باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

۲۵۶۴۵ ـ علوم اعصاب یادگیری، حافظه، شناخت ـ بهار ۹۹ ـ ۱۳۹۸

تمرین سری چهارم: مسائل فصل‌های اوّل تا چهارم

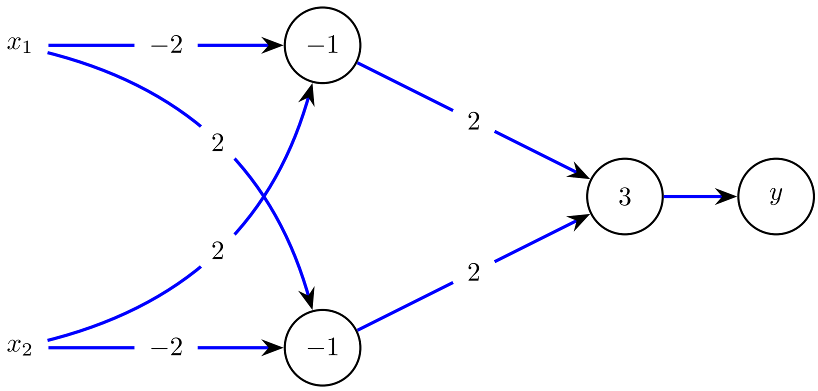
موعد تحویل: جمعه ۹ خرداد، ساعت ۲۳:۵۵

نحوه‌ی تحویل: پاسخ پرسش‌های این تمرین را به صورت یک فایل pdf در سایت درس بارگذاری کنید.

---

۱ شبکه‌های عصبی

شبکه‌ی عصبی موجود در شکل ۱ را که از سه perceptron تشکیل شده است، در نظر بگیرید.

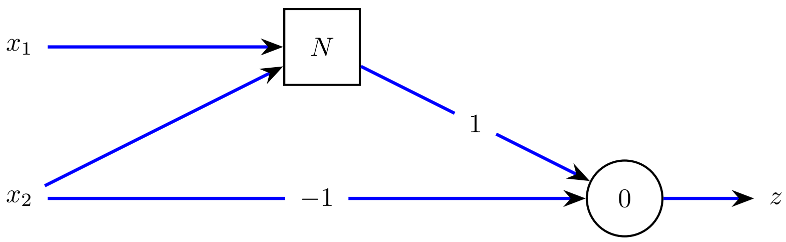


شکل ۱

۱. محدوده‌ای از $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ را مشخّص کنید که به ازای آن، خروجی $y = 1$ باشد. ناحیه‌ی مورد نظر را بر روی صفحه‌ی دوبعدی $x_1 x_2$ ترسیم کنید. (x_1 را محور افقی در نظر بگیرید.)

۲. اگر ورودی‌های شبکه باینری باشند، این شبکه چه تابع منطقی‌ای را پیاده‌سازی می‌کند؟

۳. این بار شبکه‌ی شکل ۲ را در نظر بگیرید که در آن، بلوک N دقیقاً همان شبکه‌ی شکل ۱ باشد. پاسخ پرسش قسمت ۱ را این بار برای شکل ۲ به دست آورده و ترسیم کنید. (یعنی محدوده‌ای از ورودی‌ها را بیابید که خروجی شبکه $z = 1$ باشد.)



شکل ۲

۲ مدل Integrate-and-Fire تعمیم‌یافته

مدل زیر برای توصیف رفتار اسپایک‌زدن نورون را که به مدل quadratic integrate and fire مشهور است، در نظر بگیرید:

$$\frac{dV}{dt} = a(I - I_0) + b(V - V_0)^2$$

فرض کنید $a > 0$، $b > 0$، و $I_0 > I$.

۱. نقاط ثابت این سیستم را بیابید.

۲. وضعیت پایداری هر یک از این نقاط ثابت را مشخّص کنید.

۳. نتیجه‌ی قسمت قبل را با استفاده از دانسته‌های خود از عملکرد نورون توجیه کنید.

حال می‌خواهیم آنالیز این مدل را با استفاده از روابط صفحه‌ی فاز انجام دهیم. برای این کار (همان طور که از اسلایدهای درس به خاطر دارید)، باید یک متغیّر کمکی مانند u تعریف کنیم. در حالت کلّی می‌توانیم روابط این دو متغیّر را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha V + \beta V^2 + \gamma - u + I(t)$$

$$\frac{du}{dt} = a(bV - u)$$

ابتدا مقادیر زیر را برای پارامترهای مدل در نظر بگیرید:

$$\alpha = \beta = a = b = 1, \gamma = I(t) = 0$$

۴. نقاط تعادل این سیستم را بیابید.

