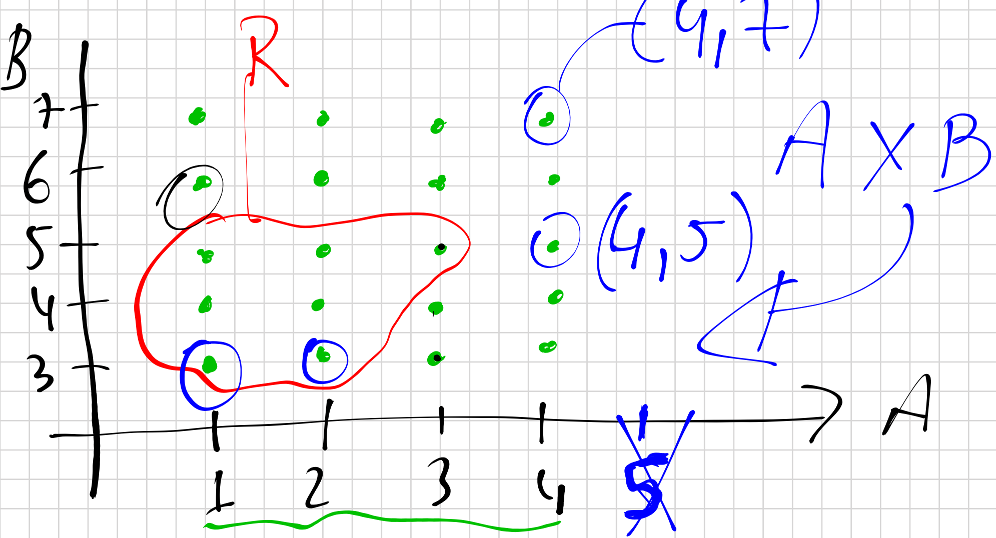
Relações (binárias)

Dados A e B conjuntos, uma relação R de A em B é um subconjunto de $A \times B$

Exemplos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$



$R = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5)\}$

$S \subset A \times B$ dada por

$1 \neq 3+1$

"$(x,y) \in S$ quando $x = y+1$"

$2 \neq 3+1$

$S = \{(4,3)\}$

T dada por "$(x,y) \in T$ quando $y = x+1$"

$T = \{(2,3), (3,4), (4,5)\}$

Notação:

$(x,y) \in R$, xRy $A \times A$

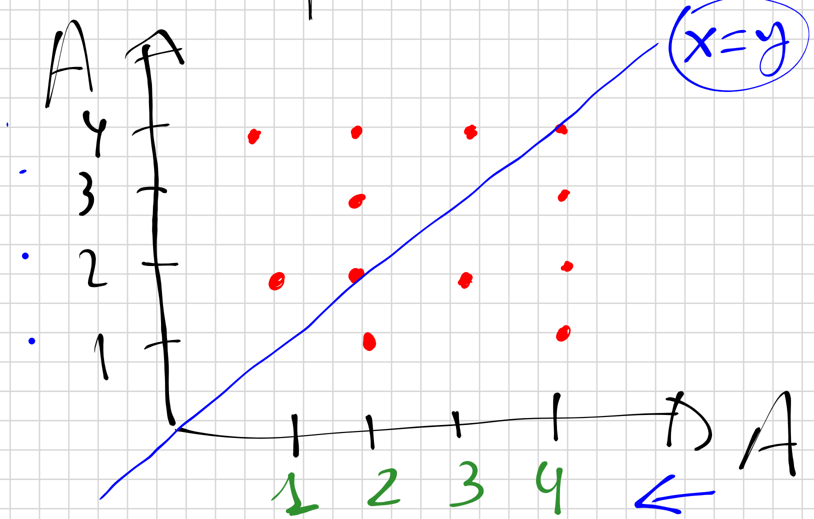
$(a,b) \in S$, aSb

Relações binárias em A

R é relação em A quando

$R \subset A \times A$

Exemplo: $A = \{1,2,3,4\}$



R é dada por

" $xRy \Leftrightarrow x$ e y são pares "

$$R = \left\{ \begin{matrix} (2,2),(2,4) \\ (4,2),(4,4) \end{matrix} \right\}$$

" $xSy \Leftrightarrow x$ ou y são pares "

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,2),(1,4),(2,1),(2,2), \\ (2,3),(2,4),(3,2),(3,4), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4) \end{matrix} \right\}$$

$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

(2.2) (2.2)

Classificação das relações em A

① Relações simétricas

R é simétrica quando

$(\forall x \in A), (\forall y \in A)$

$$\boxed{(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R}$$

② Relações transitivas

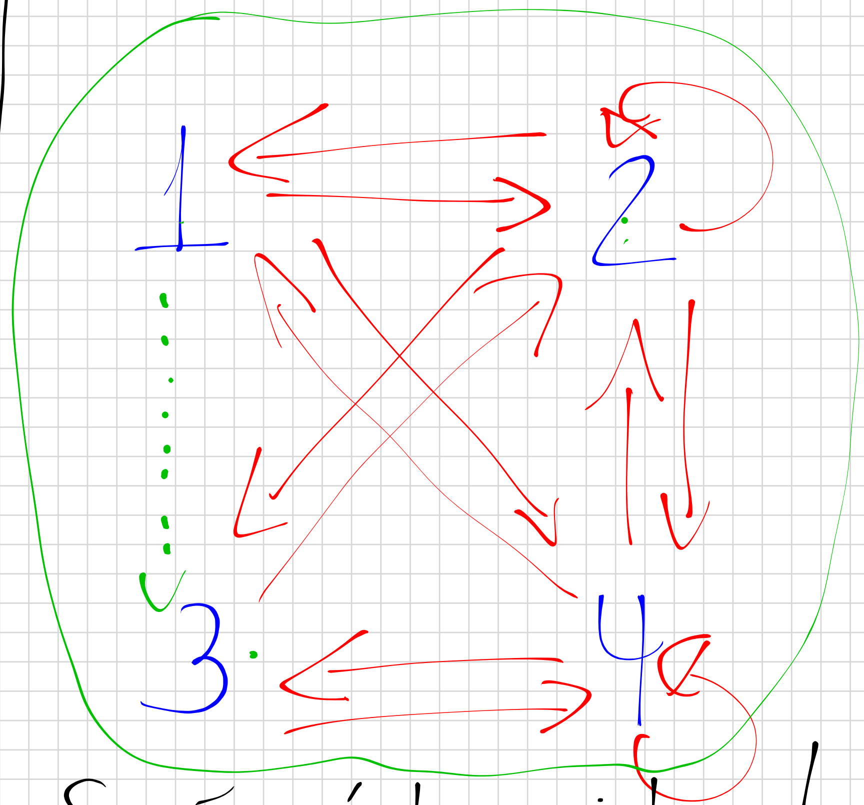
R é transitiva quando

$(\forall x \in A), (\forall y \in A), (\forall z \in A)$

$(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R \Rightarrow$

$(x,z) \in R$

Rascunho S



S não é transitiva!

De fato,

$(1,2) \in S$ e $(2,3) \in S$

mas $(1,3) \notin S$

Exemplo de relação transitiva:

$A = \{1, \dots, 10\}$

"$(x,y) \in R \Leftrightarrow x \leq y$"

é transitiva pois:

Se $(x,y) \in R$ então $x \leq y$

Se $(y,z) \in R$ então $y \leq z$.

Mas se $x \leq y$ e $y \leq z$ então

$\boxed{x \leq z}$ Logo $(x,z) \in R$

Mais um exemplo importante de relação transitiva:

Em $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros) faça:

a divide b quando existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$b = k \cdot a$

2 divide 6 pois

$6 = 3 \cdot 2$

4 divide 0 pois

$0 = 0 \cdot 4$

-5 divide 10 pois

$$10 = (-2)\cdot(-5)$$

0 divide 0 pois

$$0 = 0\cdot 0$$

0 não divide ninguém diferente de 0

0 divide 3 é falso

pois

$$3 \neq k\cdot 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\cancel{\dfrac{0}{0}}$ não pode fazer!!

Vai pro inferno!

É pecado!

