Decomposição Cholesky
e outras Fatorações Matriciais

Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org

in @AmericoCunhaJr

▶ @AmericoCunhaJr   ⬡ @AmericoCunhaJr

A decomposição LU de uma matriz simética não é simétrica!

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{array}\right]}_{L} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right]}_{U}$$

A decomposição LU de uma matriz simética não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$$

É possível simetrizar essa fatoração?

A decomposição LU de uma matriz simética não é simétrica!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$$

É possível simetrizar essa fatoração?

Existe um caso especial onde a resposta é afirmativa!

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}
$$

$$
=
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L}
\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}
$$

Simetrizando a fatoração LU

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}
$$

$$=$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L}
\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{D}
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^{T}}
$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

$$=$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}^{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^{T}}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

$$=$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{G^{T}}$$

Simetrizando a fatoração LU

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}
$$

$$
=
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{G^T}
$$

Essa simetrização é possível desde que a matriz simétrica também seja positiva definida, i.e., $x^T A x > 0$, para qualquer $x \neq 0$.

Fundamentação teórica

Teorema (existência e unicidade da fatoração Cholesky)

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica positiva definida (SPD), então ela admite uma única fatoração

$$A = G\, G^{T},$$

onde $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal principal positiva.

$$
\begin{array}{ccc}
A & G & G^{T} \\
n \times n & n \times n & n \times n
\end{array}
$$

matriz SPD   =   triangular inferior   triangular superior
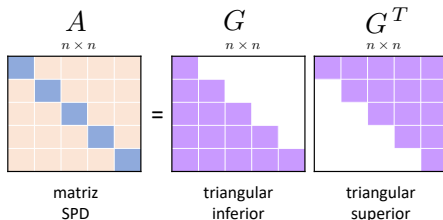
Vantagens da fatoração Cholesky

- Como a matriz do sistema é simétrica positiva definida, não é necessário usar nenhuma estratégia de pivotamento;

- Menor custo de memória para armazenar o sistema linear, em comparação a um sistema "cheio" não simétrico

$$\texttt{mem}(\textbf{sistema SPD}) = n(n+1)/2 + 2\,n$$

- Tempo de processamento duas vezes menor, em comparação à fatoração LU, para realizar a triangularização

$$\texttt{flops}(\textbf{Cholesky}) \sim \frac{1}{3}\,n^3$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix}
4 & 12 & -16 \\
12 & 37 & -43 \\
-16 & -43 & 98
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_{11} & 0 & 0 \\
g_{21} & g_{22} & 0 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
g_{11} & g_{21} & g_{31} \\
0 & g_{22} & g_{32} \\
0 & 0 & g_{33}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\
g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\
g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2
\end{bmatrix}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix}
4 & 12 & -16 \\
12 & 37 & -43 \\
-16 & -43 & 98
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_{11} & 0 & 0 \\
g_{21} & g_{22} & 0 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
g_{11} & g_{21} & g_{31} \\
0 & g_{22} & g_{32} \\
0 & 0 & g_{33}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\
g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\
g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2
\end{bmatrix}
$$

