باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

۲۵۶۴۵ ـ علوم اعصاب یادگیری، حافظه، شناخت ـ بهار ۹۹ ـ ۱۳۹۸

تمرین سری اوّل: آنالیز سیستم‌های دینامیکی و صفحه‌ی فاز

موعد تحویل: جمعه ۲۲ فروردین، ساعت ۲۳:۵۵

نحوه‌ی تحویل: پاسخ پرسش‌های این تمرین را به صورت یک فایل pdf در سایت درس بارگذاری کنید.

---

۱ یادآوری حلّ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطّی

نشان دهید برای دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ که فرم گسترده‌ی آن برای دو متغیّر به شکل

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{۱}$$

می‌باشد، شکل عمومی پاسخ زمانی به صورت

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{۲}$$

است که در آن، λ_iها مقادیر ویژه‌ی ماتریس A و $\boldsymbol{\xi}_i$ها بردارهای ویژه‌ی متناظر آن‌ها هستند. همچنین c_iها نیز با توجّه به شرایط اوّلیه مشخّص می‌شوند. (فرض کنید A دو مقدار ویژه‌ی متمایز دارد.)

۲ منحنی‌های nullcline و بردار ویژه‌ها

اگر در معادله ۱ قرار دهیم $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$، دو معادله‌ی خطی بر حسب a_{ij} ها به دست می‌آید. می‌توان منحنی این دو معادله را در صفحه‌ی دوبُعدی $x_1 x_2$ (که آن را صفحه‌ی فاز می‌نامیم) رسم کرد. این خطوط را nullcline می‌نامند. در حالت کلّی برای سیستم توصیف‌شده با دستگاه معادلات $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ نیز می‌توان با حل معادلات $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ منحنی‌های nullcline را به دست آورد.

۱. نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که $\boldsymbol{x}^*$ نقطه‌ی تعادل سیستم باشد، آن است که در محلّ تقاطع nullcline‌ها قرار داشته باشد.

می‌دانید که می‌توان رفتار زمانی پاسخ دستگاه معادلات، $\boldsymbol{x}(t)$، را به صورت یک مسیر حرکت روی صفحه‌ی فاز نشان داد. به عبارتی کافی است $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ را در هر لحظه از زمان روی این صفحه علامت بزنیم. منحنی حاصل، مسیر حرکت سیستم خواهد بود. بدیهی است مسیر حرکت به نقطه‌ی شروع حرکت بستگی دارد.

۲. همان طور که اشاره شد، nullcline‌های معادله ۱ دو خط هستند. همچنین می‌توان راستاهای دو بردار $\boldsymbol{\xi}_1$ و $\boldsymbol{\xi}_2$ (از معادله ۲) را نیز در صفحه‌ی $x_1 x_2$ رسم نمود. نشان دهید اگر نقطه‌ی شروع حرکت روی یکی از خطوط بردار ویژه‌ها (یعنی خطوطی که در صفحه‌ی فاز در راستای بردارهای ویژه و گذرنده از مبدأ رسم می‌شوند) باشد، مسیر حرکت سیستم به تمامی روی همان راستا قرار خواهد داشت و از آن منحرف نخواهد شد.

۳. نشان دهید اگر نقطه‌ی شروع حرکت روی یکی از خطوط بردار ویژه نباشد، مسیر حرکت نمی‌تواند با یکی از این خطوط تقاطع داشته باشد، مگر در $t \to \infty$. آیا این گزاره در مورد nullcline‌ها نیز صحیح است؟

۳ تحلیل رفتار سیستم‌های دینامیکی خطی

سیستم توصیف‌شده در معادله

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \tag{۳}$$

را در نظر بگیرید.

۱. فرم عمومی پاسخ زمانی این سیستم را به دست آورید.

۲. با توجه به مقادیر ویژه‌ی سیستم، پایداری یا ناپایداری نقطه‌ی تعادل آن را مشخّص کنید.

۳. nullclineهای سیستم را در صفحه‌ی x_1x_2 رسم کنید. (x_1 را محور افقی و x_2 را محور عمودی در نظر بگیرید.)

۴. خطوطی که در قسمت قبل رسم کردید، صفحه‌ی فاز را به ۴ قسمت تقسیم کرده است. علامت x_1 و x_2 را در هر یک از این نواحی مشخّص کنید. کاربرد علامت این دو متغیّر در تحلیل مسیر حرکت سیستم چگونه است؟

۵. راستاهای بردار ویژه‌های سیستم را نیز در صفحه‌ی فاز رسم کنید.