Símbolo:

Se a divide b, escrevemos

$$\boxed{a \mid b}$$

$2 \nmid 3$

$-5 \mid 10$

$2 \mid 4$ $\quad 0 \mid 0$

$3 \mid 0$ $\quad 0 \nmid 3$

Em $\mathbb{Z}$, a relação "divide" é transitiva:

"$(a,b) \in R \iff \underbrace{a \mid b}_{\text{existe } k;\ b = ka}$" é

transitiva:

Suponha que

$\boxed{(x,y) \in R}$ e $\boxed{(y,z) \in R}$. Então

$x \mid y$ e $y \mid z$. Logo

existem k e h tais que

$y = k \cdot x$ e $z = h \cdot y$.

Logo $z = hy = h(kx) = (hk)x$

$$\boxed{z = (hk)x}$$

Assim z é múltiplo de x. Se $t = hk$ então a afirmação

"existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $z = tx$" é verdadeira.

Daí $x \mid z$ e então

$\boxed{(x,z) \in R}$

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

A relação "divide" NÃO é simétrica pois

$2 \mid 4$ mas $4 \nmid 2$

É falso que

$\forall a \in A, (a,a) \in R$

já que $(1,1) \notin R$

③ Relações Reflexivas

R em A é reflexiva quando

$\forall a \in A, (a,a) \in R$

Exemplo: (a) $A = \{1,2,3,4\}$

"$(a,b) \in R \Leftrightarrow$ a ou b são pares"

R não é reflexiva!

(b) em $\mathbb{Z}$, a relação "$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \mid b$" é reflexiva? SIM pois

$\forall a \in \mathbb{Z}$

$a = 1 \cdot a$. Daí

$\forall a \in \mathbb{Z}, a \mid a$ ou seja,

$\forall a \in \mathbb{Z}, (a,a) \in R$

(c) em $\mathbb{Z}$

$(a,b) \in R \Leftrightarrow a < b$.

Não é reflexiva pois

$a < a$ é falso!

$(a,a) \notin R$

(4) R em A é

Antissimétrica quando

$(\forall a,b \in A)$ se

$(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$

então $a = b$.

$\sim$

$$(a,b) \in R \Downarrow (b,a) \in R$$

$\boxed{(a,b) \in R \text{ e } (b,a) \notin R}$

Exemplo:

Em $\mathbb{Z}$

$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \leq b$ é

antissimétrica pois

$\to (a,b) \in R \Rightarrow a \leq b$

$\to (b,a) \in R \Rightarrow b \leq a$

$\Rightarrow a = b$

Definição: Em um conjunto A, uma relação R é dita relação de EQUIVALÊNCIA quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo importante de relação:

$3 \mid a - b \Rightarrow$

o resto da divisão de a por 3 deixa mesmo resto que a divisão de b por 3.

Em $\mathbb{Z}$, faça a relação de congruência módulo 3:

$a \equiv b \pmod 3$ quando

$3 \mid (a-b)$

Esta relação é relação de equivalência

$aRb \Leftrightarrow$

$a\%3 = b\%3$

De fato, a CONGRUÊNCIA é

a) Reflexiva:

Dado $a \in \mathbb{Z}$ então

$3 \mid (a-a)$ pois $a-a=0$

e $3 \mid 0$ já que $0 = 0 \cdot 3$

Logo

$a \equiv a \pmod{3}$.

b) Simétrica:

Se $a \equiv b \pmod{3}$ então

$3 \mid (a-b)$. Daí que existe

$k \in \mathbb{Z}$ tal que

$a-b = k \cdot 3$. Logo

$b-a = (-k) \cdot 3$.

RASCUNHO

$3 \mid a-b$

$3 \mid a-a$

$3 \mid 0$

$3 \mid (a-b)$

$a \equiv b \pmod{3}$

$b \equiv a \pmod{3}$

$6 = 2 \cdot 3$

$3 \mid (b-a)$

$3 \mid (22-16)$

$b-a$

$3 \mid (16-22)$

$3 \mid -6$

$-6 = (-2) \cdot 3$

$b - a = (-k) \cdot 3$. Assim

$3 \mid b - a$ e

$b \equiv a \pmod 3$ //

(c) TRANSITIVA

Suponha que $a \equiv b \pmod 3$

e que $b \equiv c \pmod 3$

Então existem j e l tais

que

(*) $a - b = 3j$ SOME

(**) $b - c = 3l$. ~~Subtraia~~

as duas linhas (*) + (**).

