Integração Numérica

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

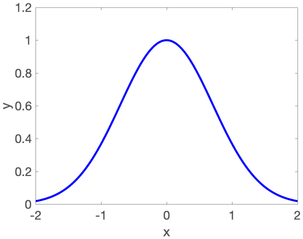
www.americocunha.org

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

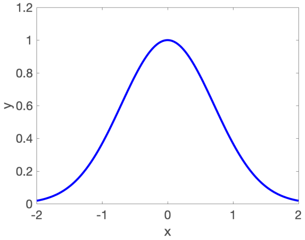
Tente resolver a integral definida a seguir:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$



Tente resolver a integral definida a seguir:

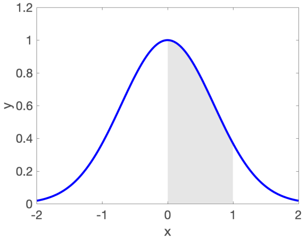
$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = ?$$



Essa integral não tem primitiva em termos de funções elementares!

Tente resolver a integral definida a seguir:

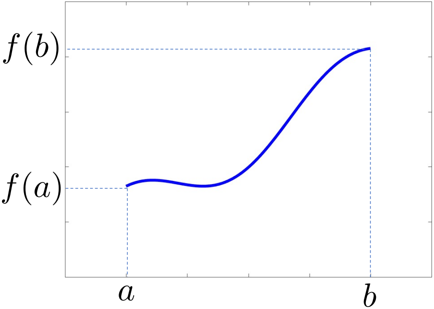
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$



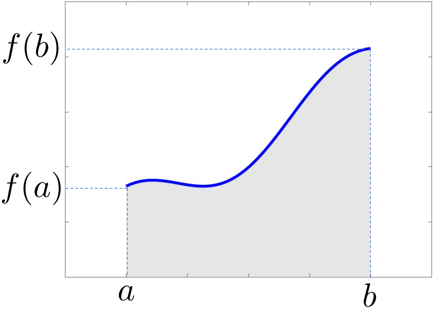
Essa integral não tem primitiva em termos de funções elementares!

Mas ela tem um valor numérico bem definido, que corresponde à área em cinza acima!

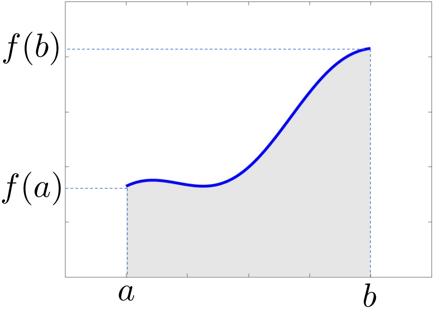
A integral definida de uma função



A integral definida de uma função



A integral definida de uma função



$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

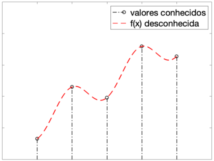
O problema de integração numérica

Nem sempre uma integral definida tem tratamento analítico!

$f(x)$ complicada

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$

$f(x)$ numérica



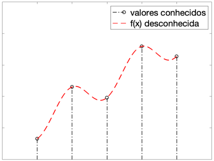
O problema de integração numérica

Nem sempre uma integral definida tem tratamento analítico!

$f(x)$ complicada

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$

$f(x)$ numérica



Esses casos demandam o uso de *regras de quadratura*:

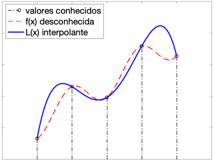
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} w_j\, f(x_j)$$

Regras de quadratura

Ideia do método:

- Calcular o polinômio que interpola $f(x)$ em $n+1$ pontos, i.e.,

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, L_j(x)$$



- Usar a integral de $L(x)$ em $[a,b]$ como aproximação para a integral definida procurada, i.e.,

$$\int_a^b f(x)\, dx \;\approx\; \int_a^b L(x)\, dx$$

Regras de quadratura

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx$$

Regras de quadratura

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx$$

$$\approx \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, L_j(x) \right) dx$$

Regras de quadratura

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b L(x)\,dx \\
&\approx \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, L_j(x) \right) dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \underbrace{\int_a^b L_j(x)\,dx}_{w_j}
\end{aligned}
$$

Regras de quadratura

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b L(x)\,dx \\
&\approx \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,L_j(x) \right) dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \underbrace{\int_a^b L_j(x)\,dx}_{w_j}
\end{aligned}
$$

