Методы оптимизации
Лекция 10: Введение в линейное программирование

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

16 ноября 2020 г.

На прошлой лекции

- Условие Слейтера

На прошлой лекции

- Условие Слейтера
- Выпуклость + условие Слейтера = сильная двойственность

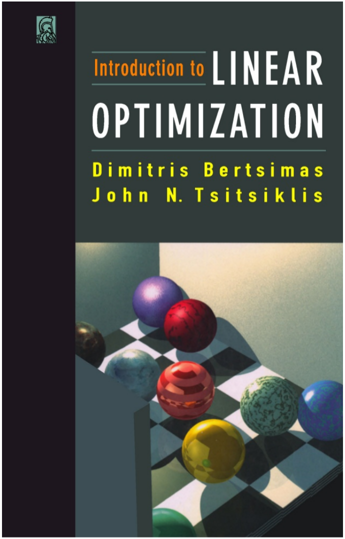
На прошлой лекции

- Условие Слейтера
- Выпуклость + условие Слейтера = сильная двойственность
- Теорема Каруша-Куна-Таккера

На прошлой лекции

- Условие Слейтера
- Выпуклость + условие Слейтера = сильная двойственность
- Теорема Каруша-Куна-Таккера
- Геометрическая интерпретация

Основная книга



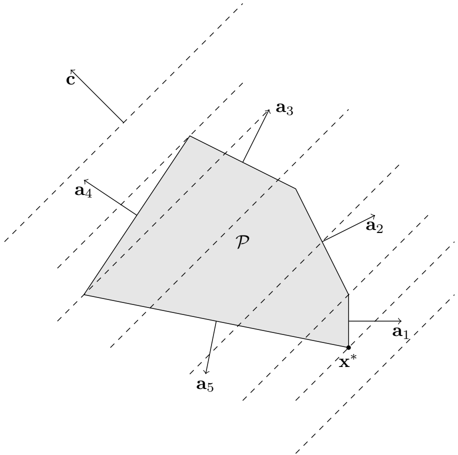
Постановка задачи: напоминание

- Дано: $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \; & \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Преобразование задач
  - $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \to \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \; \mathbf{y} \geq 0$
  - Свободная переменная $\mathbf{x} \to \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}, \; \mathbf{y} \geq 0, \; \mathbf{z} \geq 0$
  - Замена знака достигается за счёт умножения на -1
- Минимизация максимума линейных функций сводится к задаче линейного программирования

Геометрия задачи



Если допустимое множество задано как $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

Ключевые элементы допустимого множества

Определение

Множество P вида $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, называется многогранником (polyhedron).

Ключевые элементы допустимого множества

Определение

Множество P вида $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, называется многогранником (polyhedron).

Определение

Точка $\mathbf{y} \in P$ называется крайней точкой многоугольника, если не существует двух других точек из P, между которыми она лежит.

Ключевые элементы допустимого множества

Определение

Множество P вида $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, называется многогранником (polyhedron).

Определение

Точка $\mathbf{y} \in P$ называется крайней точкой многоугольника, если не существует двух других точек из P, между которыми она лежит.

Определение

Точка $\mathbf{z} \in P$ называется вершиной многоугольника, если найдётся такой вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ для всех других точек $\mathbf{x} \in P$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$.

От геометрии к алгебре

Пусть многогранник задан в виде
$\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i \ \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \leq b_j, \ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \rangle \geq b_k\}$.

Теорема

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$ — индексы активных ограничений. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1. Найдётся n линейно независимых векторов в множестве $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$
2. Они образуют базис в $\mathbb{R}^n$
3. Система $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i, \ i \in \mathcal{I}$ имеет единственное решение

От геометрии к алгебре

Пусть многогранник задан в виде
$\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i \ \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \leq b_j, \ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \rangle \geq b_k\}$.

Теорема

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$ — индексы активных ограничений. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1. Найдётся n линейно независимых векторов в множестве $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$
2. Они образуют базис в $\mathbb{R}^n$
3. Система $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i, \ i \in \mathcal{I}$ имеет единственное решение

Доказательство

От геометрии к алгебре

Пусть многогранник задан в виде
$\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle = b_i \ \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}\rangle \le b_j, \ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}\rangle \ge b_k\}$.

Теорема

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle = b_i\}$ — индексы активных ограничений. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1. Найдётся n линейно независимых векторов в множестве $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$
2. Они образуют базис в $\mathbb{R}^n$
3. Система $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle = b_i, \ i \in \mathcal{I}$ имеет единственное решение

Доказательство

- $1 \Leftrightarrow 2$ — очевидно из линейной алгебры

От геометрии к алгебре

Пусть многогранник задан в виде
$\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle = b_i \ \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}\rangle \leq b_j, \ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}\rangle \geq b_k\}$.

Теорема

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle = b_i\}$ — индексы активных ограничений. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1. Найдётся n линейно независимых векторов в множестве $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$
2. Они образуют базис в $\mathbb{R}^n$
3. Система $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle = b_i, \ i \in \mathcal{I}$ имеет единственное решение

Доказательство

- $1 \Leftrightarrow 2$ — очевидно из линейной алгебры
- $2 \Rightarrow 3$: если два решения $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, то $\mathbf{d} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ортогонален всем $\mathbf{a}_i$, противоречие

От геометрии к алгебре

Пусть многогранник задан в виде
$\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i \ \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \leq b_j, \ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \rangle \geq b_k\}$.

Теорема

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$ — индексы активных ограничений. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1. Найдётся n линейно независимых векторов в множестве $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$
2. Они образуют базис в $\mathbb{R}^n$
3. Система $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i, \ i \in \mathcal{I}$ имеет единственное решение

Доказательство

- $1 \Leftrightarrow 2$ — очевидно из линейной алгебры
- $2 \Rightarrow 3$: если два решения $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, то $\mathbf{d} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ортогонален всем $\mathbf{a}_i$, противоречие
- $3 \Rightarrow 2$: если не базис, то возьмём $\mathbf{d}$ ортогональный подпространству для $\mathbf{a}_i$, тогда из любого решения $\mathbf{x}^*$ получим другое решение $\mathbf{x}^* + \mathbf{d}$

Ещё одно определение

Базисное решение

Пусть P задан ограничениями равенствами и неравенствами и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- $\mathbf{x}$ базисное решение, если все ограничения равенства активны и среди всех активных ограничений n линейно независимых
- $\mathbf{x}$ базисное **допустимое** решение, если оно базисное и удовлетворяет всем ограничениям

Сопряжённые базисные решения

Два базисных решения называются сопряжёнными, если найдётся $n-1$ линейно независимых ограничений, которые активны в этих точках.

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что многогранник представлен в виде $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i$ и $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} = b_j$.

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что многогранник представлен в виде $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i$ и $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} = b_j$.

1. Вершина $\to$ крайняя точка

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что многогранник представлен в виде $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i$ и $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} = b_j$.

1. Вершина $\to$ крайняя точка
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ вершина, тогда найдётся $\mathbf{c}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ для всех $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что многогранник представлен в виде $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i$ и $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} = b_j$.

1. Вершина $\to$ крайняя точка
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ вершина, тогда найдётся $\mathbf{c}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ для всех $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$
   - Возьмём произвольные точки $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{z} \in P$ не равные $\mathbf{x}^*$

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что многогранник представлен в виде $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i$ и $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} = b_j$.

1. Вершина $\to$ крайняя точка
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ вершина, тогда найдётся $\mathbf{c}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ для всех $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$
   - Возьмём произвольные точки $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{z} \in P$ не равные $\mathbf{x}^*$
   - Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle$

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что многогранник представлен в виде $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i$ и $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} = b_j$.

1. Вершина $\to$ крайняя точка
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ вершина, тогда найдётся $\mathbf{c}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ для всех $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$
   - Возьмём произвольные точки $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{z} \in P$ не равные $\mathbf{x}^*$
   - Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle$
   - А значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z} \rangle$, где $\lambda \in [0, 1]$

Эквивалентность определений

Теорема

Пусть P многогранник и пусть $\mathbf{x} \in P$. Тогда следующие факты об $\mathbf{x}$ эквивалентны

1. $\mathbf{x}$ — вершина
2. $\mathbf{x}$ — крайняя точка
3. $\mathbf{x}$ — базисное допустимое решение

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что многогранник представлен в виде $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i$ и $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} = b_j$.

1. Вершина $\to$ крайняя точка
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ вершина, тогда найдётся $\mathbf{c}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ для всех $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$
   - Возьмём произвольные точки $\mathbf{y} \in P$ и $\mathbf{z} \in P$ не равные $\mathbf{x}^*$
   - Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle$
   - А значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle < \langle \mathbf{c}, \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z} \rangle$, где $\lambda \in [0, 1]$
   - Таким образом, $\mathbf{x}^* \neq \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
    - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
   - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
   - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение

- Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
- Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
- Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
   - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
   - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
   - Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.
   - Значит они лежат в некотором подпространстве, к которому можно построить нормаль $\mathbf{d}$ такую что $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{d} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
    - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
    - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
    - Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.
    - Значит они лежат в некотором подпространстве, к которому можно построить нормаль $\mathbf{d}$ такую что $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{d} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$
    - Пусть $\varepsilon > 0$ малое число, рассмотрим два вектора $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{d}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \varepsilon \mathbf{d}$

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
    - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
    - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
    - Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.
    - Значит они лежат в некотором подпространстве, к которому можно построить нормаль $\mathbf{d}$ такую что $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{d} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$
    - Пусть $\varepsilon > 0$ малое число, рассмотрим два вектора $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{d}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \varepsilon \mathbf{d}$
    - Для этих векторов выполнено, что для $i \in \mathcal{I}$: $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{z} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i$

2. Крайняя точка $\rightarrow$ базисное допустимое решение
    - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
    - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
    - Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.
    - Значит они лежат в некотором подпространстве, к которому можно построить нормаль $\mathbf{d}$ такую что $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{d} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$
    - Пусть $\varepsilon > 0$ малое число, рассмотрим два вектора $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{d}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \varepsilon \mathbf{d}$
    - Для этих векторов выполнено, что для $i \in \mathcal{I}$: $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{z} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i$
    - А для $j \notin \mathcal{I}$ $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{y} > b_j$ так как $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x}^* > b_j$ и ε достаточно малое число (найдите оценку на ε!)

