Методы оптимизации
Лекция 4: Выпуклые функции

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

28 сентября 2020 г.

На прошлой лекции

- Сопряжённые множества и их свойства

На прошлой лекции

- Сопряжённые множества и их свойства
- Самосопряжённые конусы

На прошлой лекции

- Сопряжённые множества и их свойства
- Самосопряжённые конусы
- Проекция

На прошлой лекции

- Сопряжённые множества и их свойства
- Самосопряжённые конусы
- Проекция
- Критерий проекции и понятие о проксимальном операторе

Выпуклая функция (convex function)

Определение

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* $\mathcal{X}$ *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \; (<) \; \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Выпуклая функция (convex function)

Определение

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* $\mathcal{X}$ *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ ($\alpha \in (0, 1)$) *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Определение

Функция f *вогнута (concave), если функция* $-f$ *выпукла.*

Выпуклая функция (convex function)

Определение

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой (строго выпуклой), если $\mathcal{X}$ — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in [0, 1]$ ($\alpha \in (0, 1)$) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Определение

Функция f вогнута (concave), если функция $-f$ выпукла.

Примеры выпуклых функций

- x^p для $x \geq 0$ и $p \geq 1$
- $x \log x$, где $x > 0$
- $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\|\mathbf{x}\|$
- $\log \left(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i} \right)$
- $-\log \det \mathbf{X}$ для $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f.

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\text{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f.

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\text{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\text{epi } f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow \text{epi } f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f.

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f.

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow \operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha) t_2)$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f.

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow \operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
    - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
    - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$
    - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$
   - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.
2. Пусть надграфик выпуклое множество

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$
   - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.
2. Пусть надграфик выпуклое множество
   - $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$ и $(\mathbf{x}_2, f(x_2)) \in \mathrm{epi}\, f$, то $(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)) \in \mathrm{epi}\, f$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
    - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
    - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$
    - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.
2. Пусть надграфик выпуклое множество
    - $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$ и $(\mathbf{x}_2, f(x_2)) \in \mathrm{epi}\, f$, то $(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2)) \in \mathrm{epi}\, f$
    - Из определения надграфика следует выпуклость f

Линии подуровня и квазивыпуклость

Определение

Пусть $f(\mathbf{x})$ функция, определённая на множестве $\mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{L}_\beta = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid f(\mathbf{x}) \leq \beta\}$ называется множеством подуровня (sublevel set).

Линии подуровня и квазивыпуклость

Определение

Пусть $f(\mathbf{x})$ функция, определённая на множестве $\mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{L}_\beta = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid f(\mathbf{x}) \leq \beta\}$ называется множеством подуровня (sublevel set).

Определение

Функция называется квазивыпуклой, если все её множества подуровня выпуклы.

Линии подуровня и квазивыпуклость

Определение

Пусть $f(\mathbf{x})$ функция, определённая на множестве $\mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{L}_\beta = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid f(\mathbf{x}) \leq \beta\}$ называется множеством подуровня (sublevel set).

Определение

Функция называется квазивыпуклой, если все её множества подуровня выпуклы.

Q: приведите пример квазивыпуклой, но не выпуклой функции

Сильно выпуклая функция (strongly convex function)

Определение

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется сильно выпуклой с константой* $m > 0$, *если* $\mathcal{X}$ *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполнено:*
$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$

Сильно выпуклая функция (strongly convex function)

Определение

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется сильно выпуклой с константой* $m > 0$, *если* $\mathcal{X}$ *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполнено:*
$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

- Выпуклость $\supset$ строгая выпуклость $\supset$ сильная выпуклость

Сильно выпуклая функция (strongly convex function)

Определение

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется сильно выпуклой с константой* $m > 0$, *если* $\mathcal{X}$ *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполнено:*
$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

- Выпуклость $\supset$ строгая выпуклость $\supset$ сильная выпуклость
- Для сильно выпуклых функций многие утверждения о методах оказываются более сильными, чем просто для выпуклых функций

Сильно выпуклая функция (strongly convex function)

Определение

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется сильно выпуклой с константой* $m > 0$, *если* $\mathcal{X}$ *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполнено:*
$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

- Выпуклость $\supset$ строгая выпуклость $\supset$ сильная выпуклость
- Для сильно выпуклых функций многие утверждения о методах оказываются более сильными, чем просто для выпуклых функций
- Подробности в следующем семестре

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \mathcal{X}.$$

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \mathcal{X}.$$

Доказательство: пусть f выпукла

- По определению:
  $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \mathcal{X}.$$