- x_j pontos de quadratura
- w_j pesos da quadratura

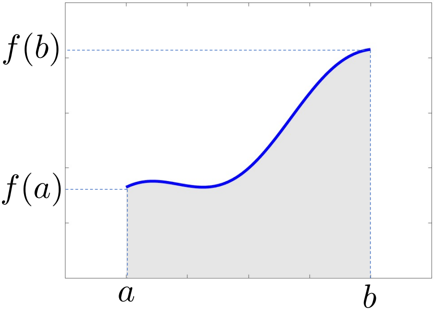
Regras de quadratura

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b L(x)\,dx \\
&\approx \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, L_j(x) \right) dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \underbrace{\int_a^b L_j(x)\,dx}_{w_j}
\end{aligned}
$$

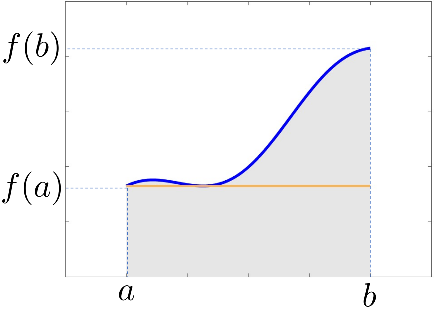
- x_j pontos de quadratura
- w_j pesos da quadratura

Diferentes escolhas para n e x_j produzem diferentes esquemas de quadratura.

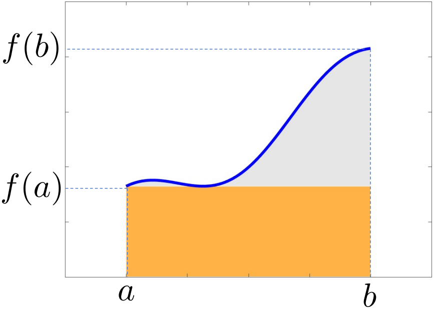
Regra do retângulo (ponto à esquerda)



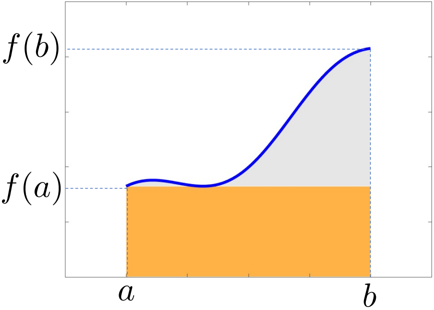
Regra do retângulo (ponto à esquerda)



Regra do retângulo (ponto à esquerda)

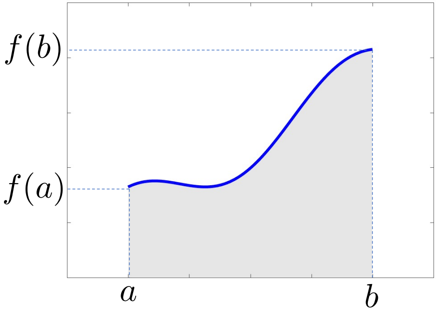


Regra do retângulo (ponto à esquerda)

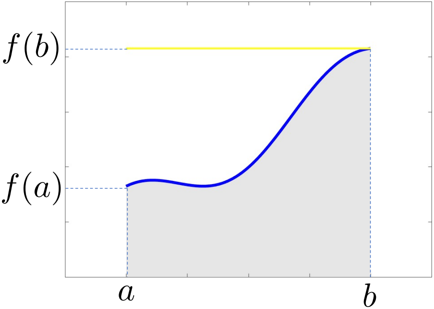


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(a)$$

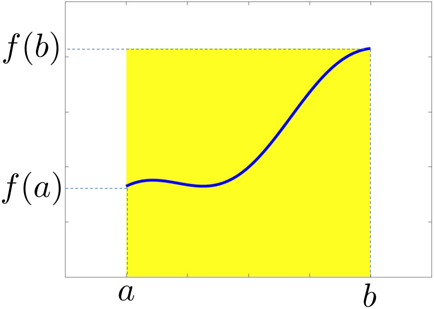
Regra do retângulo (ponto à direita)



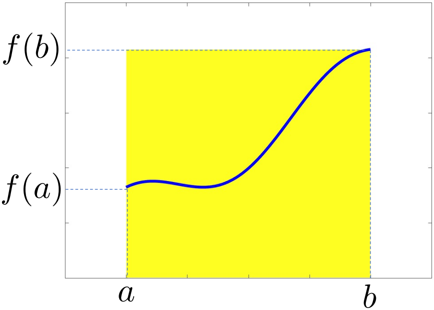
Regra do retângulo (ponto à direita)



