Ch. 4 고계 미분방정식

4.1 준비 이론-선형방정식

4.1.3 비동차방정식

- **2계 선형 미분방정식** 일반형: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ or 표준형: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

정리 4.1.6 일반해-비동차 방정식

y_1, y_2는 동차방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 의 기본 해집합이고,

y_p는 비동차방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$의 특수해일 때,

비동차방정식의 일반해는 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p$이다.

★ y_p: 비동차방정식에서 임의의 상수를 포함하지 않는 **특수해**(Particular solution)

$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$: **여함수**(Complementary function)

⇝ 비동차방정식의 일반해는 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p = y_c + y_p$

정리 4.1.7 중첩원리-비동차방정식(Superposition Principle)

y_{p_1}은 비동차방정식 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$의 해이고

y_{p_2}은 비동차방정식 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$의 해일 때,

임의의 상수 c_1, c_2 에 대하여 $y=c_1y_1+c_2y_2$는 $y''+p(x)y'+q(x)y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$의 해이다.

Corollary 중첩원리-비동차방정식(Superposition Principle)

y_{p_i}가 비동차방정식 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_i(x),\ i=1,\cdots,n$ 의 해이면

임의의 상수 $c_1,\cdots,c_n$ 에 대하여 $y=\sum_{i=1}^{n}c_iy_{p_i}$는 $y''+p(x)y'+q(x)y=\sum_{i=1}^{n}c_if_{p_i}(x)$의 해이다.

4.4 미정계수-중첩접근(Method of Undetermined Coefficient)

● 상수 계수를 갖는 2계 선형 비동차방정식 $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = g(x),\ g(x) \neq 0$ 의

⇝ 일반해: $y = y_c + y_p$, 여기서 y_c: 동차방정식 $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$의 일반해이고

y_p: 비동차방정식 $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = g(x)$의 특수해

$g(x)$	y_p 의 형태
1. 상수함수	A
2. 다항식 $(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ n = 0, 1, \cdots)$	$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots$ (같은 차수의 다항식)
3. 지수함수 e^{ax}	Ae^{ax}
4. 삼각함수 $\sin ax$, $\cos ax$	$A\cos ax + B\sin ax$
*(1.~4. 함수들의 유한개의 합과 곱)	
5. $e^{ax}\cos bx$	$Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx$
6. axe^{bx}	$(Ax + B)e^{cx}$
7. $ax^2 \sin bx$	$(Ax^2 + Bx + C)\cos bx + (Ex^2 + Fx + G)\sin bx$
8. $axe^{bx}\cos cx$	$(Ax + B)e^{bx}\cos cx + (Cx + D)e^{bx}\sin cx$

★ **y_p를 선택할 때 주의할 점: 만약 y_p로 선택한 항이 동차식의 해이면, 선택한 y_p에 $x^n,\ n=1,2,\cdots$를 곱한다.**

Ex 4. 방법의 사소한 결함

$y''-5y'+4y=8e^x$의 특수해를 구하여라.

Ex 5. 특수해의 형태

다음 방정식의 특수해의 형태를 구하시오.

a) $y''-8y'+25y=5x^3e^{-x}-7e^{-x}$

b) $y''+4y=x\cos x$

Ex 7. $y''-2y'+y=e^x$의 특수해를 구하여라.

연습문제 4.4

7. 주어진 미분방정식을 풀어라.

$$y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$$

17. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

28. 주어진 초깃값 문제를 풀어라.

$$2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

4.6 매개변수 변화법(Variation of parameters)

- **2계 선형 미분방정식** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

  ⇝ **일반해** $y = y_c + y_p$

  여기서 y_c: 동차방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$의 일반해

  비동차방정식의 특수해를 $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$라 놓고 대입하여

  u_1, u_2를 구하면 $u_1 = \int \frac{-y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx$, $u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx$

$$\Rightarrow \quad y = y_c + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_1 \int \frac{-y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx$$

연습문제 4.6

12. 다음 미분방정식을 풀어라.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$$

15. $y'' + 2y' + y = e^{-t}\ln t$

18. $4y'' - 4y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1-x^2}$

20. 다음 초깃값 문제를 풀어라.