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
   - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
   - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
   - Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.
   - Значит они лежат в некотором подпространстве, к которому можно построить нормаль $\mathbf{d}$ такую что $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{d} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$
   - Пусть $\varepsilon > 0$ малое число, рассмотрим два вектора $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{d}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \varepsilon \mathbf{d}$
   - Для этих векторов выполнено, что для $i \in \mathcal{I}$: $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{z} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i$
   - А для $j \notin \mathcal{I}$ $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{y} > b_j$ так как $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x}^* > b_j$ и ε достаточно малое число (найдите оценку на ε!)
   - Аналогичное неравенство справедливо для $\mathbf{z}$

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
    - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
    - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
    - Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.
    - Значит они лежат в некотором подпространстве, к которому можно построить нормаль $\mathbf{d}$ такую что $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{d} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$
    - Пусть $\varepsilon > 0$ малое число, рассмотрим два вектора $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{d}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \varepsilon \mathbf{d}$
    - Для этих векторов выполнено, что для $i \in \mathcal{I}$: $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{z} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i$
    - А для $j \notin \mathcal{I}$ $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{y} > b_j$ так как $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x}^* > b_j$ и ε достаточно малое число (найдите оценку на ε!)
    - Аналогичное неравенство справедливо для $\mathbf{z}$
    - Значит $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ лежат в P

2. Крайняя точка $\to$ базисное допустимое решение
   - Пусть точка $\mathbf{x}^*$ не базисное допустимое решение. Покажем, что тогда она не крайняя точка.
   - Пусть $\mathcal{I} = \{i \mid \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i\}$
   - Тогда раз $\mathbf{x}^*$ не является базисным допустимым решением, то среди $\mathbf{a}_i, i \in \mathcal{I}$ не найдётся n линейно независимых.
   - Значит они лежат в некотором подпространстве, к которому можно построить нормаль $\mathbf{d}$ такую что $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{d} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$
   - Пусть $\varepsilon > 0$ малое число, рассмотрим два вектора $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{d}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \varepsilon \mathbf{d}$
   - Для этих векторов выполнено, что для $i \in \mathcal{I}$: $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{z} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = b_i$
   - А для $j \notin \mathcal{I}$ $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{y} > b_j$ так как $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{x}^* > b_j$ и ε достаточно малое число (найдите оценку на ε!)
   - Аналогичное неравенство справедливо для $\mathbf{z}$
   - Значит $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ лежат в P
   - Но $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z})$ и значит не является крайней точкой

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ базисное допустимое решение и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i\}$ множество индексов активных ограничений

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ базисное допустимое решение и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i\}$ множество индексов активных ограничений
   - Обозначим $\mathbf{c} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i$, тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i$

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ базисное допустимое решение и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i\}$ множество индексов активных ограничений
   - Обозначим $\mathbf{c} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i$, тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i$
   - Для любого $\mathbf{x} \in P$ выполнено $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i$ для всех i

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина
    - Пусть $\mathbf{x}^*$ базисное допустимое решение и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i\}$ множество индексов активных ограничений
    - Обозначим $\mathbf{c} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i$, тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i$
    - Для любого $\mathbf{x} \in P$ выполнено $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i$ для всех i
    - Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ базисное допустимое решение и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i\}$ множество индексов активных ограничений
   - Обозначим $\mathbf{c} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i$, тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i$
   - Для любого $\mathbf{x} \in P$ выполнено $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i$ для всех i
   - Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$
   - Значит $\mathbf{x}^*$ является точкой минимума линейной функции $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ для $\mathbf{x} \in P$

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина

- Пусть $\mathbf{x}^*$ базисное допустимое решение и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i\}$ множество индексов активных ограничений
- Обозначим $\mathbf{c} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i$, тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i$
- Для любого $\mathbf{x} \in P$ выполнено $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i$ для всех i
- Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$
- Значит $\mathbf{x}^*$ является точкой минимума линейной функции $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ для $\mathbf{x} \in P$
- Покажем единственность. Поскольку равенство в оценке выше достигается при условии $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$, а $\mathbf{x}^*$ — базисное допустимое решение, значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и система будет иметь единственное решение.

