

# Decomposição LU

Prof. Americo Cunha


Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

[americo.cunha@uerj.br](mailto:americo.cunha@uerj.br)

[www.americocunha.org](http://www.americocunha.org)

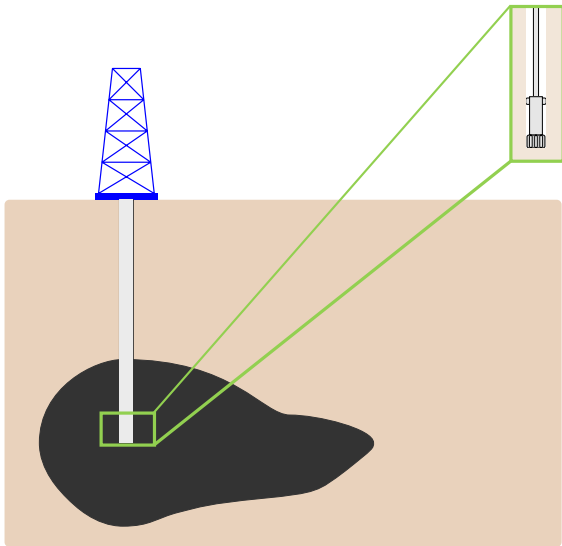


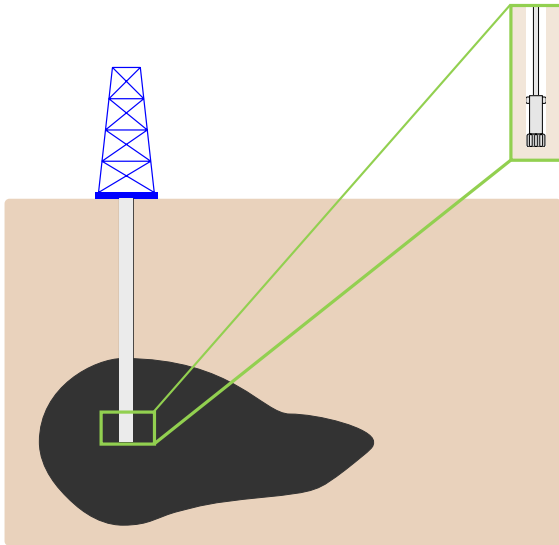
 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr

 @AmericoCunhaJr







## Análise Estrutural (depende do tempo)

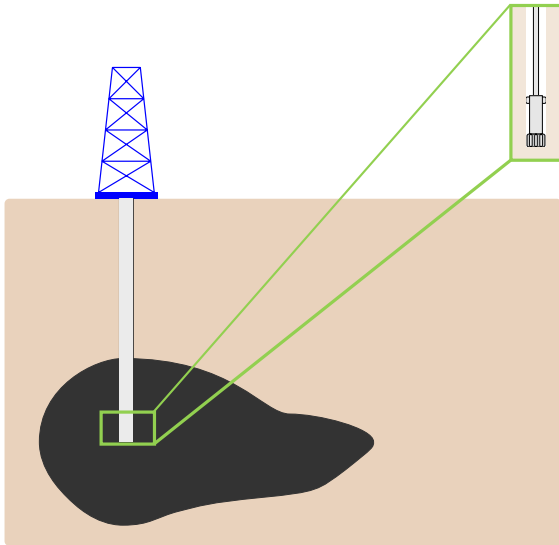
$$A\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{b}(t_1)$$

$$A\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{b}(t_2)$$

$\vdots$

$$A\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{b}(t_k)$$





## Análise Estrutural (depende do tempo)

$$A\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{b}(t_1)$$

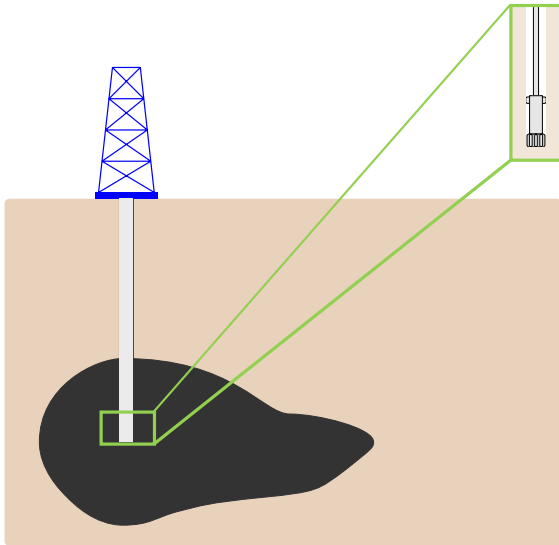
$$A\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{b}(t_2)$$

⋮

$$A\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{b}(t_k)$$

\$ \$ \$ \$ \$





Análise Estrutural  
(depende do tempo)

$$A\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{b}(t_1)$$

$$A\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{b}(t_2)$$

⋮

$$A\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{b}(t_k)$$

\$ \$ \$ \$ \$

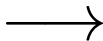
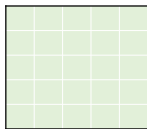
É possível resolver esse problema num tempo razoável?



# Eliminação Gaussiana

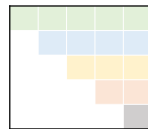
A eliminação gaussiana *triangulariza* uma matriz “cheia”:

Matriz Original



Eliminação  
Gaussiana

Matriz Triangular



Essa triangularização é via uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$



Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$





Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$



# Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2$$



## Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2$$



## Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2L_3 \end{aligned}$$



## Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

→

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

→

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}}$$

→

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2L_3 \end{aligned}$$



# Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} & L_1 & \text{---} \\ \text{---} & L_2 & \text{---} \\ \text{---} & L_3 & \text{---} \\ \text{---} & L_4 & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & L_1 & \text{---} \\ \text{---} & L_2 & \text{---} \\ \text{---} & L_3 & \text{---} \\ \text{---} & L_4 & \text{---} \end{bmatrix}$$



# Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$



# Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} & L_1 & \text{---} \\ \text{---} & L_2 & \text{---} \\ \text{---} & L_3 & \text{---} \\ \text{---} & L_4 & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & L_1 & \text{---} \\ \text{---} & L_2 & \text{---} \\ \text{---} & L_3 & \text{---} \\ \text{---} & L_4 & \text{---} \end{bmatrix}$$





## Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$



# Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} & L_1 & \text{---} \\ \text{---} & L_2 & \text{---} \\ \text{---} & L_3 & \text{---} \\ \text{---} & L_4 & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & L_1 & \text{---} \\ \text{---} & L_2 & \text{---} \\ \text{---} & L_3 & \text{---} \\ \text{---} & L_4 & \text{---} \end{bmatrix}$$



## Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Mas o que são essas operações elementares de fato?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 1L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2L_3 \end{aligned}$$

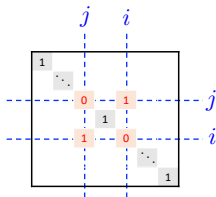
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Cada operação elementar numa linha corresponde à multiplicação à esquerda por uma matriz elementar.**

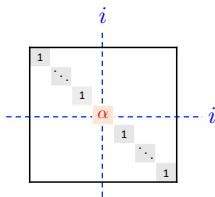


# Matrizes Elementares

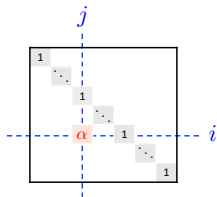
Uma *matriz elementar* é uma espécie de “modificação” da matriz identidade, cuja ação produz o mesmo efeito que uma operação elementar numa linha.



$L_i \leftrightarrow L_j$   
(trocar linhas)



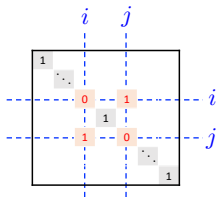
$L_i \leftarrow \alpha L_i, \alpha \neq 0$   
(multiplicar linha)



$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$   
(somar linha)

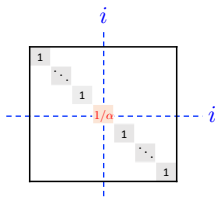
# Matrizes Elementares Inversas

Uma *matriz elementar inversa* é uma espécie de “modificação” da matriz identidade, que desfaz a ação produzida pela operação elementar original. Inverter uma matriz elementar é muito fácil.



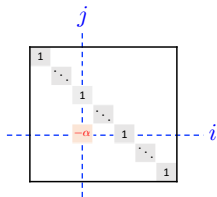
$$L_j \leftrightarrow L_i$$

(trocar linhas)



$$L_i \leftarrow 1/\alpha L_i, \alpha \neq 0$$

(multiplicar linha)



$$L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$$

(somar linha)



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

The diagram shows the equation  $L_1 A = U$  using 5x5 grid matrices. The matrix  $L_1$  is represented by a grid where the main diagonal is light blue and the first column (excluding the top element) is orange. The matrix  $A$  is a solid light green grid. The matrix  $U$  is a grid where the top row is light green and the bottom 4x4 submatrix is light blue. An equals sign is placed between the  $A$  and  $U$  matrices.



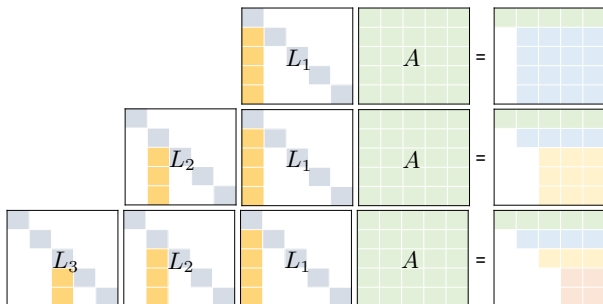
# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

The diagram illustrates the LU decomposition process using block matrices. It shows two equations:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & L_1 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & \text{blue block} & \\ & & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} & & \\ & L_2 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & L_1 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & \text{blue block} & \\ & & \text{orange block} \end{bmatrix}$$



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



**Sequência de multiplicações por matrizes triangulares inferiores, gerando uma matriz triangular superior.**



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 L_2 L_1 A = U$$



$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U$$

# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 L_2 L_1 A = U$$



$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U$$



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 L_2 L_1 A = U$$



$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U$$



$$A = L U$$



# Eliminação Gaussiana – Versão Matricial

$$L_{n-1} \cdots L_3 L_2 L_1 A = U$$



$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U$$



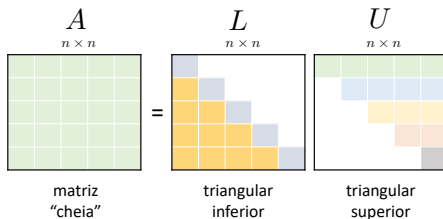
$$A = L U$$

**A eliminação gaussiana induz uma fatoração matricial tipo  
triangular inferior  $\times$  triangular superior.**

(L = lower / U = upper)



# Fatoração LU



- A *fatoração LU* é a versão matricial da *eliminação gaussiana*, ambas têm o mesmo custo computacional  $\sim 2/3 n^3$ ;
- A matriz *triangular superior*  $U$  é obtida naturalmente ao final do processo de triangularização;
- A matriz *triangular inferior*  $L$  é construída com os coeficientes utilizados no processo de triangularização (mudando o sinal)



# Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

# Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$



## Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$



# Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2$$



## Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2$$



## Exemplo de fatoração LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ +2 & +1 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_U$$





# Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [-2 0 1; 1 3 1; 1 2 0]
>> [L,U] = lu(A)
```



# Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



# Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



# Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$



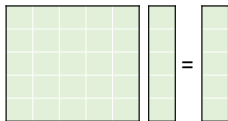
# Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



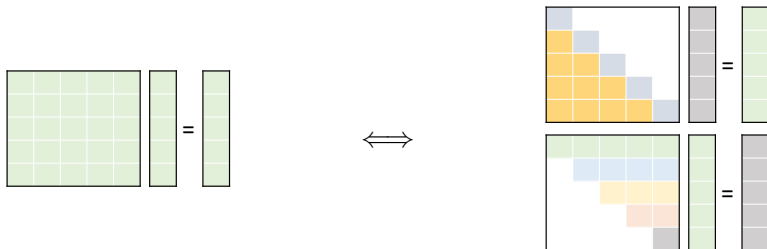
# Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



# Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

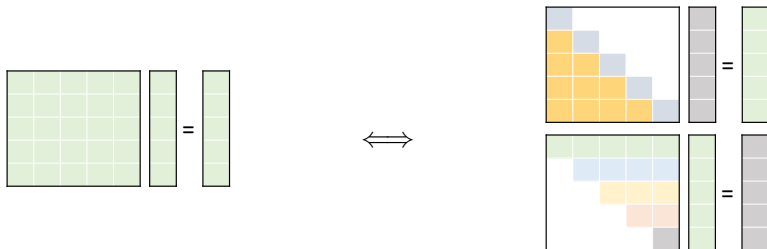
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



1. Calcular a fatoração  $A = LU$ ;
2. Resolver por substituição progressiva  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ;
3. Resolver por substituição regressiva  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

# Como resolver um sistema linear via fatoração LU?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff L \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



1. Calcular a fatoração  $A = LU$ ;
2. Resolver por substituição progressiva  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ;
3. Resolver por substituição regressiva  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

$$\text{flops (sistema via LU)} \sim \frac{2}{3}n^3 + 2n^2$$





# Qual a vantagem de usar a fatoração LU?

Imagine que você precise resolver  $k$  sistemas com a mesma matriz:

$$A \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \quad A \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$$



# Qual a vantagem de usar a fatoração LU?

Imagine que você precise resolver  $k$  sistemas com a mesma matriz:

$$A \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \quad A \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$$

- **Estratégia ingênua:** Eliminação gaussiana  $k$  vezes

$$\text{flops (k sistemas via Gauss)} \sim \frac{2}{3} k n^3 + k n^2$$



# Qual a vantagem de usar a fatoração LU?

Imagine que você precise resolver  $k$  sistemas com a mesma matriz:

$$A \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \quad A \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$$

- **Estratégia ingênua:** Eliminação gaussiana  $k$  vezes

$$\text{flops (k sistemas via Gauss)} \sim \frac{2}{3} k n^3 + k n^2$$

- **Estratégia otimizada:** Fatoração LU e  $2kn$  substituições

$$\text{flops (k sistemas via LU)} \sim \frac{2}{3} n^3 + 2 k n^2$$

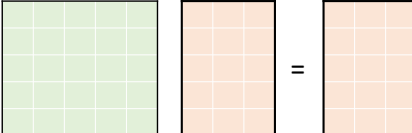


# Outras aplicações

- Determinante:

$$\det A = \det(L U) = \underbrace{\det L}_{=1} \times \det U = u_{11} \times u_{22} \times \cdots \times u_{nn}$$

- Sistema com incógnita matricial:

$$\begin{array}{c} A \\ n \times n \end{array} \quad \begin{array}{c} X \\ n \times k \end{array} = \begin{array}{c} B \\ n \times k \end{array}$$


Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$



Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$



Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$



Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

Pivô nulo, perigo!





Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

Pivô nulo, perigo!

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$



Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

Pivô nulo, perigo!

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$



Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

Pivô nulo, perigo!

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

Nesse caso, existe uma fatoração do tipo  $PA = LU$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ +2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_U$$



Em alguns casos, a fatoração LU não existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1$$

Pivô nulo, perigo!

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

Nesse caso, existe uma fatoração do tipo  $PA = LU$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ +2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_U$$

**A fatoração PLU é a versão matricial da eliminação gaussiana com pivotamento parcial.**



# Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$



```
> > A = [10 -7 0; -3 2 6; 5 -1 5]
> > [L,U,P] = lu(A)
> > P*A-L*U
```



# Fundamentação teórica

## Teorema (existência e unicidade da fatoração LU)

Considere  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal principal,  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz triangular superior,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz de permutação de linhas e os menores principais líderes


$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

1. Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não singular admite uma única fatoração  $A = LU$  se, e somente se, todos os seus menores principais líderes forem não singulares;
2. Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  singular de posto  $k$  admite uma fatoração  $A = LU$ , se os primeiros  $k$  menores principais líderes forem não singulares (embora o inverso não seja verdadeiro);
3. Qualquer matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  admite uma fatoração  $PA = LU$ .




# Para pensar em casa ...

## Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a fatoração LU. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave. 

## Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente para resolver um sistema linear com diferentes vetores do lado direito. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave. 



## Como citar esse material?

A. Cunha, *Decomposição LU*,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



 @AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