۶. تا به این جا با رسم nullclineها و راستاهای بردار ویژه، صفحه‌ی فاز باید به ۸ ناحیه تقسیم شده باشد. نقطه‌ی شروع حرکت سیستم را در هر یک از این نواحی در نظر بگیرید، و با استفاده از آن چه در قسمت‌های قبل همین سؤال به دست آورده‌اید یا در سؤال قبل اثبات کرده‌اید، شکل تقریبی مسیر حرکت سیستم را با شروع از نقطه‌ی مربوطه، رسم کنید. (بنابراین باید ۸ مسیر حرکت مختلف رسم کنید که نقطه‌ی شروع هر یک، داخل یکی از نواحی هشت‌گانه‌ی صفحه‌ی فاز است. برای جلوگیری از شلوغی نمودار، بهتر است همه‌ی مسیرها را روی یک نمودار ترسیم نکنید.)

۴ تحلیل رفتار سیستم‌های دینامیکی غیرخطّی

می‌توان برای سیستم‌های غیر خطّی توصیف‌شونده با معادله‌ای به شکل کلّی $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ نیز با استفاده از روش‌های مشابه سؤالات قبل، nullclineها را به دست آورد و نقاط تعادل را پیدا کرد. برای بررسی پایداری این نقاط تعادل می‌توان از تقریب خطّی حول این نقاط بهره برد. (لازم به ذکر است، تقریب خطّی برای تحلیل پایداری همه‌ی سیستم‌های غیرخطّی نمی‌تواند مفید باشد. می‌توانید در صورت علاقه در مورد روش‌های عمومی تحلیل سیستم‌های غیرخطّی مطالعه کنید؛ البته سؤالات این تمرین همگی با تقریب خطّی قابل حل می‌باشند.)
برای هر یک از سیستم‌های زیر:

- معادلات nullclineها را بیابید و آن‌ها را در صفحه‌ی فاز رسم کنید و نقاط تعادل سیستم را مشخّص کنید.
- در هر یک از نواحی صفحه، علامت x_1 و x_2 را مشخّص کنید. برای نمایش ساده‌تر می‌توانید وضعیت هر ناحیه را با یک زوج مرتّب مثلاً به شکل $(+,-)$ مشخّص کنید که مؤلّفه‌های اوّل و دوم آن به ترتیب نشان‌گر علامت‌های x_1 و x_2 هستند.
- با استفاده از تقریب خطّی حول هر یک از نقاط تعادل، پایدار یا ناپایدار بودن آن را مشخّص کنید.

(a) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = (2 + x_1)(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (4 - x_1)(x_2 + x_1) \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - x_1x_2 - 2x_2^2 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

۵ دینامیک سیستم SR Latch

مدل دینامیکی یک SR Latch استاندارد در معادله‌ی ۴ توصیف شده است:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \mathrm{NOT}(x_2) - x_1 \\ \dot{x_2} &= \mathrm{NOT}(x_1) - x_2 \end{aligned} \tag{۴}$$

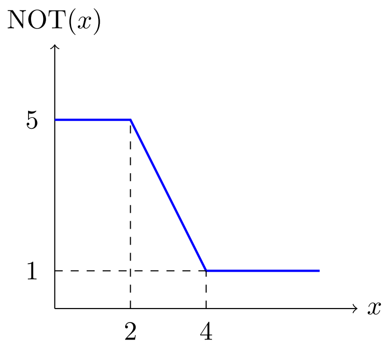
همچنین مشخصه‌ی ورودی–خروجی تابع NOT نیز در شکل ۱ رسم شده است.

۱. با رسم منحنی‌های nullcline، نقاط تعادل این سیستم را بیابید.

۲. در هر یک از نواحی صفحه، علامت $\dot{x_1}$ و $\dot{x_2}$ را مشخّص کنید. برای نمایش ساده‌تر می‌توانید وضعیت هر ناحیه را با یک زوج مرتّب مثلاً به شکل $(+,-)$ مشخّص کنید که مؤلّفه‌های اوّل و دوم آن به ترتیب نشان‌گر علامت‌های $\dot{x_1}$ و $\dot{x_2}$ هستند.

۳. در معادلات منحنی‌های nullcline، متغیر x_2 را حذف کنید تا به معادله‌ای به شکل $x_1 = F(x_1)$ برسید. این معادله را با روش هندسی حل کنید و مجدّدا نقاط تعادل سیستم را محاسبه کنید. (بدیهی است پاسخ این قسمت باید نتیجه‌ی قسمت قبل را تأیید کند.)

۴. با استفاده از تقریب خطّی حول هر یک از نقاط تعادل، پایدار یا ناپایدار بودن آن را مشخّص کنید.



شکل ۱: مشخّصه‌ی ورودی–خروجی تابع NOT

۶ چرخه‌های حدّی

سیستم توصیف‌شده در معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -(x - y) - y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{۵}$$

۱. همه‌ی نقاط تعادل این سیستم را بیابید و وضعیت پایداری آن‌ها را مشخّص کنید.

۲. نشان دهید این سیستم یک چرخه‌ی حدّی[1] دارد. وضعیت پایداری این چرخه‌ی حدّی را مشخّص کنید.

(راهنمایی: از تغییر مختصّات قطبی استفاده کنید.)

۳. جهت و سرعت چرخش بر روی این چرخه‌ی حدّی را به دست آورید.

[1] limit cycle