$$2y'' + y' - y = x + 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

4.7 코시-오일러 방정식

정의 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$: 상수

$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$; x의 차수와 y의 도함수의 차수가 같을 때

$\Rightarrow$ **코시-오일러 방정식**(Cauchy-Euler)

● **2계 동차 방정식** $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, a, b, c : 상수

< 해를 구하는 방법 >

Try $y = x^m$, m : 상수

☞ $am^2+(b-a)m+c=0$: **보조방정식**(Auxiliary Equation)의 두 근 m_1, m_2;

Case 1. $(D=(b-a)^2-4ac>0$ 인 경우$)$ **서로 다른 두 실근** $m_1 \neq m_2$;

$\Rightarrow$ **일반해:** $y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$

Case 2. $(D=(b-a)^2-4ac=0$ 인 경우$)$ **중근** $m=\dfrac{-(b-a)}{2a}$;

$\Rightarrow$ **일반해:** $y=c_1x^m+c_2x^m\ln x \rightsquigarrow$ **계수 감소법을 이용하여** y_2 **구하기**

Ex 1. $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

Ex 2. $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

Case 3. $(D<0$ 인 경우$)$ **서로 다른 두허근:** $m_1=\alpha+i\beta,\ m_2=\alpha-i\beta \quad \left(\alpha=\frac{a-b}{2a},\ \beta=\frac{\sqrt{4ac-(b-a)^2}}{2a}\right)$

$\Rightarrow$ **일반해:** $$\begin{aligned} y &= c_1x^{\alpha+i\beta}+c_2x^{\alpha-i\beta} \\ &= x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)] \end{aligned}$$

Ex 3. 초깃값 문제

$4x^2y'' + 17y = 0,\ y(1) = -1,\ y'(1) = -\frac{1}{2}$ 를 풀어라.

● **2계 비동차 방정식** $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x),\ \ a, b, c$: 상수 ⇝ **매개변수 변화법 사용**

Ex 5. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$를 풀어라.

★ 상수계수로의 변형

1) $ay'' + by' + cy = 0$

$\rightsquigarrow \; y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

2) $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \to x = e^t$ 치환 $\quad t = \ln x$

$\rightsquigarrow \; y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$t = \ln x \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt}$

$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$ax^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + bx \cdot \frac{dy}{dx} + cy = 0$

$= ax^2 \cdot \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + bx \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} + cy = 0$

$= \underbrace{a \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + (b-a) \cdot \frac{dy}{dt} + cy = 0}_{t\text{에 대한 상수 계수 가짐}}$

$y = y(t) = y(\ln x)$

Ex 6. $x^2y'' - xy' + y = \ln x$를 풀어라. $x = e^t$ 치환 $t = \ln x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$\Rightarrow x^2\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt} + y = t$

$= \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t$ (상수 계수 가지는 t에 대한 선·방)

$\Rightarrow$ 동차 e^{mx} 대입 $m^2 - 2m + 1 = 0$
$m = 1$

$\underset{y_1}{e^t}$, $\underset{y_2}{te^t}$ $y_c = c_1e^t + c_2te^t$

$\Rightarrow$ 비동차 $f(x) = t$

$y_p = At + B$

$y_p' = A$

$y_p'' = 0$

$\Rightarrow t$에 대한 선·방에 대입

$0 - 2A + At + B = t$

$A = 1, B = 2$

$y_p = t + 2$

$\therefore y = y_c + y_p = c_1e^t + c_2te^t + t + 2$ x로 치환

$= c_1x + c_2x\ln x + \ln x + 2$

4.8 그린함수(Green's function)

4.8.1 초깃값 문제

$y_c \Rightarrow c_1, c_2 \Rightarrow y_h = \square y_1 + \square y_2$

정리 4.9.2

- 2계 초깃값 문제 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$의 [redacted] $y = y_h + y_p$, 여기서 y_h; 동차식 $y'' + py' + qy = 0$, $\boxed{y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1}$의 해이고 y_p; 비동차식 $y'' + py' + qy = f(x)$, $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0$의 해이다.