RASC.

$a \equiv b \pmod 3$

$b \equiv a \pmod 3$

SUPOR: $a \equiv b \pmod 3$

$b \equiv c \pmod 3$

$\Downarrow$

PROVAR: $a \equiv c \pmod 3$

$3 \mid a - b$

$3 \mid b - c$

$a - b = 3 \cdot j$

$b - c = 3l$

$3 \mid a - c$

? ?

$a - c = k \cdot 3$

$a - b = 3j$

$b - c = 3l \Rightarrow$

$(a-b) + (b-c) = 3j + 3l$

$a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = 3(j+l)$

$a - c = 3(j+l)$

Então fazendo $k = j + l$

temos

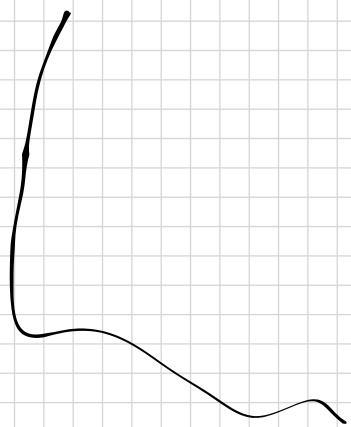
$a - c = k \cdot 3$ e daí

$3 \mid a - c$ e

$a \equiv c \pmod{3}$ ///

Assim a relação de congruência é relação de equivalência

PARTIÇÕES



PARTIÇÕES

R

$xRy \Leftrightarrow$ x e y estão no mesmo subconjunto

xRy

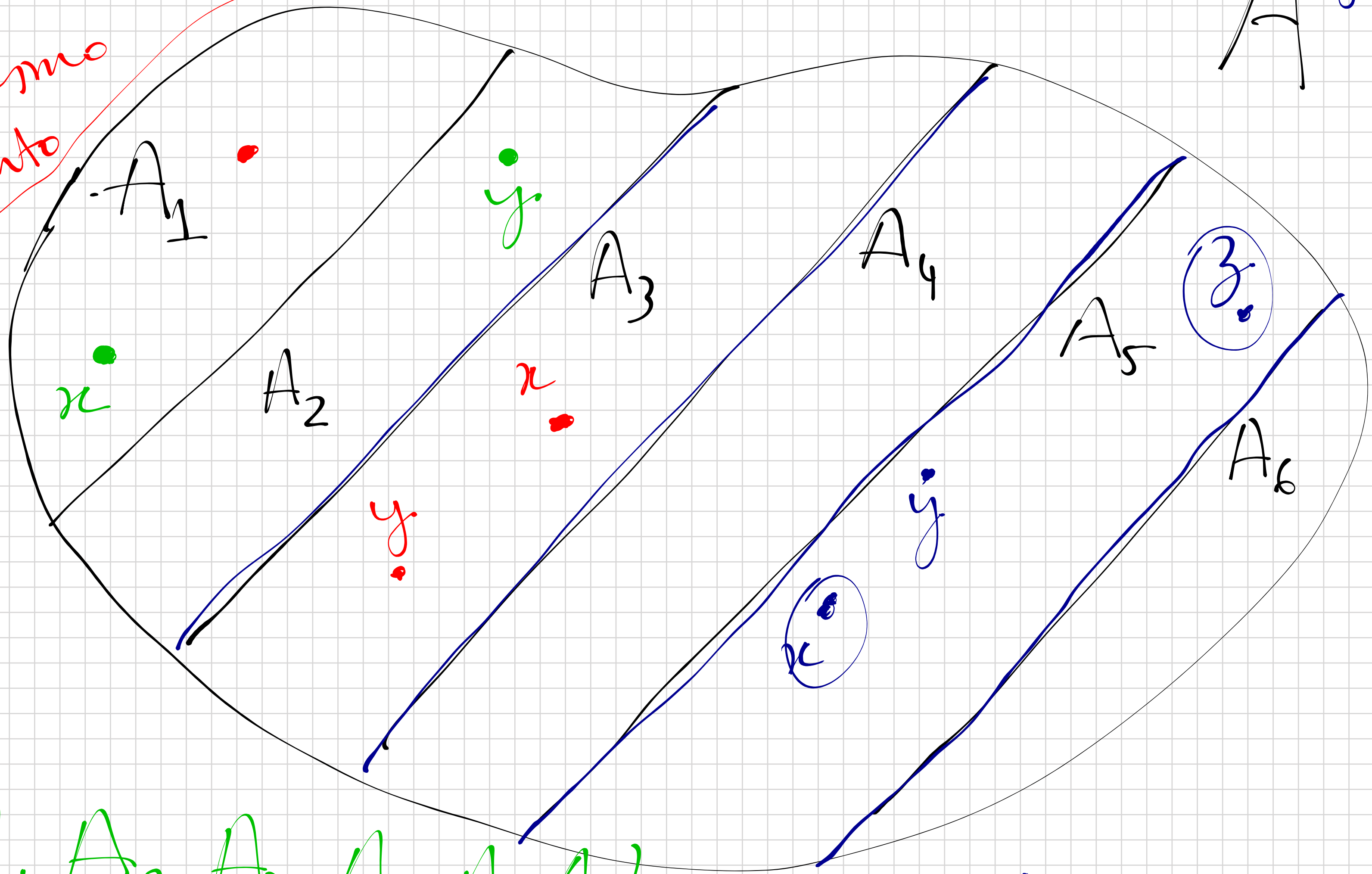
yRx

A

xRy

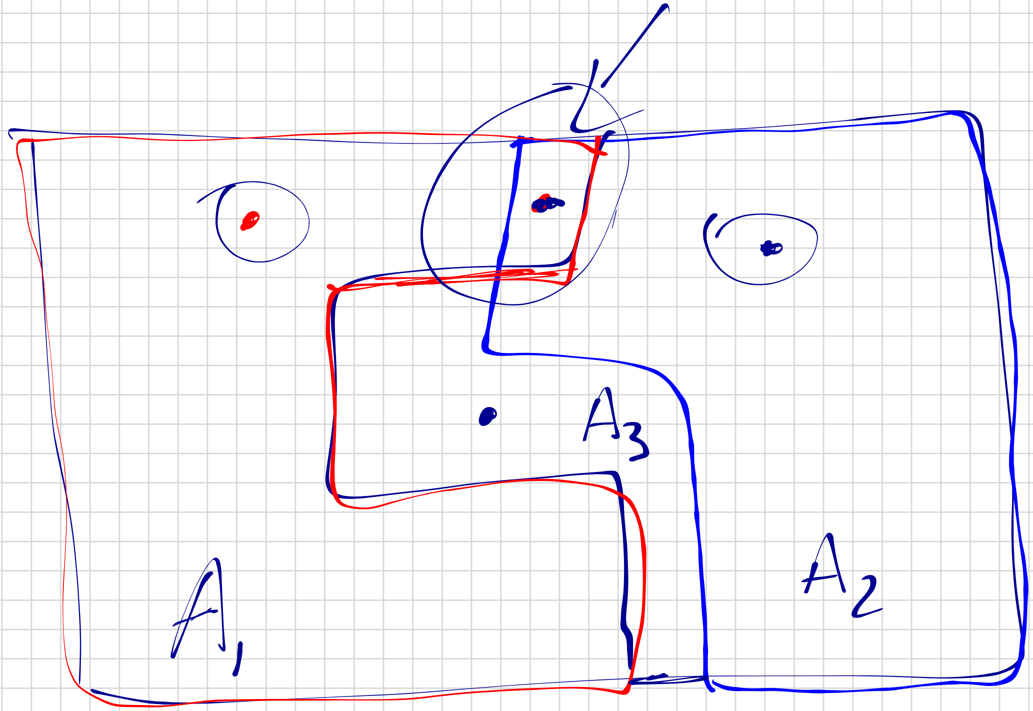
yRz $\Rightarrow$

xRz



$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

PARTIÇÕES DEFINEM RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA



A_1
A_2
A_3

Relações de eq.

definem partições.

(mod 3)

NA

PRÓXIMA AULA