Discreta Aula 13

3/11

BESTEIRA:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

é falso!

$$p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

$$\not\equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv$$

$$\sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \equiv$$

$$\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p) \equiv$$

$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ que é logicamente eq. ao "<u>ou exclusivo</u>".

Todo mundo lembra de

P.A. e P.G.

Progressão Aritmética:

termo inicial: a_0

razão: r

$$\begin{cases} a_1 = a_0 + r \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

$n \geq 1$

$a_0 = 2$

$r = 3$

$2, 5, 8, 11, 14, 17 \ldots$

NA ESCOLINHA

a_1

$a_n = a_0 + (n-1) \cdot r$

P.A. dada por recorrência:

$$\begin{cases} a_0 = p \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases} \quad p, r \in \mathbb{R} \quad n \geq 1$$

$a_{4937} = ?$

Buscando o termo geral:

$\boxed{a_0 = a_0 + 0 \cdot r}$

$a_1 = a_0 + r = \boxed{a_0 + 1 \cdot r}$

$a_1 = a_0 + 1 \cdot r$

$a_2 = a_1 + r = a_0 + r + r = \boxed{a_0 + 2r}$

$a_2 = a_0 + 2r$

$a_3 = a_2 + r = (a_0 + 2r) + r$

$\boxed{a_3 = a_0 + 3 \cdot r}$

$\boxed{a_n = a_0 + n \cdot r}$

Lembre:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n - (1-\varphi)^n\right)$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 1-\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

usamos indução para verificar a validade da expressão.

No caso da PA

$$\begin{cases} a_0 = p \\ a_n = a_{n-1} + r & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad (\ldots)$$

$$* \quad \boxed{a_n = a_0 + n \cdot r}$$

$$\boxed{a_{4937} = p + 4937 \cdot r}$$

é preciso garantir que isto funciona para todo $n \in \mathbb{N}$

Exercício: USE INDUÇÃO p/ MOSTRAR A VALIDADE DE *

E para Progressões Geométricas?

$$\begin{cases} a_0 = p & p, q \in \mathbb{R} \\ a_n = a_{n-1} \cdot q & q \neq 0 \end{cases}$$

$a_0 = p$

$a_1 = a_0 \cdot q$

$a_2 = a_1 \cdot q = (a_0 \cdot q) \cdot q = a_0 \cdot q^2$

$a_3 = a_2 \cdot q = (a_0 \cdot q^2) \cdot q = a_0 \cdot q^3$

$\vdots$ ← "parece que"

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$$

Para validar, use INDUÇÃO.

~~$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$~~

PASSO BASE: se $n = 0$

$\boxed{a_0 = p}$ por um lado

Por outro,

$a_0 = \boxed{a_0 \cdot q^0 = a_0 \cdot 1 = p}$

PASSO DE INDUÇÃO

Hipótese: $0 \leq r \leq k \Rightarrow$

$$a_r = a_0 \cdot q^r$$

Tese: $a_{k+1} = a_0 \cdot q^{k+1}$

Sei que $a_k = a_0 \cdot q^k$. Multiplicando por q ambos os lados,

$$a_k \cdot q = a_0 \cdot q^k \cdot q$$

como queríamos demonstrar.

Como

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_0 \cdot q^k \cdot q$$

$$= a_0 \cdot q^{k+1}$$ $\boxed{CQD}$ //

H. $0 \leq r \leq k$

T. $k+1$ $\Rightarrow$ k

$k, k-1, k-2, \ldots, 1, 0$

PG:

coef. termo anterior

$$\boxed{a_n = q \cdot a_{n-1}}$$

fórmula de recorrência

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + r}$$

dois termos anteriores

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2}$$

coeficientes constantes.

Recorrências lineares, de grau k, com coeficientes constantes e homogêneas

$$a_n = C_1 \cdot a_{n-1} + C_2 \cdot a_{n-2} + \dots + C_k \cdot a_{n-k} + \cancel{F(n)}$$

$C_i \in \mathbb{R}$

$\forall i = 1, \dots, k$

$F(n) = 0 \cdot n + n^{\circ} \cdot 1$

q

$$a_n = C_1 \cdot a_{n-1} \quad (PG)$$

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 \cdot a_{n-2}$$

$C_i = 1$ (da seq. de Fibonacci)

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(n)}}{n}$$

C_n ← não é constante

$$a_n = \boxed{2^n} \cdot a_{n-1}$$

não é com coef. constante

Mas é linear de grau 1

Vamos aprender como encontrar fórmulas fechadas para recorrências lineares, com coef. constantes...

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} \quad (PG)$$

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3} + c_4 \cdot a_{n-4} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$$

PESQUISE BRIOTT-RUFINNI

e divisão de polinômios

$$x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

ou

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$x^2 = x - 1 \iff x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1}}{2}$$

$$x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

$$x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

Você vai precisar relembrar como se encontram raízes de polinômios

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \; ?$$

$$ax^4 + bx + d = 0$$