Regra do retângulo (ponto à direita)

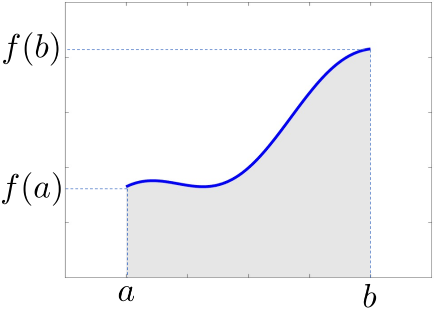


Regra do retângulo (ponto à direita)

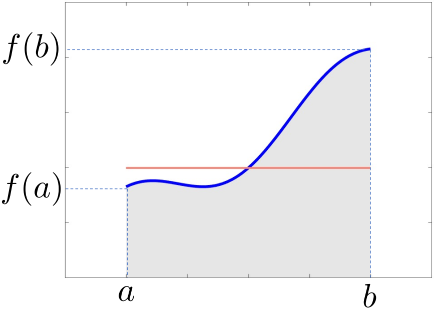


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(b)$$

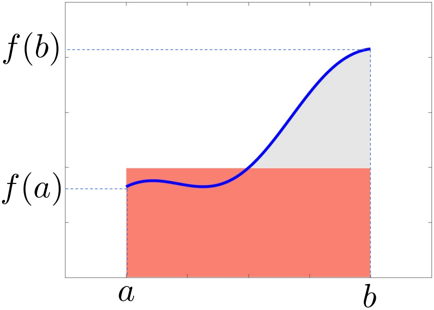
Regra do retângulo (ponto médio)



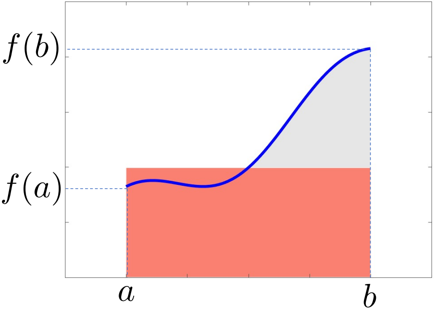
Regra do retângulo (ponto médio)



Regra do retângulo (ponto médio)

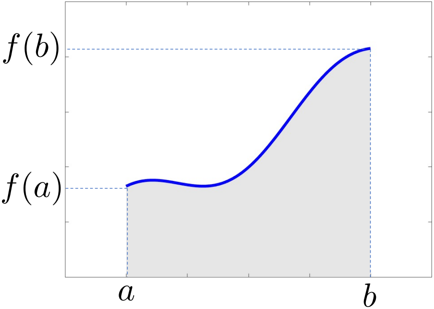


Regra do retângulo (ponto médio)

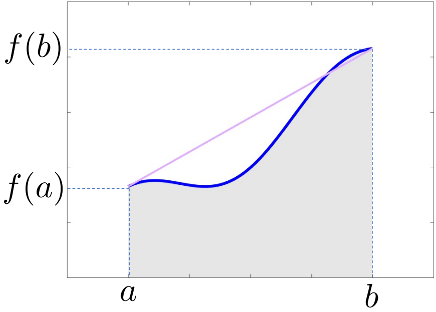


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

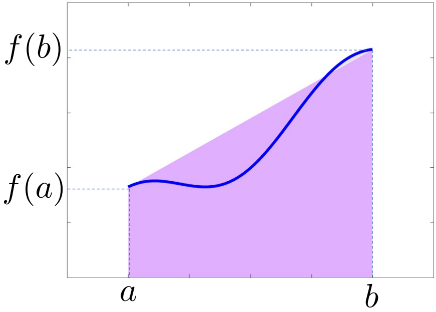
Regra do trapézio



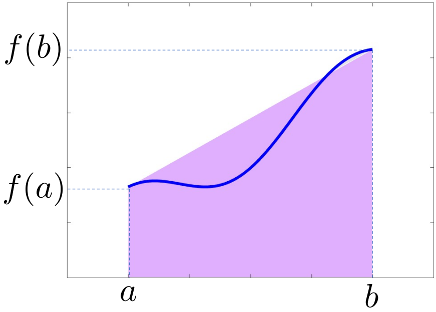
Regra do trapézio



Regra do trapézio

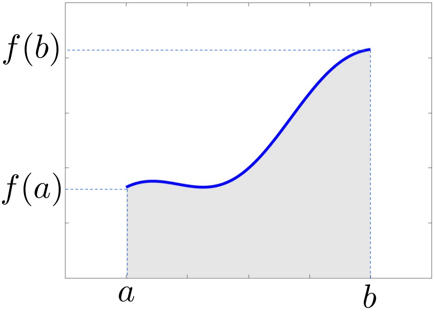


Regra do trapézio

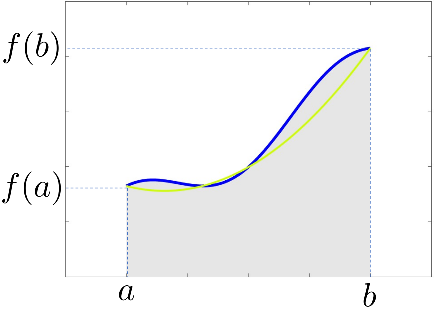


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(b-a)\,\big(f(a)+f(b)\big)$$

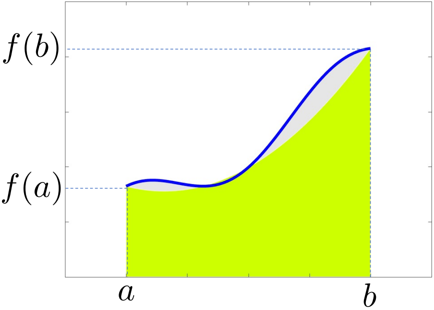
Regra de Simpson



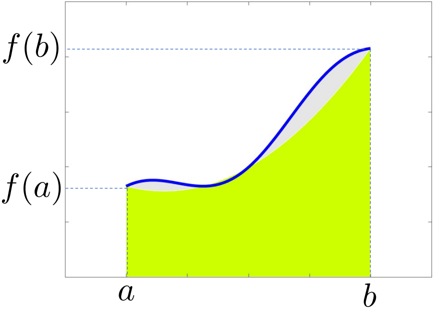
Regra de Simpson



Regra de Simpson



Regra de Simpson



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

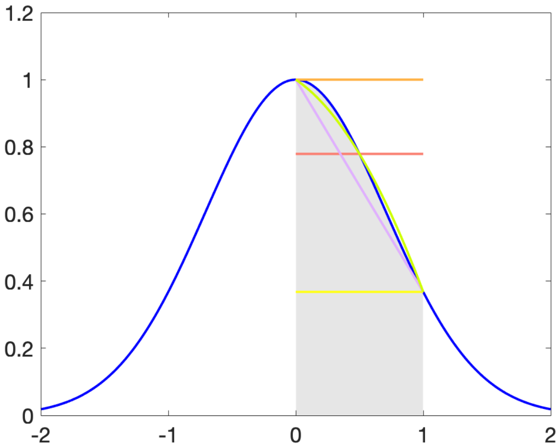
Experimento computacional 1

```
clc; clear; close all

f = @(x) exp(-x.^2);
a = 0.0;
b = 1.0;

I_L    = (b-a)*f(a)
I_R    = (b-a)*f(b)
I_M    = (b-a)*f(0.5*(a+b))
I_T    = (b-a)*(f(a)+f(b))/2
I_S    = (b-a)*(f(a)+4*f(0.5*(a+b))+f(b))/6
I_true = quad(f,a,b)

error_L = abs(I_L-I_true)/abs(I_true)
error_R = abs(I_R-I_true)/abs(I_true)
error_M = abs(I_M-I_true)/abs(I_true)
error_T = abs(I_T-I_true)/abs(I_true)
error_S = abs(I_S-I_true)/abs(I_true)
```

