

Eliminação Gaussiana


Prof. Americo Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

americo.cunha@uerj.br

www.americocunha.org



 @AmericoCunhaJr



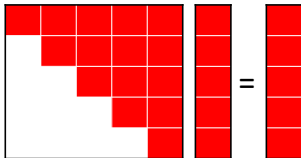
@AmericoCunhaJr



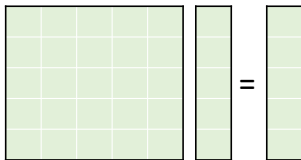
@AmericoCunhaJr



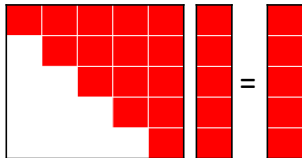
Num sistema linear triangular, existe um desacoplamento entre as equações, que facilita a solução!



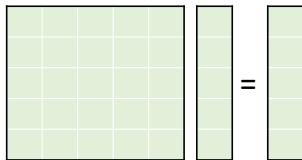
Num sistema linear “cheio”, não existe tal desacoplamento!



Num sistema linear triangular, existe um desacoplamento entre as equações, que facilita a solução!



Num sistema linear “cheio”, não existe tal desacoplamento!



Como proceder nesse caso?

Sistema $n \times n$ “cheio”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é “cheia”, i.e., *não tem uma estrutura especial com muitos zeros*;
- Em geral, nesse sistema linear as *equações são acopladas*, cada equação depende de todas as demais equações;
- O *método direto* padrão para resolver esse tipo de sistema linear é chamado *eliminação gaussiana*.



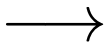
Eliminação Gaussiana

Ideia do método:

- Transformar o sistema “cheio” num sistema triangular, que seja equivalente ao sistema original (tenha a mesma solução);
- Resolver o sistema triangular por substituição.

Sistema Original

$$\begin{array}{c} A \\ n \times n \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ n \times 1 \end{array} = \begin{array}{c} b \\ n \times 1 \end{array}$$



Eliminação
Gaussiana

Sistema Equivalente (mesma solução)

$$\begin{array}{c} \tilde{A} \\ n \times n \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ n \times 1 \end{array} = \begin{array}{c} \tilde{b} \\ n \times 1 \end{array}$$

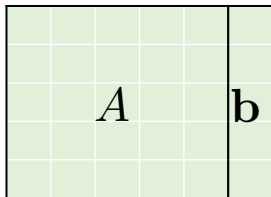


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

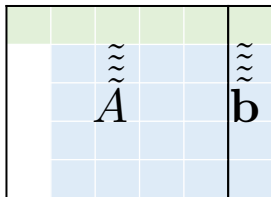


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

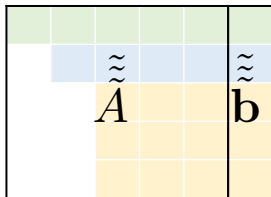


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

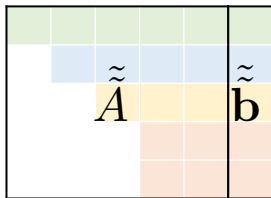


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

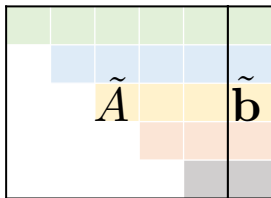


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:

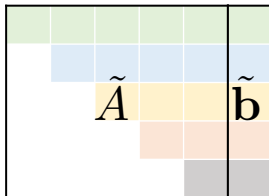


Como transformar um sistema “cheio” num triangular?

Através de uma sequência de *operações elementares*:

- trocar duas linhas de posição;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- somar um múltiplo de uma linha à outra linha.

O sistema original, em formato estendido, é alterado coluna por coluna até chegar num formato triangular superior equivalente:



Também é possível aplicar o algoritmo operando nas colunas.

O procedimento de eliminação

$$\left[A^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right]$$



O procedimento de eliminação

Passo 1: anular todos os elementos abaixo do pivô $a_{11}^{(1)}$:

$$\left[A^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right]$$

Para $i = 2, \dots, n$, atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$$



O procedimento de eliminação

$$\left[A^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right]$$



O procedimento de eliminação

Passo 2: anular todos os elementos abaixo do pivô $a_{22}^{(2)}$:

$$\left[A^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right]$$

Para $i = 3, \dots, n$, atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2^{(2)}$$



O procedimento de eliminação

$$\left[A^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right]$$



O procedimento de eliminação

Passo 3: anular todos os elementos abaixo do pivô $a_{33}^{(3)}$:

$$\left[A^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right]$$

Para $i = 4, \dots, n$, atualize as linhas segundo:

$$L_i^{(4)} \leftarrow L_i^{(3)} - \frac{a_{i3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} L_3^{(3)}$$



O procedimento de eliminação

... continua até a coluna $(n - 1)$



O procedimento de eliminação

$$\left[A^{(n)} \mid \mathbf{b}^{(n)} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array} \right]$$



O procedimento de eliminação

A *fórmula geral da eliminação gaussiana* é dada por

$$L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)}$$

onde $k = 1, 2, \dots, n - 1$.



Algoritmo para a eliminação gaussiana

Input: A , b

```
1: Compute the length of  $b$ 
2: for  $k=1:n-1$  do
3:   for  $i=k+1:n$  do
4:      $l_{ik} = -a_{ik}/a_{kk}$ 
5:     for  $j=1:n$  do
6:        $a_{ij} = a_{ij} + l_{ik} a_{kj}$ 
7:     end for
8:      $b_i = b_i + l_{ik} b_k$ 
9:   end for
10: end for
11: Compute  $x$  with backward substitution
12: return
```

Output: x

Esse algoritmo tem uma implementação pedagógica da eliminação gaussiana,
não é o mais eficiente do ponto de vista computacional.



Implementação em GNU Octave

```
1 function [x,A,b] = gauss(A,b)
2   n = length(b);
3   for k=1:n-1
4     for i=k+1:n
5       Lik = -A(i,k)/A(k,k);
6       for j=1:n
7         A(i,j) = A(i,j) + Lik*A(k,j);
8       end
9       b(i) = b(i) + Lik*b(k);
10    end
11  end
12  x = backsubsub(A,b);
13 end
```



Experimento Computacional 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [2 1 -1; -3 -1 2; -2 1 2]
>> b = [8; -11; -3]
>> [x,A,b] = gauss(A,b)
```



Experimento Computacional 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1 2 3 4; 2 1 4 3; 3 2 1 4; 4 3 2 1]
>> b = [10; 10; 10; 10]
>> [x,A,b] = gauss(A,b)
```



Experimento Computacional 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



```
>> A = [1 1 1; 1 1 2; 1 2 2]
>> b = [1; 2; 1]
>> [x,A,b] = gauss(A,b)
```

Qual o problema nesse último experimento?



Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:



Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$



Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$



Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$



Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!



Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{NaN} & \text{NaN} & -\infty & -\infty \end{array} \right]$$



Qual o problema nesse último experimento?

Eliminação Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{\mathbf{0}} L_2$$

Divisão por zero, perigo!


$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{NaN} & \mathbf{NaN} & -\infty & -\infty \end{array} \right]$$

Os demais cálculos são comprometidos por **NaN** e $-\infty$.




Para pensar em casa ...

Exercício computacional:

Pense num algoritmo mais eficiente (em termos de processamento e uso de memória) para implementar a eliminação gaussiana. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave. 

Exercício computacional:

Pense num algoritmo para a eliminação gaussiana, que resolva o problema de ter um denominador nulo durante o processo de escalonamento da matriz estendida. Implemente esse algoritmo no ambiente GNU Octave. 

Mais a frente nesse curso veremos como remediar essa questão do denominador nulo.



Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição



Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}}\end{aligned}$$



Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}} \\ &\sim \frac{2}{3} n^3\end{aligned}$$



Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}} \\ &\sim \frac{2}{3} n^3\end{aligned}$$

Processamento:

Memória:



Qual o custo computacional de um sistema cheio?

Elim. Gauss. = Triangularização + Substituição

$$\begin{aligned}\text{flops}(\mathbf{Triangularização}) &\approx \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}_{\text{divisões}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{multiplicações}} + \\ &\quad \underbrace{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1}_{\text{subtrações}} \\ &\sim \frac{2}{3} n^3\end{aligned}$$

Processamento:

$$\text{flops}(\mathbf{Gauss}) \sim \frac{2}{3} n^3 + n^2$$

Memória:

$$\text{mem}(\mathbf{cheio}) = n^2 + 2n$$



Tempo de processamento para um sistema “cheio”

Intel Core i7 em 2011: 12×10^9 flops/sec

Intel Core i7 em 2021: 52×10^9 flops/sec

n	flops (Elim. Gauss.)	Tempo de CPU	
		2011	2021
10	767	64 ns	14 ns
10^2	$6,7 \times 10^5$	56 μ s	13 μ s
10^3	$6,7 \times 10^8$	56 ms	13 ms
10^4	$6,7 \times 10^{11}$	56 s	13 s
10^5	$6,7 \times 10^{14}$	15 horas	4 horas
10^6	$6,7 \times 10^{17}$	643 dias	148 dias
10^7	$6,7 \times 10^{20}$	1,7k anos	406 anos
10^8	$6,7 \times 10^{23}$	1,7M anos	406k anos

<https://en.wikipedia.org/wiki/FLOPS>

<https://www.cpubenchmark.net>

Uso de memória para um sistema “cheio”

1 double = 8 bytes

n	entradas	memória
10	120	1 kB
10^2	10×10^3	80 kB
10^3	1×10^6	8 MB
10^4	100×10^6	763 MB
10^5	10×10^9	75 GB
10^6	1×10^{12}	7 TB
10^7	100×10^{12}	727 TB
10^8	1×10^{16}	71 PB



Moral sobre sistemas lineares “cheios”

1. Sistemas lineares “cheios” são muito desafiadores, tanto em tempo de CPU quanto ao uso de memória;
2. Sistemas “cheios” que são intratáveis via métodos diretos podem ser atacados por métodos iterativos junto com estratégias de armazenamento otimizadas;
3. Na maioria das aplicações práticas as matrizes tem estruturas especiais (e.g. simétrica, em banda etc), que podem ser exploradas para reduzir tempo de CPU e uso de memória;
4. O método numérico a ser utilizado na solução do sistema linear, bem como a estratégia de armazenamento, devem ser escolhidos com sabedoria!



Como citar esse material?

A. Cunha, *Eliminação Gaussiana*,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 2021.



 @AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr



@AmericoCunhaJr

Essas notas de aula podem ser compartilhadas nos termos da licença Creative Commons BY-NC-ND 3.0, com propósitos exclusivamente educacionais.

