Physik für Studierende der Lebenswissenshaften im WS 2024/25

Praktikum: Einführungsveranstaltung – Teil I

23.10.2024

Dr. Albert Smith-Penzel
albert.smith-penzel@medizin.uni-leipzig.de

1. Mit einem Bandmaß (mit Millimetereinteilung) soll die Länge eines Brettes gemessen werden.
   Das Brett ist ungefähr 1 m lang. Wie groß ist etwa die relative Messunsicherheit?
   (A) 0,1
   (B) 1 ‰
   (C) 1 %
   (D) 10^{-3} %
   (E) 10^{-5}

- Ableseunsicherheit von der gemessenen Länge: $u_{Ablese}(l)$
- 1 Skalenteil = 1 mm -> $u_{Ablese}(l)$ = 2 x 0,5 mm
- *Generell nimmt man bei Lineal, Bandmaß etc. mit Millimetereinteilung eine Ableseunsicherheit von 2 x 0,5 Skalenteil an.*

$$\text{rel. Messunsicherheit} = \frac{u_{Ablese}(l)}{\text{Messwert}\ (l)} = \frac{1\ \text{mm}}{1\ \text{m}} = \frac{1 \bullet 10^{-3}\ \cancel{\text{m}}}{1\ \cancel{\text{m}}} = 10^{-3} = 1\ ‰$$

2. Die Spannung einer Spannungsquelle wird gemessen. Ihr Wert wird mit (10 ± 0,1) V angegeben. Wie groß ist die relative Messunsicherheit?

→ (A) 1 %
(B) 10^{-2} %
(C) 2 %
(D) 1 ‰
(E) 0,1 %

$$\text{rel. Messunsicherheit} = \frac{u(U)}{\text{Messwert } (U)} = \frac{0{,}1\ \cancel{\text{V}}}{10\ \cancel{\text{V}}} = 10^{-2} = 1\ \%$$

3. An einem Widerstand wird eine Spannung von 6 V mit einer relativen Unsicherheit von 1 % gemessen. Wie groß ist die absolute Messunsicherheit?
   - (A) 0,006 V
   - (B) 0,6 mV
   - (C) 0,06 %
   - (D) 60 mV
   - (E) keine der Angaben ist richtig

absolute Unsicherheit u(U)

$$rel.\,Unsicherheit = \frac{u\,(U)}{U}$$

$$1\% = \frac{u\,(U)}{6\,V}$$

$\boxed{\textbf{absolute Unsicherheit u(U) = rel. Unsicherheit * Messwert}}$

$$u\,(U) = 1\% \cdot 6\,V = 0{,}01 \cdot 6\,V = 0{,}06\,V = 60\,mV$$

$$\mathbf{U = 6,00 \pm 0,06\ V}$$

4. Ein Spannungsmesser hat die Güteklasse 2 (d.h. die relative Messunsicherheit beträgt 2 % bei Vollausschlag).
   Wie groß ist die relative Messunsicherheit der Anzeige, wenn im 10 V – Messbereich 2 V abgelesen werden?

Güteklasse 2 = 2% → systematische Unsicherheit *(Güteklasse 1,5 wäre 1,5 % usw.)*
Wichtig hierbei der Messbereich (bzw. Skalenendwert)!

1) $\text{system. Unsicherheit } u_{sys}\ (\text{U}) = 2\ \%\ \text{im } 10\ \text{V Messbereich} = 0{,}02 \cdot 10\text{V} = 0{,}2\ \text{V}$

$$\mathbf{U = 2,0\ V \pm 0,2\ V}$$

2) $\text{rel. Unsicherheit} = \dfrac{u\ (\text{U})}{\text{Messwert U}} = \dfrac{0{,}2\ \text{V}}{2\ \text{V}} = 0{,}1 = 10\%$

5. An einer elektronischen Waage mit vierstelliger digitaler Anzeige wird bei einer Wägung eine Masse von m = 34,17 g abgelesen. Wie groß ist etwa die relative Unsicherheit der Messung, wenn infolge Digitalisierung die letzte Ziffer um ± 1 Einheit unsicher ist?

34,17 g

± 1 *Ablesen von digitaler Anzeige: ± letzte Stelle*

$$\mathbf{m = 34,17\ g \pm 0,01\ g}$$

$$\text{rel. Unsicherheit} = \frac{u_{\text{Ablese}}\,(\mathrm{U})}{\text{Mess wert U}} = \frac{0{,}01\ \mathrm{g}}{34{,}17\ \mathrm{g}} = 3 \cdot 10^{-4} = 0{,}03\%$$

6. Die Kantenlänge eines Würfels wird mit a = (1,00 ± 0,001) m gemessen. Auf welchen Wert ist demnach sein Volumen ungefähr bekannt?