$$
g_{11}^2 = 4
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
g_{11}^2 = 4 \Rightarrow g_{11} = 2
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix}
4 & 12 & -16 \\
12 & 37 & -43 \\
-16 & -43 & 98
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_{11} & 0 & 0 \\
g_{21} & g_{22} & 0 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
g_{11} & g_{21} & g_{31} \\
0 & g_{22} & g_{32} \\
0 & 0 & g_{33}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\
g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\
g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 &&
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rclclcl}
g_{11}^2 & = & 4 & \Rightarrow & g_{11} & = & 2 \\
g_{21}\,g_{11} & = & 12 & \Rightarrow & g_{21} & = & 6
\end{array}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\,g_{11} &= -16 &
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rclcrcr}
g_{11}^2 & = & 4 & \Rightarrow & g_{11} & = & 2 \\
g_{21}\,g_{11} & = & 12 & \Rightarrow & g_{21} & = & 6 \\
g_{31}\,g_{11} & = & -16 & \Rightarrow & g_{31} & = & -8
\end{array}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\,g_{11} &= -16 &\Rightarrow\quad g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix}
4 & 12 & -16 \\
12 & 37 & -43 \\
-16 & -43 & 98
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_{11} & 0 & 0 \\
g_{21} & g_{22} & 0 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
g_{11} & g_{21} & g_{31} \\
0 & g_{22} & g_{32} \\
0 & 0 & g_{33}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\
g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\
g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\,g_{11} &= -16 &\Rightarrow\quad g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 &\Rightarrow\quad g_{22} &= 1
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix}
4 & 12 & -16 \\
12 & 37 & -43 \\
-16 & -43 & 98
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_{11} & 0 & 0 \\
g_{21} & g_{22} & 0 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
g_{11} & g_{21} & g_{31} \\
0 & g_{22} & g_{32} \\
0 & 0 & g_{33}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\
g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\
g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\,g_{11} &= -16 &\Rightarrow\quad g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 &\Rightarrow\quad g_{22} &= 1 \\
g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} &= -43 &&
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\, g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\, g_{11} & g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow&\quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\, g_{11} &= 12 &\Rightarrow&\quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\, g_{11} &= -16 &\Rightarrow&\quad g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 &\Rightarrow&\quad g_{22} &= 1 \\
g_{31}\, g_{21} + g_{32}\, g_{22} &= -43 &\Rightarrow&\quad g_{32} &= 5
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}^2 &= 4 &\Rightarrow\quad g_{11} &= 2 \\
g_{21}\,g_{11} &= 12 &\Rightarrow\quad g_{21} &= 6 \\
g_{31}\,g_{11} &= -16 &\Rightarrow\quad g_{31} &= -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 &= 37 &\Rightarrow\quad g_{22} &= 1 \\
g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} &= -43 &\Rightarrow\quad g_{32} &= 5 \\
g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 &= 98 & &
\end{aligned}
$$

Como calcular a fatoração Cholesky?

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^2 & & \text{simétrica} \\ g_{21}\,g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & \\ g_{31}\,g_{11} & g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcrcl}
g_{11}^2 & = & 4 & \Rightarrow & g_{11} & = & 2 \\
g_{21}\,g_{11} & = & 12 & \Rightarrow & g_{21} & = & 6 \\
g_{31}\,g_{11} & = & -16 & \Rightarrow & g_{31} & = & -8 \\
g_{21}^2 + g_{22}^2 & = & 37 & \Rightarrow & g_{22} & = & 1 \\
g_{31}\,g_{21} + g_{32}\,g_{22} & = & -43 & \Rightarrow & g_{32} & = & 5 \\
g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 & = & 98 & \Rightarrow & g_{33} & = & 3
\end{array}$$

Para pensar em casa …

> **Exercício computacional:**
>
> Pense num algoritmo eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a fatoração Cholesky.
>
> Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave.

Experimento Computacional 1

$$
\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

```
>>  A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
>>  G = chol(A)
>>  A-G'*G
```

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\,G^{T}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\underbrace{G^T\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\underbrace{G^T\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\,\mathbf{y} & = & \mathbf{b} \\ G^T\mathbf{x} & = & \mathbf{y} \end{cases}$$

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G \underbrace{G^T \mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\,\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ G^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$
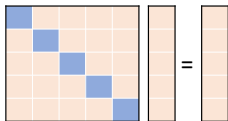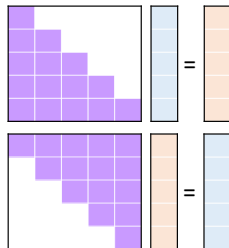
Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G\,\underbrace{G^T\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\,\mathbf{y} &=& \mathbf{b} \\ G^T\mathbf{x} &=& \mathbf{y} \end{cases}$$

1. Calcular a fatoração $A = G\,G^T$;
2. Resolver por substituição progressiva $G\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $G^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Como resolver um sistema linear via fatoração Cholesky?
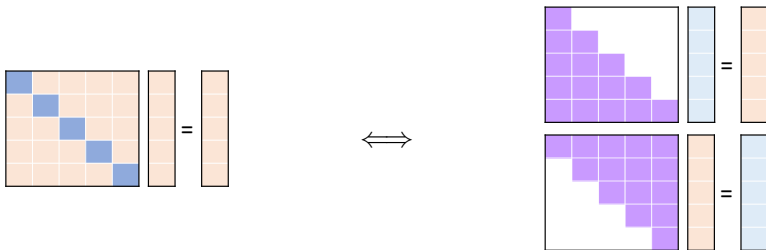
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff G \underbrace{G^T\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} G\,\mathbf{y} &=& \mathbf{b} \\ G^T\mathbf{x} &=& \mathbf{y} \end{cases}$$

