UNIVERSITÄT LEIPZIG

Physik für Studierende der Lebenswissenshaften im WS 2024/25

Praktikum: Einführungsveranstaltung – Teil I

16.10.2024

Albert Smith-Penzel

albert.smith-penzel@medizin.uni-leipzig.de

Gliederung

1. **Messunsicherheiten**
   - Messwert, Maßeinheiten (+ Beispiel)
   - Absolute und relative Unsicherheiten (+ Beispiel)
   - Fortpflanzung der Messunsicherheiten (+ Beispiel)

2. **Mittelwert und Standardabweichung**
   - Formeln und Beispiele
   - Normalverteilung
   - Ein “Experiment“

3. **„Hausaufgabe“ Messunsicherheiten**

MESSUNSICHERHEITEN

DEFINITIONEN

- **Messgröße**: Die zu messende physikalische Größe (Spannung, Strom, Volum, Masse…)
- **Messwert**: Der gemessene Wert einschließlich der Einheit ($U = 220$ V; $I = 2$ A; $V = 10$ mL, $m = 21$ g…)
- **Messergebnis**: Das aus mehreren Messwerten berechnete Ergebnis ($R = U/I = 110\ \Omega$, ρ=2,1 g/mL)

MESSWERT

- **Ohne Einheit hat ein Wert keine Bedeutung!**
  - Auch wichtig bei Abschlusstestat
- Sinnvolle Einheiten!
  - Bsp: Länge eines Holzstabes: 0,5897 m – besser: 58,79 cm (wenn der Wert denn überhaupt so genau ist)
  - Bsp: Wellenlänge $5,55*10^{-7}$ m – nicht gängig, besser: 555 nm
  - Bsp: Entfernung von Leipzig bis Berlin: = $1,37*10^{12}$

VORSÄTZE FÜR MASSEINHEITE

- nano n 10^{-9}
- micro µ 10^{-6}
- milli m 10^{-3}
- centi c 10^{-2}
- deci d 10^{-1}
- kilo k 10^{3}
- mega M 10^{6}
- giga G 10^{9}

… ÜBUNG:

- 50 nm = m = mm
- 0,79 mm = µm
- 1 m^2 = dm^2 = cm^2
- 1 cm^3 = mm^3
- 1 L = dm^3
- 1 cm^3 = mL

GRÖSSE, DIE MAN WISSEN SOLLTE

- **Lichtgeschwindigkeit**:
  - $c = 3*10^8$ m/s
    $= 3*10^8$ $m \cdot s^{-1}$
    $= \nu*\lambda$ (Frequenz*Wellenlange)
- **Schallgeschwindigkeit**:
  - $v = 340$ m/s = 1440 km/h
    $= 340$ $m \cdot s^{-1}$ = 1440 $km \cdot h^{-1}$
- **Dichte von Wasser**:
  - ρ_{Wasser} = 1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3 = 1 kg/L
    = 1 $g \cdot cm^{-3}$ = 1000 $kg \cdot m^{-3}$ = 1 $kg \cdot L^{-1}$

MESSUNSICHERHEITEN

In der Wissenschaft gehört zu einem gemessenen Wert immer auch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung!

$\Updownarrow$

Jede Messung einer physikalischen Größe ist abhängig:

- von den **verwendeten Messgeräten**, dem **Messverfahren**, dem **Messobjekt**
- von **Umwelteinflüssen** (Temperatur, Feuchtigkeit, elektromagnetische Felder)
- vom **Beobachtenden** (Müdigkeit, Sehschärfe, Übung).

BEISPIEL DOPING

- erlaubte Hämoglobinwerte bei Sportlern_innen:
  16 g/dL (Frauen) 17,5 g/dL (Männer)
- Ergebnis einer Messung: 15,8 g/dL
- Wenn Messunsicherheit = 0,3 g/dL → **15,8 ± 0,3 g/dL** → über Grenzwert??
- Bei Messunsicherheit von 0,1 g/dl ist die Sportlerin auf der sicheren Seite

MESSUNSICHERHEITEN

- Messung nie beliebig genau

- **kein Fehlverhalten/falsche Messung** → nicht Fehler(!) sondern **Unsicherheit** oder **Abweichung**
  - Fehler: Versagen des Wissenschaftlers oder der Apparatur – Bsp. Ablesefehler - Begriff „Fehlerrechnung" ist nicht sinnvoll