Доказательство: пусть f выпукла

- По определению:
  $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$
- Перепишем в виде
  $f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \leq f(\mathbf{x}_2) + \alpha(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2))$ или
  $$\frac{f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) - f(\mathbf{x}_2)}{\alpha} \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)$$

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \mathcal{X}.$$

Доказательство: пусть f выпукла

- По определению:
  $f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$
- Перепишем в виде
  $f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \leq f(\mathbf{x}_2) + \alpha(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2))$ или
  $$\frac{f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) - f(\mathbf{x}_2)}{\alpha} \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)$$
- При $\alpha \to 0$ получим
  $$\langle f'(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)$$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot\, \alpha \\
f(\mathbf{x}_2) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot\, (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot\, \alpha$$
$$f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot\, (1-\alpha)$$

- Сложим эти равенства

$$f(\mathbf{z}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot \alpha \\
f(\mathbf{x}_2) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

- Сложим эти равенства

$$
f(\mathbf{z}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)
$$

Сильно выпуклый случай

Для случая сильной выпуклости необходимо применить аналогичные выкладки к функции $f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$.

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot \alpha \\
f(\mathbf{x}_2) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

- Сложим эти равенства

$$
f(\mathbf{z}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)
$$

Сильно выпуклый случай

Для случая сильной выпуклости необходимо применить аналогичные выкладки к функции $f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$.

Упражнение

Покажите, что f сильно выпукла $\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ выпукла.

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой $m \geq 0$ iff $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой $m \geq 0$ iff $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle$$

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой $m \geq 0$ iff $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой $m \geq 0$ iff $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла
- Если найдётся точка $\mathbf{z}$ такая, что $f''(\mathbf{z}) \not\succeq m\mathbf{I}$, тогда найдётся направление $\mathbf{d}$ такое, что $\mathbf{d}^\top f''(\mathbf{z})\mathbf{d} < m\|\mathbf{d}\|_2^2$

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой $m \geq 0$ iff $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла
- Если найдётся точка $\mathbf{z}$ такая, что $f''(\mathbf{z}) \not\succeq m\mathbf{I}$, тогда найдётся направление $\mathbf{d}$ такое, что $\mathbf{d}^\top f''(\mathbf{z})\mathbf{d} < m\|\mathbf{d}\|_2^2$
- В таком случае в силу критерия первого порядка f невыпукла — противоречие

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой $m \geq 0$ iff $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

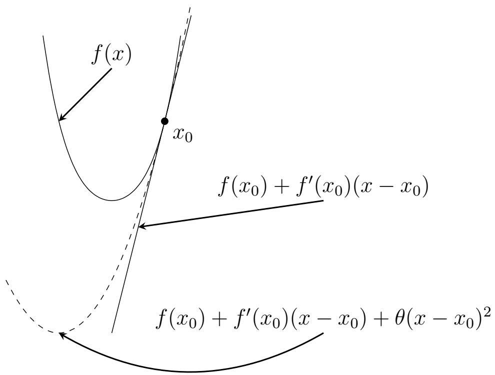
- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла
- Если найдётся точка $\mathbf{z}$ такая, что $f''(\mathbf{z}) \not\succeq m\mathbf{I}$, тогда найдётся направление $\mathbf{d}$ такое, что $\mathbf{d}^\top f''(\mathbf{z})\mathbf{d} < m\|\mathbf{d}\|_2^2$
- В таком случае в силу критерия первого порядка f невыпукла — противоречие

Напоминание

Для проверки определённости матрицы нужно использовать определение или критерий Сильвестра

Иллюстрация дифференциальных критериев

Пусть $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4$



- Линейная глобальная оценка снизу для выпуклой функции
- Квадратичная глобальная оценка снизу для сильно выпуклой функции

Ещё один критерий выпуклости первого порядка

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируемая функция на множестве $\mathcal{X}$. Она является сильно выпуклой с константой $m \geq 0$ iff $\langle f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

Ещё один критерий выпуклости первого порядка

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируемая функция на множестве $\mathcal{X}$. Она является сильно выпуклой с константой $m \geq 0$ iff $\langle f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

Доказательство

Ещё один критерий выпуклости первого порядка

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируемая функция на множестве $\mathcal{X}$. Она является сильно выпуклой с константой $m \geq 0$ iff
$\langle f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

Доказательство

1. Пусть выполнено неравенство

Ещё один критерий выпуклости первого порядка

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируемая функция на множестве $\mathcal{X}$. Она является сильно выпуклой с константой $m \geq 0$ iff $\langle f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

Доказательство

1. Пусть выполнено неравенство
   - По формуле Ньютона-Лейбница
     $$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \int_0^1 \langle f'(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle dt$$

Ещё один критерий выпуклости первого порядка

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируемая функция на множестве $\mathcal{X}$. Она является сильно выпуклой с константой $m \geq 0$ iff $\langle f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

Доказательство

1. Пусть выполнено неравенство
   - По формуле Ньютона-Лейбница
     $$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \int_0^1 \langle f'(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle dt$$
   - Тогда $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle =$
     $$\int_0^1 \langle f'(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle dt - \langle f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle =$$
     $$\int_0^1 \frac{1}{t} \langle f'(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f'(\mathbf{x}_0), t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle dt \geq$$
     $$\int_0^1 \frac{1}{t} m t^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 dt = \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$

Ещё один критерий выпуклости первого порядка

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируемая функция на множестве $\mathcal{X}$. Она является сильно выпуклой с константой $m \geq 0$ iff
$\langle f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

Доказательство

1. Пусть выполнено неравенство
   - По формуле Ньютона-Лейбница
     $$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \int_0^1 \langle f'(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle dt$$
   - Тогда $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle =$
     $$\int_0^1 \langle f'(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle dt - \langle f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle =$$
     $$\int_0^1 \frac{1}{t} \langle f'(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f'(\mathbf{x}_0), t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle dt \geq$$
     $$\int_0^1 \frac{1}{t} m t^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 dt = \frac{m}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$
   - По критерию первого порядка функция сильно выпукла

2. Пусть функция сильно выпукла

2. Пусть функция сильно выпукла
   - Запишем критерий первого порядка для пары $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$ и для пары $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \langle f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$
$$f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}) \geq \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x} \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$

2. Пусть функция сильно выпукла
   - Запишем критерий первого порядка для пары $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$ и для пары $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \langle f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{m}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$
$$f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}) \geq \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x} \rangle + \frac{m}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$

   - Сложим эти неравенства
     $0 \geq \langle f'(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

2. Пусть функция сильно выпукла
   - Запишем критерий первого порядка для пары $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$ и для пары $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \langle f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$
$$f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}) \geq \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0 - \mathbf{x} \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$$

   - Сложим эти неравенства
     $0 \geq \langle f'(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$
   - Перенесём в левую часть
     $\langle f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Если f_i — выпуклы, то $\max\limits_{i=1,\ldots,m} f_i$ также выпукла

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Если f_i — выпуклы, то $\max\limits_{i=1,\dots,m} f_i$ также выпукла
- Сумма выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами — выпуклая функция

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Если f_i — выпуклы, то $\max\limits_{i=1,\dots,m} f_i$ также выпукла
- Сумма выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами — выпуклая функция
- Скалярная композиция $h(f(\mathbf{x}))$

Сохранение выпуклости при взятии инфимума

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла относительно обоих аргументов, множество $\mathcal{C}$ выпукло. Тогда функция $g(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также выпукла.

Сохранение выпуклости при взятии инфимума

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла относительно обоих аргументов, множество $\mathcal{C}$ выпукло. Тогда функция $g(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также выпукла.

Доказательство

Сохранение выпуклости при взятии инфимума

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла относительно обоих аргументов, множество $\mathcal{C}$ выпукло. Тогда функция $g(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также выпукла.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{dom} g$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ наудётся точки $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ такие что $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1) + \varepsilon$ и $f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2) + \varepsilon$

Сохранение выпуклости при взятии инфимума

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла относительно обоих аргументов, множество $\mathcal{C}$ выпукло. Тогда функция $g(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также выпукла.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{dom} g$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ наудётся точки $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ такие что $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1) + \varepsilon$ и $f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2) + \varepsilon$
- Рассмотрим точку $\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2$:
  $g(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \leq$
  $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2, \alpha \mathbf{y}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{y}_2) \leq$
  $\alpha f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq \alpha g(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) g(\mathbf{x}_2) + \varepsilon$

Сохранение выпуклости при взятии инфимума

Теорема

Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла относительно обоих аргументов, множество $\mathcal{C}$ выпукло. Тогда функция $g(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также выпукла.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{dom} g$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ наудётся точки $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ такие что $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq g(\mathbf{x}_1) + \varepsilon$ и $f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq g(\mathbf{x}_2) + \varepsilon$
- Рассмотрим точку $\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$: $g(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \leq$ $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha \mathbf{y}_1 + (1-\alpha)\mathbf{y}_2) \leq$ $\alpha f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq \alpha g(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) g(\mathbf{x}_2) + \varepsilon$
- Так как это неравенство выполнено для любого $\varepsilon > 0$, то $g(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha g(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) g(\mathbf{x}_2)$