정리4.8.1 $\rightarrow$ y_p

★그린함수(Green's function): $G(x,t) = \dfrac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{w(t)}$

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$u_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{-y_2 f}{W}(t)\,dt, \qquad u_2 = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W}(t)\,dt$$

동차식 $y'' + py' + qy = 0$ 의 해 $y_1(x), y_2(x)$

$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $\quad y(x_0) = y_0$

$y'(x_0) = y_1 \quad \Rightarrow y_h = \square y_1(x) + \square y_2(x)$

비동차식 $y'' + py' + qy = f(x)$ 특수해 매·변 사용

$$G(x,t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)}$$

$$y_p = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{-y_2(t)\cdot f(t)}{W(t)}dt + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{-y_1(x)y_2(t) + y_2(x)y_1(t)}{W(t)}\cdot f(t)\,dt$$

$= (*)$식의 그린함수, L에 대한 그린함수

$L(y) = f$, $L(y) = g$ $\qquad G(x,t)$

$$\therefore y_p = \int_{x_0}^{x} G(x,t)\cdot f(t)\,dt$$

Ex 1. 특수해

$y'' - y = f(x)$의 특수해를 구하여라. Green function

동차 $y''-y=0$ e^{mx} 대입

$m^2-1=0$ $m=\pm 1$ $\underset{y_1}{e^{x}}, \underset{y_2}{e^{-x}}$

$y_c = c_1e^{x}+c_2e^{-x}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1 = -2$$

$$G(x,t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)}$$

$$= \frac{e^{t}\cdot e^{-x} - e^{x}\cdot e^{-t}}{-2} = \frac{e^{(x-t)} - e^{-(x-t)}}{2} = \sinh(x-t)$$

$$\therefore y_p = \int_{x_0}^{x} \sinh(x-t)\cdot f(t)\,dt$$

$y_p(x)$ 특수해

Ex 2. 다음 비동차 미분방정식의 ~~일반해~~를 구하여라.

a) $y'' - y = \frac{1}{x}$ 동차 $y''-y=0$ $m^2-1=0$ $m=\pm 1$ e^{x} e^{-x} $y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \qquad G(x,t) = \frac{e^{t}e^{-x} - e^{x}e^{-t}}{-2} = \frac{e^{(x-t)} - e^{-(x-t)}}{2} = \sinh(x-t)$$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \sinh(x-t) \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

b) $y'' - y = e^{2x}$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \sinh(x-t) \cdot e^{2t}\, dt$$

정리 4.8.1

$= u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$

$y_p(x)=\int_{x_0}^{x}G(x,t)f(t)dt$ 는 초깃값 문제 $y''+py'+qy=f(x)$, $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$의 해이다.

$y_p(x_0)=\int_{x_0}^{x_0}\ \text{''}\ =0$

$y_p'(x)=\frac{d}{dx}(u_1y_1+u_2y_2)$

$=u_1'y_1+u_1y_1'+u_2'y_2+u_2y_2'$

$=y_1'u_1+y_2'u_2+\underbrace{y_1\cdot\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\frac{-y_2f(t)}{W(t)}dt+y_2\cdot\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\frac{y_1f(t)}{W(t)}dt}_{\text{상쇄}}$

$=y_1'\int_{x_0}^{x}\frac{-y_2f(t)}{W(t)}dt+y_2'\int_{x_0}^{x}\frac{y_1f(t)}{W(t)}dt$

$=\int_{x_0}^{x}\frac{-y_1'y_2f(t)}{W(t)}dt+\int_{x_0}^{x}\frac{y_2'y_1f(t)}{W(t)}dt=0$

$y_p'(x_0)=\int_{x_0}^{x_0}\ \text{''}\ +\int_{x_0}^{x_0}\ \text{''}\ =0$

Ex 3. 초깃값 문제를 풀어라. $y = y_h + y_p$

a) $y'' - y = \frac{1}{x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$

동차 $y'' - y = 0$ $m^2 - 1 = 0$ $m = \pm 1$ $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ $y(1) = c_1 e + c_2 e^{-1} = 0$ $c_1 = 0$ $y_h = 0$

$y_c' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$ $y'(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} = 0$ $c_2 = 0$

$\therefore y_p(x) = \int_1^x \sinh(x-t) \cdot \frac{1}{t} dt$

b) $y'' - y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

$\therefore y_p(x) = \int_0^x \sinh(x-t) e^{2t} dt$

$= \int_0^x \frac{e^{(x-t)} - e^{-(x-t)}}{2} \cdot e^{2t} dt$

$= \frac{e^x}{2} \underbrace{\int_0^x e^t dt}_{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{2} \underbrace{\int_0^x e^{3t} dt}_{\frac{e^{3x}-1}{3}}$

$= \frac{e^{2x} - e^x}{2} - \frac{e^{2x} - e^{-x}}{6}$

$y = \frac{e^{2x}}{3} - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{6}$

Ex 4. 초깃값 문제를 풀어라.

$$y'' + 4y = x, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

1) 미정계수법
2) 매·변 (그린함수)

동차 $y''+4y=0$ $\quad m^2+4=0$ $\quad m=\pm 2i$ $\quad \alpha=0,\ \beta=2$

$y_c = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$ $\quad y(0)=c_1=0$

$y_c' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$ $\quad y'(0)=2c_2=0$

$y_h = 0$

$$y_p(x) = \int_0^x G(x,t) f(t)\,dt$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$G(x,t) = \frac{\cos 2t \sin 2x - \cos 2x \sin 2t}{2} = \frac{\sin(2x-2t)}{2}$$

$$y_p(x) = \int_0^x \frac{\sin(2x-2t)}{2}\cdot t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[t\cdot\frac{\cos(2x-2t)}{2}\right]_0^x - \int \frac{\cos(2x-2t)}{2}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x - 0 - \left[\frac{\sin(2x-2t)}{4}\right]_0^x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right]$$

$$y_p(x) = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} = y$$

정리 4.8.2 초깃값 문제의 해

초깃값 문제 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$의 해는 $y=y_h+y_p$ 이다.

여기서 y_h는 $y''+py'+qy=0$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$의 해이고

$y_p(x)=\int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)dt$ 는 비동차식 $y''+py'+qy=f(x)$, $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$의 해이다.

정리 4.8.1

동차 y_h: $y_c=c_1y_1+c_2y_2$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$

$\Downarrow$

y_h

비동차 $y_p(x)=\int_{x_0}^{x}G(x,t)f(t)dt$: $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$

$y=y_h+y_p$

$\Rightarrow$ $y(x_0)=y_h(x_0)+y_p(x_0)=y_0$

$y'(x_0)=y_h'(x_0)+y_p'(x_0)=y_1$

$\therefore$ $y(x_0)=y_0$

$y'(x_0)=y_1$

if $y(x_0)=0$ $y'(x_0)=0$

$y_h=0$

$y=y_p$

$\Rightarrow$ y_0, y_1 중 적어도 하나는 0이 아님

$\Rightarrow$ $y=y_h+y_p$

Ex 5. 초깃값 문제

$y'' + 4y = \sin 2x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2$ 1) 미정계수 2) 매·변

동차 $y''+4y=0$ $m^2+4=0$ $m=\pm 2i$

$y_c = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ $y(0)=c_1=1$

$y_c' = -2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x$ $y'(0)=2c_2=-2$

$y_h = \cos 2x - \sin 2x$

비동차

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2$$

$$G(x,t) = \frac{\sin(2x-2t)}{2}$$

$$y_p = \int_0^x \frac{\sin(2x-2t)}{2}\cdot \sin 2t\,dt$$

$$\left(\sin A\cdot\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(2x-4t) - \cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^x \cos(2x-4t) - \cos 2x\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left[-\frac{1}{4}\sin(2x-4t)\right]_0^x - \left[t\cos 2x\right]_0^x\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\left(-\sin 2x - \sin 2x\right) - \left(x\cos 2x\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$$

$$\therefore y = y_h + y_p = \cos 2x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$$

$$= \cos 2x - \frac{7}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$$