Interpolação Polinomial

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr

Imagine que você tenha que lidar com uma função complicada:

Imagine que você tenha que lidar com uma função complicada:

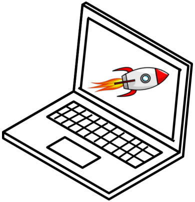
$$f(x) = \frac{\ln x \, e^{\sqrt{x}}}{\ln\left(1 + e^{x}\right) + x^{3}}$$

fórmula complexa

Imagine que você tenha que lidar com uma função complicada:

$$f(x) = \frac{\ln x \, e^{\sqrt{x}}}{\ln(1 + e^x) + x^3}$$

fórmula complexa

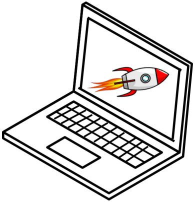


simulador computacional
(sem fórmula)

Imagine que você tenha que lidar com uma função complicada:

$$f(x) = \frac{\ln x \, e^{\sqrt{x}}}{\ln(1 + e^x) + x^3}$$

fórmula complexa



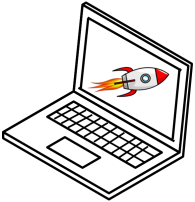
simulador computacional
(sem fórmula)

Como manipular (derivar, integrar etc)
uma função desse tipo na prática?

Imagine que você tenha que lidar com uma função complicada:

$$f(x) = \frac{\ln x \, e^{\sqrt{x}}}{\ln(1 + e^x) + x^3}$$

fórmula complexa



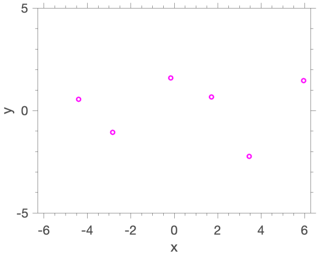
simulador computacional (sem fórmula)

Como manipular (derivar, integrar etc) uma função desse tipo na prática?

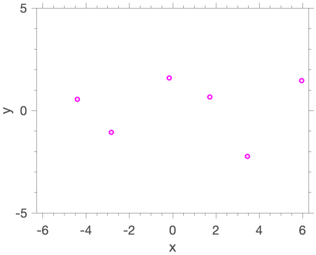
Através de uma função simplista que aproxima o comportamento de $f(x)$, construída a partir de alguns pontos onde o valor da função é conhecido!

Interpolação × Regressão

Interpolação

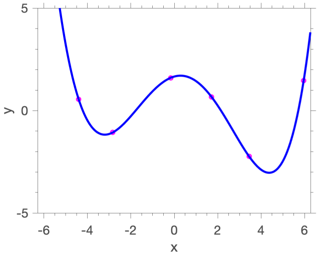


Regressão



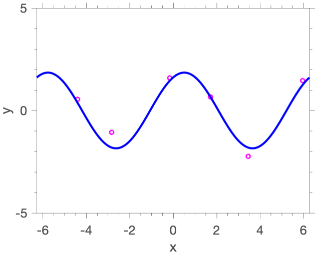
Interpolação × Regressão

Interpolação



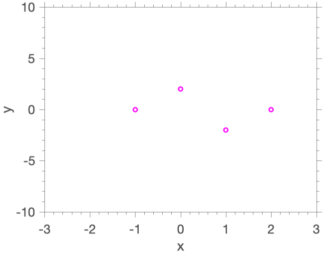
A curva interpolante passa **por todos os pontos**.

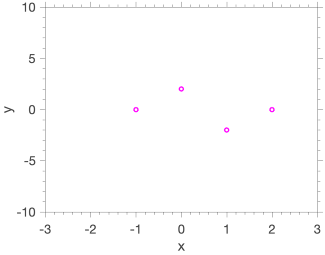
Regressão



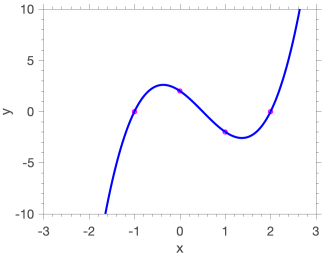
A curva regressora passa **"próxima" de todos os pontos**.

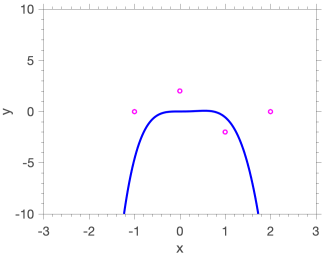
Dados bem comportados ...





Dados bem comportados ...





... podem ser bem aproximado (em geral) por um processo de interpolação!

O problema de interpolação

Dado um conjunto com $n + 1$ *pontos* distintos $(x_i \neq x_j)$

$$(x_0, y_0), \ (x_1, y_1), \ \cdots, \ (x_n, y_n),$$

encontre uma função interpolante $p(x)$ tal

$$p(x_j) = y_j, \ j = 0, 1, \cdots, n$$

i.e., a curva $y = p(x)$ passa pelos $n + 1$ pontos dados.

Processo de interpolação

1. Escolha uma forma para a função interpolante

$$p(x) = c_n\,\phi_n(x) + \cdots + c_1\,\phi_1(x) + c_0\,\phi_0(x)$$

   - ϕ_j - funções linearmente independentes (predefinidas)
   - c_j - coeficientes (a serem determinados)

2. Encontre os coeficientes c_j (resolvendo um sistema linear) de modo que $y = p(x)$ seja uma curva que contenha todos os pontos da amostra.

Função interpolante

Função interpolante

$$p(x) = c_n\,\phi_n(x) + \cdots + c_1\,\phi_1(x) + c_0\,\phi_0(x)$$

Função interpolante

$$p(x) = c_n\,\phi_n(x) + \cdots + c_1\,\phi_1(x) + c_0\,\phi_0(x)$$

$$\begin{aligned}
p(x_0) = c_n\,\phi_n(x_0) + \cdots + c_1\,\phi_1(x_0) + c_0\,\phi_0(x_0) &= y_0 \\
p(x_1) = c_n\,\phi_n(x_1) + \cdots + c_1\,\phi_1(x_1) + c_0\,\phi_0(x_1) &= y_1 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
p(x_n) = c_n\,\phi_n(x_n) + \cdots + c_1\,\phi_1(x_n) + c_0\,\phi_0(x_n) &= y_n
\end{aligned}$$

Função interpolante

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_n(x_0) & \cdots & \phi_1(x_0) & \phi_0(x_0) \\ \phi_n(x_1) & \cdots & \phi_1(x_1) & \phi_0(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_n(x_{n-1}) & \cdots & \phi_1(x_{n-1}) & \phi_0(x_{n-1}) \\ \phi_n(x_n) & \cdots & \phi_1(x_n) & \phi_0(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Função interpolante

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_n(x_0) & \cdots & \phi_1(x_0) & \phi_0(x_0) \\ \phi_n(x_1) & \cdots & \phi_1(x_1) & \phi_0(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_n(x_{n-1}) & \cdots & \phi_1(x_{n-1}) & \phi_0(x_{n-1}) \\ \phi_n(x_n) & \cdots & \phi_1(x_n) & \phi_0(x_n) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\iff$$

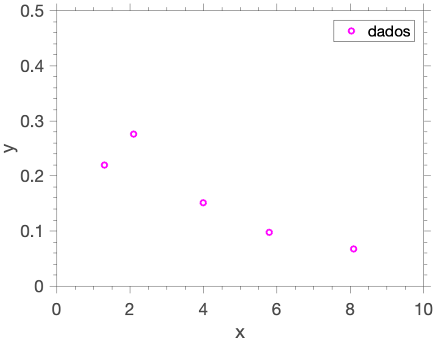
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Esse sistema tem uma única solução!

Experimento computacional 1

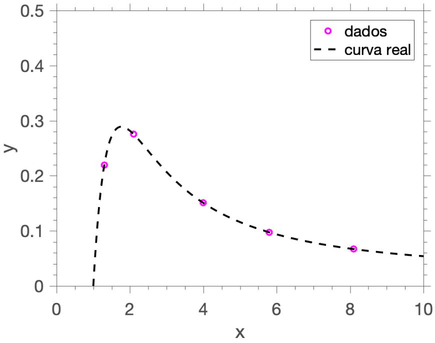
MainInterpExample1.m

```
clc; clear; close all;

f     = @(x) log(x).*exp(sqrt(x))./(log(1+exp(x))+x.^3);
xd  = [1.3 2.1 4.0 5.8 8.1]; yd = f(xd);
xg = 0.1:0.01:10; yg = f(xg);

A    = [xd.^4; xd.^3; xd.^2; xd; ones(1,5)]';
xsol = A\yd';
p1   = xsol(1)*xg.^4 + xsol(2)*xg.^3 + ...
       xsol(3)*xg.^2 + xsol(4)*xg + xsol(5);
A    = [exp(-xd.^2); exp(-xd); xd.^2; xd; ones(1,5)]';
xsol = A\yd';
p2   = xsol(1)*exp(-xg.^2) + xsol(2)*exp(-xg) + ...
       xsol(3)*xg.^2 + xsol(4)*xg + xsol(5);

plot(xd,yd,'om','LineWidth',2);
hold on
plot(xg,yg, '--k','LineWidth',2);
plot(xg,p1,'-.r','LineWidth',2);
plot(xg,p2, '-b','LineWidth',2);
hold off
xlabel('x'); ylabel('y');
set(gca,'FontSize',18);
legend('dados','f(x)','p1(x)','p2(x)');
xlim([0 10]); ylim([0 0.5]);
```

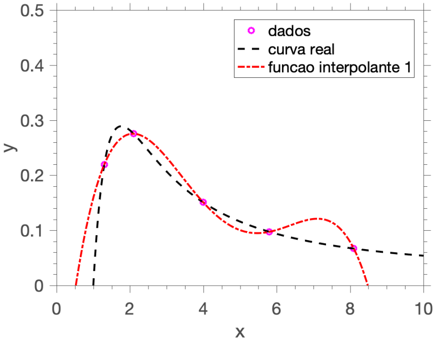


dados
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
y
0
2
4
6
8
10
x

$$f(x) = \frac{\ln x \, e^{\sqrt{x}}}{\ln(1 + e^x) + x^3}$$

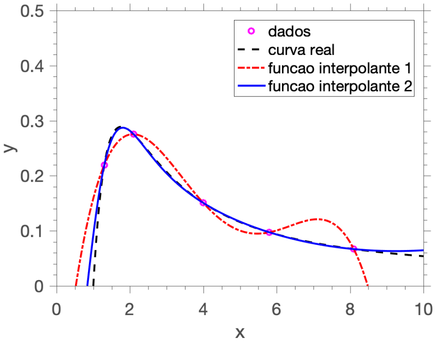


$$f(x) = \frac{\ln x \, e^{\sqrt{x}}}{\ln(1 + e^x) + x^3}$$



$$p_1(x) = c_4\, x^4 + c_3\, x^3 + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0$$

$$f(x) = \frac{\ln x \, e^{\sqrt{x}}}{\ln(1+e^x) + x^3}$$



$$p_1(x) = c_4\, x^4 + c_3\, x^3 + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0$$

$$p_2(x) = c_4\, e^{-x^2} + c_3\, e^{-x} + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0$$

Interpolação polinomial

A função interpolante é assumida como sendo

$$p(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$$

i.e., as funções base são da forma $\phi_j(x) = x^j$ (base monomial).

Interpolação polinomial

A função interpolante é assumida como sendo

$$p(x) = c_n\, x^n + \cdots + c_1\, x + c_0$$

i.e., as funções base são da forma $\phi_j(x) = x^j$ (base monomial).

$$\begin{bmatrix} x_0^n & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}$$

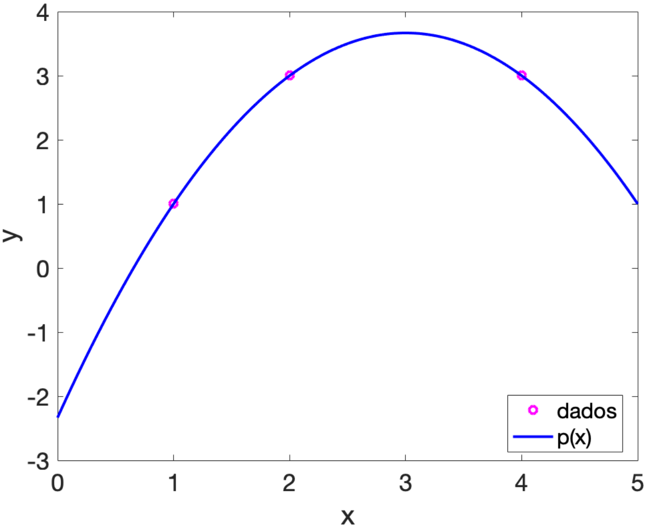
Sistema linear de Vandermonde (solução única)

Experimento computacional 2

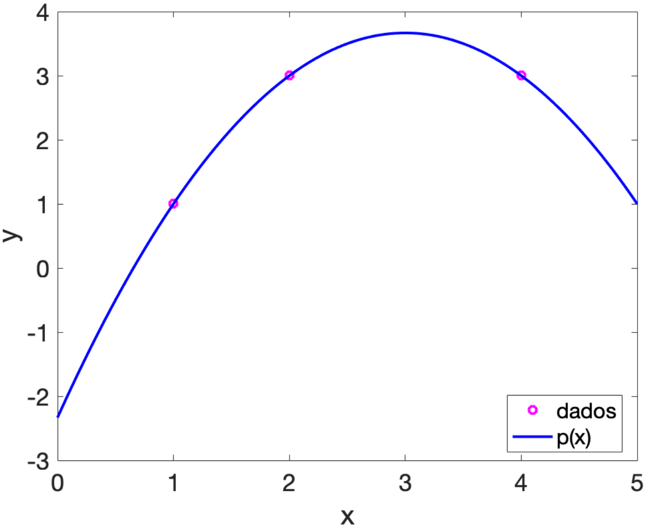
MainInterpExample2.m

```
clc; clear; close all;

xd = [1;2;4];
yd = [1;3;3];

A    = vander(xd)
xsol = A\yd

p = @(x) polyval(xsol, x);
xg = 0:0.01:5;
yg = p(xg);

plot(xd,yd,'om','LineWidth',2);
hold on;
plot(xg,yg,'-b','LineWidth',2);
hold off;
xlabel('x'); ylabel('y');
set(gca,'FontSize',18);
legend('dados','p(x)','Location','south');
```

Experimento computacional 2



Experimento computacional 2



$$p(x) = -\frac{2}{3}\,x^2 + 4\,x - \frac{7}{3}$$

Fundamentação teórica

Teorema (Existência e unicidade do polinômio interpolante)

Para qualquer conjunto real com $n+1$ pontos (abscissas distintas)

$$(x_0, y_0),\ \ (x_1, y_1),\ \ \cdots\ ,\ \ (x_n, y_n),$$

existe um único polinômio $p(x)$ de grau $\leq n$ tal que

$$p(x_j) = y_j\ ,\ \ j = 0, 1, \cdots, n.$$

Simulador de uma epidemia

EPIDEMIC
EPIDEMIOLOGY EDUCATIONAL CODE

S **Suscetíveis**

↓

I **Infectados**

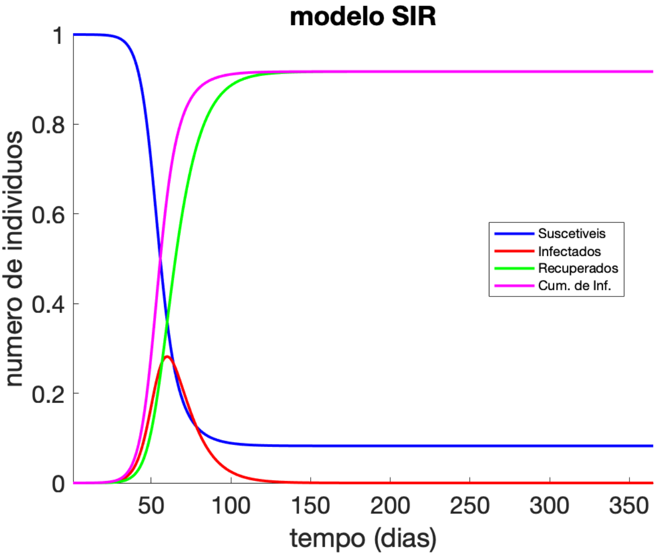
↓

R **Recuperados**

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta\, S\, \frac{I}{N} \\
\frac{dI}{dt} &= \beta\, S\, \frac{I}{N} - \gamma\, I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma\, I \\
&+ \text{ condições iniciais}
\end{aligned}
$$

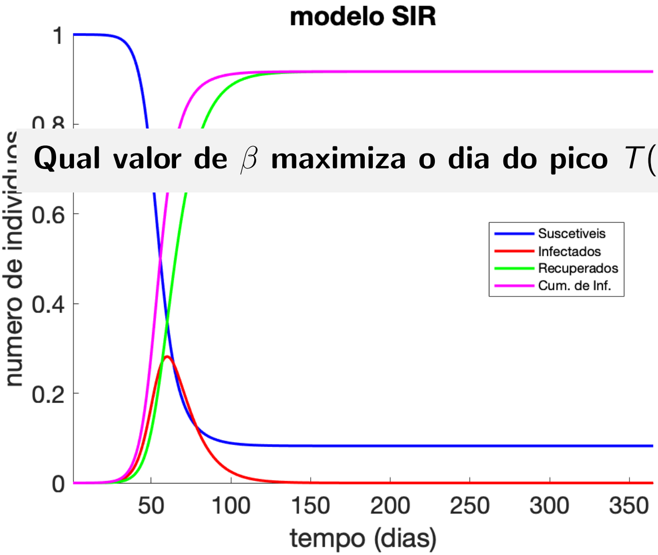
*Simulador disponível em http://www.EpidemicCode.org

Simulador de uma epidemia



* Simulação com $N = 1$, $\beta = 1/3$, $\gamma = 1/10$, $R(0) = 0$, $I(0) = 10^{-6}$, $S(0) = N - I(0) - R(0)$

Simulador de uma epidemia



Qual valor de β maximiza o dia do pico $T(\beta)$?

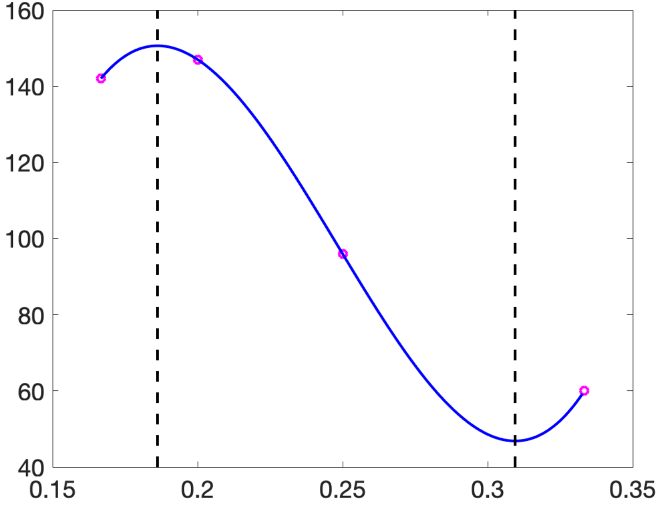
* Simulação com $N = 1$, $\beta = 1/3$, $\gamma = 1/10$, $R(0) = 0$, $I(0) = 10^{-6}$, $S(0) = N - I(0) - R(0)$

Interpolando dados de um simulador

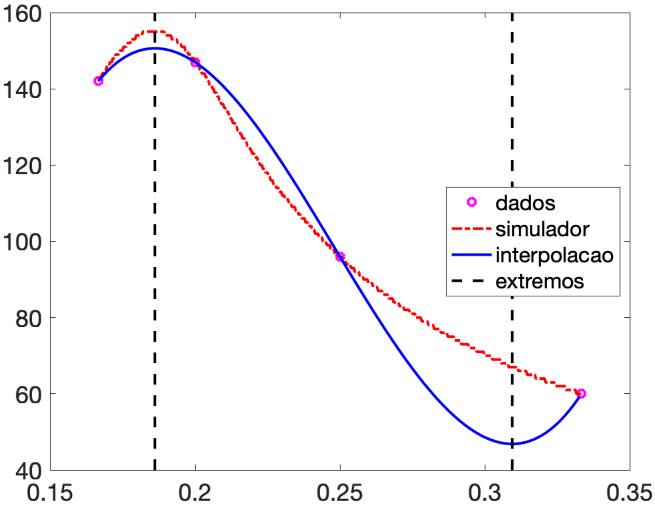
MainInterpExampleSIR.m

```
clc; clear; close all;

  beta    = [1/3 1/4 1/5 1/6];
  T_beta  = [60 96 147 142];
coef_T    = polyfit(beta,T_beta,3);
coef_dT   = polyder(coef_T);
beta_ast  = roots(coef_dT)
      p   = @(x) polyval(coef_T,x);
      x1  = 1/6:0.001:1/3;
      y1  = p(x1);

plot(beta,T_beta,'om',x1,y1,'-b');
hold on
plot([beta_ast(1) beta_ast(1)],[40 160],'--k');
plot([beta_ast(2) beta_ast(2)],[40 160],'--k');
hold off
```

Interpolando dados de um simulador



Interpolando dados de um simulador



Observações sobre interpolação monomial

- Os coeficientes c_j's não têm uma relação óbvia com os valores y_j, o que dificulta sua interpretação;
- Se adicionarmos um novo ponto aos dados, os coeficientes precisarão ser recalculados para obter o novo polinômio interpolante;
- Quando o intervalo de interpolação for muito amplo, ou n for suficientemente grande, a matriz de Vandermonde pode ser mal condicionada (induzindo erros na solução numérica do sistema);
- Se n for suficientemente grande, o custo computacional de resolver o sistema linear $\sim 2/3\, n^3$, ou a quantidade de memória para armazenar o mesmo $n^2 + 2n$, podem ser questões críticas.

Observações sobre interpolação monomial

- Os coeficientes c_j's não têm uma relação óbvia com os valores y_j, o que dificulta sua interpretação;
- Se adicionarmos um novo ponto aos dados, os coeficientes precisarão ser recalculados para obter o novo polinômio interpolante;
- Quando o intervalo de interpolação for muito amplo, ou n for suficientemente grande, a matriz de Vandermonde pode ser mal condicionada (induzindo erros na solução numérica do sistema);
- Se n for suficientemente grande, o custo computacional de resolver o sistema linear $\sim 2/3\, n^3$, ou a quantidade de memória para armazenar o mesmo $n^2 + 2n$, podem ser questões críticas.

Todas essas questões podem ser contornadas utilizando outras funções base!

Interpolação de Lagrange

A função interpolante é assumida como sendo

$$p(x) = y_0\, L_0^n(x) + y_1\, L_1^n(x) + \cdots + y_n\, L_n^n(x),$$

onde os polinômios de Lagrange são dados por

$$L_j^n(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Note que $L_j^n(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Interpolação de Lagrange

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_0
\end{bmatrix}
$$

Sistema linear com solução trivial ($c_j = y_j$)

Interpolação de Lagrange

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \\ \vdots \\ \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \\ \vdots \\ \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Sistema linear com solução trivial ($c_j = y_j$)

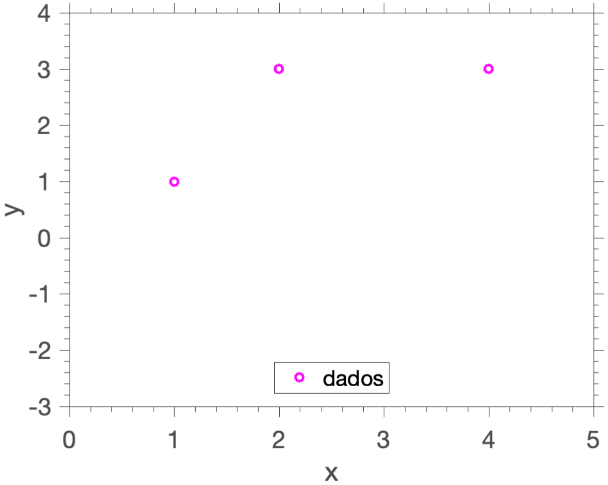
Não é preciso resolver um sistema linear para construir o polinômio de Lagrange, basta construir as funções base.

Experimento computacional 3

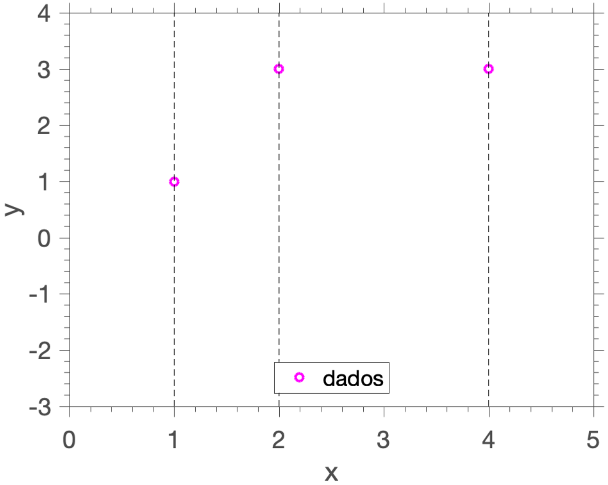
MainInterpExample3.m

```
clc; clear; close all;

xd = [1;2;4]; yd = [1;3;3];

L0 = @(x)  (1/3)*(x-2).*(x-4);
L1 = @(x) -(1/2)*(x-1).*(x-4);
L2 = @(x)  (1/6)*(x-1).*(x-2);
p  = @(x) yd(3)*L2(x) + yd(2)*L1(x) + yd(1)*L0(x);

xg = 0:0.01:5; yg = p(xg);

plot(xd,yd,'om','LineWidth',2);
hold on
plot(xg,L2(xg),'--r','LineWidth',1);
plot(xg,L1(xg),'-.c','LineWidth',1);
plot(xg,L0(xg), ':g','LineWidth',1);
plot(xg,yg,'-b','LineWidth',2);
plot([xd(1),xd(1)],[-3,4],'--k','LineWidth',0.5);
plot([xd(2),xd(2)],[-3,4],'--k','LineWidth',0.5);
plot([xd(3),xd(3)],[-3,4],'--k','LineWidth',0.5);
hold off
xlabel('x'); ylabel('y');
set(gca,'FontSize',18);
legend('dados','L2','L1','L0','p(x)','Location','south');
```

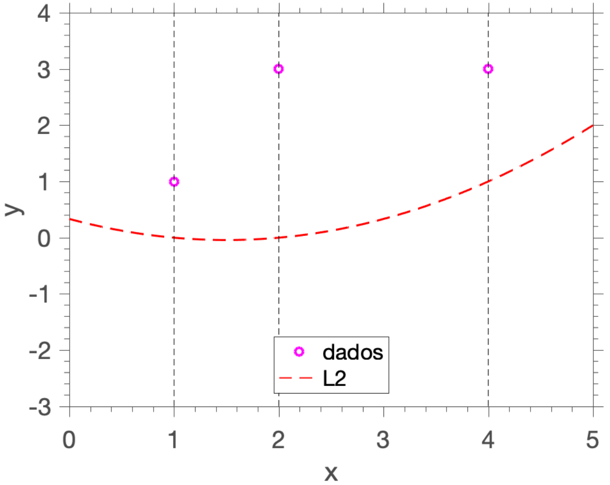
Experimento computacional 3



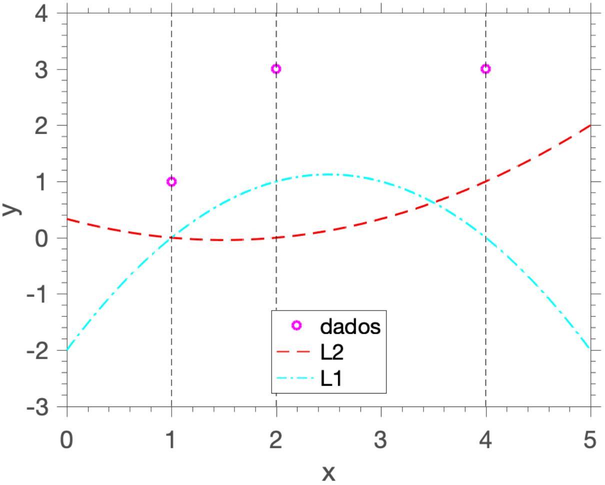
Experimento computacional 3



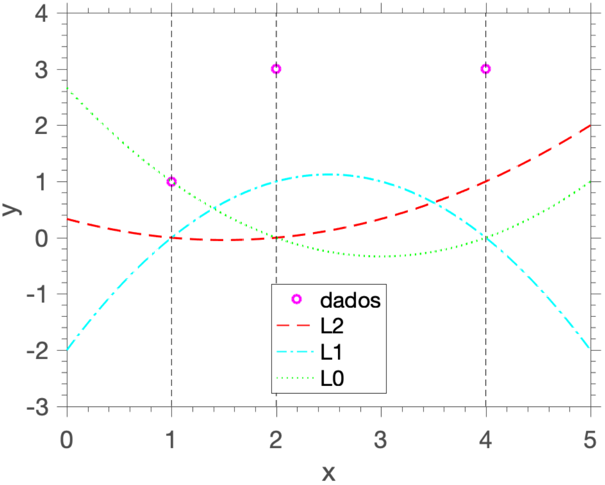
Experimento computacional 3



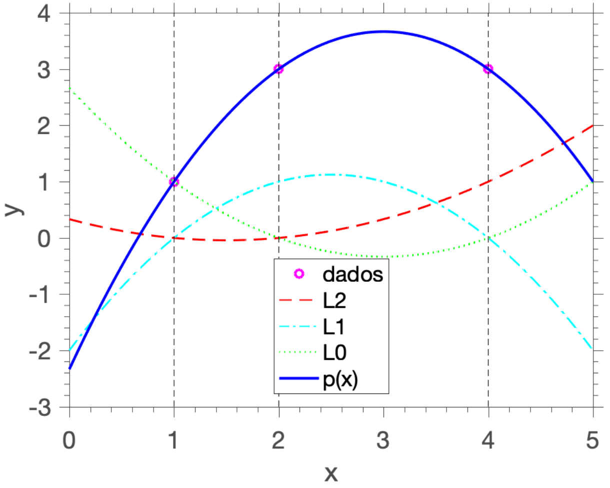
Experimento computacional 3



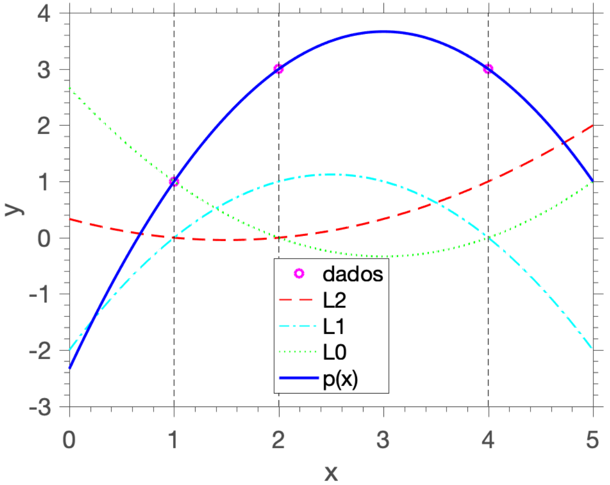
Experimento computacional 3



Experimento computacional 3



Experimento computacional 3



$$p(x) = -\frac{2}{3}\,x^2 + 4\,x - \frac{7}{3}$$

Implementação em GNU Octave

InterpLagrange.m

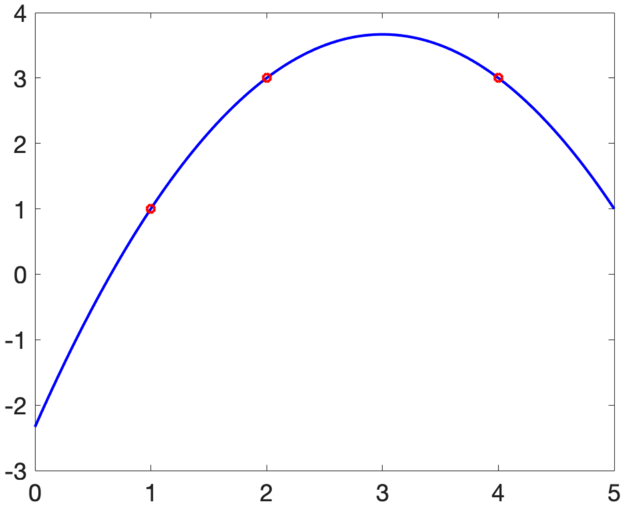
```
function y = InterpLagrange(xd,yd,x)
  n = length(xd);
  L = ones(n,length(x));
  for i = 1:n
   for j = 1:n
    if i ~= j
     L(i,:) = L(i,:).*(x-xd(j))./(xd(i)-xd(j));
    end
   end
  end
  y = yd'*L;
end
```

Experimento computacional 3 (revisado)

MainInterpExample3Rev.m

```
clc; clear; close all

xd = [1; 2; 4];
yd = [1; 3; 3];

xg = 0:0.01:5;
yg = InterpLagrange(xd,yd,xg);

plot(xg,yg,'b',xd,yd,'or');
```

Experimento computacional 3 (revisado)



Observações sobre interpolação de Lagrange

- Os coeficientes agora têm um significado claro, eles são iguais ao valores y_j;
- Se adicionarmos um novo ponto aos dados, os coeficientes precisarão ser recalculados para obter o novo polinômio interpolante;
- Como a matriz do sistema é a identidade, o processo de construção do polinômio é muito estável. Na prática não se resolve o sistema diagonal, existe um algoritmo bem eficiente baseado em interpolação baricêntrica.

Interpolação de Newton

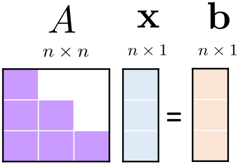
A função interpolante é assumida como sendo

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

i.e., as funções base são da forma

$$\phi_j(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i).$$

Os coeficientes são definidos por um sistema triangular inferior

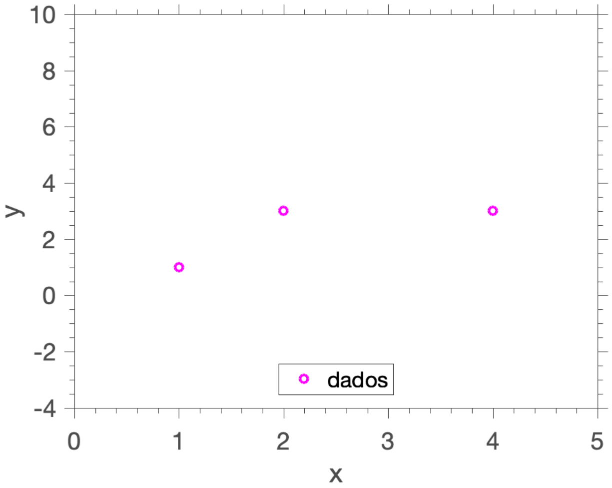


Experimento computacional 4

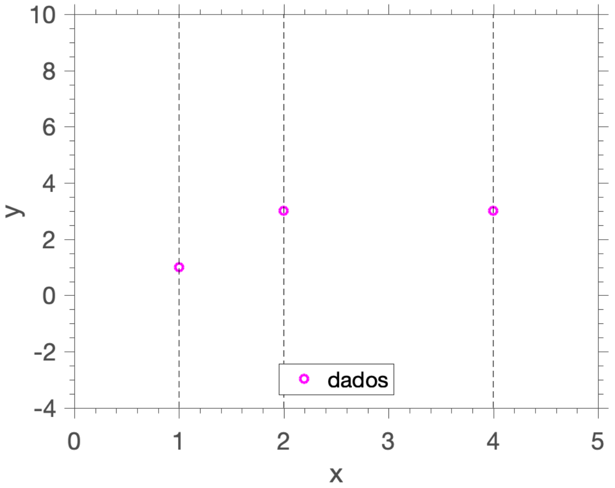
MainInterpExample4.m

```
clc; clear; close all;

xd = [1;2;4]; yd = [1;3;3];
p0 = @(x)  1*ones(size(x));
p1 = @(x) p0(x) + 2*(x-1);
p2 = @(x) p1(x) - (2/3)*(x-1).*(x-2);
xg = 0:0.01:5;

plot(xd,yd,'om','LineWidth',2);
hold on
plot(xg,p0(xg),'--r','LineWidth',2);
plot(xg,p1(xg),'-.c','LineWidth',2);
plot(xg,p2(xg), '-b','LineWidth',2);
plot([xd(1),xd(1)],[-4,10],'--k','LineWidth',0.5);
plot([xd(2),xd(2)],[-4,10],'--k','LineWidth',0.5);
plot([xd(3),xd(3)],[-4,10],'--k','LineWidth',0.5);
hold off
xlabel('x'); ylabel('y');
set(gca,'FontSize',18);
xlim([0 5]); ylim([-4 10]);
legend('dados','p_0(x)','p_1(x)','p_2(x)','Location','south')
```

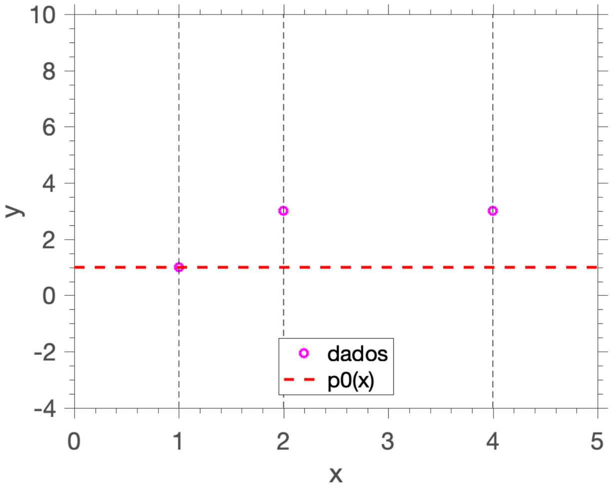
Experimento computacional 4



Experimento computacional 4

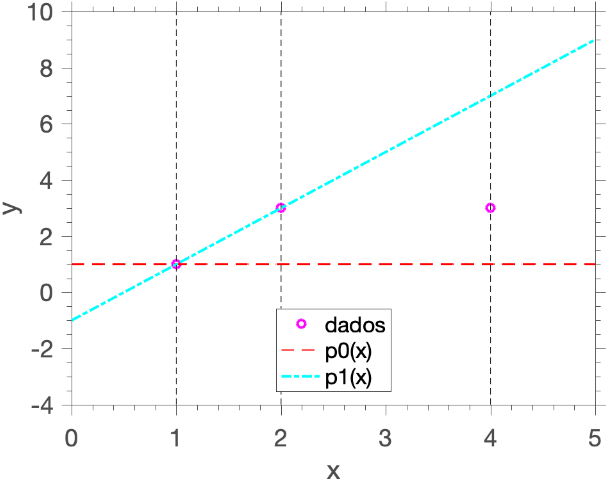


Experimento computacional 4



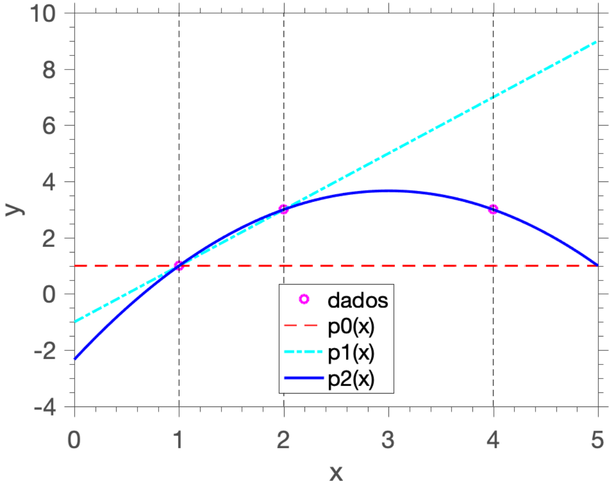
$$p_0(x) = 1$$

Experimento computacional 4



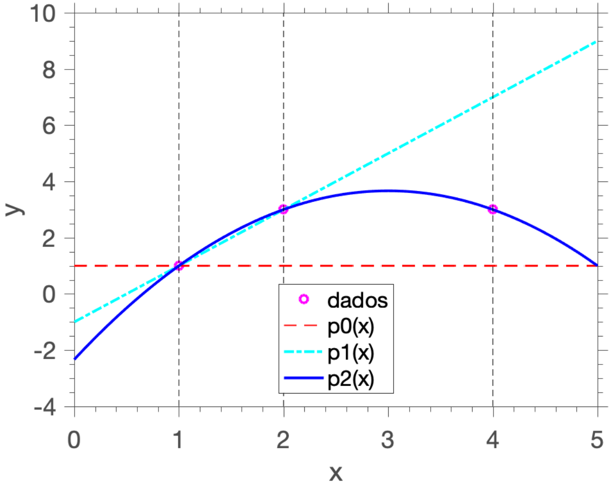
$$p_1(x) = p_0(x) + c_1(x-1) = 1 + 2\,(x-1)$$

Experimento computacional 4



$$p_2(x) = p_1(x) + c_2(x-1)(x-2) = 1 + 2\,(x-1) - \tfrac{2}{3}\,(x-1)(x-2)$$

Experimento computacional 4



$$p_2(x) = -\frac{2}{3}\,x^2 + 4\,x - \frac{7}{3}$$

Implementação em GNU Octave

InterpNewton.m

```
function y = InterpNewton(x,xd,coef)
  n = length(xd);
  y = coef(n)*ones(size(x));
  for j=n-1:-1:1
    y = y.*(x - xd(j)) + coef(j);
  end
end
```

Implementação em GNU Octave

DivDif.m

```
function [coef,tab] = DivDif(xd,yd)
   n = length(xd)-1;
   tab = zeros(n+1,n+1);
   xd = shiftdim(xd);
   yd = shiftdim(yd);
   tab(1:n+1,1) = yd;
   for k = 2:n+1
      num = tab(k:n+1,k-1)-tab(k-1:n,k-1);
      den = xd(k:n+1)-xd(1:n+1-k+1);
      tab(k:n+1,k) = num./den;
   end
   coef = diag(tab);
end
```

Implementação em GNU Octave

DivDifAdd.m

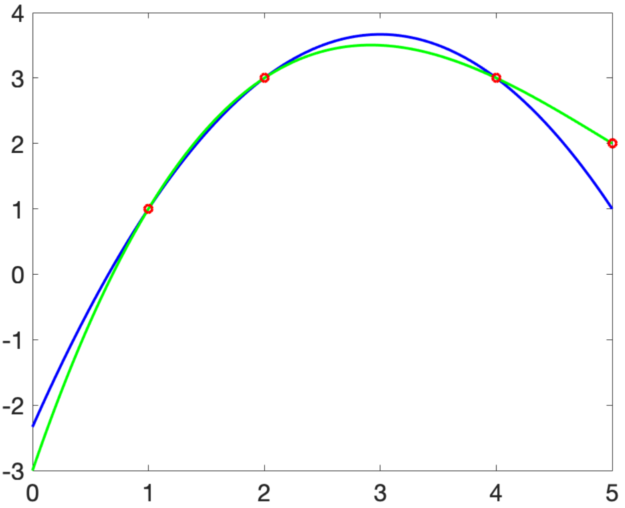
```
function [coef,tab] = DivDifAdd(xd,yd,tab)
   n = length(xd)-1;
   tab = [tab zeros(n,1); yd(n+1) zeros(1,n)];
   for k=2:n+1
      num = tab(n+1,k-1)-tab(n,k-1);
      den = xd(n+1)-xd(n+1-k+1);
      tab(n+1,k) = num/den;
   end
   coef = diag(tab);
end
```

Experimento computacional 4 (revisado)

MainInterpExample4Rev.m

```
clc; clear; close all;

xd1 = [1; 2; 4];     yd1 = [1; 3; 3];
xd2 = [1; 2; 4; 5]; yd2 = [1; 3; 3; 2];

[c1,tab1] = DivDif(xd1,yd1);
[c2,tab2] = DivDifAdd(xd2,yd2,tab1);

xg = 0:0.01:5;
yg1 = InterpNewton(xg,xd1,c1);
yg2 = InterpNewton(xg,xd2,c2);

plot(xg,yg1,'b');
hold on
plot(xg,yg2,'g',xd2,yd2,'or');
hold off
```

Experimento computacional 4 (revisado)



Custo e características do problema de interpolação

base	$\phi_j(x)$	custo de construção	custo de avaliação	características notáveis
monomial	x^j	$\sim \frac{2}{3}\,n^3$	$\sim 2\,n$	simplicidade
Lagrange	$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$	$\sim 2\,n^2$	$\sim 5\,n$	interpretabilidade e estabilidade
Newton	$\prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i)$	$\sim \frac{3}{2}\,n^2$	$\sim 2\,n$	adaptatividade

Erro na interpolação polinomial

Teorema (Erro da interpolação polinomial)

Se o polinômio $p_n(x)$ interpola a função $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ nos pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, então o erro da interpolação é dado por

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

onde $\xi \in [a,b]$.

Como citar esse material?

A. Cunha Jr, *Interpolação*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr @AmericoCunhaJr