Grundgleichung: $$u(X) = \left|\frac{\partial X}{\partial x_1}\right| \cdot u(x_1) + \left|\frac{\partial X}{\partial x_2}\right| \cdot u(x_2) + \ldots + \left|\frac{\partial X}{\partial x_n}\right| \cdot u(x_n)$$

$$1)\ Volumen\ berechnen\colon V = a \cdot a \cdot a = a^3 = 1\,m \cdot 1\,m \cdot 1\,m = 1\,m^3$$

$$\downarrow$$

$$f' = 3 \cdot a^2$$

$$2)\ Gleichung\ aufstellen\colon u(V) = \left|\frac{\partial V}{\partial a}\right| \cdot u(a)$$

$$3)\ Partiell\ ableiten\ und\ einsetzen\colon u(V) = |3 \cdot a^2| \cdot u(a) = 3 \cdot 1\,m^2 \cdot 0{,}001\,m = 0{,}003\,m^3$$

$$\mathbf{V = 1,000\ m^3 \pm 0,003\ m^3 = 1000\ L \pm 3\ L}$$

„langer Weg"

7. Unter einem Mikroskop werden rote Blutkörperchen als kreisförmige Scheibchen gesehen. Als Ergebnis einer Messreihe folgt für ihren Durchmesser im Mittel d = 8 µm mit einer Messunsicherheit u(d) = ± 0,1 µm.
   a) Wie groß ist die relative Messunsicherheit des Durchmesser?
   b) Wie groß ist die relative Messunsicherheit bei der Angabe der Querschnittschnittfläche?

$$geg.: \; d = 8\;\mu m \; \pm 0{,}1\;\mu m$$

$$\boldsymbol{a})\; rel.Unsich. = \frac{0{,}1\;\mu m}{8\;\mu m} = 1{,}25\;\%$$

$$\boldsymbol{b})\quad geg.: \; d = 8\;\mu m \; \pm 0{,}1\;\mu m \quad und \quad \boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}\ \text{(Kreisfläche)}$$

$$1)\; Fläche\ berechnen:\; A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{8\;\mu m}{2}\right)^2 = 50{,}3\;\mu m^2$$

$$2)\; Gleichung\ aufstellen:\; u(A) = \left|\frac{\partial A}{\partial d}\right| \cdot u(\mathrm{d}) \qquad A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot d^2 \rightarrow \boldsymbol{f'} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} * \boldsymbol{d}$$

$$3)\; Partiell\ ableiten\ und\ einsetzen:\; u(A) = \left|\frac{\pi}{2} d\right| \cdot u(d) = 12{,}6\;\mu m \cdot 0{,}1\;\mu m = 1{,}3\;\mu m^2$$

$$\mathrm{A} = 50{,}3\;\mu m^2 \pm 1{,}3\;\mu m^2 \quad \rightarrow \boldsymbol{rel.Unsich.} = \frac{\boldsymbol{1{,}3\;\mu m^2}}{\boldsymbol{50{,}3\;\mu m^2}} = \boldsymbol{2{,}5}\;\%$$

„kurzer Weg“
Potenzprodukt

Bsp.:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$X = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \; \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

$$rel.Unsich. = \frac{u(X)}{X} = \left|\alpha_1 \overbrace{\frac{u(x_1)}{x_1}}^{\text{rel.Unsich.}}\right| + \left|\alpha_2 \overbrace{\frac{u(x_2)}{x_2}}^{\text{rel.Unsich.}}\right| + \ldots + \left|\alpha_n \overbrace{\frac{u(x_n)}{x_n}}^{\text{rel.Unsich.}}\right|$$

$$abs.Unsich.\ u(X) = \frac{u(X)}{X} \cdot X$$

„kurzer Weg“
Potenzprodukt

7. Unter einem Mikroskop werden rote Blutkörperchen als kreisförmige Scheibchen gesehen. Als Ergebnis einer Messreihe folgt für ihren Durchmesser im Mittel d = 8 µm mit einer Messunsicherheit u(d) = ± 0,1 µm.
a) Wie groß ist die relative Messunsicherheit des Durchmesser?
b) Wie groß ist die relative Messunsicherheit bei der Angabe der Querschnittschnittfläche?

$geg.: \; d = 8\ \mu m \; \pm 0{,}1\ \mu m$

$$\boldsymbol{a})\; rel.Unsich. = \frac{u(d)}{d} = \frac{0{,}1\ \mu m}{8\ \mu m} = 1{,}25\ \%$$

$$\boldsymbol{b})\;\; geg.: \; d = 8\ \mu m \; \pm 0{,}1\ \mu m \quad und \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r^2} = \boldsymbol{\pi} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}} \cdot \boldsymbol{d^2}$$

$$\textbf{\textit{Allgemeine Formel:}}\; rel.Unsich. = \frac{u(X)}{X} = \left|\alpha_1 \frac{u(x_1)}{x_1}\right| + \left|\alpha_2 \frac{u(x_2)}{x_2}\right| + \ldots + \left|\alpha_n \frac{u(x_n)}{x_n}\right|$$

$$\boldsymbol{Beispiel}:\; rel.Unsich. = \frac{u(A)}{A} = \left|2 \cdot \frac{u(d)}{d}\right| = 2\ \cdot 1{,}25\% = 2{,}5\ \%$$

„kurzer Weg“
Potenzprodukt

8. Bei der Ermittlung des Werts eines ohmschen Widerstands ergibt die Messung und Abschätzung der Unsicherheit für die elektrische Stromstärke 3 A ± 30 mA und für die Spannung 12 V ± 0,6 V Wie groß ist etwa die maximale relative Unsicherheit für den Wert des Widerstands?
(A) ± 0,2 %
(B) ± 1 %
(C) ± 4 %
(D) ± 5 %
(E) ± 6 %

$$geg.: \; I = 3\,A \pm 0{,}03\,A \qquad U = 12\,V \;\pm 0{,}6\,V$$

$$1)\; Widerstand\ berechnen\ (hier\ optional): R = \frac{U}{I} = U^{1} \cdot I^{-1} = \frac{12\,V}{3\,A} = 4\,\Omega$$

$$2)\; rel. Unsich. \frac{u(R)}{R} = \left|\alpha_1 \frac{u(U)}{U}\right| + \left|\alpha_2 \frac{u(I)}{I}\right| = \left|1\,\frac{0{,}6\,V}{12\,V}\right| + \left|-1\,\frac{0{,}03\,A}{3\,A}\right| = 5\,\% + 1\% = 6\,\%$$

$$3)\; abs. Unsich.\; u(R) = \frac{u(R)}{R} \cdot R = 6\,\% \cdot 4\,\Omega = 0{,}24\,\Omega$$

$$\boxed{\mathbf{R = 4{,}00\,\Omega \pm 0{,}24\,\Omega}}$$

„kurzer Weg“
Potenzprodukt

9. Ein Fahrzeug legt eine Stecke von s = 2 km in einer Zeit von 100 s zurück. Die Unsicherheit bei der Messung der Strecke sei 1 %, während die Unsicherheit bei der Zeitmessung mit 0,5 % angenommen wird. Welche Unsicherheit (in km/h) resultiert für die Geschwindigkeit?

$geg.: s = 2\ km\ \pm 1\%$ $\qquad t = 100s \pm 0{,}5\%$

rel.Unsich. $\qquad$ rel.Unsich.

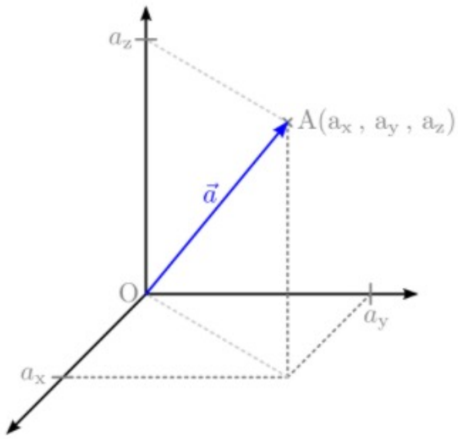
$$1)\ Geschwindigkeit\ berechnen: v = \frac{s}{t} = s^{1} \cdot t^{-1} = \frac{2000\ m}{100\ s} = 20\ \frac{m}{s} \xrightarrow{\cdot 3{,}6} 72\ \frac{km}{h}$$

$$2)\ rel. Unsich. \frac{u(v)}{v} = \left|\alpha_1 \frac{u(s)}{s}\right| + \left|\alpha_2 \frac{u(t)}{t}\right| = |1 \cdot 1\%| + |-1 \cdot 0{,}5\%| = 1\ \% + 0{,}5\ \% = 1{,}5\ \%$$

$$3)\ abs. Unsich.\ u(v) = \frac{u(v)}{v} \cdot v = 1{,}5\ \% \cdot 72\ \frac{km}{h} = 1{,}08\ \frac{km}{h}$$

$$\boxed{\mathbf{v = 72{,}00\ \frac{km}{h} \pm 1{,}08\ \frac{km}{h}}}$$

10. Für einen dünnen Stab sind mit $l_x = (6 \pm 0{,}2)$ cm, $l_y = (48 \pm 3)$ mm und $l_z = 3{,}5$ cm ± 1 mm nur die Projektionen auf die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bekannt. Die wahre Länge l dieses Stabs berechnet sich nach der Formel $l = (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{½}$. Welche Unsicherheit hat die Größe l?