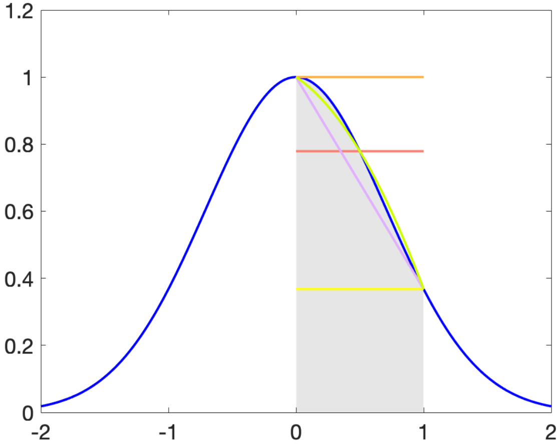
Experimento computacional 1

```
xtrue = -2:0.01:2;
ytrue = f(xtrue);
x     = a:0.01:b; y = f(x); N = length(x);
yL    = f(a)*ones(N,1);
yR    = f(b)*ones(N,1);
yM    = f(0.5*(a+b))*ones(N,1);
coefs = polyfit([a b],[f(a) f(b)],1);
yT    = polyval(coefs,x);
coefs = polyfit([a (a+b)/2 b],[f(a) f((a+b)/2) f(b)],2);
yS    = polyval(coefs,x);

figure(1)
area(x,y,'FaceColor',[0.9 0.9 0.9],'EdgeColor',[1 1 1]);
hold on
plot(xtrue,ytrue ,'LineWidth',2,'Color','b');
plot(x,yL,'LineWidth',2,'Color',[255,179, 71]/255);
plot(x,yR,'LineWidth',2,'Color',[254,254, 34]/255);
plot(x,yM,'LineWidth',2,'Color',[250,128,114]/255);
plot(x,yT,'LineWidth',2,'Color',[224,176,255]/255);
plot(x,yS,'LineWidth',2,'Color',[206,255,  0]/255);
hold off
set(gca,'FontSize',18); xlim([-2 2]); ylim([0 1.2]);
```

Experimento computacional 1



Experimento computacional 1



A precisão varia com o esquema de integração!

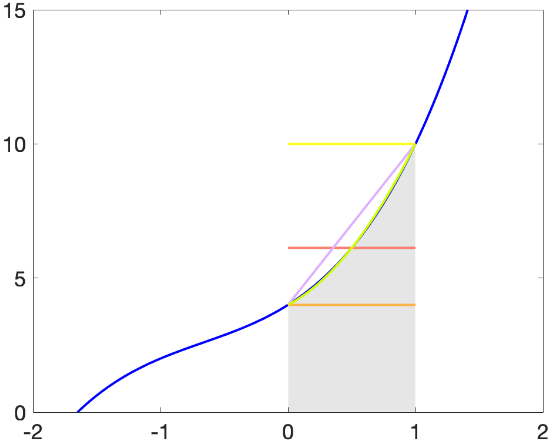
Experimento computacional 2

```
clc; clear; close all

f = @(x) x.^3 + 2*x.^2 + 3*x + 4;
a = 0.0;
b = 1.0;

I_L    = (b-a)*f(a)
I_R    = (b-a)*f(b)
I_M    = (b-a)*f(0.5*(a+b))
I_T    = (b-a)*(f(a)+f(b))/2
I_S    = (b-a)*(f(a)+4*f(0.5*(a+b))+f(b))/6
I_true = quad(f,a,b)

error_L = abs(I_L-I_true)/abs(I_true)
error_R = abs(I_R-I_true)/abs(I_true)
error_M = abs(I_M-I_true)/abs(I_true)
error_T = abs(I_T-I_true)/abs(I_true)
error_S = abs(I_S-I_true)/abs(I_true)
```

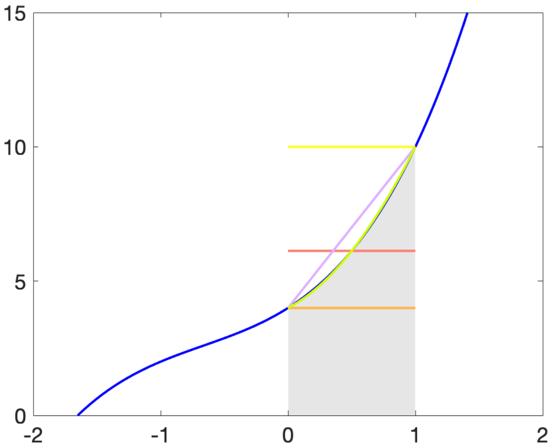
Experimento computacional 2

```
xtrue = -2:0.01:2;
ytrue = f(xtrue);
x     = a:0.01:b;
y     = f(x);
N     = length(x);
yL    = f(a)*ones(N,1);
yR    = f(b)*ones(N,1);
yM    = f(0.5*(a+b))*ones(N,1);
coefs = polyfit([a b],[f(a) f(b)],1);
yT    = polyval(coefs,x);
coefs = polyfit([a (a+b)/2 b],[f(a) f((a+b)/2) f(b)],2);
yS    = polyval(coefs,x);

figure(1)
area(x,y,'FaceColor',[0.9 0.9 0.9],'EdgeColor',[1 1 1]);
hold on
plot(xtrue,ytrue ,'LineWidth',2,'Color','b');
plot(x,yL,'LineWidth',2,'Color',[255,179, 71]/255);
plot(x,yR,'LineWidth',2,'Color',[254,254, 34]/255);
plot(x,yM,'LineWidth',2,'Color',[250,128,114]/255);
plot(x,yT,'LineWidth',2,'Color',[224,176,255]/255);
plot(x,yS,'LineWidth',2,'Color',[206,255,  0]/255);
hold off
set(gca,'FontSize',18); xlim([-2 2]); ylim([0 15]);
```