ABSOLUTE UND RELATIVE MESSUNSICHERHEITEN

- Messwert: $x \pm u(x)$
- Absolut: Unsicherheit wird an ermittelte Größe angehängt $u(x)$
  - Beispiel: $U = 220\ V \pm 2\ V = (220 \pm 2)V$
- Relativ: Angabe der Unsicherheit als Anteil des Messwertes $u(x)/x$
  - Beispiel: $U = 220\ V \pm 1\%$

ABSOLUTE UND RELATIVE MESSUNSICHERHEITEN

- Signifikante Stellen beachten!!
  - Beispiel: $9{,}813467 \pm 0{,}02\mathbf{2}$

    $9{,}813514 \pm 0{,}0\mathbf{4}$

- Das Ergebnis wird nun mit gleicher Rundestelle wie die Messunsicherheit je nach Wert der nachfolgenden Stelle ab- bzw. aufgerundet
  - Beispiel: $9{,}813 \pm 0{,}02\mathbf{2}$

    $9{,}81 \pm 0{,}0\mathbf{4}$

QUELLEN VON UNSICHERHEITEN

- **Ableseunsicherheit** $u_{Ablese}(x)$:

  0,25 bis 0,5 des kleinsten Skalenabstandes (Faustregel)

  - Lineal mit Millimetereinteilung: 0,5 mm

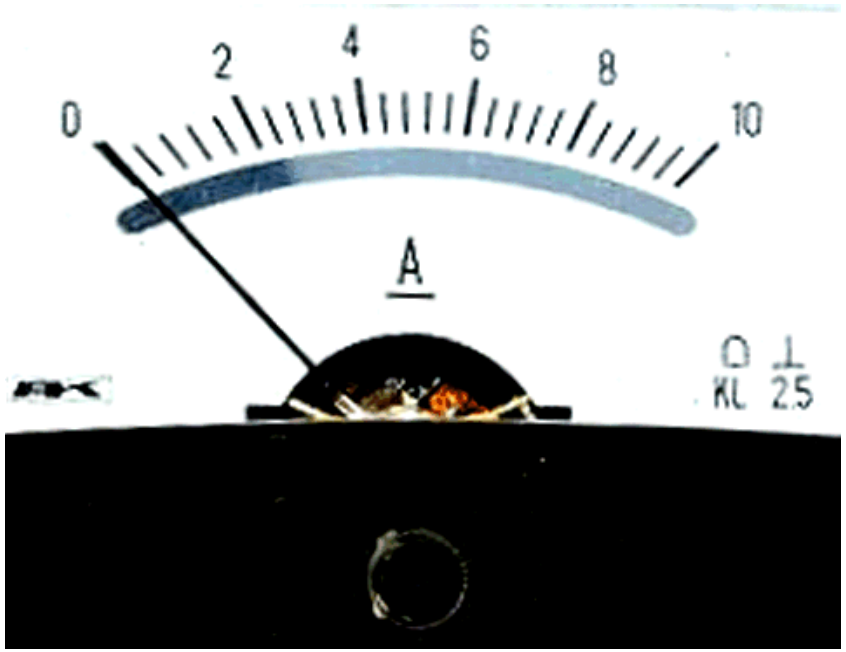
z.B. Relevant für Versuch #1 (Röntgenaufnahme/Dosimetrie)!

  - Stoppuhr: Reaktionszeit 0,3 bis 0,5 Sekunden

z.B. Relevant für Versuch #2 (Viskositätsbestimmung)!

QUELLEN VON UNSICHERHEITEN

- **Systematische Unsicherheit** $u_{Syst}(x)$:



Bsp.: **Güteklasse 2,5** bedeutet systematische Unsicherheit des **Skalenendwertes** von 2,5%

$u_{Syst}(x) = \pm\ 0{,}25$ A

QUELLEN VON UNSICHERHEITEN

- **Einstellunsicherheit** $u_{Einstell}(x)$: **Relevant für Versuch #5 (Brennweitbestimmung)!**
  z.B. Scharfeinstellung eines Bildes

➢ **alle Größen werden addiert!**

$$u(x) = u_{Einstell}(x) + u_{Syst}(x) + u_{Ablese}(x)$$

BEISPIEL: BERECHNUNG DICHTE EINER MÜNZE

$$m = 7{,}7725\ g\ \pm 0{,}0001\ g$$
$$d = 24\ mm \pm 0{,}5\ mm$$
$$h = 2{,}5\ mm \pm 0{,}5\ mm$$

gewogene Masse:

