Decomposição Cholesky e outras Fatorações Matriciais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

A decomposição LU de uma matriz simética não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$$

A decomposição LU de uma matriz simética não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$$

É possível simetrizar essa fatoração?

A decomposição LU de uma matriz simética não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$$

É possível simetrizar essa fatoração?

Existe um caso especial onde a resposta é afirmativa!

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

$$=$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{G^T}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{G^T}$$

Essa simetrização é possível desde que a matriz simétrica também seja positiva definida, i.e., $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$, para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$.

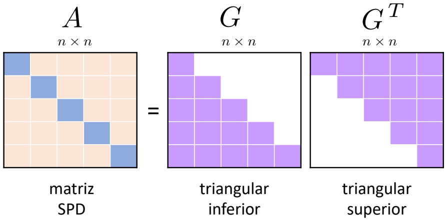
Fundamentação teórica

Teorema (existência e unicidade da fatoração Cholesky)

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica positiva definida (SPD), então ela admite uma única fatoração

$$A = G\,G^T,$$

onde $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal principal positiva.



Vantagens da fatoração Cholesky

- Como a matriz do sistema é simétrica positiva definida, não é necessário usar nenhuma estratégia de pivotamento;
- Menor custo de memória para armazenar o sistema linear, em comparação a um sistema "cheio" não simétrico

$$\texttt{mem}(\textbf{sistema SPD}) = n(n+1)/2 + 2\,n$$

- Tempo de processamento duas vezes menor, em comparação à fatoração LU, para realizar a triangularização

$$\texttt{flops}\,(\textbf{Cholesky}) \sim \frac{1}{3}\,n^3$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\, g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\, g_{11} & g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$g_{11}^2 = 4$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\, g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\, g_{11} & g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$g_{11}^2 = 4 \Rightarrow g_{11} = 2$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\, g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\, g_{11} & g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 \Rightarrow g_{11} = 2 \\ g_{21}\, g_{11} &= 12 \end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 & \Rightarrow \quad g_{11} &= 2 \\ g_{21}\,g_{11} &= 12 & \Rightarrow \quad g_{21} &= 6 \end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\ g_{21}\,g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\ g_{31}\,g_{11} &= -16 \end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 & \Rightarrow \quad g_{11} &= 2 \\ g_{21}\,g_{11} &= 12 & \Rightarrow \quad g_{21} &= 6 \\ g_{31}\,g_{11} &= -16 & \Rightarrow \quad g_{31} &= -8 \end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\, g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\, g_{11} & g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 & \Rightarrow \quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\, g_{11} &= 12 & \Rightarrow \quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\, g_{11} &= -16 & \Rightarrow \quad g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 & &
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\, g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\, g_{11} & g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\ g_{21}\, g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\ g_{31}\, g_{11} &= -16 &\Rightarrow\quad g_{31} &= -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 &\Rightarrow\quad g_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\, g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\, g_{11} & g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\ g_{21}\, g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\ g_{31}\, g_{11} &= -16 &\Rightarrow\quad g_{31} &= -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 &\Rightarrow\quad g_{22} &= 1 \\ g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} &= -43 & & \end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 4 & \Rightarrow && g_{11} &= 2 \\ g_{21}\,g_{11} &= 12 & \Rightarrow && g_{21} &= 6 \\ g_{31}\,g_{11} &= -16 & \Rightarrow && g_{31} &= -8 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 & \Rightarrow && g_{22} &= 1 \\ g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} &= -43 & \Rightarrow && g_{32} &= 5 \end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 & \Rightarrow \quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 & \Rightarrow \quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\,g_{11} &= -16 & \Rightarrow \quad g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 & \Rightarrow \quad g_{22} &= 1 \\
g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} &= -43 & \Rightarrow \quad g_{32} &= 5 \\
g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 &= 98 & &
\end{aligned}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 & \Rightarrow\ g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 & \Rightarrow\ g_{21} &= 6 \\
g_{31}\,g_{11} &= -16 & \Rightarrow\ g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 & \Rightarrow\ g_{22} &= 1 \\
g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} &= -43 & \Rightarrow\ g_{32} &= 5 \\
g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 &= 98 & \Rightarrow\ g_{33} &= 3
\end{aligned}
$$

Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

Pense num algoritmo eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a fatoração Cholesky.

Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>>  A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
>>  G = chol(A)
>>  A-G'*G
```

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\,G^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

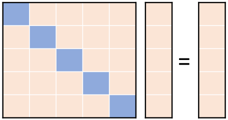
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\,\underbrace{G^T\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

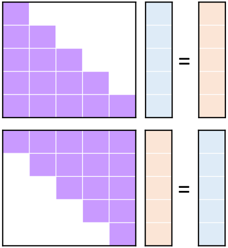
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\,\underbrace{G^T\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\,\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ G^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\underbrace{G^T\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\,\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ G^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

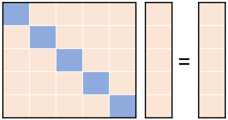


$$\iff$$

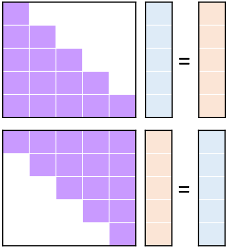


Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\,\underbrace{G^{\,T}\,\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\;\;\mathbf{y} & = \;\mathbf{b} \\ G^{\,T}\,\mathbf{x} & = \;\mathbf{y} \end{cases}$$



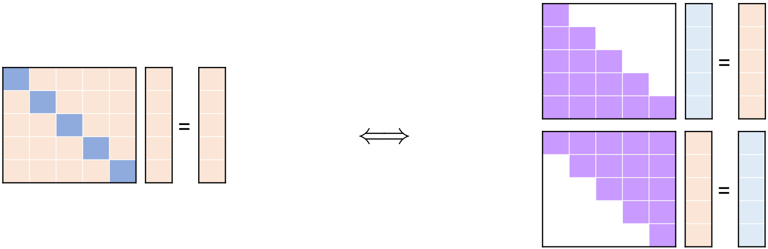
$\iff$



1. Calcular a fatoração $A = G\,G^{\,T}$;
2. Resolver por substituição progressiva $G\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $G^{\,T}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\,\underbrace{G^T\,\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\;\;\mathbf{y} & = & \mathbf{b} \\ G^T\,\mathbf{x} & = & \mathbf{y} \end{cases}$$

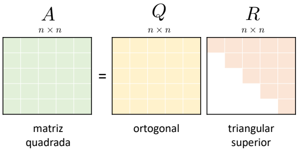


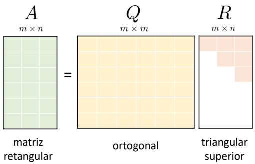
1. Calcular a fatoração $A = G\,G^T$;
2. Resolver por substituição progressiva $G\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $G^T\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\texttt{flops}\,(\textbf{sistema via Cholesky}) \sim \frac{1}{3}\,n^3 + 2\,n^2$$

Outras fatorações matriciais

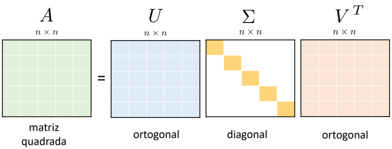
Decomposição QR

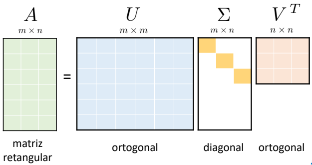




Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ortogonal se $Q\,Q^T = Q^T\,Q = I$, i.e., $Q^{-1} = Q^T$

Decomposição SVD





Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
>> [Q,R] = qr(A)
>> A-Q*R
>> [U,Sigma,V] = svd(A)
>> A-U*Sigma*V'
```

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

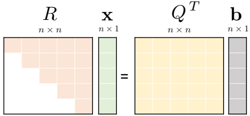
Decomposição QR

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
R\,\mathbf{x} &= Q^T\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