1. Calcular a fatoração $A = G\,G^T$;
2. Resolver por substituição progressiva $G\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Resolver por substituição regressiva $G^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\texttt{flops}\,(\textbf{sistema via Cholesky}) \sim \frac{1}{3}\,n^3 + 2\,n^2$$

Outras fatorações matriciais

Decomposição QR
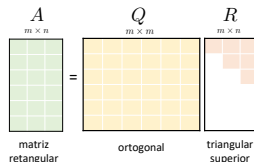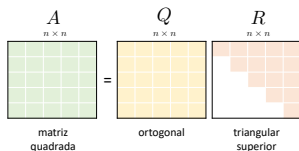
Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita *ortogonal* se $Q\,Q^T = Q^T\,Q = I$, i.e., $Q^{-1} = Q^T$

Decomposição SVD
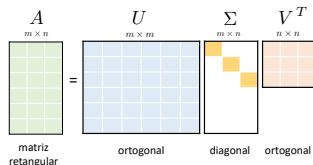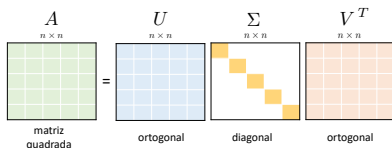
Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$

```
>>  A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
>>  [Q,R] = qr(A)
>>  A-Q*R
>>  [U,Sigma,V] = svd(A)
>>  A-U*Sigma*V'
```

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Decomposição QR

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ Q\,R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R\,\mathbf{x} &= Q^{\mathsf{T}}\mathbf{b} \end{aligned}$$
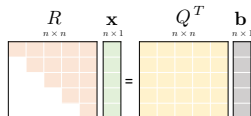
Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\,\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

Decomposição SVD

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\,\mathbf{x} = Q^{T}\mathbf{b}$$

Decomposição SVD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\,\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

Decomposição SVD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$U\,\Sigma\,V^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\,\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

Decomposição SVD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$U\,\Sigma\,V^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\Sigma\,V^T\mathbf{x} = U^T\mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\,\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

Decomposição SVD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$U\,\Sigma\,V^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\Sigma\,V^T\mathbf{x} = U^T\mathbf{b}$$
$$V^T\mathbf{x} = \Sigma^{-1}U^T\mathbf{b}$$

Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\,\mathbf{x} = Q^{T}\mathbf{b}$$

Decomposição SVD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$U\,\Sigma\,V^{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\Sigma\,V^{T}\mathbf{x} = U^{T}\mathbf{b}$$
$$V^{T}\mathbf{x} = \Sigma^{-1}\,U^{T}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = V\,\Sigma^{-1}\,U^{T}\mathbf{b}$$
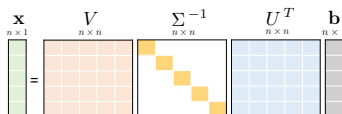
Outras estratégias de solução para sistemas lineares

Decomposição QR

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$Q\,R\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$R\,\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

Decomposição SVD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$U\,\Sigma\,V^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\Sigma\,V^T\mathbf{x} = U^T\mathbf{b}$$
$$V^T\mathbf{x} = \Sigma^{-1}\,U^T\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = V\,\Sigma^{-1}\,U^T\mathbf{b}$$

Comparação entre alguns métodos diretos

fatoração	flops	estabilidade	custo
LU	$\sim \dfrac{2}{3}\,n^3$	$\star$	$1 \times$ \$
LUP	$\sim \dfrac{2}{3}\,n^3$	$\star\star$	$1 \times$ \$
Cholesky	$\sim \dfrac{1}{3}\,n^3$	$\star\star\star$	$1/2 \times$ \$
QR	$\sim \dfrac{4}{3}\,n^3$	$\star\star\star\star$	$2 \times$ \$
SVD	$\sim 13n^3$	$\star\star\star\star\star$	$20 \times$ \$

Como resolver sistemas lineares no GNU Octave?

Resolver um sistema linear no GNU Octave é tão simples quanto

$$x = A \setminus b$$

O comando "\" (backslash) é um atalho para chamar um algoritmo bem robusto para solução de sistemas lineares. Tal algoritmo faz uma análise prévia da estrutura da matriz A, para então usar a melhor técnica de solução disponível para o sistema em questão.

```
>>  A = [4 12 -16; 12 37 -43; -16 -43 98]
>>  b = [1; 1; 1]
>>  x = A \ b
```

Como citar esse material?

A. Cunha, *Decomposição Cholesky e outras Fatorações Matriciais*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr

@AmericoCunhaJr