$$geg.: \quad l_x = (6{,}0 \pm 0{,}2)\ cm$$
$$l_y = (4{,}8 \pm 0{,}3)\ cm$$
$$l_z = (3{,}5 \pm 0{,}1)\ cm$$

1) $Länge\ berechnen: l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(6\ cm)^2 + (4{,}8\ cm)^2 + (3{,}5\ cm)^2} = 8{,}44\ cm$

2) $Grundgleichung\ aufstellen\ u(l) = \left|\frac{\partial l}{\partial l_x}\right| \cdot u(l_x) + \left|\frac{\partial l}{\partial l_y}\right| \cdot u(l_y) + \left|\frac{\partial l}{\partial l_z}\right| \cdot u(l_z)$

3) $Partielle\ Ableitungen\ bilden$: Wir brauchen hier die Kettenregel (Wdh. s. mathebibel. de/kettenregel)

10. Für einen dünnen Stab sind mit $l_x = (6 \pm 0{,}2)$ cm, $l_y = (48 \pm 3)$ mm und $l_z = 3{,}5$ cm $\pm$ 1 mm nur die Projektionen auf die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bekannt. Die wahre Länge l dieses Stabs berechnet sich nach der Formel $l = (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{1/2}$. Welche Unsicherheit hat die Größe l?

3) Kettenregel = äußere · innere Funktion

$$l = \left(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Ableitung\ \text{äußere}\ Funktion\text{: } l = (x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(au\ss en) = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Ableitung\ innere\ Funktion\ f\text{ür } l_x\text{: } l = l_x^2 + \underbrace{l_y^2 + l_z^2}_{\text{Konstanten}} \rightarrow f'(innen) = 2\ l_x$$

$$Innere\ \cdot \text{äußere}\ Ableitung = \frac{1}{\cancel{2}}(\dots)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}\ l_x = \frac{l_x}{(\dots)^{\frac{1}{2}}} = \frac{l_x}{\sqrt{(\dots)}} = \frac{l_x}{\sqrt{\left(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2\right)}} = \frac{l_x}{l} \quad \Bigg\} \ Part.\ Ableitung\ f\text{ür } l_x$$

$$\rightarrow \boldsymbol{l_y\ und\ \ l_z\ analog}$$

10. Für einen dünnen Stab sind mit $l_x = (6 \pm 0{,}2)$ cm, $l_y = (48 \pm 3)$ mm und $l_z = 3{,}5$ cm $\pm$ 1 mm nur die Projektionen auf die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bekannt. Die wahre Länge l dieses Stabs berechnet sich nach der Formel $l = (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{½}$. Welche Unsicherheit hat die Größe l?

$$l = \left(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$4)\ Gleichung\ zusammen\ stellen:\ u(l) = \frac{l_x}{l} \cdot u(l_x) + \frac{l_y}{l} \cdot u(l_y) + \frac{l_z}{l} \cdot u(l_z)$$

$$\left.\begin{aligned} l_x &= (6\ \pm 0{,}2)\ cm \\ l_y &= (4{,}8\ \pm 0{,}3)\ cm \\ l_z &= (3{,}5\ \pm 0{,}1)\ cm \\ \\ l &= 8{,}44\ cm \end{aligned}\right\} einsetzen \rightarrow u(l) = \frac{6\ cm}{8{,}44\ cm} \cdot 0{,}2\ cm + \frac{4{,}8\ cm}{8{,}44\ cm} \cdot 0{,}3\ cm + \frac{3{,}5\ cm}{8{,}44\ cm} \cdot 0{,}1\ cm\ \approx \mathbf{0{,}35\ cm}$$