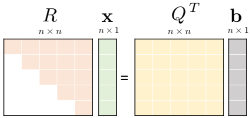
$$\begin{aligned} A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\,\mathbf{x} &= Q^T\,\mathbf{b} \end{aligned}$$



Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
R\,\mathbf{x} &= Q^T\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

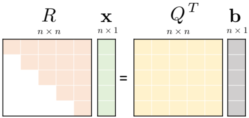


Decomposição SVD

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
R\,\mathbf{x} &= Q^T\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$



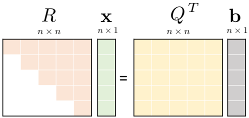
Decomposição SVD

$$
A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
R\,\mathbf{x} &= Q^{T}\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$



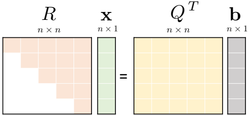
Decomposição SVD

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
U\,\Sigma\,V^{T}\,\mathbf{x} &= \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\
Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\
R\,\mathbf{x} &= Q^T\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$



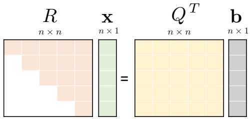
Decomposição SVD

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\
U\,\Sigma\,V^T\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\
\Sigma\,V^T\mathbf{x} &= U^T\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
R\,\mathbf{x} &= Q^T\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$



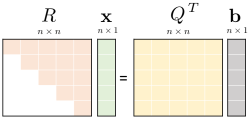
Decomposição SVD

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
U\,\Sigma\,V^T\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\Sigma\,V^T\mathbf{x} &= U^T\,\mathbf{b} \\
V^T\mathbf{x} &= \Sigma^{-1}\,U^T\,\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\,\mathbf{x} &= Q^T\,\mathbf{b} \end{aligned}$$



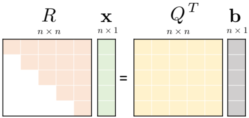
Decomposição SVD

$$\begin{aligned} A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U\,\Sigma\,V^T\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Sigma\,V^T\mathbf{x} &= U^T\,\mathbf{b} \\ V^T\mathbf{x} &= \Sigma^{-1}\,U^T\,\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= V\,\Sigma^{-1}\,U^T\,\mathbf{b} \end{aligned}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

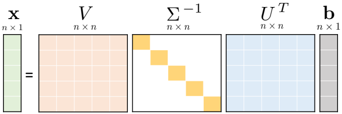
Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ QR\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$



Decomposição SVD

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U\Sigma V^T\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Sigma V^T\mathbf{x} &= U^T\mathbf{b} \\ V^T\mathbf{x} &= \Sigma^{-1}U^T\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= V\Sigma^{-1}U^T\mathbf{b} \end{aligned}$$



Comparação entre alguns métodos diretos

fatoração	`flops`	estabilidade	custo
LU	$\sim \frac{2}{3} n^3$	$\star$	$1 \times \$$
LUP	$\sim \frac{2}{3} n^3$	$\star\star$	$1 \times \$$
Cholesky	$\sim \frac{1}{3} n^3$	$\star\star\star$	$1/2 \times \$$
QR	$\sim \frac{4}{3} n^3$	$\star\star\star\star$	$2 \times \$$
SVD	$\sim 13n^3$	$\star\star\star\star\star$	$20 \times \$$

Como resolver sistemas lineares no GNU Octave?

Resolver um sistema linear no GNU Octave é tão simples quanto

```
x = A \ b
```

O comando "\" (backslash) é um atalho para chamar um algoritmo bem robusto para solução de sistemas lineares. Tal algoritmo faz uma análise prévia da estrutura da matriz A, para então usar a melhor técnica de solução disponível para o sistema em questão.

```
>> A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
>> b = [1; 1; 1]
>> x = A \ b
```

Como citar esse material?

A. Cunha, *Decomposição Cholesky e outras Fatorações Matriciais*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr