

Como Resolver Sistemas Lineares?

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



 @AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



Possíveis abordagens para sistemas lineares

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Métodos Diretos: uma solução do sistema linear é obtida após um número finito de etapas, onde cada passo envolve operações com os elementos de A e \mathbf{b} , i.e.,

$$\mathbf{x} = T(A, \mathbf{b})$$

Métodos Iterativos: uma solução do sistema linear é obtida após um número infinito de etapas, como o limite de uma sequência de aproximações que envolve operações com os elementos de A e \mathbf{b} , i.e.,

$$\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n, \quad \text{onde} \quad \mathbf{x}_n = T_n(A, \mathbf{b})$$



Métodos diretos

- Em *teoria* calculam uma *solução exata*;
- Na *prática* calculam uma *solução aproximada* devido aos erros da aritmética de ponto flutuante;
- Em geral, são *mais precisos* que os métodos iterativos.

Exemplos de métodos diretos:

- Eliminação gaussiana
- Fatoração LU
- Fatoração Cholesky
- Fatoração QR
- Fatoração SVD
- Regra de Cramer
- Gradiente Conjugado
- etc



Métodos iterativos

- Em *teoria* calculam uma *solução exata* no limite;
- Na *prática* a iteração é interrompida após um número finito de etapas, de modo que se obtém uma *solução aproximada*;
- A solução aproximada está sujeita a *duas fontes de erro*:
 - ponto flutuante;
 - parada do processo iterativo;
- Em geral, são *mais rápidos* que os métodos diretos.

Exemplos de métodos iterativos:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Siedel
- Sobre-Relaxação Sucessiva
- Gradiente Conjugado
- Gradiente Bi-conjugado
- GMRES
- etc

ATENÇÃO: métodos iterativos só devem ser utilizados quando métodos diretos não forem viáveis!



**Podemos usar qualquer método numérico
para resolver um sistema linear?**



**Podemos usar qualquer método numérico
para resolver um sistema linear?**

Veremos a seguir que não!



A regra de Cramer

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{b} \\ | \end{bmatrix}$$

Os *componentes do vetor solução* são dados por

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad \cdots, \quad x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} | & & | & | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | & | & | & & | \end{bmatrix} \quad j = 1, \cdots, n$$

Aplicável quando o sistema for não singular, i.e. $\det A \neq 0$.



Exemplo de aplicação da regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \color{red}{5} & 3 & -2 \\ \color{red}{7} & 5 & 6 \\ \color{red}{8} & 4 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \\ = \frac{+60}{-4} \\ = -15$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{5} & -2 \\ 3 & \color{red}{7} & 6 \\ 2 & \color{red}{8} & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \\ = \frac{-32}{-4} \\ = 8$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & \color{red}{5} \\ 3 & 5 & \color{red}{7} \\ 2 & 4 & \color{red}{8} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \\ = \frac{-8}{-4} \\ = 2$$



Algoritmo da regra de Cramer

Input: A , b

```
1: Compute the length of  $b$ 
2: Allocate memory for  $x$ 
3: Compute the matrix determinant  $\det A$ 
4: if  $\det A = 0$  then
5:   return
6: end if
7: for  $j=1:n$  do
8:   Construct the modified matrix  $A_j$ 
9:   Compute the solution  $j$ -th component  $x_j = \det A_j / \det A$ 
10: end for
11: return
```

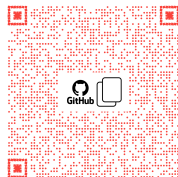
Output: x



Implementação em GNU Octave

cramer.m

```
1 function x = cramer(A,b)
2     n     = length(b);
3     x     = zeros(n,1);
4     detA = myDet(A);
5     if detA == 0.0
6         error('matriz singular')
7     end
8     for j = 1:n
9         Aj      = A;
10        Aj(:,j) = b;
11        x(j)     = myDet(Aj)/detA;
12    end
13 end
```



Implementação em GNU Octave

MyDet.m

```
1 function detA = myDet(A)
2     if isscalar(A)
3         detA = A;
4         return
5     end
6     detA = 0.0;
7     toprow = A(1,:);
8     A(1,:) = [];
9     for i = 1:size(A,2)
10         Ai = A;
11         Ai(:,i) = [];
12         detA = detA + (-1)^(i+1)*toprow
            (i)*myDet(Ai);
13     end
14 end
```



Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



```
>> n = 5; A = eye(n,n); b = ones(n,1);  
>> tic; x = cramer(A,b); toc  
>> disp(x)
```



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(\mathbf{n} \times \mathbf{n})) + n$$



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) + 2n - 1$$



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(\mathbf{n} \times \mathbf{n})) + n$$

$$\text{flops}(\det(\mathbf{n} \times \mathbf{n})) = n \times \text{flops}(\det(\mathbf{n-1} \times \mathbf{n-1})) + 2n - 1$$

$$\text{flops}(\det(\mathbf{n} \times \mathbf{n})) \sim n \times \text{flops}(\det(\mathbf{n-1} \times \mathbf{n-1}))$$



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned}\text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) \\ &\sim n \times (n-1) \times \text{flops}(\det(n-2 \times n-2))\end{aligned}$$



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) \\ &\sim n \times (n-1) \times \text{flops}(\det(n-2 \times n-2)) \\ &\vdots \end{aligned}$$



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) \\ &\sim n \times (n-1) \times \text{flops}(\det(n-2 \times n-2)) \\ &\quad \vdots \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \end{aligned}$$



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) \\ &\sim n \times (n-1) \times \text{flops}(\det(n-2 \times n-2)) \\ &\quad \vdots \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \\ &\sim n! \end{aligned}$$



Qual o custo computacional da regra de Cramer?

Uma medida de *custo computacional* da execução de um algoritmo é dada pelo número de *operações de ponto flutuante (flops)*.

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) = (n + 1) \times \text{flops}(\det(n \times n)) + n$$

$$\text{flops}(\det(n \times n)) = n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) + 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{flops}(\det(n \times n)) &\sim n \times \text{flops}(\det(n-1 \times n-1)) \\ &\sim n \times (n-1) \times \text{flops}(\det(n-2 \times n-2)) \\ &\quad \vdots \\ &\sim n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \\ &\sim n! \end{aligned}$$

$$\text{flops}(\mathbf{Cramer}) \sim e(n+1)!$$



Tempo de processamento da regra de Cramer

Intel Core i7 em 2011: 12×10^9 flops/sec

Intel Core i7 em 2021: 52×10^9 flops/sec

n	flops	Tempo de CPU	
		2011	2021
5	2×10^3	166 ns	38 ns
10	108×10^6	9 ms	2 ms
15	56×10^{12}	79 min	18 min
20	138×10^{18}	367 anos	85 anos



Tempo de processamento da regra de Cramer

Intel Core i7 em 2011: 12×10^9 flops/sec

Intel Core i7 em 2021: 52×10^9 flops/sec

n	flops	Tempo de CPU	
		2011	2021
5	2×10^3	166 ns	38 ns
10	108×10^6	9 ms	2 ms
15	56×10^{12}	79 min	18 min
20	138×10^{18}	367 anos	85 anos

Não é viável usar a regra de Cramer em sistemas lineares do mundo real!



Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \varepsilon)^2 + 1 \\ -2 - \varepsilon \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1+eps -1; -1 1]
>> b = A*[1+eps; -1]
>> x = cramer(A,b)
```



Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \varepsilon)^2 + 1 \\ -2 - \varepsilon \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1+eps -1; -1 1]
>> b = A*[1+eps; -1]
>> x = cramer(A,b)
```

x =

**2
0**



Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \varepsilon)^2 + 1 \\ -2 - \varepsilon \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1+eps -1; -1 1]
>> b = A*[1+eps; -1]
>> x = cramer(A,b)
```

x =

**2
0**

**Além de ser muito cara computacionalmente,
a regra de Cramer é instável!**



Fatos sobre sistemas lineares

1. A escolha do método numérico tem grande influência na acurácia e eficiência computacional do cálculo da solução de um sistema linear;
2. O método numérico a ser utilizado na solução do sistema linear deve ser escolhido com sabedoria!



Como citar esse material?

A. Cunha, *Como Resolver Sistemas Lineares?*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



 @AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