$$\boxed{\boldsymbol{l = 8{,}44\ cm \pm 0{,}35\ cm}}$$

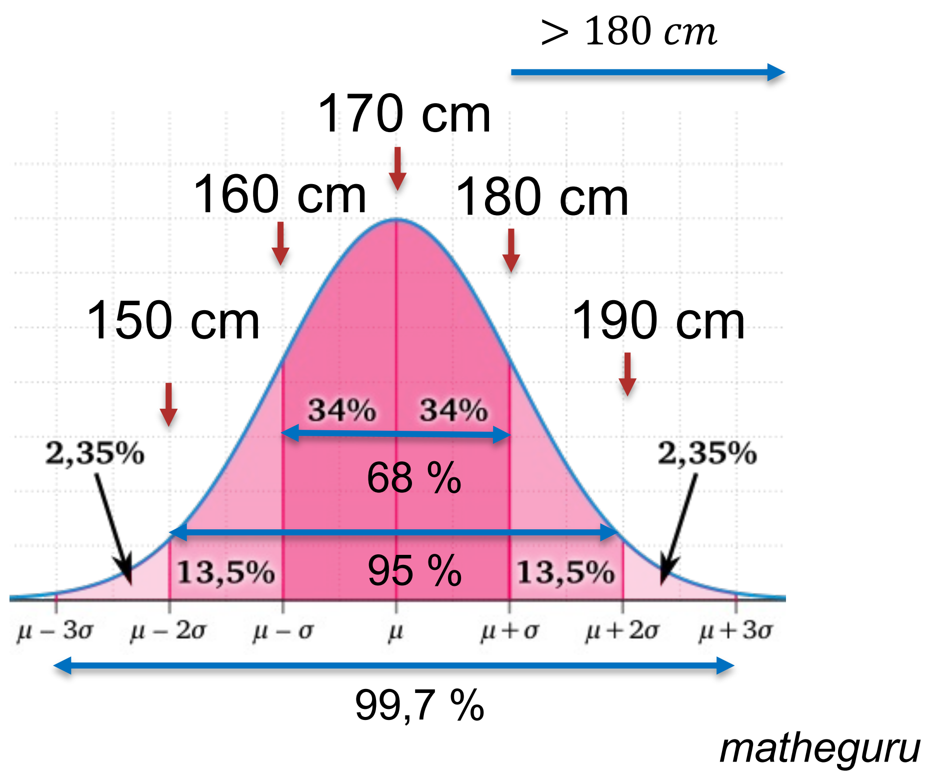
11. Die durchschnittliche Körpergröße von Männern im Alter von 25 Jahren wird an 1000 Probanden ermittelt. Die Größenverteilung wird durch eine Gauß'sche Normalverteilung beschrieben, bei der sich ein Mittelwert von 170 cm und eine Standardabweichung von 10 cm ergibt. Wie viele Personen sind größer als 180 cm?

$geg.:\quad \mu\ (Mittelwert) = 170\ cm$

$\sigma\ (Standardabweichung) = 10\ cm$

$Anzahl\ Datenpunkte = 1000$

$ges.: Personenzahl > 180\ cm$



$Personenzahl > 180\ cm = 1000\ \cdot (16\ \%) = \boldsymbol{160\ Personen}$

LINEARE REGRESSION

(Ausgleichung von Messwerten durch eine lineare Funktion)

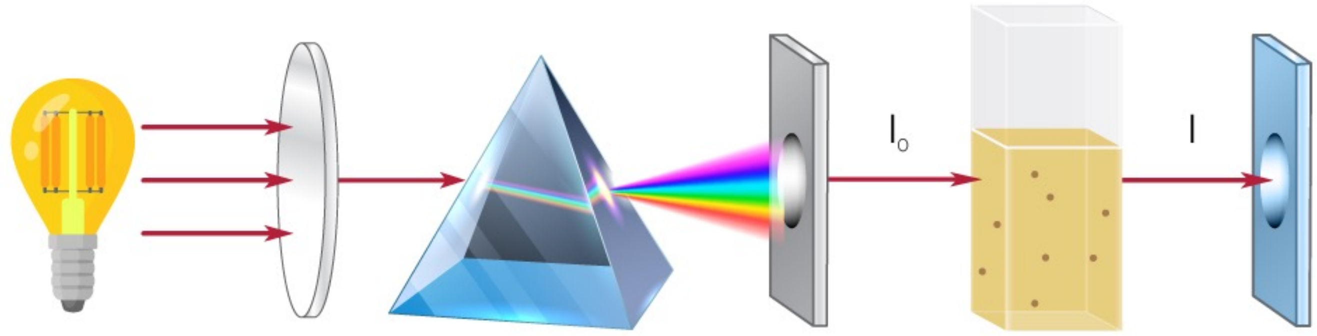
- Analytisches Verfahren zur Berechnung einer **Geraden**, die **bestmöglich** durch eine Punkteschar in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem verläuft
- Kriterium: **Minimum der Abweichungsquadrate**

