



TEMA 2

Ecuación fundamental de las turbomáquinas

Contenidos

2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

2.1. Turbina axial

2.2. Turbina centrípeta

2.3. Compresor axial

2.4. Compresor centrífugo

Contenidos

2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

2.1. Turbina axial

2.2. Turbina centrípeta

2.3. Compresor axial

2.4. Compresor centrífugo

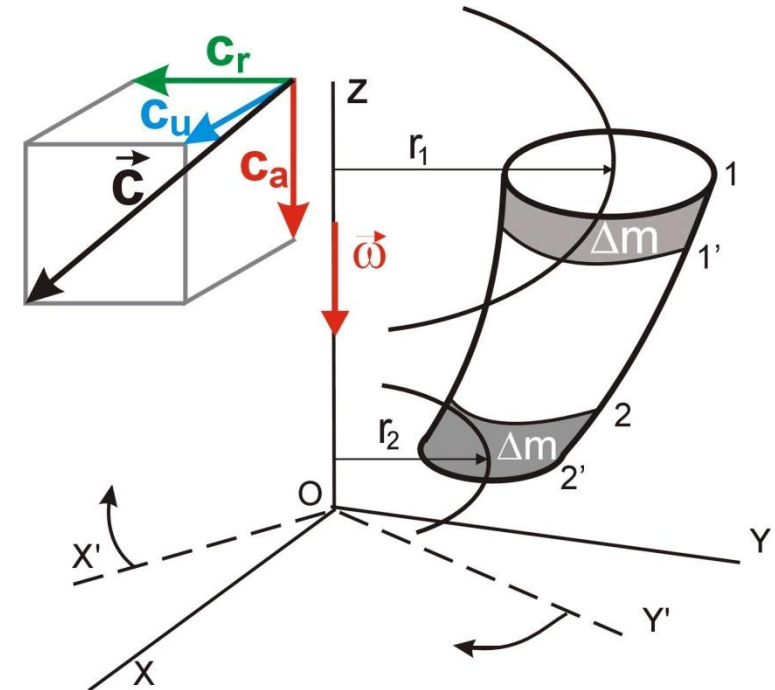
2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

- Eje de giro “Z” con velocidad angular ω
- Teorema del momento de la cantidad de movimiento al tubo de corriente entre 1 y 2:

$$\Sigma \vec{M} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{c})}{dt}$$

- M_z = momento que actúa sobre el fluido alrededor de la dirección “z”.
- $r_{1,2}$ = radios medios de las secciones de entrada y salida
- m = masa que atraviesa el volumen de control por unidad de tiempo

$$M_z = \dot{m} \cdot (r_2 \cdot c_{2u} - r_1 \cdot c_{1u})$$



- \mathbf{c} → Velocidad absoluta
 \mathbf{w} → Velocidad relativa
 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ → Velocidad periférica

2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

- Las fuerzas que ejerce el fluido contenido en el volumen de control sobre las paredes de éste crean un momento “- M_z ”. Sustituyendo se obtiene la “Ecuación de Euler” para una **máquina motora** ($M_z > 0$):

$$M_z = \dot{m} \cdot (r_1 \cdot c_{1u} - r_2 \cdot c_{2u})$$

- La potencia se obtiene multiplicando por la velocidad angular de giro “ ω ”:

$$N_u = M_z \cdot \omega = \dot{m} \cdot (r_1 \cdot c_{1u} - r_2 \cdot c_{2u}) \cdot \omega = \dot{m} \cdot (u_1 \cdot c_{1u} - u_2 \cdot c_{2u})$$

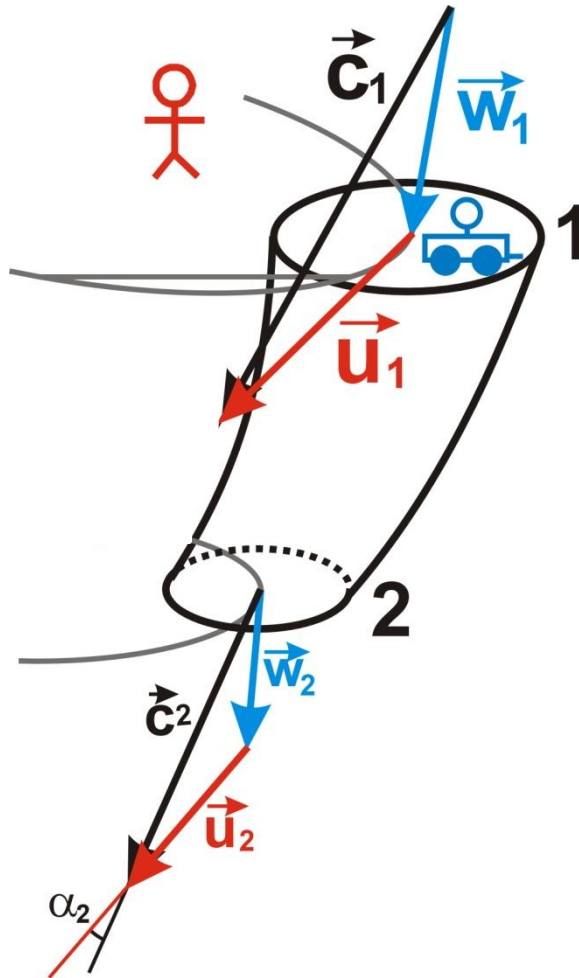
- El trabajo específico (trabajo periférico) se obtiene a partir de la expresión de la potencia mediante:

$$w_u = N_u / \dot{m} = (u_1 \cdot c_{1u} - u_2 \cdot c_{2u})$$

(1ª Forma Ec. de Euler)

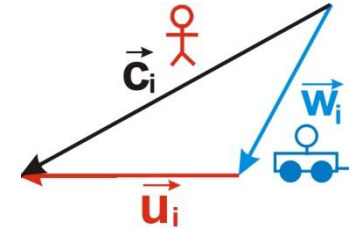
- Esta deducción es válida tanto para **turbomáquinas motoras** ($W_u, M_z > 0$) como **generadoras** ($W_u, M_z < 0$)

2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas



$$\vec{w}_i = \vec{c}_i - \vec{u}_i \quad i = 1, 2$$

$$c_{iu} = c_i \cdot \cos(90 - \alpha_i) \quad i = 1, 2$$



- Aplicando el Teorema del coseno:

$$c_i^2 + u_i^2 - 2u_i \cdot c_i \cdot \cos(90 - \alpha_i) = w_i^2, \quad i = 1, 2$$

$$u_i \cdot c_i \cdot \cos \alpha_i = u_i \cdot c_{iu} = \frac{c_i^2}{2} + \frac{u_i^2}{2} - \frac{w_i^2}{2}$$

- Sustituyendo en la ecuación de Euler:



$$w_u = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

(2ª Forma Ec. de Euler)


2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

- Aplicando el primer principio para el observador fijo, suponiendo la evolución entre 1 y 2 adiabática:

$$\text{fij} \quad w_u = h_{01} - h_{02} = (h_1 - h_2) + \left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right)$$


- Combinando con la 2ª forma de la Ec. de Euler se obtiene la ecuación de conservación de la energía para un sistema de referencia móvil:

$$w_u = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = (h_1 - h_2) + \left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right)$$



$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}$$

- Al igual que en el sistema fijo, se puede definir una entalpía de parada relativa a partir de la expresión (rotalpía) $h_{0ir} = h_i + w_i^2/2$:



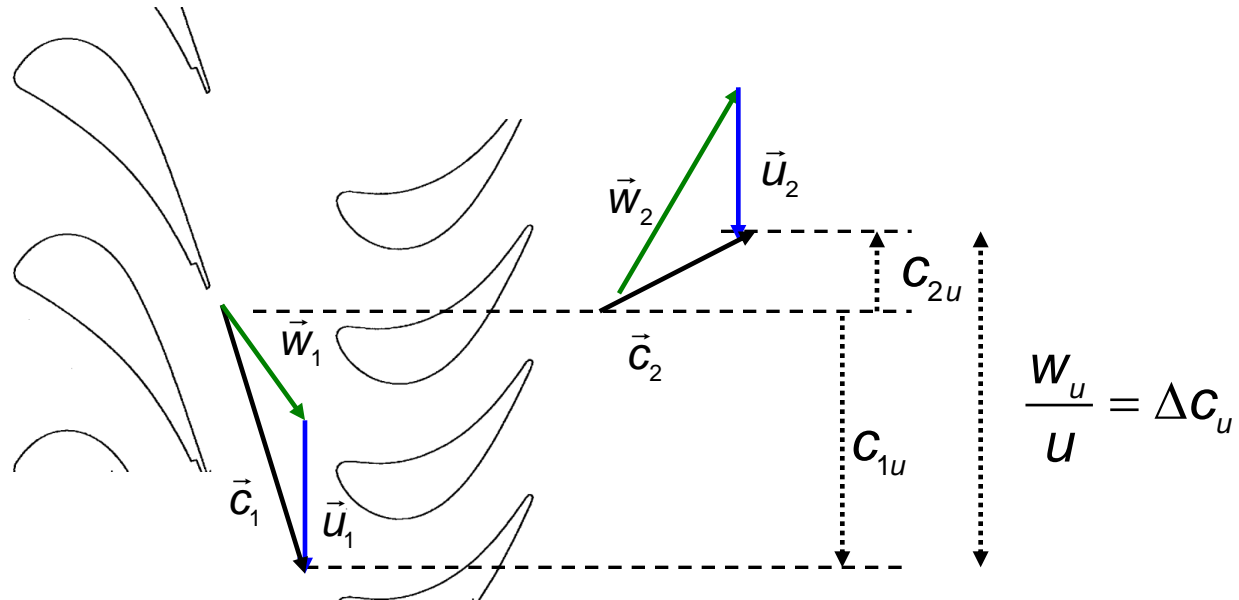
$$h_{01r} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = h_{02r}$$

2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

- El trabajo específico generado o consumido por la turbomáquina se obtiene a partir de la ecuación de Euler y se expresa como:

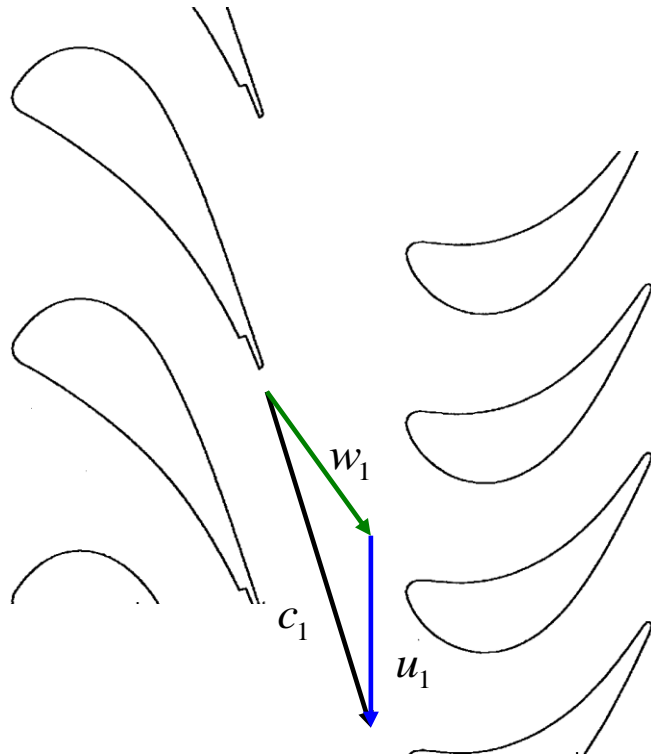
$$W_u = u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

- Para una turbomáquina axial pura, $u_1 = u_2$



2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

- Condiciones absolutas y relativas



$$\vec{w}_1 = \vec{c}_1 - \vec{u}_1$$

$$a = \sqrt{\gamma RT}$$

$$M_1 = \frac{c_1}{a_1}$$

$$\frac{T_{01}}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)$$

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\vec{w}_1 = \vec{c}_1 - \vec{u}_1$$

$$a = \sqrt{\gamma RT}$$

$$M_{1r} = \frac{w_1}{a_1}$$

$$\frac{T_{01r}}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{1r}^2 \right)$$

$$\frac{p_{01r}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{1r}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Contenidos

2.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

2.1. Turbina axial

2.2. Turbina centrípeta

2.3. Compresor axial

2.4. Compresor centrífugo

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina axial

- La hipótesis de trabajo es que la componente radial de la velocidad es “comparativamente” nula frente a la componente axial.

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = r_2 \\ c_r = 0 \end{array} \right\} \rightarrow u_1 = u_2$$




2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina axial

- Estator (0-1): aumenta la velocidad absoluta del flujo

$$h_{00} = h_0 + \frac{c_0^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_{01}$$


- Rotor (1-2):

- Observador fijo (ejes X, Y, Z): 

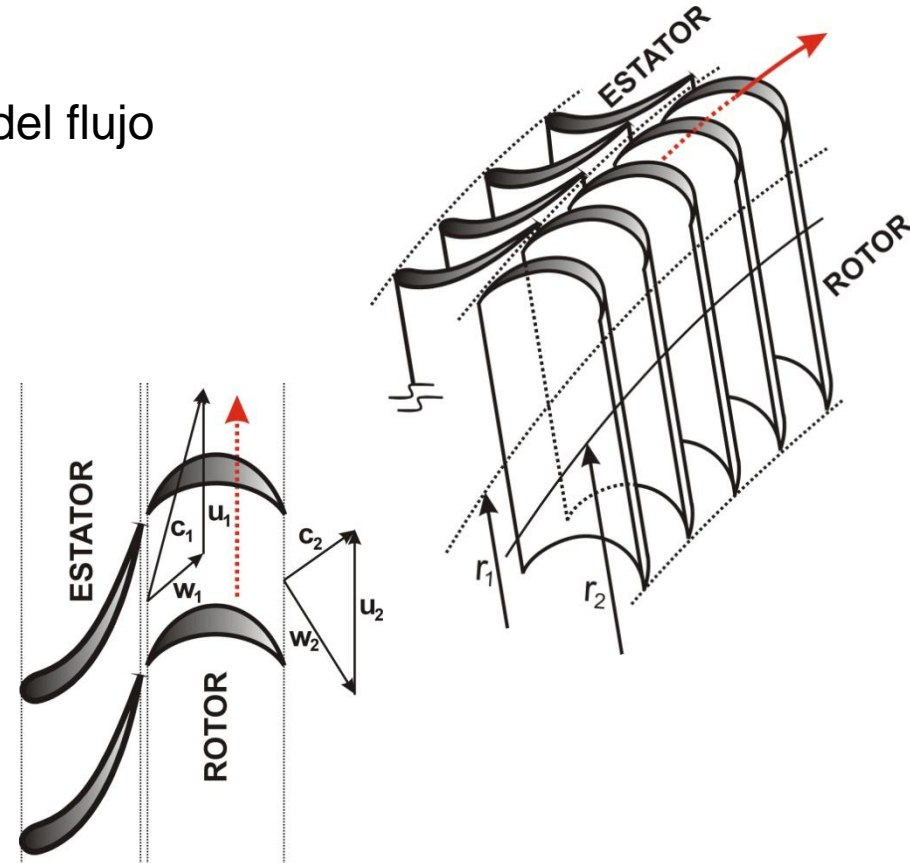
$$w_u = u \cdot (c_{1u} - c_{2u})$$

$$w_u = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

$$w_u = h_{01} - h_{02} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + h_1 - h_2$$