3. Базисное допустимое решение $\to$ вершина
   - Пусть $\mathbf{x}^*$ базисное допустимое решение и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i\}$ множество индексов активных ограничений
   - Обозначим $\mathbf{c} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i$, тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i$
   - Для любого $\mathbf{x} \in P$ выполнено $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i$ для всех i
   - Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$
   - Значит $\mathbf{x}^*$ является точкой минимума линейной функции $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ для $\mathbf{x} \in P$
   - Покажем единственность. Поскольку равенство в оценке выше достигается при условии $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$, а $\mathbf{x}^*$ — базисное допустимое решение, значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и система будет иметь единственное решение.
   - Таким образом, $\mathbf{x}^*$ — вершина

Конечность числа вершин многогранника

Следствие

Если многогранник задан конечным числом ограничений типа неравенств, то у него будет конечное число базисных и базисных допустимых решений

Конечность числа вершин многогранника

Следствие

Если многогранник задан конечным числом ограничений типа неравенств, то у него будет конечное число базисных и базисных допустимых решений

Доказательство

Конечность числа вершин многогранника

Следствие

Если многогранник задан конечным числом ограничений типа неравенств, то у него будет конечное число базисных и базисных допустимых решений

Доказательство

- Каждое базисное решение соответствует набору из n активных линейно независимых ограничений

Конечность числа вершин многогранника

Следствие

Если многогранник задан конечным числом ограничений типа неравенств, то у него будет конечное число базисных и базисных допустимых решений

Доказательство

- Каждое базисное решение соответствует набору из n активных линейно независимых ограничений
- Число базисных точек ограничено количеством способов которыми можно выбрать n активных линейно независимых ограничений из конечного набора ограничений равенств и неравенств

Конечность числа вершин многогранника

Следствие

Если многогранник задан конечным числом ограничений типа неравенств, то у него будет конечное число базисных и базисных допустимых решений

Доказательство

- Каждое базисное решение соответствует набору из n активных линейно независимых ограничений
- Число базисных точек ограничено количеством способов которыми можно выбрать n активных линейно независимых ограничений из конечного набора ограничений равенств и неравенств
- Значит это можно сделать конечным числом способов

Конечность числа вершин многогранника

Следствие

Если многогранник задан конечным числом ограничений типа неравенств, то у него будет конечное число базисных и базисных допустимых решений

Доказательство

- Каждое базисное решение соответствует набору из n активных линейно независимых ограничений
- Число базисных точек ограничено количеством способов которыми можно выбрать n активных линейно независимых ограничений из конечного набора ограничений равенств и неравенств
- Значит это можно сделать конечным числом способов

Q: сколько вершин может быть у многогранника в $\mathbb{R}^n$?
Рассмотрите например множество вида $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$

Многогранник в стандартной форме

Уточним результаты для $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы.

Теорема

Вектор $\mathbf{x}$ базисное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и найдутся индексы $B(1), \dots, B(m)$ такие что

- столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$ линейно независимы
- если $i \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$ то $x_i = 0$.

Многогранник в стандартной форме

Уточним результаты для $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы.

Теорема

Вектор $\mathbf{x}$ базисное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и найдутся индексы $B(1), \ldots, B(m)$ такие что

- столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ линейно независимы
- если $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ то $x_i = 0$.

Доказательство

Многогранник в стандартной форме

Уточним результаты для $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы.

Теорема

Вектор $\mathbf{x}$ базисное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и найдутся индексы $B(1), \dots, B(m)$ такие что

- столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$ линейно независимы
- если $i \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$ то $x_i = 0$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}$ такой что $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и выполнены условия для некоторого набора индексов $\mathcal{B}$ такого что $|\mathcal{B}| = m$

Многогранник в стандартной форме

Уточним результаты для $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы.

Теорема

Вектор $\mathbf{x}$ базисное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и найдутся индексы $B(1), \ldots, B(m)$ такие что

- столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ линейно независимы
- если $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ то $x_i = 0$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}$ такой что $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и выполнены условия для некоторого набора индексов $\mathcal{B}$ такого что $|\mathcal{B}| = m$
- Тогда есть $m - n$ активных ограничений $x_i = 0$ для $i \notin \mathcal{B}$

Многогранник в стандартной форме

Уточним результаты для $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы.

Теорема

Вектор $\mathbf{x}$ базисное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и найдутся индексы $B(1), \ldots, B(m)$ такие что

- столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ линейно независимы
- если $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ то $x_i = 0$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}$ такой что $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и выполнены условия для некоторого набора индексов $\mathcal{B}$ такого что $|\mathcal{B}| = m$
- Тогда есть $m - n$ активных ограничений $x_i = 0$ для $i \notin \mathcal{B}$
- Вместе с тем $\sum_{i \in \mathcal{B}} \mathbf{A}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i x_i = \mathbf{b}$

Многогранник в стандартной форме

Уточним результаты для $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы.