$$y = a + b \cdot x$$

LINEARE REGRESSION

Bsp. Absorptionsspektroskopie

Monochromatisches UV/Vis Spektrophotometer



Lichtquelle

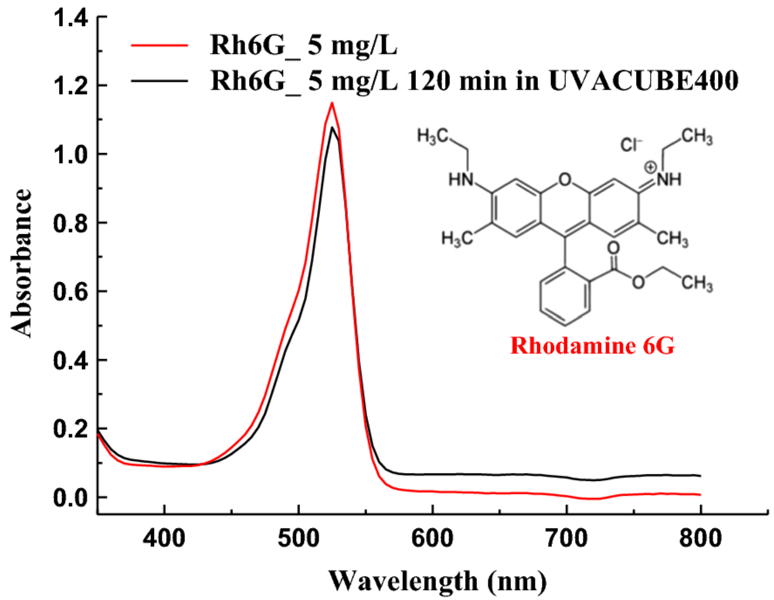
Beugungsgitter/
Prisma

Lösung

Linse

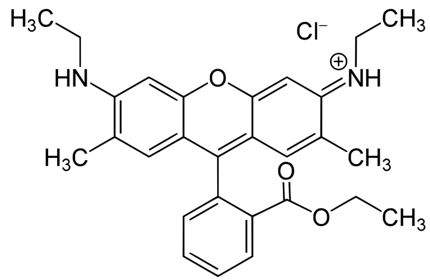
Wellenlängenauswahl

Detektor

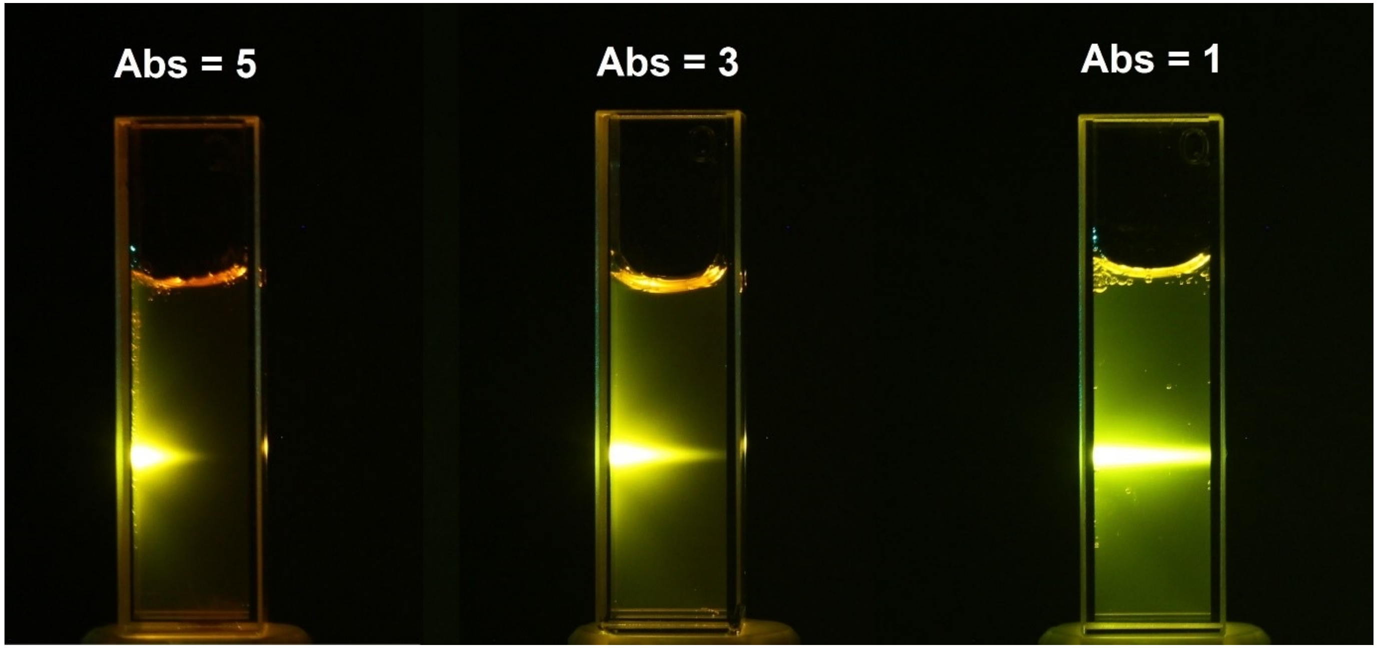


https://www.implen.de/uv-vis-spectrophotometer/
https://link.springer.com/article/10.1007/s10570-019-02817-y/figures/5

LINEARE REGRESSION



Bsp. Absorptionsspektroskopie



Abschwächung eines 510 nm lasers durch drei Lösungen von **Rhodamin 6G** Absorbanzwerten. Der gelbe Schein ist Fluoreszenzemission bei ca. 560 nm

$$E = ln\frac{I_0}{I}$$

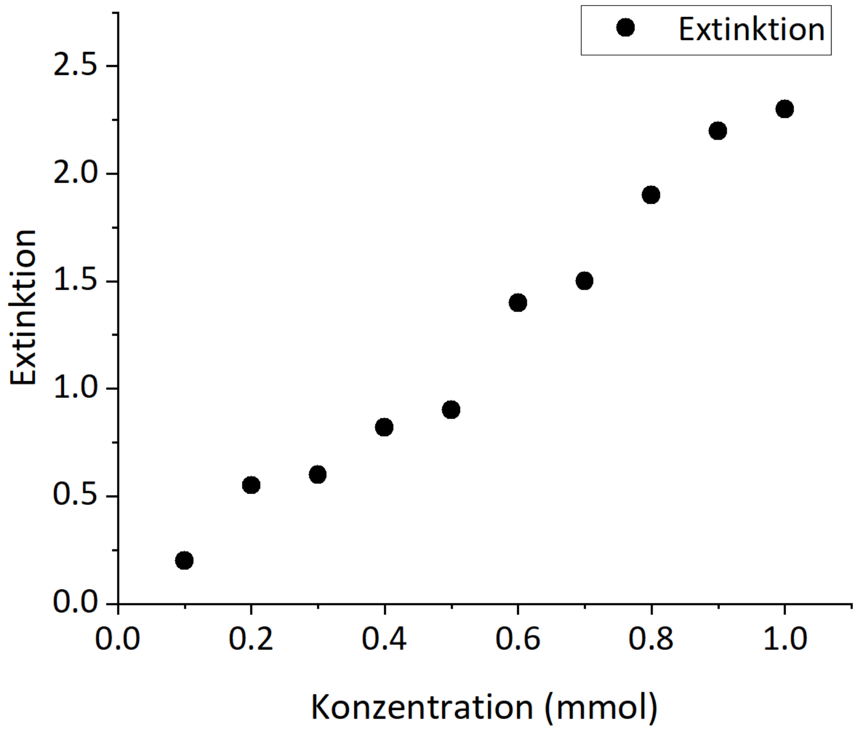
$$E = \varepsilon \cdot c \cdot l$$

Einsatz in FL-Mikroskopie, Durchflusszytometrie, ELISA

https://www.edinst.com/wp-content/uploads/2019/08/BLL-2.jpg

LINEARE REGRESSION

Konzentrationsreihe



Konzentration (mmol)	Extinktion
0.1	0.20
0.2	0.55
0.3	0.6
0.4	0.82
0.5	0.9
0.6	1.4
0.7	1.5
0.8	1.9
0.9	2.2
1.0	2.3

LINEARE REGRESSION

(Ausgleichung von Messwerten durch eine lineare Funktion)

(Siehe Excel)

$$y = a + b \cdot x$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \bar{x}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

LINEARE REGRESSION UNSICHERHEIT

$$y = a + b \cdot x$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \bar{x}$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