Experimento computacional 2



Experimento computacional 2



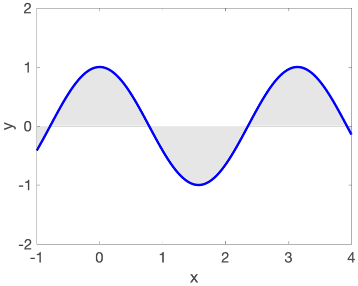
Por que o resultado da regra de Simpson é exato?

Erro induzido por uma regra de quadratura simples

regra de quadratura	erro de aproximação
ponto à esquerda	$\sim f'(\xi)\,(b-a)^2$
ponto à direita	$\sim f'(\xi)\,(b-a)^2$
ponto médio	$\sim \dfrac{f''(\xi)}{24}\,(b-a)^3$
trapézio	$\sim \dfrac{f''(\xi)}{12}\,(b-a)^3$
Simpson	$\sim \dfrac{f''''(\xi)}{90}\,\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^5$

Quadraturas simples são limitadas

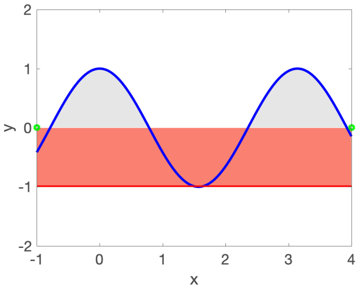
$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$



Quadraturas simples são limitadas

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

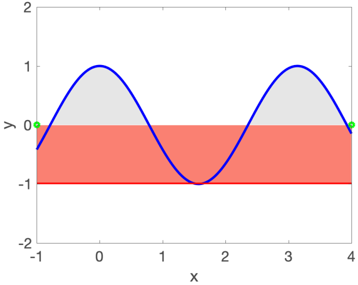
$$I_M = \int_a^b f(x)\, dx \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -4,9500$$



Quadraturas simples são limitadas

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

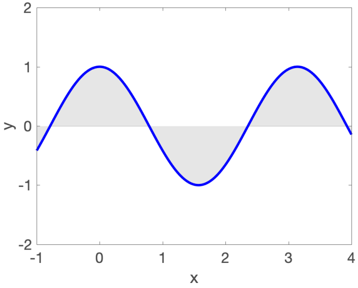
$$I_M = \int_a^b f(x)\, dx \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -4,9500$$



Quadraturas simples não fornecem boas aproximações para intervalos largos!

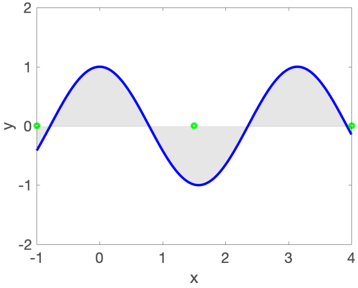
Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

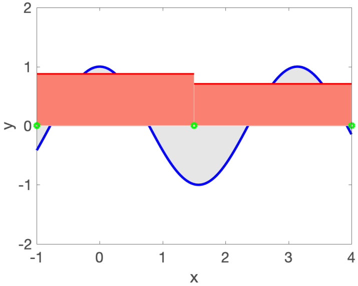
$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

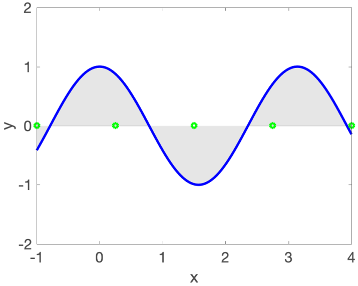
$$I_M = 3,9656$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

