Matemática Discreta.

Lembre:

P, Q proposições

$\sim P$ negação

$P \wedge Q$ conjunção (e)

$P \vee Q$ disjunção (ou)

$P \to Q$ condicional

se P então Q.

P implica Q

$P \leftrightarrow Q$ bicondicional

P se e só se Q

Equivalência Lógica

$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge Q \to P$

funciona quando as tabelas verdade são iguais

Exemplo: Leis de De Morgan

$\sim (P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$

$\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$

$\sim(P \to Q) \equiv P \wedge \sim Q$

CONTRAPOSITIVA

$P \to Q \equiv \boxed{\sim Q \to \sim P}$

$\boxed{Q \to P} \equiv \underbrace{\sim P \to \sim Q}_{\text{inversa}}$

Recíproca

Pesquise as regras de inferência

Quantificadores

$2+3=5$ é proposição

$x+3=5$

$\forall$ (para todo)

$\exists$ (existe)

$(\forall x \in \mathbb{N})\ x+3=5$ (F)

$(\exists x \in \mathbb{N})\ x+3=5$ (V)

Negações de proposições quantificados.

$$\sim\left((\forall x \in \mathbb{N})\ \underbrace{x+3=5}\right)$$ é verdadeira

$$\equiv$$

$$(\exists x \in \mathbb{N})\ x+3 \neq 5$$

∄ existe (um monte): $x = 3$

$$\sim\left(\overbrace{(\exists x \in \mathbb{N})\ x+3=5}^{V}\right)$$

$$\equiv$$

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \ x+3 \neq 5$$

F

$$(\forall y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\ x+y=5 \qquad F$$

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ x+y=5$$

$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ \underbrace{x+y=5}_{F}$

$x=3 \qquad y=2$

$x=7 \qquad y=?$

$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x+y=5$

F

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x+y=5$

V

$x+y=5$

$y=5-x$

y depende de x!!!

Acabou o resumo!

Conjuntos

x elemento

A conjunto

$$\boxed{x \in A}$$

$\{\}$, $\emptyset$ vazio

$\{a\}$ conjunto unitário

U conjunto universo

→ Operações com conjuntos

$$A^c = \{x \in U / x \notin A\}$$

Rasunho

$$A = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

índices em $\mathbb{N}$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow A$$

$$1 \longmapsto a_1$$

$$2 \longmapsto a_2$$

$$3 \longmapsto a_3$$

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow A$$

$$0 \longmapsto a_0$$

$$-1 \longmapsto a_{-1}$$

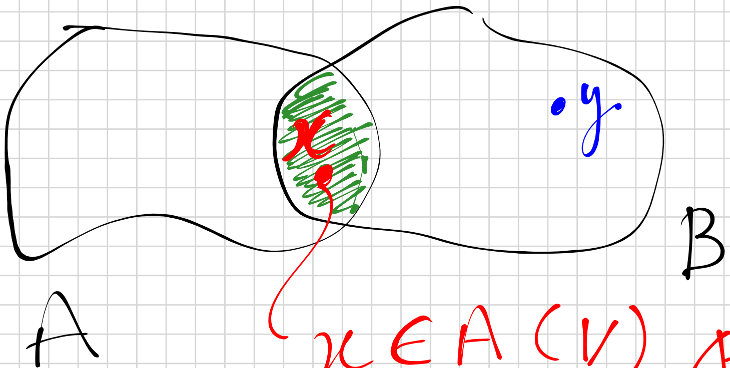
$$1 \longmapsto a_1$$

$U = \mathbb{R}$ $\quad [2,3] = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 3$

$$[2,3]^c = \{x \in \mathbb{R} / x < 2 \text{ ou } x > 3\}$$

- Intersecção de conjuntos.

$$A \cap B = \{\underbrace{x \in U}_{} / \overbrace{x \in A}^{P} \; \boxed{e} \; \overbrace{x \in B}^{Q}\}$$



$x \in A$ (V)

$x \in B$ (V)

$y \notin A \cap B$ pois

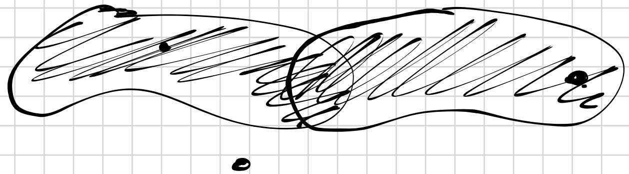
$y \in A$ (F)

$y \in B$ (V)

Para mais exercícios sobre conjuntos: Fundamentos da matemática Elementar V1.

- União de conjuntos:

$$A \cup B = \{\underbrace{x \in U}_{} / \underbrace{x \in A}_{} \text{ ou } \underbrace{x \in B}_{}\}$$



Interseção Generalizada

Seja $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos.

Outro exemplo:

$G = \{(0, \frac{1}{i})\}_{i \in \mathbb{N}^*}$

$A_1 = (0, 1)$

$A_2 = (0, 1/2)$

$A_3 = (0, 1/3)$

$A_{50} = (0, 1/50)$ ...

Exemplo de família:

$\mathcal{F} = \{[-i, i]\}_{i \in \mathbb{N}^*}$

$A_1 = [-1, 1]$

$A_2 = [-2, 2]$

$A_{50} = [-50, 50]$

...

Então a intersecção de $\mathcal{F}$ é o conjunto:

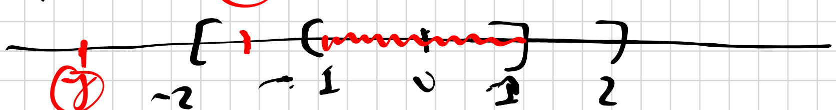
$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

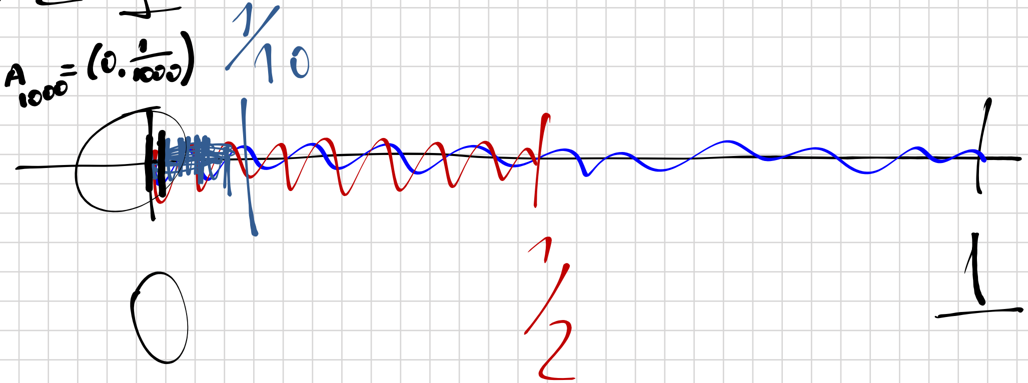
$$= \{x \in U \mid \underbrace{(\forall i \in \mathbb{N})\, x \in A_i}_{\text{generaliza o "e"}}\}$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} [-i, i] = [-1, 1]$$

x



$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{i}\right) = \emptyset$$



$A_1 = (0, 1)$

$A_2 = (0, \frac{1}{2})$

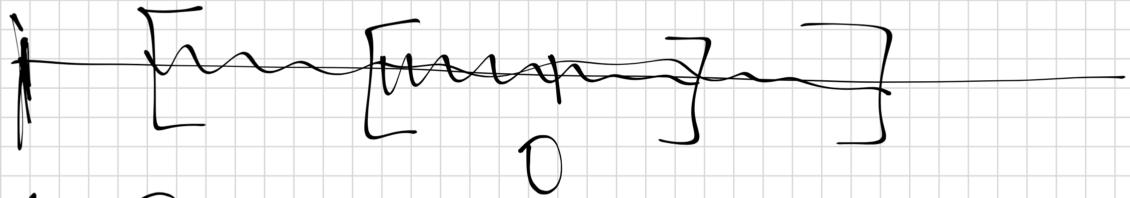
$A_{10} = (0, \frac{1}{10})$

União Generalizada

Dada $f = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x \in U \,/\, \underbrace{(\exists i \in \mathbb{N})}_{\text{generaliza o "ou"}}\ x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} [-i,i] = \mathbb{R}$$



$$x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [-i,i]$$

Será que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in [-i,i]\,?$$

De fato, $x \leq \lceil |x| \rceil$

$$\lceil 3{,}6 \rceil = 4$$

$$x \in [-\lceil |x| \rceil, \lceil |x| \rceil]$$

Lambre

$$(A \cap B)^c =$$

$$A^c \cup B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

FMEV1

Leis de De Morgan para conjuntos.

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcap A_i^c$$

demonstrar igualdade de conjuntos!

Quando dois conjuntos são iguais?

Lembre:

$A = B$ quando $A \subset B$ e $B \subset A$

Lembre:

$A \subset B$ quando

$$x \in A \longrightarrow x \in B$$

Prova de que

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$$

Pr. vamos mostrar que

a) $\boxed{\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c}$

b) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c \subset \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c$

a)

$A \subset B$

$x \in A \to x \in B$

Seja $x \in \left(\bigcup A_i\right)^c$.

Então

$x \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Daí é falso que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$x \in A_i$, ou seja

$(\exists i \in \mathbb{N})\, x \in A_i$ é falso.

Assim $(\forall i \in \mathbb{N})\, x \notin A_i$ é verdadeiro

Ora, se $x \notin A_i$ então

$x \in A_i^c$.

Logo

$(\forall i \in \mathbb{N})\ x \in (A_i^c)$ é verdadeiro

Então

$$x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

Assim se

$x \in (\bigcup A_i)^c$, então $x \in \bigcap A_i^c$ ///

b) Seja

$x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i^c)$. Então, por definição,

$\forall i \in \mathbb{N},\ x \in A_i^c$ é verdadeiro.

Logo

$\forall i \in \mathbb{N},\ x \notin A_i$.

É falso que

$(\exists i)\ x \in A_i$

$x \notin \bigcup A_i$

Rasunho

$x \in (\bigcup A_i)^c$

$\boxed{x \notin (\bigcup A_i)}$

é falso que

$\exists i \quad x \in A_i$

$\forall i \quad x \notin A_i$

$x \in A_i^c$

$$x \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \Rightarrow$$

$$x \in \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c$$

Logo, se

$x \in \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c$ então

$$x \in \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c$$

E aí

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i)^c \subset \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c$$

Logo de a) e de b), vale a igualdade.

Tarefa: Mostre que

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i^c)$$

Dica: Mostre duas inclusões.