Теорема

Вектор $\mathbf{x}$ базисное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и найдутся индексы $B(1), \ldots, B(m)$ такие что

- столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ линейно независимы
- если $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ то $x_i = 0$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}$ такой что $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и выполнены условия для некоторого набора индексов $\mathcal{B}$ такого что $|\mathcal{B}| = m$
- Тогда есть $m - n$ активных ограничений $x_i = 0$ для $i \notin \mathcal{B}$
- Вместе с тем $\sum_{i \in \mathcal{B}} \mathbf{A}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i x_i = \mathbf{b}$
- Так как $\mathbf{A}_i$ для $i \in \mathcal{B}$ линейно независимы, то система, образованная активными ограничениями, имеет единственное решение

- Значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и точка является базисным решением

- Значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и точка является базисным решением
- Пусть $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ ненулевые компоненты базисного решения $\mathbf{x}$

- Значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и точка является базисным решением
- Пусть $x_{B(1)}, \dots, x_{B(k)}$ ненулевые компоненты базисного решения $\mathbf{x}$
- Тогда система из уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $x_i = 0$ для $i \notin B(1), \dots, B(k)$ имеет единственное решение

- Значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и точка является базисным решением
- Пусть $x_{B(1)}, \dots, x_{B(k)}$ ненулевые компоненты базисного решения $\mathbf{x}$
- Тогда система из уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $x_i = 0$ для $i \notin B(1), \dots, B(k)$ имеет единственное решение
- Тогда система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ сводится к системе $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \mathbf{b}$, которая также имеет единственное решение.

- Значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и точка является базисным решением
- Пусть $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ ненулевые компоненты базисного решения $\mathbf{x}$
- Тогда система из уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $x_i = 0$ для $i \notin B(1), \ldots, B(k)$ имеет единственное решение
- Тогда система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ сводится к системе $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \mathbf{b}$, которая также имеет единственное решение.
- Значит столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(k)}$ линейно независимы и $k \leq m$

- Значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и точка является базисным решением
- Пусть $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ ненулевые компоненты базисного решения $\mathbf{x}$
- Тогда система из уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $x_i = 0$ для $i \notin B(1), \ldots, B(k)$ имеет единственное решение
- Тогда система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ сводится к системе $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \mathbf{b}$, которая также имеет единственное решение.
- Значит столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(k)}$ линейно независимы и $k \leq m$
- Поскольку строчный ранг равен столбцовому, то существует m линейно независимых столбцов. Дополним найденные k линейно независимых столбцов столбцами $B(k+1), \ldots, B(m)$, которые вместе будут образовывать базис в $\mathbb{R}^m$

- Значит найдётся n линейно независимых активных ограничений и точка является базисным решением
- Пусть $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ ненулевые компоненты базисного решения $\mathbf{x}$
- Тогда система из уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $x_i = 0$ для $i \notin B(1), \ldots, B(k)$ имеет единственное решение
- Тогда система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ сводится к системе $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \mathbf{b}$, которая также имеет единственное решение.
- Значит столбцы $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(k)}$ линейно независимы и $k \leq m$
- Поскольку строчный ранг равен столбцовому, то существует m линейно независимых столбцов. Дополним найденные k линейно независимых столбцов столбцами $B(k+1), \ldots, B(m)$, которые вместе будут образовывать базис в $\mathbb{R}^m$
- Также если $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, то $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ и $x_i = 0$

Как получить базисное решение?

1. Выбрать m линейно независимых столбцов в матрице $\mathbf{A}$: $B(1), \ldots, B(m)$

Как получить базисное решение?

1. Выбрать m линейно независимых столбцов в матрице $\mathbf{A}$: $B(1), \ldots, B(m)$
2. $x_i = 0$, где $i \neq B(1), \ldots, B(m)$

Как получить базисное решение?

1. Выбрать m линейно независимых столбцов в матрице $\mathbf{A}$: $B(1), \ldots, B(m)$
2. $x_i = 0$, где $i \neq B(1), \ldots, B(m)$
3. Составить из выбранных столбцов матрицу $\mathbf{B}$, решить систему $\mathbf{By} = \mathbf{b}$ и $x_{B(i)} = y_i$

Как получить базисное решение?

1. Выбрать m линейно независимых столбцов в матрице $\mathbf{A}$: $B(1), \ldots, B(m)$
2. $x_i = 0$, где $i \neq B(1), \ldots, B(m)$
3. Составить из выбранных столбцов матрицу $\mathbf{B}$, решить систему $\mathbf{By} = \mathbf{b}$ и $x_{B(i)} = y_i$

Базисное допустимое решение

Если найденные $\mathbf{y} \geq 0$, то базисное решение будет допустимым.

Как получить базисное решение?

1. Выбрать m линейно независимых столбцов в матрице $\mathbf{A}$: $B(1), \ldots, B(m)$
2. $x_i = 0$, где $i \neq B(1), \ldots, B(m)$
3. Составить из выбранных столбцов матрицу $\mathbf{B}$, решить систему $\mathbf{By} = \mathbf{b}$ и $x_{B(i)} = y_i$

Базисное допустимое решение

Если найденные $\mathbf{y} \geq 0$, то базисное решение будет допустимым.