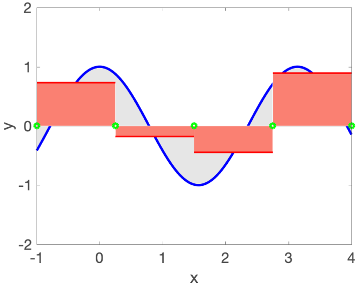
$$I_M = 3,9656$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

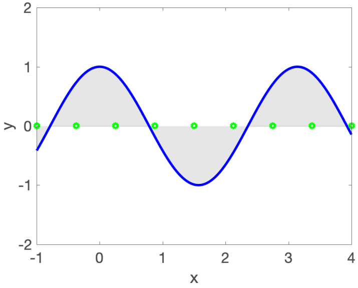
$$I_M = 1,2505$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

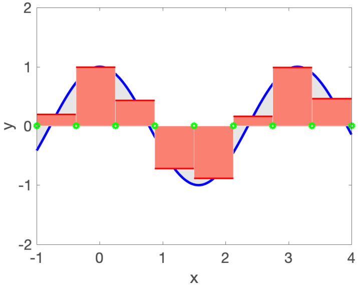
$$I_M = 1,2505$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

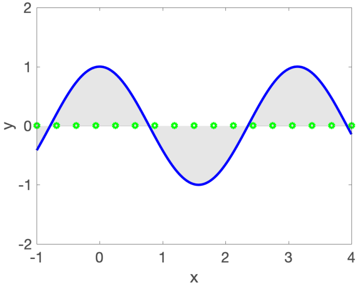
$$I_M = 1,0141$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

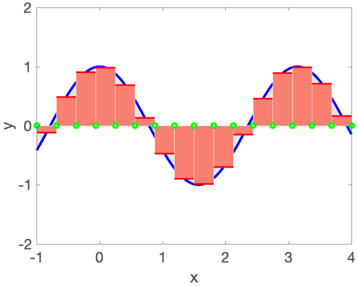
$$I_M = 1,0141$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

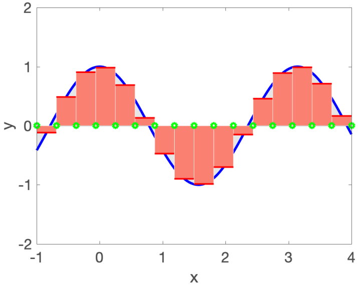
$$I_M = 0,9650$$



Como aumentar a acurácia de uma quadratura?

$$\int_{-1}^{4} \cos(2x)\, dx = 0,9493\cdots$$

$$I_M = 0,9650$$



Refinando a partição do intervalo de integração!

Quadraturas compostas (fórmulas de Newton-Cotes)

O intervalo $[a, b]$ é particionado em N subintervalos uniformes de comprimento $\Delta x = (b - a)/N$.

Ponto médio:

$$I_M = \Delta x \sum_{n=1}^{N} f\left(a + (n - 1/2)\,\Delta x\right)$$

Trapézio:

$$I_T = \frac{1}{2}\,\Delta x \left[f(a) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} f(a + n\,\Delta x) + f(b) \right]$$

Simpson (N par):

$$I_S = \frac{1}{3}\,\Delta x \left[f(a) + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} f(x_{2n}) + 4 \sum_{n=1}^{N/2} f(x_{2n-1}) + f(b) \right]$$

Implementação em GNU Octave (ponto médio)

```
function I = quad_mid(f,a,b,N)
        dx = (b-a)/N;
        I = 0.0;
    for n=1:N
        xm = a + (n-0.5)*dx;
        I = I + f(xm);
    end
    I = dx*I;
end
```

Implementação em GNU Octave (trapézio)

```
function I = quad_trap(f,a,b,N)
        dx = (b-a)/N;
        I = 0.0;
    for n=1:N
                x0 = a + (n-1)*dx;
                x1 = a +     n*dx;
        I = I + f(x0)+f(x1);
    end
    I = 0.5*dx*I;
end
```

Implementação em GNU Octave (Simpson)

```
function I = quad_simp(f,a,b,N)
        if mod(N,2) ~= 0
        error('N deve ser par');
        end
        dx = (b-a)/N;
        I = 0.0;
    for n=1:N/2
                x0 = a + (2*n-2)*dx;
                x1 = a + (2*n-1)*dx;
                x2 = a + 2*n*dx;
        I = I + f(x0) + 4*f(x1) + f(x2);
    end
    I = (dx/3)*I;
end
```

