

Методы оптимизации

Лекция 3: Сопряжённые множества, конусы и их свойства

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт



21 сентября 2020 г.

На прошлой лекции

- ▶ Аффинные множества

На прошлой лекции

- ▶ Аффинные множества
- ▶ Топологические свойства выпуклых множеств

На прошлой лекции

- ▶ Аффинные множества
- ▶ Топологические свойства выпуклых множеств
- ▶ Отделимость множеств

На прошлой лекции

- ▶ Аффинные множества
- ▶ Топологические свойства выпуклых множеств
- ▶ Отделимость множеств
- ▶ Опорная гиперплоскость

Сопряжённое множество

Определение

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество \mathcal{G}^* , что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Сопряжённое множество

Определение

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество \mathcal{G}^* , что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, тогда $\mathcal{G}_2^* \subset \mathcal{G}_1^*$.

Сопряжённое множество

Определение

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество \mathcal{G}^* , что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, тогда $\mathcal{G}_2^* \subset \mathcal{G}_1^*$.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in \mathcal{G}_2^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}_2$
- ▶ Так как $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то $\langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle \geq -1 \forall \mathbf{y} \in \mathcal{G}_1$
- ▶ А значит $\mathbf{p} \in \mathcal{G}_1^*$

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество \mathcal{G}^{**} , что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть \mathcal{G} — произвольное множество в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{G}^{**} = \text{cl}(\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\}))$.

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество \mathcal{G}^{**} , что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть \mathcal{G} — произвольное множество в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{G}^{**} = \text{cl}(\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\}))$.

Доказательство

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество \mathcal{G}^{**} , что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть \mathcal{G} — произвольное множество в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{G}^{**} = \text{cl}(\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\}))$.

Доказательство

- Обозначим $\hat{\mathcal{G}} \equiv \text{cl}(\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\}))$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ тогда по определению \mathcal{G}^* выполнено $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1$ для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{G}^*$. Это значит, что $\mathbf{x} \in \mathcal{G}^{**}$

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество \mathcal{G}^{**} , что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть \mathcal{G} — произвольное множество в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{G}^{**} = \text{cl}(\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\}))$.

Доказательство

- ▶ Обозначим $\hat{\mathcal{G}} \equiv \text{cl}(\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\}))$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ тогда по определению \mathcal{G}^* выполнено $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1$ для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{G}^*$. Это значит, что $\mathbf{x} \in \mathcal{G}^{**}$
- ▶ В итоге $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{**}$, но \mathcal{G}^{**} содержит 0, является выпуклым и замкнутым, поэтому $\text{cl}(\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\})) \subseteq \mathcal{G}^{**}$

- ▶ Пусть $y \in \mathcal{G}^{**}$, но $y \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить y и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$

- ▶ Пусть $y \in \mathcal{G}^{**}$, но $y \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить y и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- ▶ Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$

- ▶ Пусть $y \in \mathcal{G}^{**}$, но $y \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить y и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- ▶ Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- ▶ Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \quad (1)$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$

- ▶ Пусть $y \in \mathcal{G}^{**}$, но $y \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить y и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- ▶ Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- ▶ Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \quad (1)$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$

- ▶ Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$

- ▶ Пусть $y \in \mathcal{G}^{**}$, но $y \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить y и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle$, $\forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- ▶ Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- ▶ Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \quad \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \quad (1)$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$

- ▶ Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$
- ▶ Поскольку $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$, $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, то по определению выполнено $\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle \geq -1$, что противоречит (2)

- ▶ Пусть $y \in \mathcal{G}^{**}$, но $y \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить y и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle$, $\forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- ▶ Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- ▶ Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \quad \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \quad (1)$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$

- ▶ Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$
- ▶ Поскольку $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$, $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, то по определению выполнено $\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle \geq -1$, что противоречит (2)
- ▶ Значит $\mathcal{G}^{**} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$

- ▶ Пусть $y \in \mathcal{G}^{**}$, но $y \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить y и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle$, $\forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- ▶ Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- ▶ Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \quad \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \quad (1)$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$

- ▶ Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$
- ▶ Поскольку $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$, $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, то по определению выполнено $\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle \geq -1$, что противоречит (2)
- ▶ Значит $\mathcal{G}^{**} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$

Следствие

Если множество \mathcal{G} выпукло, замкнуто и содержит 0 , то $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$

Напоминание: конус

Определение

Множество \mathcal{K} называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Напоминание: конус

Определение

Множество \mathcal{K} называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество \mathcal{K} называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Сопряжённый конус

Определение

Если $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ конус, то

$$\mathcal{K}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}\}.$$

Сопряжённый конус

Определение

Если $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ конус, то

$$\mathcal{K}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}\}.$$

Определение

Если $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ подпространство, то

$$\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp.$$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- ▶ $\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- ▶ $\|\cdot\|_2 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- ▶ $\|\cdot\|_\infty \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- ▶ $\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- ▶ $\|\cdot\|_2 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- ▶ $\|\cdot\|_\infty \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- ▶ $\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- ▶ $\|\cdot\|_2 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- ▶ $\|\cdot\|_\infty \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Самосопряжённые конусы

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- ▶ $\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- ▶ $\|\cdot\|_2 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- ▶ $\|\cdot\|_\infty \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Самосопряжённые конусы

- ▶ \mathbb{R}_+^n

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- ▶ $\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- ▶ $\|\cdot\|_2 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- ▶ $\|\cdot\|_\infty \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Самосопряжённые конусы

- ▶ \mathbb{R}_+^n
- ▶ Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- ▶ $\|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- ▶ $\|\cdot\|_2 \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- ▶ $\|\cdot\|_\infty \rightarrow \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Самосопряжённые конусы

- ▶ \mathbb{R}_+^n
- ▶ Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$
- ▶ \mathbf{S}_+^n

Линейные матричные неравенства и их приложения

Б. Т. Поляк
М. В. Хлебников
П. С. Щербаков

Управление линейными системами при внешних возмущениях

Техника линейных
матричных неравенств

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \Delta A)x + B_1 u + D w \\ z &= Cx + B_2 u\end{aligned}$$



Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory

Stephen Boyd
Laurent El Ghaoui
Eric Feron
Venkataramanan Balakrishnan

siam. Studies in
Applied Mathematics

Линейные матричные неравенства и их приложения

Определение

Линейным матричным неравенством (LMI) называется выражение вида

$$\mathbf{A}_0 + x_1 \mathbf{A}_1 + \dots + x_n \mathbf{A}_n \succeq 0,$$

в котором нужно проверить существование вектора \mathbf{x} , который удовлетворяет неравенству для заданных $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$.

Упражнение

Проверьте, что множество векторов \mathbf{x} , которые удовлетворяют данному LMI, является выпуклым.

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x$, $x(0) = x_0$ устойчива iff
 $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x$, $x(0) = x_0$ устойчива iff
 $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}_{++}^n} \quad & 0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0 \end{aligned}$$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x$, $x(0) = x_0$ устойчива iff
 $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}_{++}^n} \quad & 0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0 \end{aligned}$$

- Очевидный ответ у замкнутой задачи $\mathbf{P} = 0$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x$, $x(0) = x_0$ устойчива iff
 $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}_{++}^n} & 0 \\ \text{s.t. } & \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0 \end{aligned}$$

- ▶ Очевидный ответ у замкнутой задачи $\mathbf{P} = 0$
- ▶ Чтобы его избежать, исправим ограничения $\mathbf{P} - \varepsilon \mathbf{I} \in \mathbf{S}_+^n$ и $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \preceq -\alpha \mathbf{P}$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x$, $x(0) = x_0$ устойчива iff
 $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}_{++}^n} & 0 \\ \text{s.t. } & \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0 \end{aligned}$$

- ▶ Очевидный ответ у замкнутой задачи $\mathbf{P} = 0$
- ▶ Чтобы его избежать, исправим ограничения $\mathbf{P} - \varepsilon \mathbf{I} \in \mathbf{S}_+^n$ и $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \preceq -\alpha \mathbf{P}$
- ▶ Уменьшением параметров можно добиться эквивалентности задач, если это необходимо

Пример

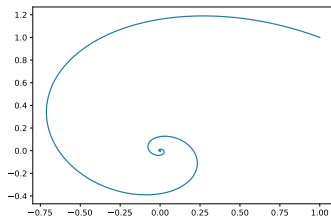
Динамическая система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = [1 \quad 1]^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Пример

Динамическая система

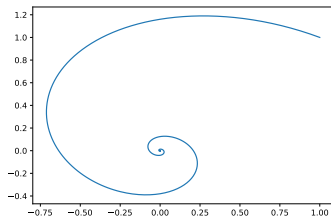
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = [1 \quad 1]^\top, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$



Пример

Динамическая система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

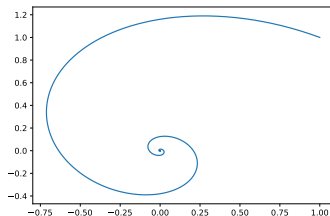


$$\blacktriangleright \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0.21279944 & 0.00498653 \\ 0.00498653 & 0.22003798 \end{bmatrix} \text{ и}$$
$$\lambda(\mathbf{P}^*) = \{0.21025717, 0.22258025\}$$

Пример

Динамическая система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = [1 \quad 1]^\top, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$



- ▶ $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0.21279944 & 0.00498653 \\ 0.00498653 & 0.22003798 \end{bmatrix}$ и $\lambda(\mathbf{P}^*) = \{0.21025717, 0.22258025\}$
- ▶ $\lambda(\mathbf{A}^\top \mathbf{P}^* + \mathbf{P}^* \mathbf{A}) = \{-0.81189559, -0.47937813\}$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- ▶ Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- ▶ Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- ▶ Задача $\min_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- ▶ Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- ▶ Задача $\min_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- ▶ Равносильное преобразование

$$\begin{aligned} & \min_{(\mathbf{x}, t)} t \\ & \text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0 \end{aligned}$$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- ▶ Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- ▶ Задача $\min_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- ▶ Равносильное преобразование

$$\begin{aligned} & \min_{(\mathbf{x}, t)} t \\ & \text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0 \end{aligned}$$

Пример

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- ▶ Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- ▶ Задача $\min_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- ▶ Равносильное преобразование

$$\begin{aligned} & \min_{(\mathbf{x}, t)} t \\ & \text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0 \end{aligned}$$

Пример

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- ▶ Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- ▶ Задача $\min_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- ▶ Равносильное преобразование

$$\begin{aligned} \min_{(\mathbf{x}, t)} t \\ \text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0 \end{aligned}$$

Пример

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = [0.96166719 \quad 0.33091336]^\top, \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}^*)) \approx 0.0547863$$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть C_1, C_2 замкнутые выпуклые конусы, тогда

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

► $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- ▶ Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- ▶ Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.
- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- ▶ Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.
- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- ▶ Значит $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq 0$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$. Тогда $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение аналогично следует из определения.

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶ $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- ▶ Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.
- ▶ Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- ▶ Значит $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq 0$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$. Тогда $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение аналогично следует из определения.
- ▶ $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = (\mathcal{C}_1^{**} \cap \mathcal{C}_2^{**})^* = ((\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)^*)^* = (\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)^{**} = \text{cl}(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- ▶ \mathcal{C}^n выпуклое множество

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- ▶ \mathcal{C}^n выпуклое множество
- ▶ $\mathbf{S}_+^n \subset \mathcal{C}^n$

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- ▶ \mathcal{C}^n выпуклое множество
- ▶ $\mathbf{S}_+^n \subset \mathcal{C}^n$
- ▶ Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- ▶ \mathcal{C}^n выпуклое множество
- ▶ $\mathbf{S}_+^n \subset \mathcal{C}^n$
- ▶ Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- ▶ Задача конической оптимизации с конусом \mathcal{C}^n является NP-трудной

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- ▶ \mathcal{C}^n выпуклое множество
- ▶ $\mathbf{S}_+^n \subset \mathcal{C}^n$
- ▶ Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- ▶ Задача конической оптимизации с конусом \mathcal{C}^n является NP-трудной

Упражнение

Найдите сопряжённый конус к \mathcal{C}^n

Полярный конус

Определение

Полярным конусом для конуса \mathcal{C} называется следующее множество

$$\mathcal{C}^\circ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Заметим, что $\mathcal{C}^\circ = -\mathcal{C}^*$.

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

- ▶ Для любого линейного подпространства \mathcal{L} и любого вектора \mathbf{x} выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки \mathbf{x} на множество \mathcal{G}

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

- ▶ Для любого линейного подпространства \mathcal{L} и любого вектора \mathbf{x} выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки \mathbf{x} на множество \mathcal{G}
- ▶ $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

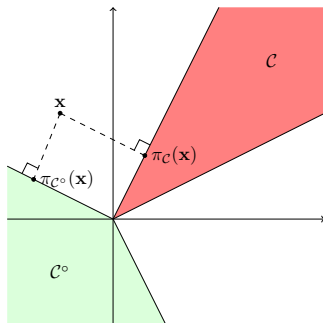
- ▶ Для любого линейного подпространства \mathcal{L} и любого вектора \mathbf{x} выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки \mathbf{x} на множество \mathcal{G}
- ▶ $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- ▶ Для выпуклого конуса \mathcal{C} и вектора \mathbf{x} справедливо
$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

- ▶ Для любого линейного подпространства \mathcal{L} и любого вектора \mathbf{x} выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки \mathbf{x} на множество \mathcal{G}
- ▶ $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- ▶ Для выпуклого конуса \mathcal{C} и вектора \mathbf{x} справедливо

$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$



Главное в первой части

- ▶ Сопряжённое множество и его свойства

Главное в первой части

- ▶ Сопряжённое множество и его свойства
- ▶ Сопряжённый конус и самосопряжённые конусы

Главное в первой части

- ▶ Сопряжённое множество и его свойства
- ▶ Сопряжённый конус и самосопряжённые конусы
- ▶ Конус положительных полуопределённых матриц и линейные матричные неравенства

Главное в первой части

- ▶ Сопряжённое множество и его свойства
- ▶ Сопряжённый конус и самосопряжённые конусы
- ▶ Конус положительных полуопределённых матриц и линейные матричные неравенства
- ▶ Полярный конус и разложение Моро

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки \mathbf{a} на непустое замкнутое множество всегда существует.

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки \mathbf{a} на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки \mathbf{a} на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки \mathbf{a} на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- ▶ Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки \mathbf{a} на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- ▶ Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- ▶ Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки \mathbf{a} на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- ▶ Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- ▶ Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$
- ▶ Тогда $\mathcal{G} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ является компактом

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки \mathbf{a} на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- ▶ Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- ▶ Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$
- ▶ Тогда $\mathcal{G} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ является компактом
- ▶ $f(\mathbf{x})$ достигает на \mathcal{G} своего минимального значения, которое и будет проекцией.

Единственность проекции

Теорема

Пусть \mathcal{X} выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Единственность проекции

Теорема

Пусть \mathcal{X} выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

Единственность проекции

Теорема

Пусть \mathcal{X} выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы

Единственность проекции

Теорема

Пусть \mathcal{X} выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- ▶ Существование следует из предыдущей теоремы
- ▶ Пусть есть две точки $\pi_1 \in \mathcal{X}$ и $\pi_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки \mathbf{a} , тогда $\|\pi_1 - \mathbf{a}\| = \|\pi_2 - \mathbf{a}\|$

Единственность проекции

Теорема

Пусть \mathcal{X} выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- ▶ Существование следует из предыдущей теоремы
- ▶ Пусть есть две точки $\pi_1 \in \mathcal{X}$ и $\pi_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки \mathbf{a} , тогда $\|\pi_1 - \mathbf{a}\| = \|\pi_2 - \mathbf{a}\|$
- ▶ Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости

Единственность проекции

Теорема

Пусть \mathcal{X} выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- ▶ Существование следует из предыдущей теоремы
- ▶ Пусть есть две точки $\pi_1 \in \mathcal{X}$ и $\pi_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки \mathbf{a} , тогда $\|\pi_1 - \mathbf{a}\| = \|\pi_2 - \mathbf{a}\|$
- ▶ Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости
- ▶ Тогда $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\| = \left\| \frac{1}{2}(\pi_1 - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\pi_2 - \mathbf{a}) \right\| < \frac{1}{2}\|\pi_1 - \mathbf{a}\| + \frac{1}{2}\|\pi_2 - \mathbf{a}\| = \|\pi_1 - \mathbf{a}\|$ — противоречие

Единственность проекции

Теорема

Пусть \mathcal{X} выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- ▶ Существование следует из предыдущей теоремы
- ▶ Пусть есть две точки $\pi_1 \in \mathcal{X}$ и $\pi_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки \mathbf{a} , тогда $\|\pi_1 - \mathbf{a}\| = \|\pi_2 - \mathbf{a}\|$
- ▶ Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости
- ▶ Тогда $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\| = \left\| \frac{1}{2}(\pi_1 - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\pi_2 - \mathbf{a}) \right\| < \frac{1}{2}\|\pi_1 - \mathbf{a}\| + \frac{1}{2}\|\pi_2 - \mathbf{a}\| = \|\pi_1 - \mathbf{a}\|$ — противоречие
- ▶ Значит проекция единственна

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- ▶ Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
 - ▶ Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
 - ▶ Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
 - ▶ Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
 - ▶ Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
 - ▶ Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
 - ▶ Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
 - ▶ Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- ▶ Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
- ▶ Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$

2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

- ▶ Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
- ▶ Тогда
$$\begin{aligned}\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 &\leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \\ &= \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle\end{aligned}$$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- ▶ Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
- ▶ Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$

2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

- ▶ Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
- ▶ Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$
- ▶ $2\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle + \lambda\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 \geq 0$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка \mathbf{a} и выпуклое замкнутое множество \mathcal{X} . Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция \mathbf{a} iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- ▶ Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
- ▶ Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$

2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

- ▶ Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
- ▶ Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$
- ▶ $2\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle + \lambda\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 \geq 0$
- ▶ При $\lambda \rightarrow 0$ получим требуемое неравенство

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - Рассмотрим выражение из критерия проекции
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции
 $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то
 $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 - ▶ Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 - ▶ Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
 - ▶ Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 - ▶ Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
 - ▶ Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 - ▶ Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
 - ▶ Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции
 - ▶ Далее покажем, что $\mathbf{u} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$.

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 - ▶ Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
 - ▶ Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции
 - ▶ Далее покажем, что $\mathbf{u} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$.
 - ▶ $\langle \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = \langle -\mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \geq 0$ по критерию проекции

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
 - ▶ Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
 - ▶ Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а \mathbf{c} произвольный элемент из \mathcal{C} , то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
 - ▶ По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
 - ▶ Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
 - ▶ По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
 - ▶ Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 - ▶ Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
 - ▶ Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
 - ▶ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции
 - ▶ Далее покажем, что $\mathbf{u} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$.
 - ▶ $\langle \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = \langle -\mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \geq 0$ по критерию проекции
 - ▶ Значит $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$

Проекция как нестягивающий оператор

Теорема

Оператор проекции является нестягивающим.

Доказательство

1. По свойству проекции, для любой точки \mathbf{y}_1

$$\langle \mathbf{y}_1 - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2)$, тогда

$$\langle \mathbf{y}_1 - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0$$

$$\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \mathbf{y}_2, \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0$$

3. Сложим

$$\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \rangle$$

4. По неравенству КБШ $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1)\|_2 \leq \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|_2$

Firmly non-expansiveness

Определение

Оператор f называется firmly non-expansive, если

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_2^2 \leq \langle f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

Теорема

Оператор проекции является firmly non-expansive:

$$\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y})\|_2^2 \leq \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке \mathbf{x} называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = \text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке \mathbf{x} называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = \text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке \mathbf{x} называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = \text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- ▶ Проекция — частный случай проксимального оператора

$$\text{для } f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке \mathbf{x} называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = \text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- ▶ Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$
- ▶ Решение задачи $\min f(\mathbf{x})$ для выпуклой функции f является неподвижной точкой проксимального оператора

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке \mathbf{x} называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = \text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- ▶ Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$
- ▶ Решение задачи $\min f(\mathbf{x})$ для выпуклой функции f является неподвижной точкой проксимального оператора
- ▶ Также является нестягивающим и firmly non-expansiveness

Главное во второй части

- ▶ Проекция и её существование

Главное во второй части

- ▶ Проекция и её существование
- ▶ Критерий проекции

Главное во второй части

- ▶ Проекция и её существование
- ▶ Критерий проекции
- ▶ Понятие о проксимальном операторе и его свойствах