۵. (با تشکیل ماتریس ژاکوبین و بررسی مقادیر ویژه‌ی آن) وضعیت پایداری هر یک از این نقاط ثابت را مشخّص کنید.

۶. منحنی‌های nullcline را در صفحه‌ی فاز رسم کنید (محور افقی را متناظر با V در نظر بگیرید) و در هر یک از نواحی صفحه، علامت dV/dt و du/dt را مشخّص کنید. برای سادگی در هر ناحیه از یک نماد به صورت زوج مرتّب استفاده کنید. به عنوان مثال $(+,-)$ یعنی $dV/dt > 0$ و $du/dt < 0$.

۷. حال فرض کنید همه‌ی پارامترها مشابه قسمت‌های قبلی هستند، با این تفاوت که مقدار I نامشخّص است. (دقت کنید که I هم‌چنان مستقل از زمان و ثابت است، یعنی $I(t) = I_0$، امّا مقدار I_0 مشخّص نیست.)
بازه‌ای از مقادیر I_0 را بیابید که به ازای آن، سیستم فاقد نقطه‌ی تعادل باشد. آیا این مشاهده معنی‌دار است و تفسیر زیستی دارد یا صرفاً ناکارآمدی مدل مورد استفاده را نشان می‌دهد؟

۳ محاسبه‌ی پاسخ نورون به محرّک

جریان ورودی سیناپسی به یک نورون به فرم معادله‌ی زیر می‌باشد:

$$I(t) = \frac{q}{\tau_s} \exp\big(-\frac{t - t_f}{\tau_s}\big) u(t - t_f)$$

که در آن، t_f لحظه‌ی ورود اسپایک به سیناپس است.

۱. با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل تغییرات ولتاژ غشای نورون که در آن ثابت زمانی τ_m فرض می‌شود، فرم پاسخ ولتاژ به یک اسپایک ورودی در لحظه‌ی t_f را به دست آورید.

۲. در پاسخ به دست آمده، حالت حدّی $\tau_s \approx \tau_m$ را در نظر بگیرید و فرم پاسخ را به دست آورید.

۳. در فرم پاسخ قسمت ۱، حالت حدّی $\tau_s << \tau_m$ را در نظر بگیرید و فرم پاسخ را بنویسید.

۴. نتیجه‌ی قسمت قبل از نظر شهودی به چه معناست؟ آیا این استنباط در پاسخ به‌دست‌آمده قابل مشاهده است؟ این نتیجه چه تفاوتی با پاسخ سیستم به ورودی ضربه دارد؟

۴ قوانین یادگیری

قانون یادگیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_{ij} = \gamma(v_i - v_\theta)v_j$$

که در آن تغییر وزن سیناپسی فقط وقتی رخ می‌دهد که نورون پیش‌سیناپسی (presynaptic) اکتیو باشد (یعنی $v_j > 0$). توجّه کنید که جهت تغییر در وزن سیناپس به وسیله‌ی فعّالیت نورون پس‌سیناپسی (postsynaptic) تعیین می‌شود. نرخ اسپایک‌زدن نورون پس‌سیناپسی به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر داده می شود:

$$v_i = g\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij}v_j\right)$$

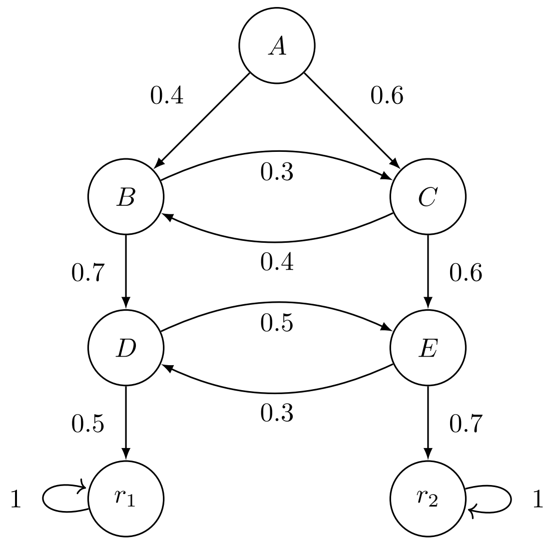
نرخ اسپایک‌زدن نورون‌های پیش‌سیناپسی v_j را ثابت فرض کنید.

۱. نشان دهید v_i یک نقطه‌ی ثابت دارد و مقدار آن را بیابید.

۲. دو حالت $\gamma > 0$ و $\gamma < 0$ را در نظر بگیرید و برای هر یک، در مورد پایداری نقطه‌ی ثابت مربوط به آن بحث کنید.

۵ یادگیری تقویتی و ارزش حالت‌های میانی

شکل ۳ ساختار یک بازی را نشان می‌دهد که نقطه‌ی شروع آن A است. فرض کنید بازیگر این بازی بر مبنای الگوریتم یادگیری actor-critic اقدام به تعیین استراتژی و به‌روزرسانی احتمالات گذار می‌نماید. فرض کنید در یکی از مراحل، احتمالات گذار مطابق با مقادیر مشخّص‌شده روی شکل ۳ تعیین شده‌اند. در گام بعدی، باید ارزش هر یک از حالات (از A تا E) مشخّص شود.



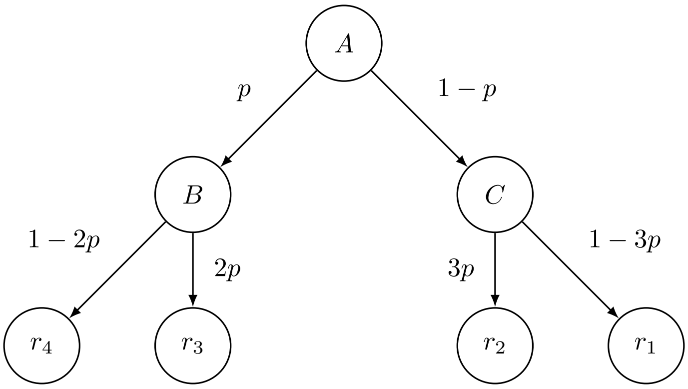
شکل ۳

۱. با فرض $r_1 = 2$ و $r_2 = 8$، ارزش سایر حالات را در این وضعیت محاسبه کنید.

۲. در گام بعدی، کدام احتمالات کاهش یافته و کدام احتمالات افزایش می‌یابند؟

۶ یادگیری تقویتی و استراتژی بهینه

یک محیط بازی به صورت شکل ۴ را در نظر بگیرید که در آن، بازیگر از رأس A شروع کرده و در هر گام، باید یکی از دو انتخاب (چپ یا راست) را انجام دهد. فرض کنید ساختار بازی به گونه‌ای است که بازیگر نمی‌تواند انتخاب‌ها را به صورت قطعی انجام دهد، بلکه در هنگام هر انتخاب باید از یک توزیع احتمال برنولی برای انتخاب استفاده کند. (می‌توانید فرض کنید در هر گام، یک سکه‌ی غیرسالم در اختیار وی قرار می‌گیرد و با پرتاب آن، مشخص می‌شود که کدام یک از دو حرکت را انجام دهد). مقادیر توزیع‌های احتمال مذکور، بر روی شکل بر حسب پارامتر p مشخص شده‌اند. بازی در یکی از چهار رأس انتهایی به اتمام می‌رسد، و در هر یک از این رئوس، مقداری پاداش به اندازه‌ی r_i وجود دارد که $i \in \{1,2,3,4\}$. تنها درجه‌ی آزادی این بازی برای بازیگر، پارامتر احتمال p است که می‌تواند هر بار قبل از شروع بازی، آن را تعیین کند. فرض کنید این بازیگر می‌تواند به هر تعداد دلخواه بازی را تکرار کند و بر مبنای یادگیری تقویتی، استراتژی بهینه‌ی خود را به دست آورد. (یعنی مقداری بهینه برای p انتخاب کند.)



شکل ۴

۱. فرض کنید مقادیر پاداش‌ها (r_iها)، خود توابعی از p هستند و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$r_i = r_i(p) = \frac{i}{1+p^2}$$

در این صورت مقدار بهینه‌ی p که بازیگر در نهایت انتخاب خواهد کرد را به دست آورید.

۲. این بار فرض کنید می‌خواهیم بازی را به گونه‌ای طراحی کنیم که بازیگر در نهایت، استراتژی خود را مطابق خواسته‌ی ما انتخاب کند. شکل کلّی پاداش‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$r_i = r_i(p) = \frac{i}{1+ap^2}$$

مقدار a را به گونه‌ای تنظیم کنید که استراتژی انتخابی توسط بازیگر به صورت $p = \frac{1}{4}$ باشد.

۳. این بار فرض کنید r_iها را مستقل از p و به صورت مقادیری ثابت تعیین می‌کنیم. همچنین فرض کنید در طرّاحی بازی این محدودیت را داریم که $\sum_{i=1}^{4} r_i = 1$، یعنی نمی‌توانیم مجموعاً بیش از یک واحد پاداش خرج کنیم. مقادیر r_i را چگونه تعیین کنیم تا استراتژی بهینه‌ی بازیگر از حالت تصادفی خارج شده و deterministic باشد؟