2 €: m = (8,5698 ± 0,0001) g

1 €: m = (7,4553 ± 0,0001) g

50 ct: m = (7,7725 ± 0,0001) g

BEISPIEL: BERECHNUNG DICHTE EINER MÜNZE

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h \qquad r = \frac{d}{2}$$

Münze = Zylinder

$$\rightarrow \qquad \rho = \frac{m}{\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h} = \frac{4}{\pi} m d^{-2} h^{-1}$$

$$\rightarrow m = 7{,}77\ g; \quad d = 24{,}0\ mm; \quad h = 2{,}5\ mm$$

$$\rho = \frac{7{,}77\ g}{\pi \cdot \frac{(2{,}4\ cm)^2}{4} \cdot 0{,}25\ cm} = \mathbf{6{,}87\ \frac{g}{cm^3}}$$

FORTPFLANZUNG VON MESSUNSICHERHEITEN

$$m \pm u(m) \qquad d \pm u(d) \qquad h \pm u(h)$$

$$\rho = \rho(m, d, h) = \frac{4}{\pi} m d^{-2} h^{-1}$$

Grundgleichung:

$$u(X) = \sum_i \left| \frac{\delta X}{\delta x_i} \right| u(x_i)$$

$$= \left| \frac{\partial X}{\partial x_1} \right| \cdot u(x_1) + \left| \frac{\partial X}{\partial x_2} \right| \cdot u(x_2) + \ldots + \left| \frac{\partial X}{\partial x_n} \right| \cdot u(x_n)$$

FORTPFLANZUNG VON MESSUNSICHERHEITEN

$\left|\frac{\partial X}{\partial x_1}\right|$... Partielle Ableitung

- Ableitung der Funktion nach der jeweiligen Variable

$$u(\rho) = \left|\frac{\partial \rho}{\partial m}\right| \cdot u(m) + \left|\frac{\partial \rho}{\partial d}\right| \cdot u(d) + \left|\frac{\partial \rho}{\partial h}\right| \cdot u(h)$$

$$\boldsymbol{u(\rho) = 1{,}66\,\frac{g}{cm^3}}$$

FORTPFLANZUNG VON MESSUNSICHERHEITEN

$$\boldsymbol{\rho = 6{,}87 \pm 1{,}66\,\frac{g}{cm^3}}$$

FORTPFLANZUNG VON MESSUNSICHERHEITEN: SONDERFÄLLE

- Summe oder Differenzen

$$X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$u(X) = a_1 u(x_1) + a_2 u(x_2) + \dots + a_n u(x_n)$$

- Produkt

$$X = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$$

$$\frac{u(X)}{X} = \left|a_1 \cdot \frac{u(x_1)}{x_1}\right| + \left|a_2 \cdot \frac{u(x_2)}{x_2}\right| + \dots + \left|a_n \cdot \frac{u(x_n)}{x_n}\right|$$

FORTPFLANZUNG VON MESSUNSICHERHEITEN MIT RELATIVE UNSICHERHEIT

$$\rho = \frac{4}{\pi} m d^{-2} h^{-1}$$

$$\frac{u(\rho)}{\rho} = \left|1 \cdot \frac{u(m)}{m}\right| + \left|-2 \cdot \frac{u(d)}{d}\right| + \left|-1 \cdot \frac{u(h)}{h}\right|$$

$$\frac{u(\rho)}{\rho} = \left|1 \cdot \frac{0{,}0001\,g}{7{,}7725\,g}\right| + \left|-2 \cdot \frac{0{,}5\,mm}{24\,mm}\right| + \left|-1 \cdot \frac{0{,}5\,mm}{2{,}5\,mm}\right|$$

$$\frac{u(\rho)}{\rho} = 0{,}24 = 24\%$$

$$\rho = 6{,}87 \pm 1{,}66\,\frac{g}{cm^3}$$

ÜBUNGSAUFGABEN – BITTE BIS NÄCHSTES MAL

Übungsaufgaben: Messunsicherheiten

Bei den Aufgaben von multiple-choice Typ ist jeweils eine der fünf angegebenen Antworten richtig.