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \operatorname{dom} f\}$, где $\mathbf{x} \in \operatorname{dom} f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \operatorname{dom} f\}$, где $\mathbf{x} \in \operatorname{dom} f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathrm{dom}\, f\}$, где $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

1. Пусть f выпукла

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathrm{dom}\, f\}$, где $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

1. Пусть f выпукла
   - Возьмём точки t_1, t_2 и $t_\alpha = \alpha t_1 + (1 - \alpha) t_2$, $\alpha \in [0, 1]$

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \operatorname{dom} f\}$, где $\mathbf{x} \in \operatorname{dom} f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

1. Пусть f выпукла
   - Возьмём точки t_1, t_2 и $t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$, $\alpha \in [0, 1]$
   - Тогда $g(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = f(\mathbf{x} + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\mathbf{y}) =$ $f(\alpha(\mathbf{x} + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y})) \leq$ $\alpha f(bx + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y}) = \alpha g(t_1) + (1-\alpha)g(t_2)$

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathrm{dom}\, f\}$, где $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

1. Пусть f выпукла
   - Возьмём точки t_1, t_2 и $t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$, $\alpha \in [0,1]$
   - Тогда $g(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = f(\mathbf{x} + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\mathbf{y}) = f(\alpha(\mathbf{x} + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y})) \leq \alpha f(bx + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y}) = \alpha g(t_1) + (1-\alpha)g(t_2)$
2. Пусть g выпукла

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathrm{dom}\, f\}$, где $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

1. Пусть f выпукла
   - Возьмём точки t_1, t_2 и $t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$, $\alpha \in [0,1]$
   - Тогда $g(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = f(\mathbf{x} + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\mathbf{y}) = f(\alpha(\mathbf{x} + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y})) \leq \alpha f(bx + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y}) = \alpha g(t_1) + (1-\alpha)g(t_2)$
2. Пусть g выпукла
   - Возьмём произвольную пару точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, тогда $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathrm{dom}\, f\}$, где $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

1. Пусть f выпукла
   - Возьмём точки t_1, t_2 и $t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$, $\alpha \in [0, 1]$
   - Тогда $g(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = f(\mathbf{x} + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\mathbf{y}) = f(\alpha(\mathbf{x} + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y})) \leq \alpha f(bx + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y}) = \alpha g(t_1) + (1-\alpha)g(t_2)$
2. Пусть g выпукла
   - Возьмём произвольную пару точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, тогда $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$
   - $f(\mathbf{x}_1) = g(\mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{y}) = g(0)$ и $f(\mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{y}) = g(1)$

Ограничение на прямую

Теорема

Функция f выпукла iff функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ выпукла на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathrm{dom}\, f\}$, где $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f$ и $\mathbf{y}$ произвольное направление

Доказательство

1. Пусть f выпукла
   - Возьмём точки t_1, t_2 и $t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$, $\alpha \in [0, 1]$
   - Тогда $g(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = f(\mathbf{x} + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\mathbf{y}) =$ $f(\alpha(\mathbf{x} + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y})) \leq$ $\alpha f(bx + t_1\mathbf{y}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x} + t_2\mathbf{y}) = \alpha g(t_1) + (1-\alpha)g(t_2)$
2. Пусть g выпукла
   - Возьмём произвольную пару точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, тогда $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$
   - $f(\mathbf{x}_1) = g(\mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{y}) = g(0)$ и $f(\mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{y}) = g(1)$
   - $f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) =$ $f(\mathbf{x}_1 + (0 \cdot \alpha + 1 \cdot (1-\alpha))\mathbf{y}) = g(0 \cdot \alpha + 1 \cdot (1-\alpha)) \leq$ $\alpha g(0) + (1-\alpha)g(1) = \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2)$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$
- По определению локального минимума: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, где $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_2 \leq \delta$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$
- По определению локального минимума: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, где $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_2 \leq \delta$
- Выберем достаточно малое $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим точку $\mathbf{z} = (1 - \alpha)\mathbf{x}^* + \alpha\mathbf{y}^*$ такую что $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \delta$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$
- По определению локального минимума: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, где $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_2 \leq \delta$
- Выберем достаточно малое $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим точку $\mathbf{z} = (1 - \alpha)\mathbf{x}^* + \alpha\mathbf{y}^*$ такую что $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \delta$
- $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{z}) \leq \alpha f(\mathbf{y}^*) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}^*)$

