

Métodos Iterativos para Equações Escalares

Prof. Americo Cunha


Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ


americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr



$$f(x) = 0$$

Como obter uma solução para essa equação se não sabemos resolvê-la analiticamente?



$$f(x) = 0$$

Como obter uma solução para essa equação se não sabemos resolvê-la analiticamente?

**Desista de obter um valor exato, construa uma
aproximação numérica!**
(com auxílio de um método iterativo)



A estrutura de um método iterativo

1. (Inicialização) Defina:

- uma *regra de aproximação* para x^*
- um *chute inicial* x_0

2. (Iteração) Construa uma *seqüência de aproximações* para x^* :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Num método iterativo “*bem projetado*”, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

i.e., a *seqüência de aproximações converge* para a raiz x^* .



Algoritmo genérico para um método iterativo

Input: f , x_0 , tol , $maxiter$

```
1:  $iter = 0$ 
2:  $Error = \infty$ 
3: while termination criterion is not met ( $Error$ ,  $tol$ ,  $maxiter$ ) do
4:    $iter = iter + 1$ 
5:   Construct  $x_n$  based on  $x_{n-1}, \dots, x_0$ 
6:   Estimate the  $Error$  based on  $x_n$  and  $x_{n-1}$ 
7: end while
```

Output: x_n , $iter$



Experimento computacional: $e^{-x} - x = 0$

MainIterativeMethod.m

```
1  clc; clear;
2
3  g = @(x) exp(-x)*(x + 1)/(exp(-x) + 1);
4  x0 = 1.0; tol = 1.0e-9; maxiter = 100;
5  iter = 0; Error = Inf;
6
7  while Error > tol && iter < maxiter
8      iter = iter + 1;
9      xnew = g(x0);
10     Error = abs(xnew-x0);
11     x0 = xnew;
12     printf([' iter = %3d ',...
13            ' root = %.16f ',...
14            'Error = %.16f \n'],...
15            iter,xnew,Error);
16 end
```



Características desejáveis

- *Eficiência*: necessita de um pequeno número de avaliações computacionais da função f ;
- *Robustez*: raramente (ou nunca) falha. Se falhar, informa ao usuário (você);
- Requer uma *quantidade mínima de informações* sobre f (e.g. continuidade, derivadas etc);
- Requer que f satisfaça *propriedades mínimas de suavidade*;
- Facilmente *generalizável* para equações com várias variáveis.



Considerações práticas

- Em *teoria*, um método iterativo “bem projetado” encontra o *valor exato* de x^* , pois constrói uma sequência convergente, i.e., $x_n \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$;
- Na *prática*, um método iterativo “bem projetado” encontra uma *aproximação* para x^* , pois um computador não consegue iterar infinitas vezes, i.e., $x_n \approx x^*$ para $n \gg 1$;
- Como é necessário *interromper o processo iterativo* após um número finito de etapas, um *critério de parada* se faz necessário;
- Diversos critérios de parada podem ser utilizados para verificar a *(quase) convergência* de um método iterativo.



Alguns critérios de parada

O processo iterativo é *interrompido* após n iterações, se:

- *CP1 (máximo de iterações):*

$$n > \text{maxiter}$$

- *CP3 ("erro" relativo):*

$$|x_n - x_{n-1}| < \text{tol} |x_n|$$

- *CP2 ("erro" absoluto):*

$$|x_n - x_{n-1}| < \text{tol}$$

- *CP4 (teste do resíduo):*

$$|f(x_n)| < \text{tol}$$

Parâmetros:

- x_n e x_{n-1} são duas aproximações sucessivas para x^* ;
- tol e maxiter são parâmetros definidos pelo usuário (você).



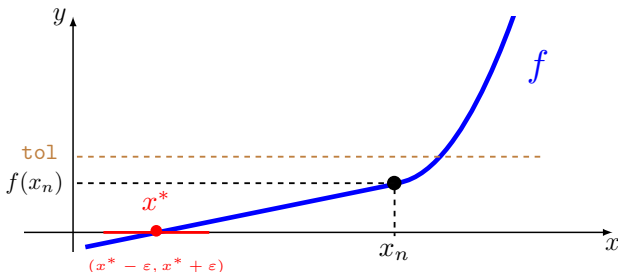
Observações sobre os critérios de parada

- Em geral (mas nem sempre) **(CP3)** é mais robusto que **(CP2)**;
- Os critérios **(CP2)** e **(CP3)** podem ser combinados:

$$|x_n - x_{n-1}| < \text{tol} (1 + |x_n|)$$

- O critério **(CP4)** não tem precisão garantida, pois

$$|f(x_n)| < \text{tol} \not\Rightarrow |x^* - x_n| < \varepsilon$$



* Figura por Marcos Vinícius Issa.



Como citar esse material?

A. Cunha Jr, *Métodos Iterativos para Equações Escalares*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2020.



 @AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