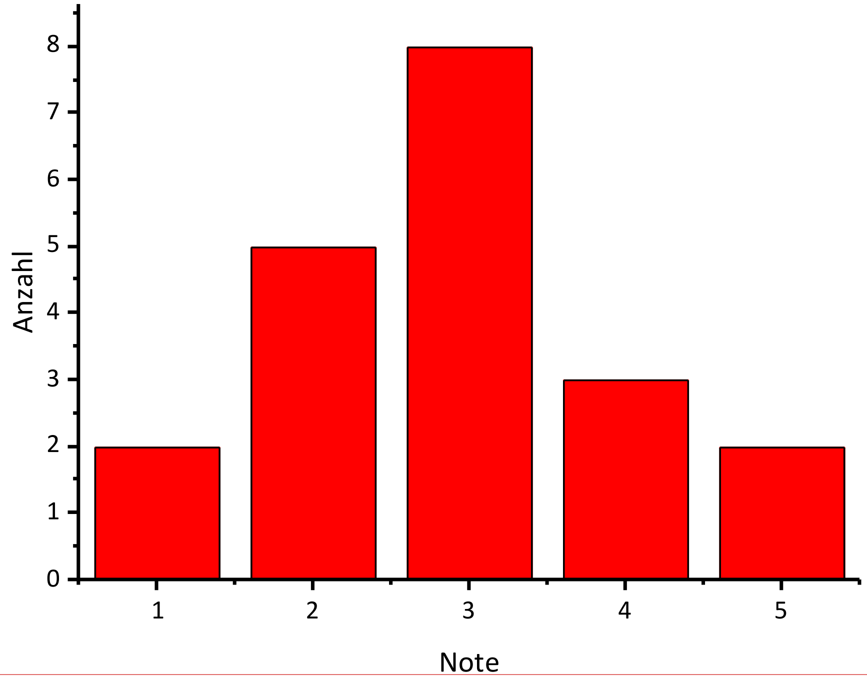
1. Mit einem Bandmaß (mit Millimetereinteilung) soll die Länge eines Brettes gemessen werden. Das Brett ist ungefähr 1 m lang. Wie groß ist etwa die relative Messunsicherheit?
   (A) 0,1
   (B) 1 ‰
   (C) 1 %
   (D) 10^{-3} %
   (E) 10^{-5}

2. Die Spannung einer Spannungsquelle wird gemessen. Ihr Wert wird mit (10 ± 0,1) V angegeben. Wie groß ist die relative Messunsicherheit?
   (A) 1 %
   (B) 10^{-2} %
   (C) 2 %
   (D) 1 ‰
   (E) 0,1 %

MITTELWERT UND STANDARDABWEICHUNG

MITTELWERT UND STANDARDABWEICHUNG

Note	1	2	3	4	5
Anzahl	2	5	8	3	2



- Verteilung der Werte bezüglich ihrer Eigenschaften
  → Histogramm

- Jede Verteilung ist durch **Mittelwert** und **Standardabweichung** charakterisiert

MITTELWERT UND STANDARDABWEICHUNG

Note	1	2	3	4	5
Anzahl	2	5	8	3	2

$$x_i = [1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 5\ \ 5]$$

$$\mu = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n = 2 + 5 + 8 + 3 + 2 = 20$$

$$\mu = \bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{20} = \mathbf{2,9}$$

MITTELWERT UND STANDARDABWEICHUNG

Standardabweichung (*S_d* oder *s* oder *σ*):

- auch als **Streuung** bezeichnet (**Durchschnittliche Entfernung von Einzelwerten vom Mittelwert**)
- mittlere quadratische Abweichung der Einzelmessung vom Mittelwert

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \boxed{(x_i - \bar{x})^2}}{n-1}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 \cdot (1-2{,}9)^2 + 5 \cdot (2-2{,}9)^2 + 8 \cdot (3-2{,}9)^2 + 3 \cdot (4-2{,}9)^2 + 2 \cdot (5-2{,}9)^2}{20-1}} = \sqrt{\frac{23.8}{20-1}} = \mathbf{1{,}12}$$

$\rightarrow \mathbf{2{,}9 \pm 1{,}1}$

STANDARDFEHLER (BSP. ZENTRALABITURPRÜFUNG PHYSIK)

Standardfehler ($\boldsymbol{m_{\bar{x}}}$):

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}12}{\sqrt{20}} = \mathbf{0,25}$$

- auch als **empirische Standardabweichung** bezeichnet
- Oft Standard Error of the Mean (SEM)
- Der **Standardfehler** gibt an, wie stark sich der **Mittelwert der Stichprobe** vom eigentlichen **Mittelwert in der Grundgesamtheit** unterscheidet

$$\boldsymbol{m_{\bar{x}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

- Großer Stichprobenumfang lässt Mittelwert der Gesamtverteilung mithilfe Stichprobe gut abschätzen

https://wjpr.net/abstract_file/3910

GAUS'SCHE (NORMAL)VERTEILUNG

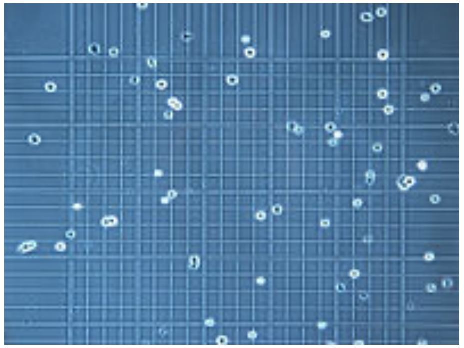
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Standardabweichung

Idealer Mittelwert

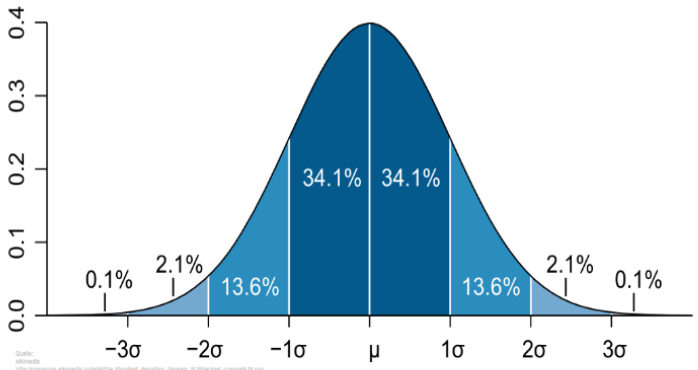
Relevant für Versuch #11 (Mikroskopie)!

➢ Aufgabe 3: Durchmesser von *zehn zufällig ausgewählten Partikeln* bestimmen; Mittelwert und Standardabweichung berechnen

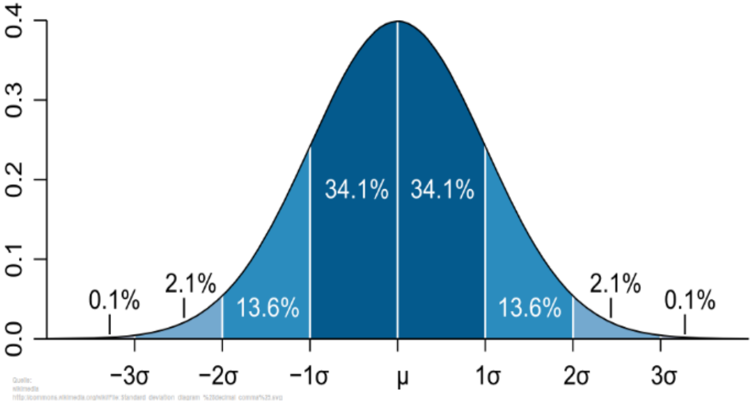


CHO-Zellen im Zählnetz der „Neubauer improved“ Zählkammer

- jede Messung zeigt zufällige Abweichung von einem unbekannten idealen Wert
- die Anzahl der Messwerte mit zunehmenden Abstand zum idealen Wert nimmt gemäß der Gauß-Verteilung ab



BEISPIEL



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Die durchschnittliche Körpergröße von Männern im Alter von 25 Jahren wird an 1000 Probanden ermittelt. Die Größenverteilung wird durch eine Normalverteilung beschrieben, bei der sich ein Mittelwert von 170 cm und eine Standardabweichung von 10 cm ergibt. Wie viele Personen sind größer als 180 cm?

50 % sind großer als 170 cm
34 % sind großer als 170 cm bzw. kleiner als 180 cm
16% sind größer als 180 cm
16% von 1000 Männern = 160 Männer

ÜBUNGSAUFGABEN – BITTE BIS 18.01.2024

Übungsaufgaben: Messunsicherheiten

Bei den Aufgaben von multiple-choice Typ ist jeweils eine der fünf angegebenen Antworten richtig.

1. Mit einem Bandmaß (mit Millimetereinteilung) soll die Länge eines Brettes gemessen werden. Das Brett ist ungefähr 1 m lang. Wie groß ist etwa die relative Messunsicherheit?
   (A) 0,1
   (B) 1 ‰
   (C) 1 %
   (D) 10^{-3} %
   (E) 10^{-5}

2. Die Spannung einer Spannungsquelle wird gemessen. Ihr Wert wird mit $(10 \pm 0{,}1)$ V angegeben. Wie groß ist die relative Messunsicherheit?
   (A) 1 %
   (B) 10^{-2} %
   (C) 2 %
   (D) 1 ‰
   (E) 0,1 %