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Пример

Задача определения максимального независимого множества вершин графа сводится к задаче оптимизации на множестве $\mathcal{C}^n$. Подробности тут

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{split}
& \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{split}
$$

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{split}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}\\
\text{s.t. } & \|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{split}
$$

- Допустимое множество невыпукло

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_2 = 1$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция выпукла

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция выпукла

Q: какая интерпретация у $\mathbf{x}^*$ и $f(\mathbf{x}^*)$?

Степенной метод (Power method)

- Степенной метод для поиска собственного вектора для максимального по модулю собственного значения

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2}, \quad \hat{\lambda}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1}$$

Степенной метод (Power method)

- Степенной метод для поиска собственного вектора для максимального по модулю собственного значения

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2}, \quad \hat{\lambda}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1}$$

- $\mathbf{A}$ – диагонализуема, поэтому есть базис из собственных векторов $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ причём предположим $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$

Степенной метод (Power method)

- Степенной метод для поиска собственного вектора для максимального по модулю собственного значения

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2}, \quad \hat{\lambda}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1}$$

- $\mathbf{A}$ – диагонализуема, поэтому есть базис из собственных векторов $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ причём предположим $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$
- $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_1\|_2 \leq \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_1\|_2$

Степенной метод (Power method)

- Степенной метод для поиска собственного вектора для максимального по модулю собственного значения

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2}, \quad \hat{\lambda}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1}$$

- $\mathbf{A}$ – диагонализуема, поэтому есть базис из собственных векторов $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ причём предположим $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$
- $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_1\|_2 \leq \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_1\|_2$
- Для поиска максимального и минимального собственных значений (не по модулю) существуют более продвинутые методы (см. метод Ланцоша)

Степенной метод (Power method)

- Степенной метод для поиска собственного вектора для максимального по модулю собственного значения

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2}, \quad \hat{\lambda}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1}$$

- $\mathbf{A}$ – диагонализуема, поэтому есть базис из собственных векторов $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ причём предположим $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$
- $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_1\|_2 \leq \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_1\|_2$
- Для поиска максимального и минимального собственных значений (не по модулю) существуют более продвинутые методы (см. метод Ланцоша)
- Чтобы понять, как ими пользоваться см. документацию в SciPy

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f выпукла, то $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$*, где*

$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f выпукла, то $f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$, *где* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Доказательство по индукции

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f *выпукла, то* $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$, *где*
$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Доказательство по индукции

- База $k = 2$ выполнена в силу определения

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f выпукла, то $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$, *где* $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Доказательство по индукции

- База $k = 2$ выполнена в силу определения
- Пусть неравенство выполнено для $k = m - 1$:
  $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f выпукла, то $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$, *где* $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Доказательство по индукции

- База $k = 2$ выполнена в силу определения
- Пусть неравенство выполнено для $k = m - 1$:
  $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$
- Рассмотрим $k = m$: $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i\right) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \hat{\alpha} \mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_m \mathbf{x}_m\right) =$
  $f\left((1 - \hat{\alpha}_m) \sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\hat{\alpha}_i}{1-\hat{\alpha}_m} \mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_m \mathbf{x}_m\right) \leq$
  $(1 - \hat{\alpha}_m) f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\hat{\alpha}_i}{1-\hat{\alpha}_m} \mathbf{x}_i\right) + \hat{\alpha}_m f(\mathbf{x}_m) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$

Следствия и обобщения

- Запись неравенства Йенсена для функции $-\log x$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

Следствия и обобщения

- Запись неравенства Йенсена для функции $-\log x$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

- Неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

Следствия и обобщения

- Запись неравенства Йенсена для функции $-\log x$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

- Неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

- Обобщение на непрерывный случай даёт неравенство для выпуклой функции от матожидания

$$f(\mathbb{E}(\mathbf{x})) \leq \mathbb{E}(f(\mathbf{x}))$$

Главное

- Выпуклые функции и их свойства

Главное

- Выпуклые функции и их свойства
- Критерии выпуклости

Главное

- Выпуклые функции и их свойства
- Критерии выпуклости
- Операции, сохраняющие выпуклость

Главное

- Выпуклые функции и их свойства
- Критерии выпуклости
- Операции, сохраняющие выпуклость
- Неравенство Йенсена