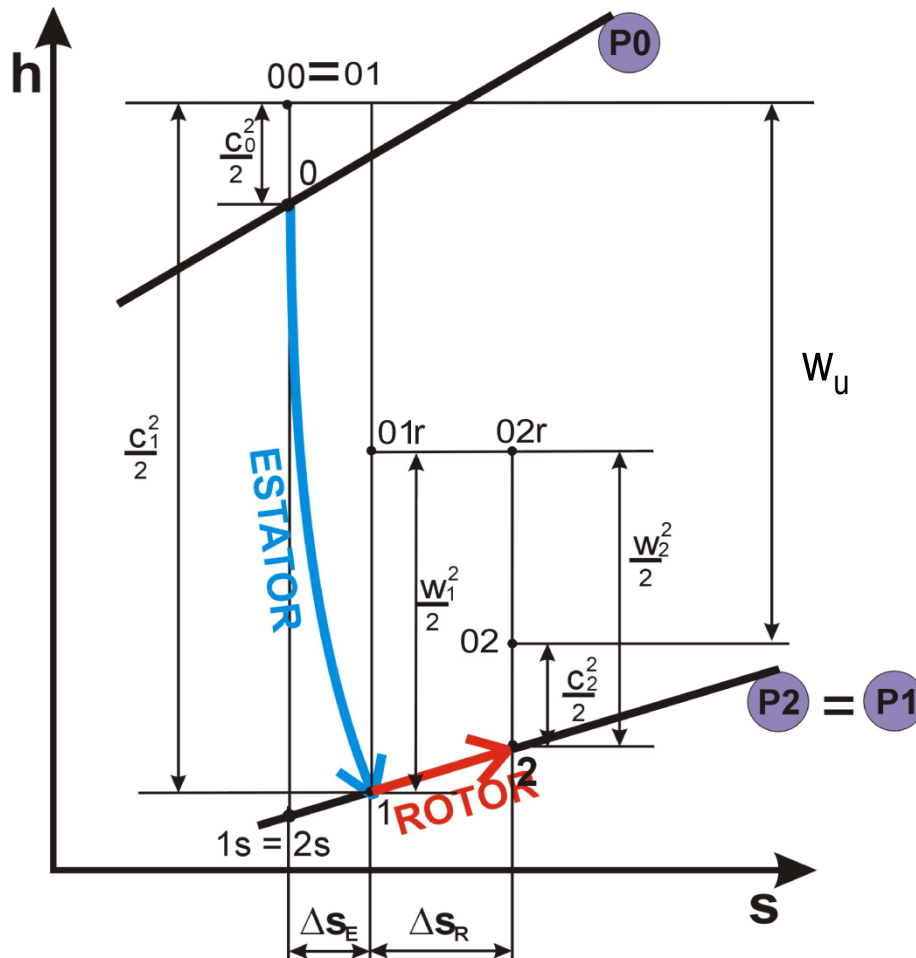
- Observador móvil (ejes X', Y', Z): 

$$(u_1 = u_2 = u) \quad h_1 - h_2 = \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} \Rightarrow h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}, \text{ o bien } h_{01r} = h_{02r}$$



2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina axial de acción: presión constante en el rotor



- **ESTATOR (0-1): expansión**

$$C_1 \gg C_0$$

$$p_1 \ll p_0$$

- **ROTOR (1-2):**

$$p_1 = p_2 \text{ (sin expansión)}$$

$w_2 < w_1$, $h_2 > h_1 \rightarrow$ variaciones debidas a la fricción ($\Delta s > 0$)

- **GRADO DE REACCIÓN:**

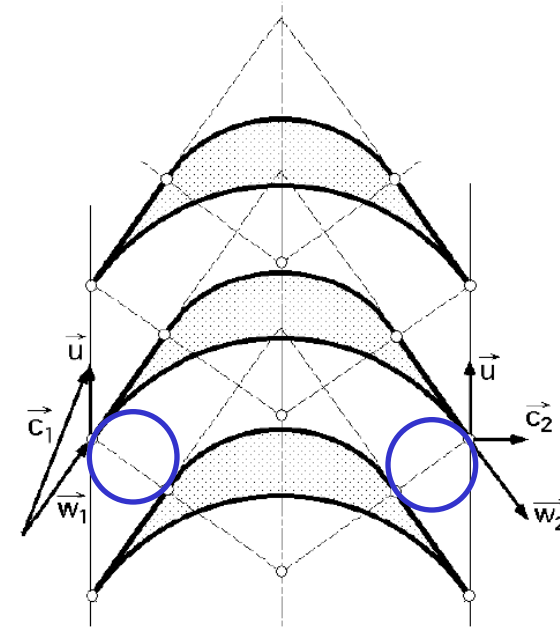
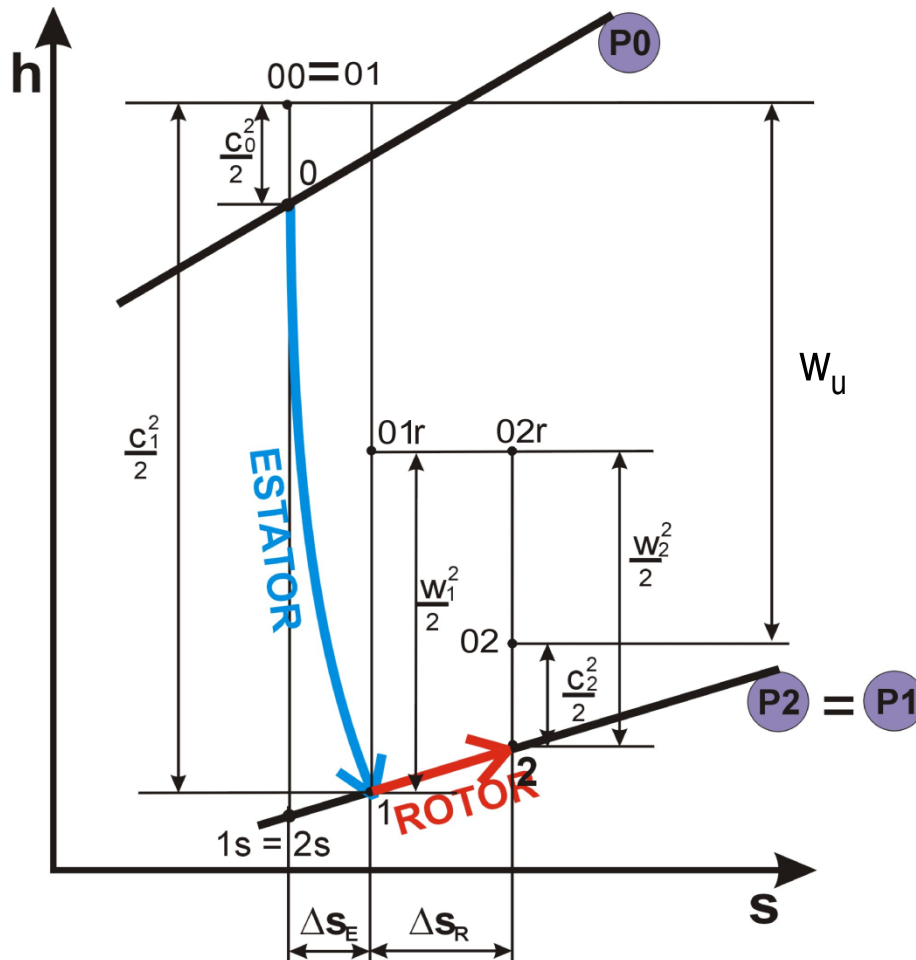
$$GR = (h_1 - h_2) / (h_{01} - h_{02}) \approx 0$$

(Ligeramente negativo)

Toda la expansión en el estator

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina axial de acción: presión constante en el rotor