Определение

Матрица $\mathbf{B}$, составленная из столбцов матрицы $\mathbf{A}$ и соответствующая некоторому базисному решению, называется матрицей базиса.

Как получить базисное решение?

1. Выбрать m линейно независимых столбцов в матрице $\mathbf{A}$: $B(1), \ldots, B(m)$
2. $x_i = 0$, где $i \neq B(1), \ldots, B(m)$
3. Составить из выбранных столбцов матрицу $\mathbf{B}$, решить систему $\mathbf{By} = \mathbf{b}$ и $x_{B(i)} = y_i$

Базисное допустимое решение

Если найденные $\mathbf{y} \geq 0$, то базисное решение будет допустимым.

Определение

Матрица $\mathbf{B}$, составленная из столбцов матрицы $\mathbf{A}$ и соответствующая некоторому базисному решению, называется матрицей базиса.

Упражнение

Покажите, что разным базисным решениям соответствуют разные матрицы базиса, но разные матрицы базиса могут соответствовать одному и тому же базисному решению.

Что если матрица $\mathbf{A}$ неполного строчного ранга?

Теорема

Пусть $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непустой многогранник, такой что $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, но $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k < m$. Пусть строки $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots \mathbf{a}_{i_k}$ линейно независимы, тогда многогранник
$Q = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_1}, \ldots, \langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_k},\ \mathbf{x} \geq 0\} = P$.

Что если матрица $\mathbf{A}$ неполного строчного ранга?

Теорема

Пусть $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непустой многогранник, такой что $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, но $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k < m$. Пусть строки $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots \mathbf{a}_{i_k}$ линейно независимы, тогда многогранник
$Q = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{x}\rangle = b_{i_1}, \ldots, \langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{x}\rangle = b_{i_k},\ \mathbf{x} \geq 0\} = P$.

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что первые k строк в $\mathbf{A}$ линейно независимы.

Что если матрица $\mathbf{A}$ неполного строчного ранга?

Теорема

Пусть $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непустой многогранник, такой что $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, но $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k < m$. Пусть строки $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots \mathbf{a}_{i_k}$ линейно независимы, тогда многогранник
$Q = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_1}, \ldots, \langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_k},\ \mathbf{x} \geq 0\} = P.$

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что первые k строк в $\mathbf{A}$ линейно независимы.

- Поскольку ограничения равенства в Q есть подмножество таких ограничений в P, то $P \subset Q$. Покажем, что $Q \subset P$.

Что если матрица $\mathbf{A}$ неполного строчного ранга?

Теорема

Пусть $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непустой многогранник, такой что $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, но $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k < m$. Пусть строки $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots \mathbf{a}_{i_k}$ линейно независимы, тогда многогранник
$Q = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_1}, \ldots, \langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_k},\ \mathbf{x} \geq 0\} = P.$

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что первые k строк в $\mathbf{A}$ линейно независимы.

- Поскольку ограничения равенства в Q есть подмножество таких ограничений в P, то $P \subset Q$. Покажем, что $Q \subset P$.
- Так как $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k$, то $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \mathbf{a}_j$ для любой строки $i = 1, \ldots, m$

Что если матрица $\mathbf{A}$ неполного строчного ранга?

Теорема

Пусть $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непустой многогранник, такой что $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, но $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k < m$. Пусть строки $\mathbf{a}_{i_1}, \dots \mathbf{a}_{i_k}$ линейно независимы, тогда многогранник
$Q = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_1}, \dots, \langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_k},\ \mathbf{x} \geq 0\} = P.$

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что первые k строк в $\mathbf{A}$ линейно независимы.

- Поскольку ограничения равенства в Q есть подмножество таких ограничений в P, то $P \subset Q$. Покажем, что $Q \subset P$.
- Так как $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k$, то $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \mathbf{a}_j$ для любой строки $i = 1, \dots, m$
- Пусть $\mathbf{x} \in P$, тогда
  $b_i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} b_j$

Что если матрица $\mathbf{A}$ неполного строчного ранга?

Теорема

Пусть $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непустой многогранник, такой что $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, но $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = k < m$. Пусть строки $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots \mathbf{a}_{i_k}$ линейно независимы, тогда многогранник
$Q = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_1}, \ldots, \langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_k},\ \mathbf{x} \geq 0\} = P.$

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что первые k строк в $\mathbf{A}$ линейно независимы.

- Поскольку ограничения равенства в Q есть подмножество таких ограничений в P, то $P \subset Q$. Покажем, что $Q \subset P$.
- Так как $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = k$, то $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \mathbf{a}_j$ для любой строки $i = 1, \ldots, m$
- Пусть $\mathbf{x} \in P$, тогда
  $b_i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} b_j$
- Рассмотрим элемент $\mathbf{y} \in Q$ и покажем, что $\mathbf{y} \in P$:
  $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} b_j = b_i$

Вырожденное базисное решение

Определение

Пусть $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ и $\mathbf{x}$ базисное решение. Тогда оно вырождено, если больше $n - m$ его элементов нули.

Свойства

- Если в базисном решении нулей больше чем $n - m$, значит активных ограничений больше, чем n
- На плоскости это значит, что в вершине пересекается больше двух прямых

Существование крайней точки

Определение

Многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ содержит прямую, если найдётся вектор $\mathbf{x}$ и ненулевой вектор $\mathbf{d}$ такие что для любого скаляра γ: $\mathbf{x} + \gamma\mathbf{d} \in P$

Теорема

Пусть многоугольник задан в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1) у P есть хотя бы одна крайняя точка
2) P не содержит прямой
3) найдётся n линейно независимых векторов среди векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Доказательство

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Рассмотрим прямую вида $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}$. Тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Рассмотрим прямую вида $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}$. Тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$
- Но P не содержит прямой, тогда для некоторого α^* будет выполнено: $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, $j \notin \mathcal{I}$

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Рассмотрим прямую вида $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}$. Тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha\mathbf{d} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$
- Но P не содержит прямой, тогда для некоторого α^* будет выполнено: $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^*\mathbf{d} \rangle = b_j$, $j \notin \mathcal{I}$
- Покажем, что $\mathbf{a}_j \notin \operatorname{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i\right)$

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Рассмотрим прямую вида $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}$. Тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$
- Но P не содержит прямой, тогда для некоторого α^* будет выполнено: $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, $j \notin \mathcal{I}$
- Покажем, что $\mathbf{a}_j \notin \mathrm{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i \right)$
- Так как $j \notin \mathcal{I}$, то $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \neq b_j$. Однако по определению α^* выполнено $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, следовательно $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{d} \rangle \neq 0$

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Рассмотрим прямую вида $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}$. Тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$
- Но P не содержит прямой, тогда для некоторого α^* будет выполнено: $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, $j \notin \mathcal{I}$
- Покажем, что $\mathbf{a}_j \notin \mathrm{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i\right)$
- Так как $j \notin \mathcal{I}$, то $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \neq b_j$. Однако по определению α^* выполнено $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, следовательно $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{d} \rangle \neq 0$
- Но так как $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$, значит равенство выполнено и для любой линейной комбинации $\mathbf{a}_i$. Значит $\mathbf{a}_j \notin \mathrm{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i\right)$

Доказательство

2) $\rightarrow$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Рассмотрим прямую вида $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}$. Тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$
- Но P не содержит прямой, тогда для некоторого α^* будет выполнено: $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, $j \notin \mathcal{I}$
- Покажем, что $\mathbf{a}_j \notin \operatorname{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i\right)$
- Так как $j \notin \mathcal{I}$, то $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \neq b_j$. Однако по определению α^* выполнено $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, следовательно $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{d} \rangle \neq 0$
- Но так как $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$, значит равенство выполнено и для любой линейной комбинации $\mathbf{a}_i$. Значит $\mathbf{a}_j \notin \operatorname{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i\right)$
- Таким образом, перейдя из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d}$ количество активных линейно независимых ограничений равенств увеличено на 1

Доказательство

2) $\to$ 1)

- Пусть $\mathbf{x} \in P$ и $\mathcal{I} = \{i \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i\}$
- Если n векторов с индексами из $\mathcal{I}$ линейно независимы, значит $\mathbf{x}$ допустимое базисное решение
- Если это не так, то все $\mathbf{a}_i$ для $i \in \mathcal{I}$ лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n$, и найдётся $\mathbf{d}$, такой что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Рассмотрим прямую вида $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}$. Тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d} \rangle = b_i$ для $i \in \mathcal{I}$
- Но P не содержит прямой, тогда для некоторого α^* будет выполнено: $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, $j \notin \mathcal{I}$
- Покажем, что $\mathbf{a}_j \notin \mathrm{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i\right)$
- Так как $j \notin \mathcal{I}$, то $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \neq b_j$. Однако по определению α^* выполнено $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d} \rangle = b_j$, следовательно $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{d} \rangle \neq 0$
- Но так как $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$, значит равенство выполнено и для любой линейной комбинации $\mathbf{a}_i$. Значит $\mathbf{a}_j \notin \mathrm{span}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{a}_i\right)$
- Таким образом, перейдя из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x} + \alpha^* \mathbf{d}$ количество активных линейно независимых ограничений равенств увеличено на 1
- Продолжим эту процедуру до тех пор пока не наберём n линейно независимых активных ограничений

1) $\to$ 3)

- Если есть крайняя точка, то она же является допустимым базисным решением.
- Тогда по определению найдётся n активных ограничений и соответствующие векторы линейно независимы

3) $\to$ 2)

- Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы
- Предположим, что P содержит прямую $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}$, тогда $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} + \alpha\mathbf{d} \rangle \geq b_i$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$
- Отсюда следует, что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = 0$
- Так как векторы $\mathbf{a}_i$ линейно независимы и их n штук, то $\mathbf{d} = 0$
- Получили противоречие, значит P не содержит прямой

Следствие

Любой ограниченный многоугольник и любой многоугольник в стандартной форме имеют крайнюю точку.

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

- Множество решений
  $Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c^*\}$ — многогранник

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

- Множество решений $Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c^*\}$ — многогранник
- $Q \subset P$. В P есть крайняя точка, значит в P не лежит ни одной прямой.

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

- Множество решений $Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c^*\}$ — многогранник
- $Q \subset P$. В P есть крайняя точка, значит в P не лежит ни одной прямой.
- В Q не лежит ни одной прямой $\rightarrow$ в Q есть крайняя точка

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

- Множество решений $Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c^*\}$ — многогранник
- $Q \subset P$. В P есть крайняя точка, значит в P не лежит ни одной прямой.
- В Q не лежит ни одной прямой $\to$ в Q есть крайняя точка
- Пусть $\mathbf{x}^*$ — крайняя точка в Q, тогда она крайняя для P

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

- Множество решений $Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c^*\}$ — многогранник
- $Q \subset P$. В P есть крайняя точка, значит в P не лежит ни одной прямой.
- В Q не лежит ни одной прямой $\to$ в Q есть крайняя точка
- Пусть $\mathbf{x}^*$ — крайняя точка в Q, тогда она крайняя для P
- Если это не так, то найдутся точки $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ такие что $\mathbf{x}^* = \alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}$, $\alpha \in [0, 1]$

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

- Множество решений $Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c^*\}$ — многогранник
- $Q \subset P$. В P есть крайняя точка, значит в P не лежит ни одной прямой.
- В Q не лежит ни одной прямой $\to$ в Q есть крайняя точка
- Пусть $\mathbf{x}^*$ — крайняя точка в Q, тогда она крайняя для P
- Если это не так, то найдутся точки $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ такие что $\mathbf{x}^* = \alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}$, $\alpha \in [0, 1]$
- $c^* = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \alpha \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle + (1 - \alpha) \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle$, а $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle \geq c^*$, и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle \geq c^*$. Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle = c^*$, $\mathbf{z}, \mathbf{y} \in Q$

Оптимальность крайней точки

Теорема

Если многоугольник имеет хотя бы одну крайнюю точку, а задача линейного программирования имеет решение, тогда это решение в крайней точки.

Доказательство

- Множество решений $Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c^*\}$ — многогранник
- $Q \subset P$. В P есть крайняя точка, значит в P не лежит ни одной прямой.
- В Q не лежит ни одной прямой $\to$ в Q есть крайняя точка
- Пусть $\mathbf{x}^*$ — крайняя точка в Q, тогда она крайняя для P
- Если это не так, то найдутся точки $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ такие что $\mathbf{x}^* = \alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}$, $\alpha \in [0, 1]$
- $c^* = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \alpha \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle + (1 - \alpha) \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle$, а $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle \geq c^*$, и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle \geq c^*$. Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle = c^*$, $\mathbf{z}, \mathbf{y} \in Q$
- Противоречие с тем, что $\mathbf{x}^*$ крайняя точка в Q

История исследования задачи

- Применение линейного программирования в экономике (Л. В. Канторович, 1930-ые гг.) — нобелевская премия по экономике 1975 г.

История исследования задачи

- Применение линейного программирования в экономике (Л. В. Канторович, 1930-ые гг.) — нобелевская премия по экономике 1975 г.
- Симплекс-метод (Дж. Данциг, 1949 г.)

История исследования задачи

- Применение линейного программирования в экономике (Л. В. Канторович, 1930-ые гг.) — нобелевская премия по экономике 1975 г.
- Симплекс-метод (Дж. Данциг, 1949 г.)
- Доказана полиномиальность задачи линейного программирования (Л. Хачиян, 1979)

The New York Times

A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics

By Malcolm W. Browne

Nov. 7, 1979

https://www.nytimes.com/1979/11/07/archives/a-soviet-discovery-rocks-world-of-mathematics-russians-surprise.html?_r=0

История исследования задачи

- Применение линейного программирования в экономике (Л. В. Канторович, 1930-ые гг.) — нобелевская премия по экономике 1975 г.
- Симплекс-метод (Дж. Данциг, 1949 г.)
- Доказана полиномиальность задачи линейного программирования (Л. Хачиян, 1979)


The New York Times

A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics

By Malcolm W. Browne

Nov. 7, 1979

https://www.nytimes.com/1979/11/07/archives/a-soviet-discovery-rocks-world-of-mathematics-russians-surprise.html?_r=0

- Первый практически полезный полиномиальный алгоритм (Н. Кармаркар, 1984)

Резюме

- Постановки и преобразования задач линейного программирования
- История исследования и приложения
- Свойства допустимого множества
- Крайние точки, вершины и базисное допустимое решение
- Где искать решение?