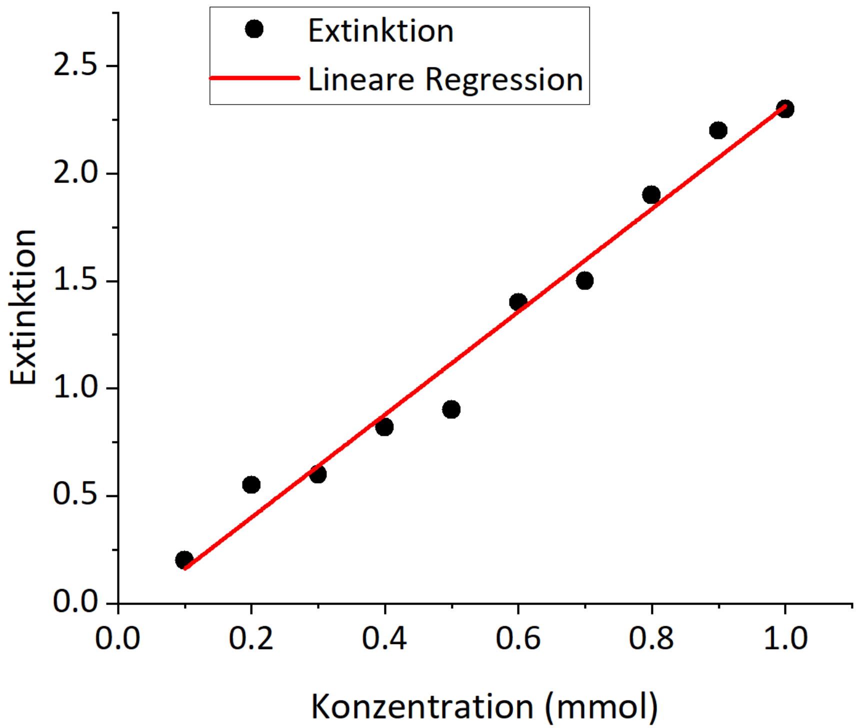
$$\sum v_i^2 = \sum y_i^2 - \bar{b} \sum y_i x_i - \bar{a} \sum y_i$$

$$m_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2 \sum x_i^2}{(n-2)\left(n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i\right)}}$$

$$m_{\bar{b}} = \sqrt{\frac{n \sum v_i^2}{(n-2)\left(n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i\right)}}$$

LINEARE REGRESSION

Konzentrationsreihe

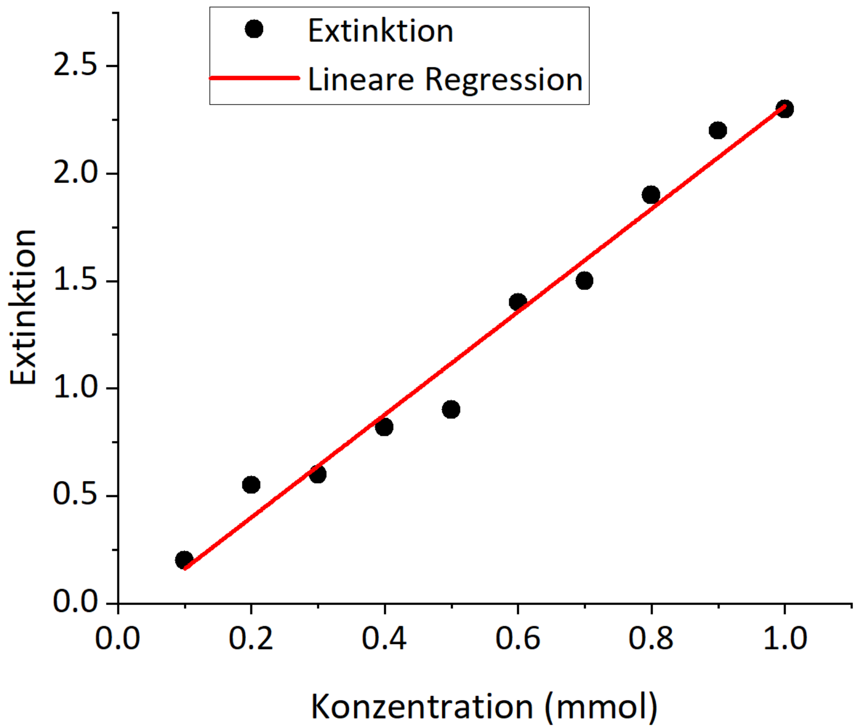


$$y = a + b \cdot x$$

Bedeutung	Wert
Y-Achsenabschnitt	−0.07933 ± 0.07922
Steigung	2.39333 ± 0.12767
Abweichungsquadratsumme	0.10757
Pearson's R	0.98881
R-Quadrat (COD)	0.97774
Adj. R-Quadrat	0.97496

LINEARE REGRESSION

Konzentrationsreihe



$$y = a + b \cdot x$$

$$E = -0.08 + 2.39 \cdot c$$

Lambert-Beer’sches Gesetz

$$E = \varepsilon \cdot c \cdot l$$