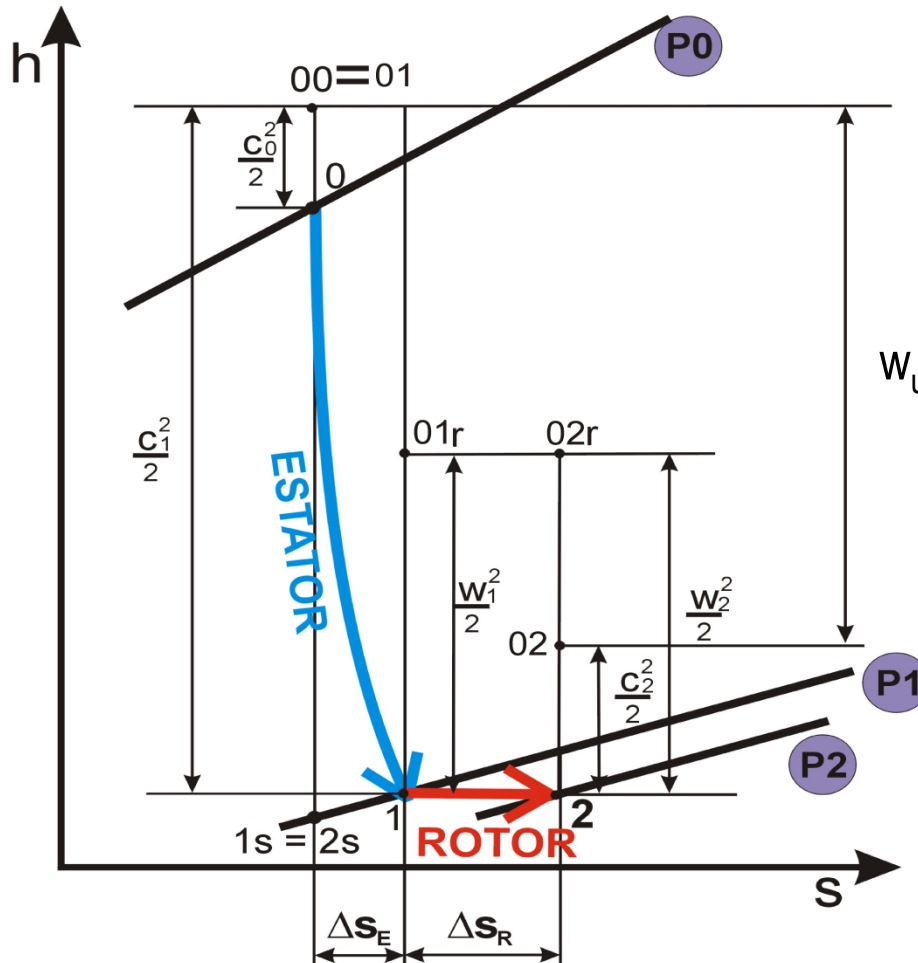
- **GRADO DE REACCIÓN:**

$$GR = (h_1 - h_2) / (h_{01} - h_{02}) \approx 0$$
 (Ligeramente negativo)

Toda la expansión en el estator

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina axial de acción: entalpía constante en el rotor



- **ESTATOR (0-1): Expansión**

$$C_1 \gg C_0$$

- **ROTOR (1-2):**

$$h_1 = h_2 \text{ (h constante)}$$

$$p_1 > p_2 \rightarrow \text{cae ligeramente}$$

$$w_1 = w_2 \text{ no aumenta debido a la fricción } (\Delta S > 0)$$

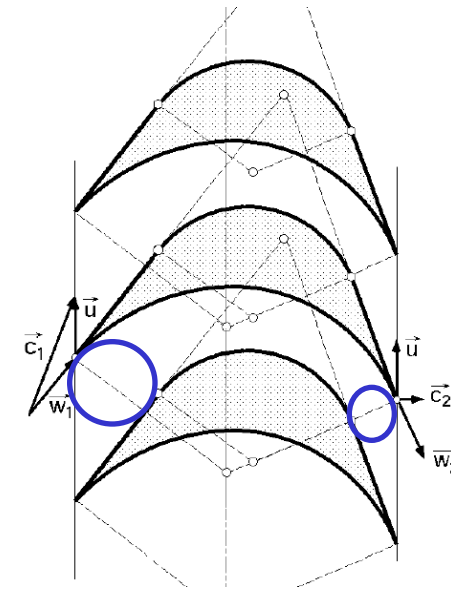
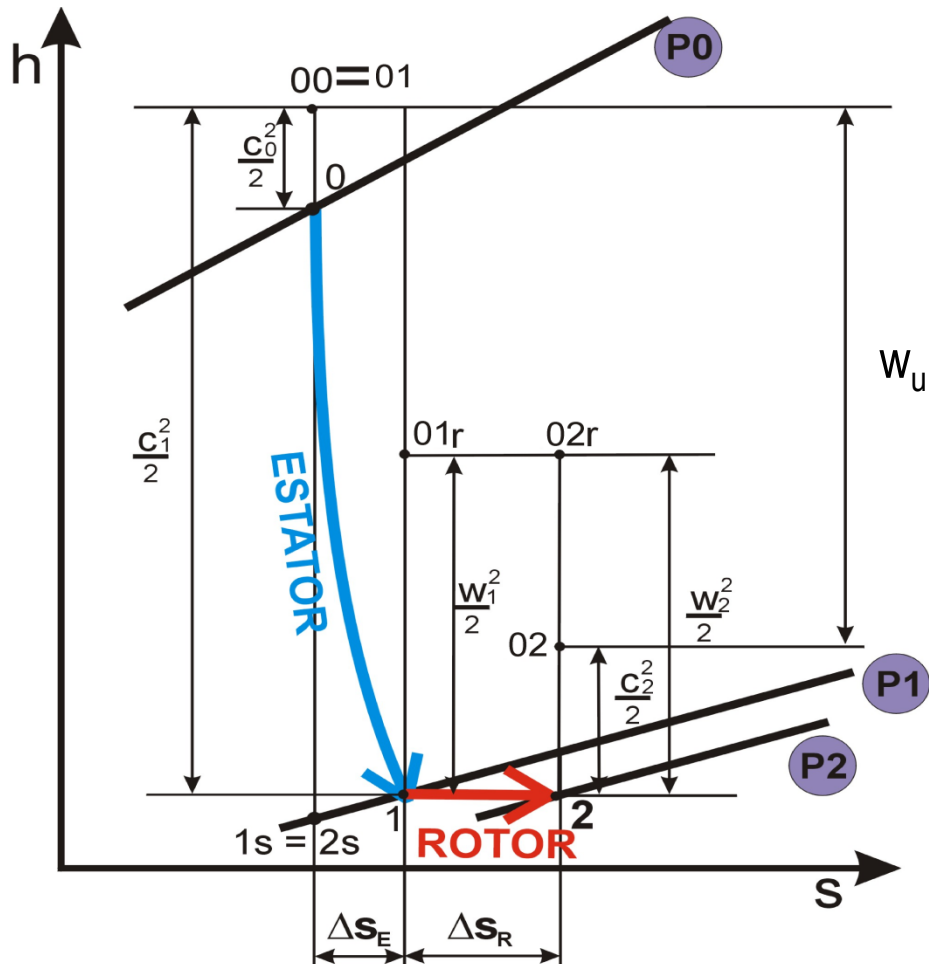
- **GRADO DE REACCIÓN:**

$$GR = (h_1 - h_2) / (h_{01} - h_{02}) = 0$$

Toda la expansión en el estator (aproximadamente)

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina axial de acción: entalpía constante en el rotor