Experimento computacional 3

```
clc; clear; close all

f = @(x) cos(2*x);
a = -1;
b = 4;
N = 20;

I_M    =  quad_mid(f,a,b,N)
I_T    = quad_trap(f,a,b,N)
I_S    = quad_simp(f,a,b,N)
I_true = quad(f,a,b)

error_M = abs(I_M-I_true)/abs(I_true)
error_T = abs(I_T-I_true)/abs(I_true)
error_S = abs(I_S-I_true)/abs(I_true)
```

Características das quadraturas compostas

regra de quadratura	custo computacional	erro de aproximação
ponto médio	$\sim N$	$\sim \dfrac{f''(\xi)}{24}(b-a)\,\Delta x^2$
trapézio	$\sim N+1$	$\sim \dfrac{f''(\xi)}{12}(b-a)\,\Delta x^2$
Simpson	$\sim N+1$	$\sim \dfrac{f''''(\xi)}{180}(b-a)\,\Delta x^4$

Quadraturas com malha não uniforme (não Newton-Cotes)

O intervalo $[a, b]$ é dividido em N subintervalos disjuntos
$[a, b] = [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \cdots \cup [a_{2N-1}, x_{2N}]$, onde $x_1 = a$ e $x_N = b$.

Ponto médio:

$$I_M = \sum_{n=1}^{N} (x_{n+1} - x_n)\, f\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right)$$

Trapézio:

$$I_T = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\,(x_{n+1} - x_n)\,\left(f(x_n) + f(x_{n+1})\right)$$

Simpson (N par):

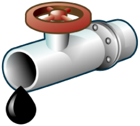
$$I_S = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{6}\,(x_{n+1} - x_n)\,\left(f(x_n) + 4\,f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) + f(x_{n+1})\right)$$

Para pensar em casa ...

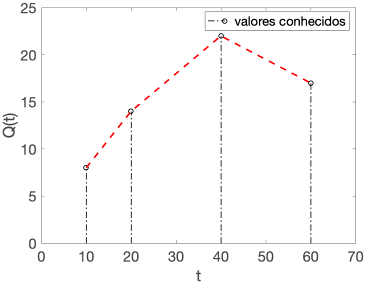
Exercício computacional:

Implemente no ambiente GNU Octave as regras de quadratura com malha não uniforme apresentadas no slide anterior.

Volume de óleo escoando num duto



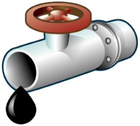
tempo (s)	vazão (m^3/s)
10	8
20	14
40	22
60	17



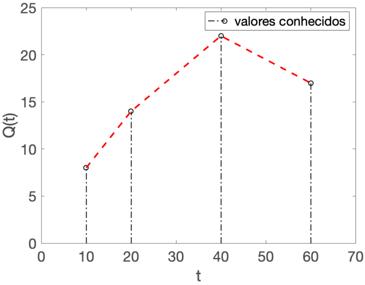
Qual o volume de óleo transportado entre 10 e 60 s ?

Figura em https://iconarchive.com/show/transport-icons-by-aha-soft/pipe-line-icon.html

Volume de óleo escoando num duto



tempo (s)	vazão (m^3/s)
10	8
20	14
40	22
60	17

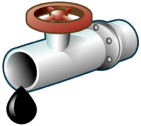


Qual o volume de óleo transportado entre 10 e 60 s ?

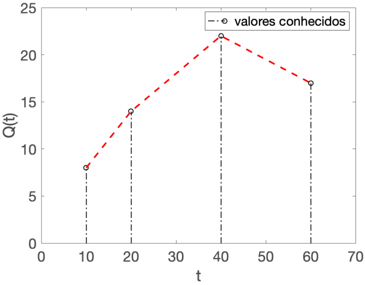
$$\text{volume} = \int_{t=10}^{60} \text{vazão}(t)\, dt$$

Figura em https://iconarchive.com/show/transport-icons-by-aha-soft/pipe-line-icon.html

Volume de óleo escoando num duto



tempo (s)	vazão (m^3/s)
10	8
20	14
40	22
60	17



Qual o volume de óleo transportado entre 10 e 60 s ?

$$\text{volume} = \int_{t=10}^{60} \text{vazão}(t)\, dt$$

```
>> x = [10 20 40 60];
>> y = [ 8 14 22 17];
>> V = trapz(x,y)
```

Figura em https://iconarchive.com/show/transport-icons-by-aha-soft/pipe-line-icon.html

Como citar esse material?

A. Cunha, *Integração Numérica*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr