, faça

$x = x_0 - 3$ e $y = y_0 + 2$. Daí

$3.0 + 5.3 = 15$

$3.2 + 5.2 = 16$

$3.x + 5.y =$

$3(x_0 - 3) + 5.(y_0 + 2) =$

$3x_0 - 9 + 5y_0 + 10 =$

$\underbrace{3x_0 + 5y_0}_{H.I} + 1 = k + 1$ ✓

$3x_0 + 5y_0 + 1 = k + 1$

$3x_0 + 5y_0 + 3(-3) + 5(2) = k + 1$

$3(x_0 - 3) + 5(y_0 + 2) = k + 1$

$5y_0 + 1 = k + 1$

$5y_0 + (9 - 8) = k + 1$

$5y_0 + 3.3 - 5 - 5$

$5(y_0 - 1) + 3.2 = k + 1$

$3.2 + 5.(y_0 - 1) = k + 1$

y_0 é natural!

$\boxed{x}$

y

$3.0 + 5.9 = 45$

$3.2 + 5.8 = 46$ ✓

Deu um problema porque $x_0 - 3$ pode ser negativo!

Se $x_0 = 0$, então

$3.x_0 + 5.y_0 = k$

$3.0 + 5y_0 = k \Rightarrow 5y_0 = k$

$x_0 = 0$ ✓ $x_0 = 2$ ✓

$x_0 = 1$ ✓

Assim $5y_0 = k$. Faça $x=2$ e $y = y_0 - 1$

Isto é possível pois $k \geq 8$, logo $y_0 > 1$ e então $y \in \mathbb{N}$ e $2 = x \in \mathbb{N}$

Assim,

$$3 \cdot 2 + 5(y_0 - 1) = 6 + 5y_0 - 5 = 5y_0 + 1 = k+1$$

$$3 \cdot x + 5y = k+1$$

Agora, se $x_0 = 1$ ou se $x_0 = 2$, você

tenta fazer!!!

$$3 \cdot 1 + 5y_0 = k$$
$$3 + 5y_0 = k$$

$$3 + 5y_0 + 1 = k+1$$
$$5y_0 + 4 = k+1$$