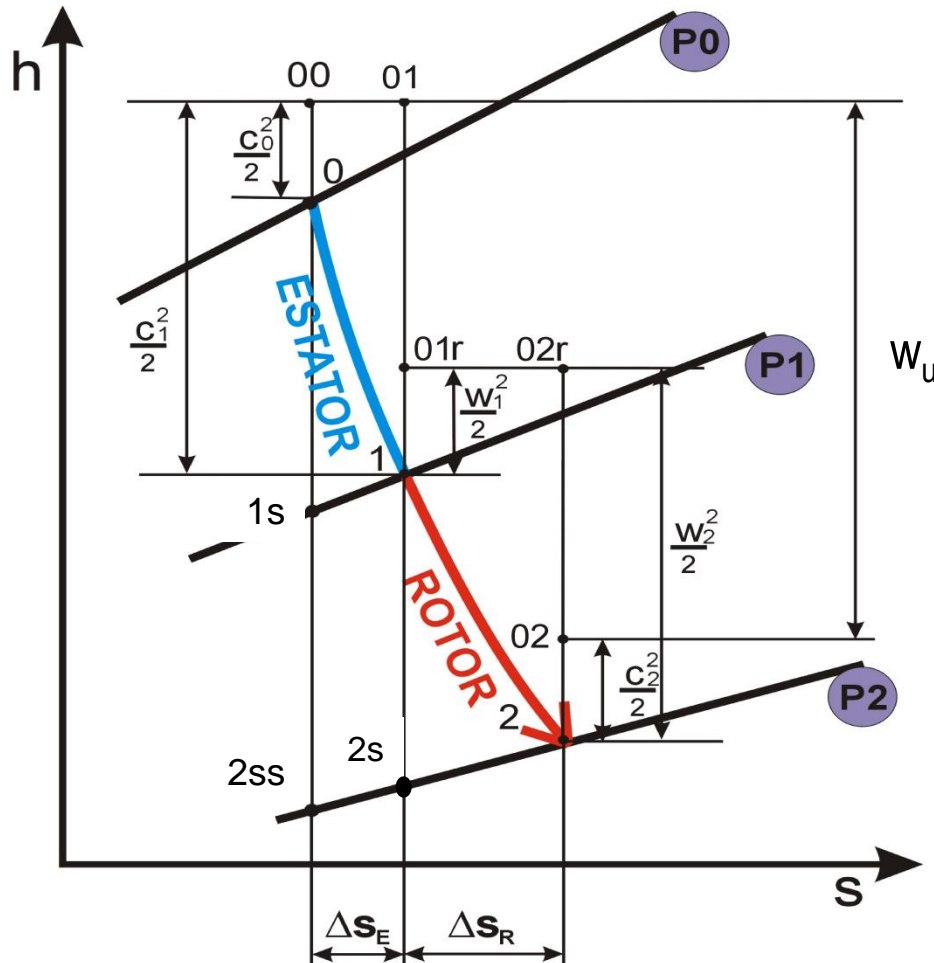
■ GRADO DE REACCIÓN:

$$GR = (h_1 - h_2) / (h_{01} - h_{02}) = 0$$

Toda la expansión en el estator (aproximadamente)

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina axial de reacción

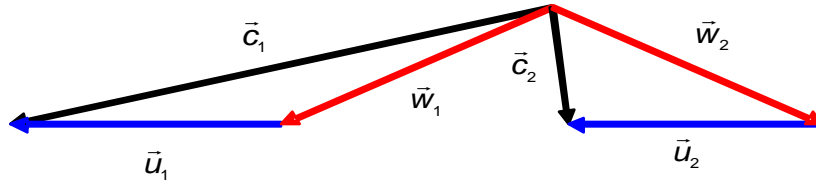


- ESTATOR (0-1): Expansión
 $c_1 \gg c_0$
- ROTOR (1-2): Expansión
 $h_1 \gg h_2 \rightarrow$ expansión
 $p_1 \gg p_2 \rightarrow$ expansión
 $w_2 \gg w_1 \rightarrow$ aumenta debido a la expansión
- GRADO DE REACCIÓN:
 $GR = (h_1 - h_2) / (h_{01} - h_{02}) > 0$
Expansión repartida entre estator y rotor

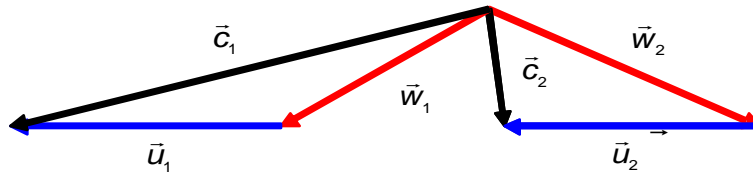
2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Grado de reacción

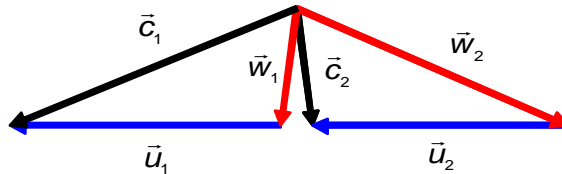
GR=0



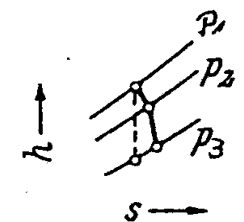
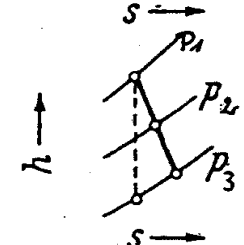
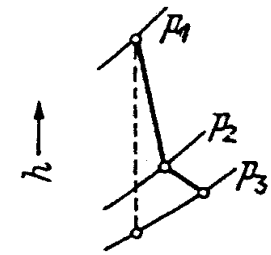
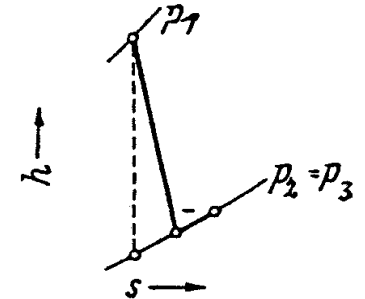
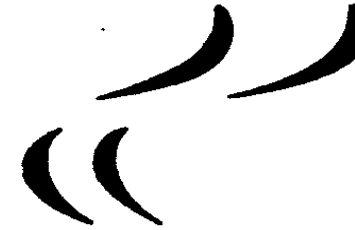
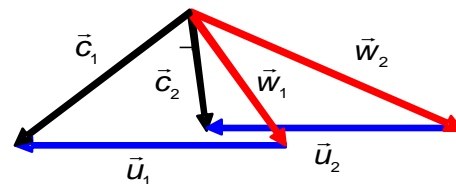
GR=0.2



GR=0.5



GR=0.7



2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina centrípeta

- Turbina centrípeta: $u_1 > u_2$
- Estator (0-1): el fluido se expande y aumenta su energía cinética (velocidad absoluta)

$$h_{00} = h_{01} \Rightarrow h_0 + \frac{c_0^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2}$$

- Rotor (1-2):

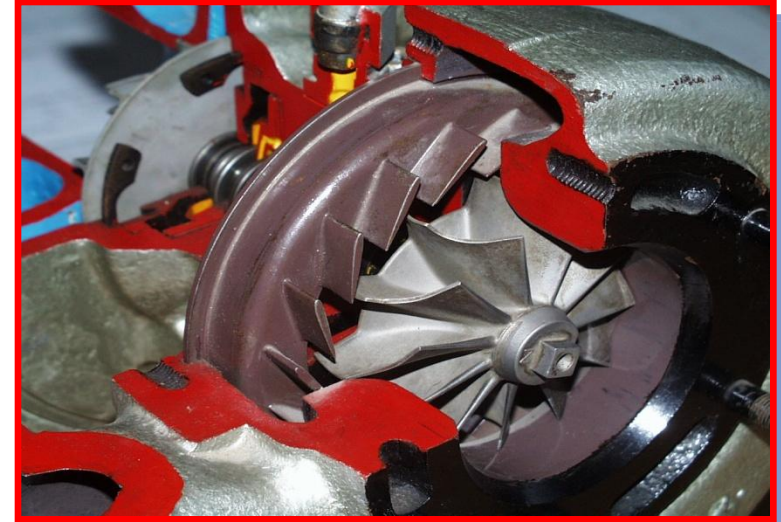
Observador fijo: 

$$W_u = u_1 \cdot c_{1u} - u_2 \cdot c_{2u}$$

$$W_u = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

$$W_u = h_{01} - h_{02} = \left(h_1 + \frac{c_1^2}{2} \right) - \left(h_2 + \frac{c_2^2}{2} \right)$$

$$W_u = \left(\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \right) + (h_1 - h_2)$$



Observador móvil: 

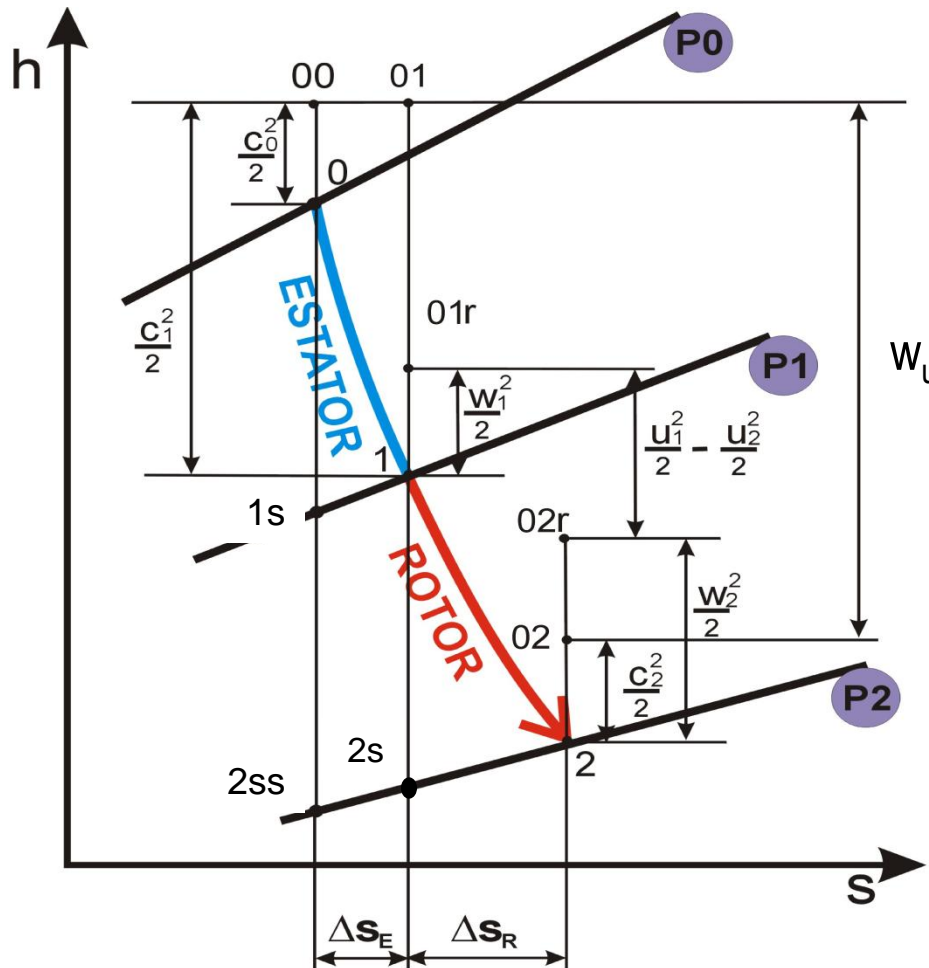
$$h_1 - h_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

$$\text{o bien: } h_1 + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow h_{01r} = h_{02r} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Turbina centrípeta



- ESTATOR (0-1): Expansión
 - $c_1 \gg c_0$
 - $p_0 \gg p_1$
- ROTOR (1-2): Expansión
 - $h_1 \gg h_2 \rightarrow$ expansión
 - $p_1 \gg p_2 \rightarrow$ expansión
 - $w_2 \gg w_1 \rightarrow$ aumenta debido a la expansión
 - $u_1 > u_2 \rightarrow$ máquina centrípeta
- GRADO DE REACCIÓN:
 - $GR = (h_1 - h_2) / (h_{01} - h_{02}) > 0$
 - Expansión repartida entre estator y rotor

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Compresor axial

- Compresor axial: $u_1 = u_2$
- Rotor (1-2): aumento de velocidad absoluta

Observador fijo:  ($u_1 = u_2 = u$)

$$w_u = u \cdot (c_{2u} - c_{1u})$$

$$w_u = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}$$

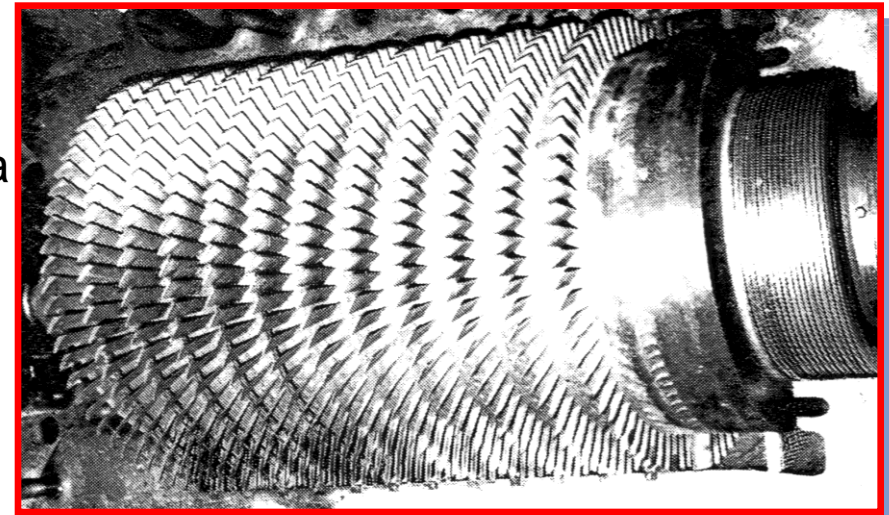
$$w_u = h_{02} - h_{01} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + h_2 - h_1$$

Observador móvil: 

$$(u_1 = u_2 = u) \Rightarrow h_2 - h_1 = \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2}$$

O bien:

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} \Rightarrow h_{01r} = h_{02r}$$

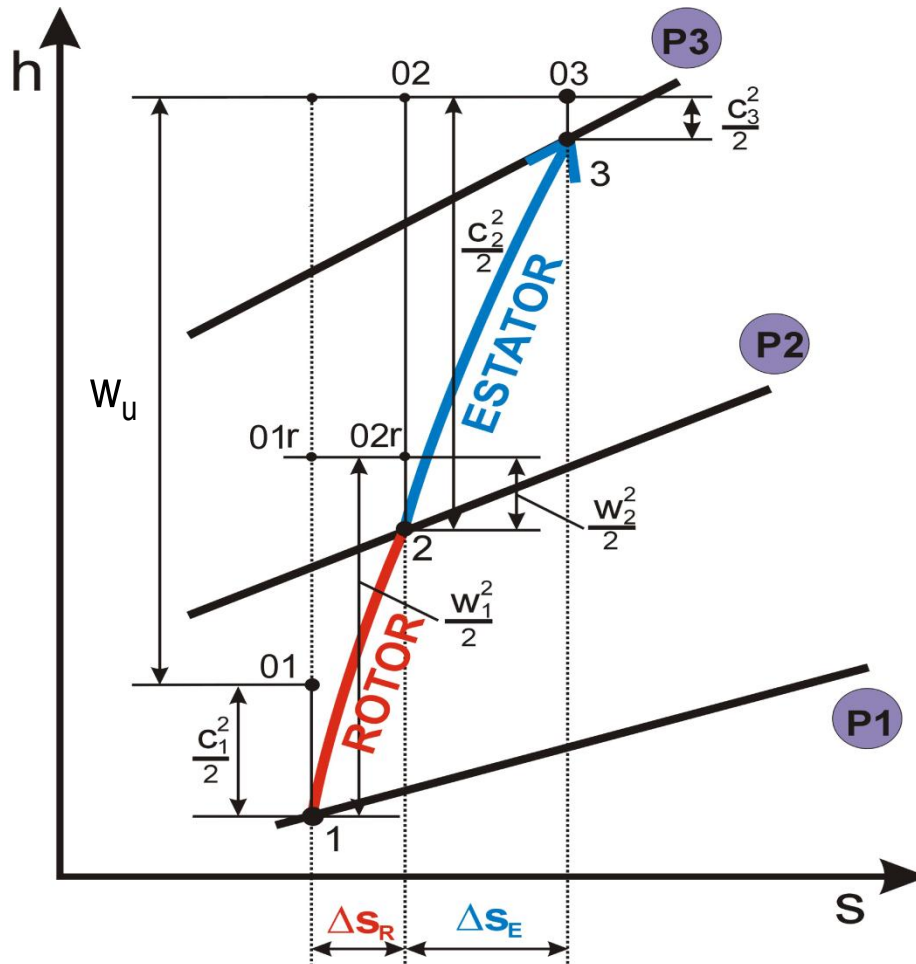


- Estator (2-3): Disminuye la energía cinética (compresión dinámica)

$$h_2 + \frac{c_2^2}{2} = h_3 + \frac{c_3^2}{2} \Rightarrow h_{02} = h_{03}$$

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Compresor axial

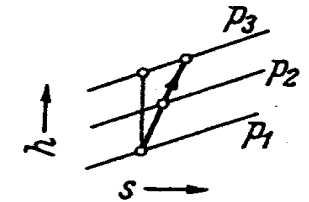
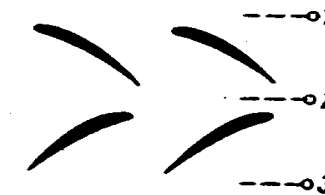
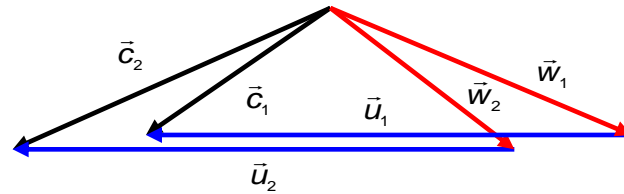


- ROTOR (1-2):
 $h_1 \ll h_2 \rightarrow$ compresión
 $p_1 \ll p_2 \rightarrow$ compresión
 $w_1 \gg w_2 \rightarrow$ pérdida de velocidad relativa debido a la compresión
- ESTATOR (2-3):
 $c_2 \gg c_3 \rightarrow$ el fluido es frenado
- GRADO DE REACCIÓN:
 $GR = (h_2 - h_1) / (h_{02} - h_{01}) > 0$
 Compresión repartida entre estator y rotor

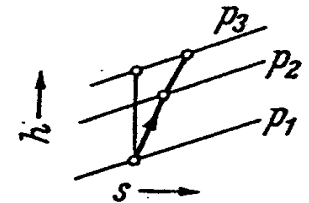
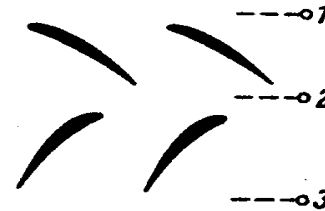
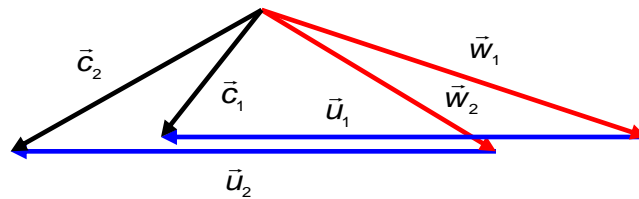
2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Grado de reacción

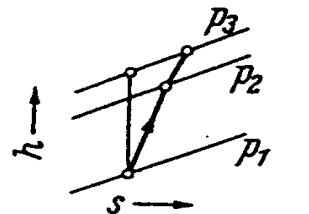
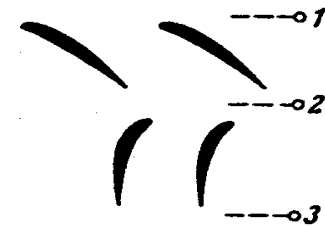
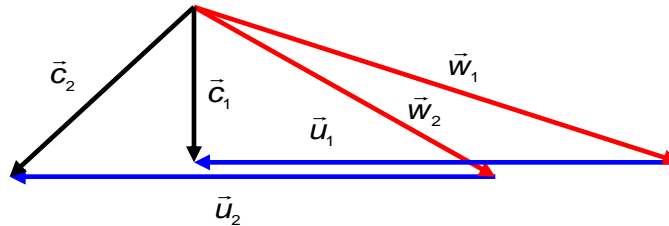
GR=0.5



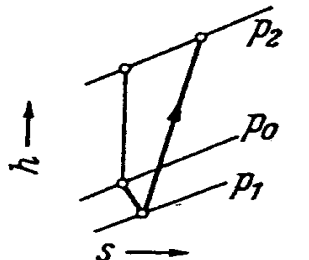
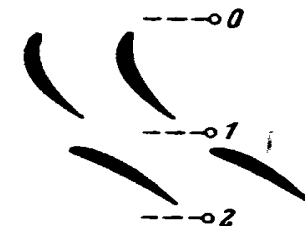
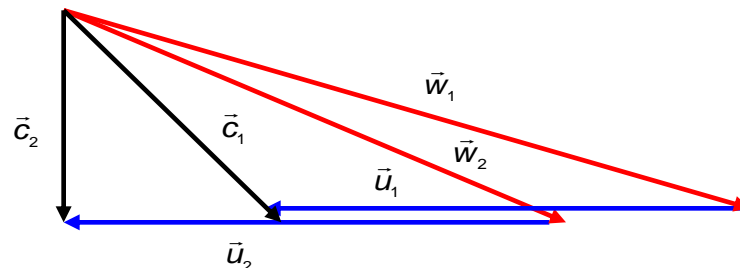
GR=0.7



GR=0.85

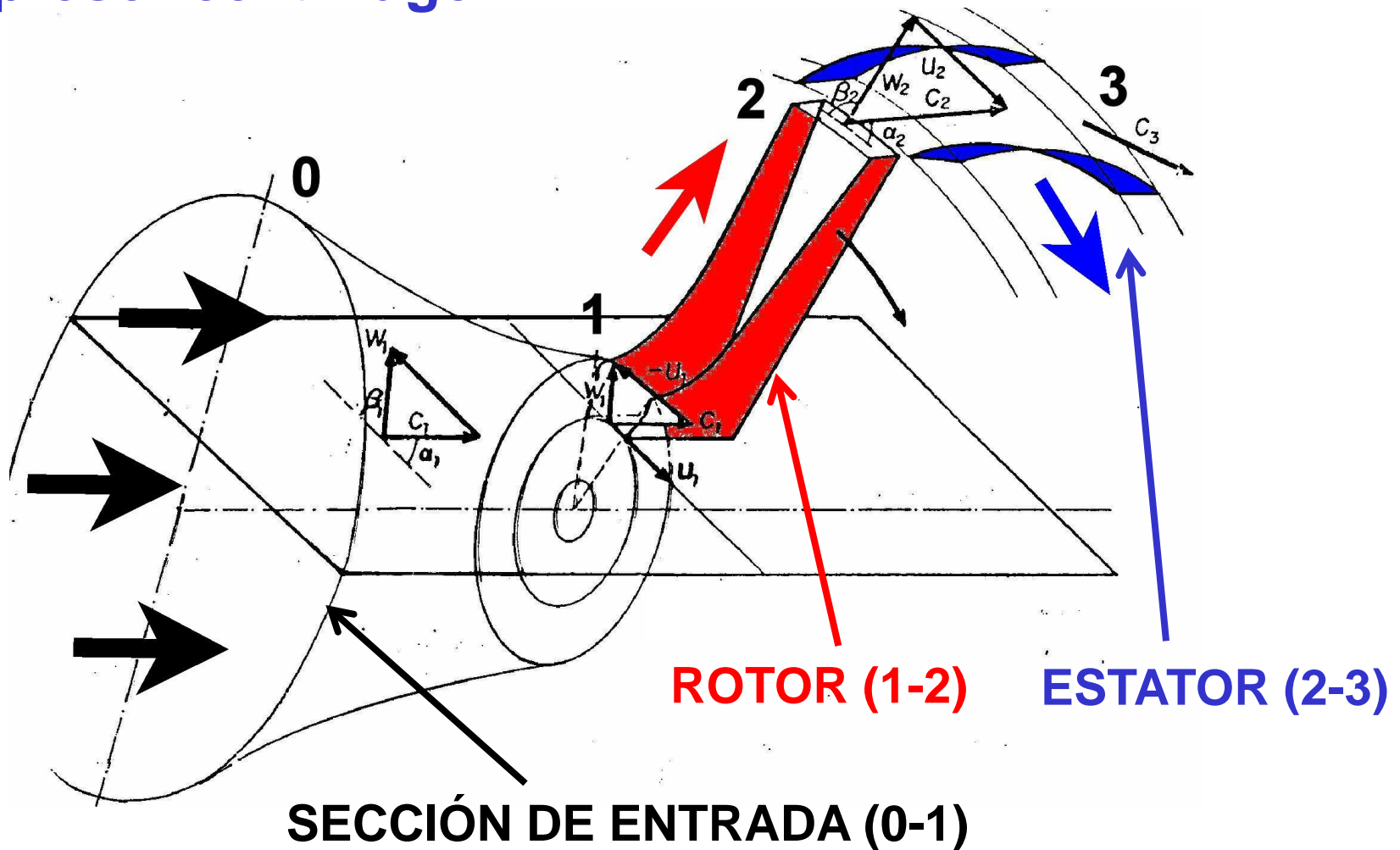


GR=1.2



2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Compresor centrífugo



2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Compresor centrífugo

- Compresor centrífugo: $u_1 < u_2$
- Rotor (1-2): aumento de velocidad absoluta

Observador fijo: 

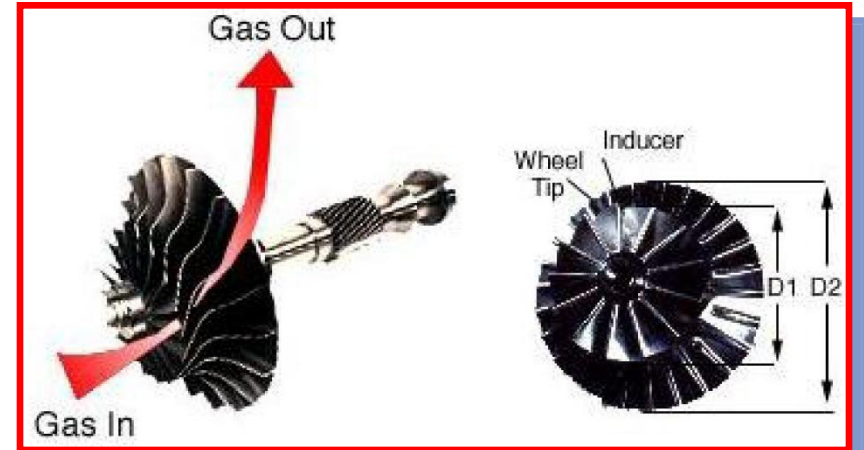
$$W_u = u_2 \cdot c_{2u} - u_1 \cdot c_{1u}$$

$$W_u = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

$$w_u = h_{02} - h_{01} = \left(\frac{c_2^2}{2} + h_2 \right) - \left(\frac{c_1^2}{2} + h_1 \right)$$

- Estator (2-3): Disminuye la energía cinética (compresión dinámica)

$$h_2 + \frac{c_2^2}{2} = h_3 + \frac{c_3^2}{2} \Rightarrow h_{02} = h_{03}$$



- Rotor (1-2)

Observador móvil: 

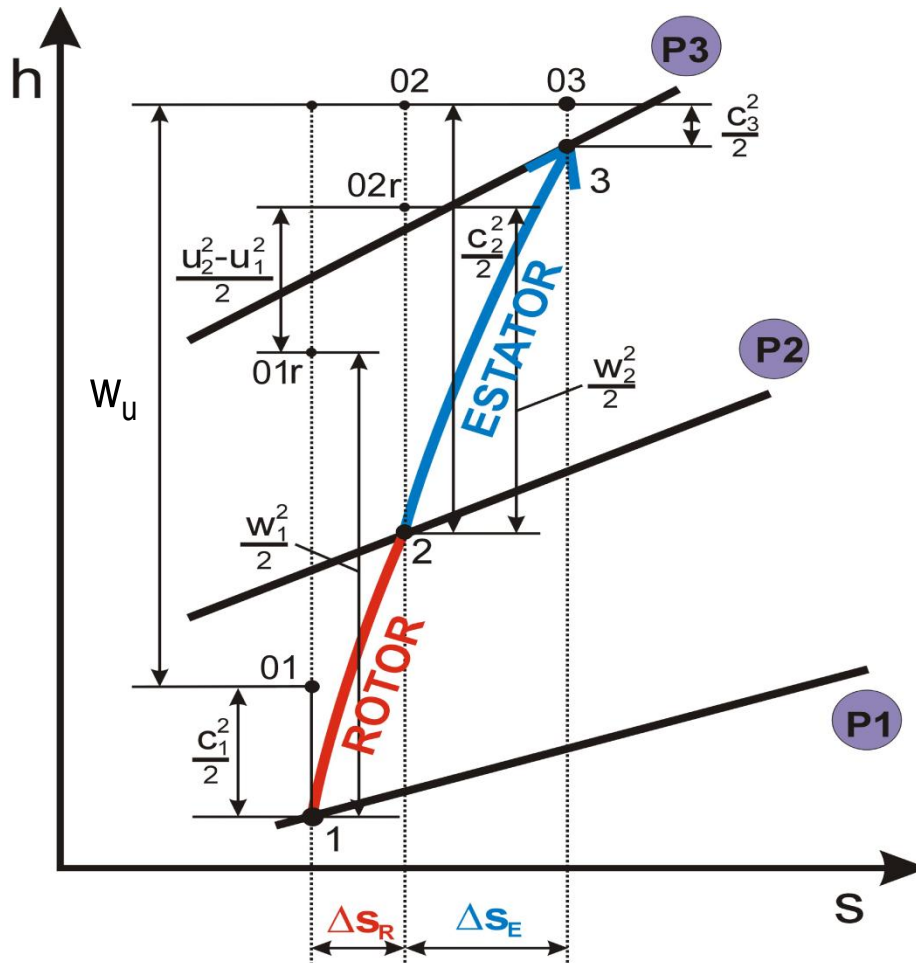
$$h_2 - h_1 = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

$$\text{O bien: } h_1 + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow h_{01r} = h_{02r} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

2.2. Análisis termodinámico de escalonamientos

Compresor centrífugo



- ROTOR (1-2):
 - $h_1 \ll h_2 \rightarrow$ compresión
 - $p_1 \ll p_2 \rightarrow$ compresión
 - $w_1 \gg w_2 \rightarrow$ pérdida de velocidad relativa debido a la compresión
 - $u_2 > u_1 \rightarrow$ máquina centrífuga
- ESTATOR (2-3):
 - $c_2 \gg c_3 \rightarrow$ el fluido es frenado
- GRADO DE REACCIÓN:
 - $GR = (h_2 - h_1) / (h_{02} - h_{01}) > 0$
 - Compresión repartida entre estator y rotor