

Методы оптимизации

Лекция 1: Введение. Выпуклые множества

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт



7 сентября 2020 г.

О чём этот семестр?

Основы выпуклого анализа

- ▶ Выпуклые множества и функции
- ▶ Субградиенты и субдифференциалы
- ▶ Конусы

Условия оптимальности и двойственность

- ▶ Условия Каруша-Куна-Таккера
- ▶ Основы теории двойственности и её применение
- ▶ Линейное программирование

Организационные вопросы

- ▶ Лекция и семинар каждую неделю

Организационные вопросы

- ▶ Лекция и семинар каждую неделю
- ▶ Отчётность

Организационные вопросы

- ▶ Лекция и семинар каждую неделю
- ▶ Отчётность
- ▶ Репозиторий со слайдами лекций:
<https://github.com/amkatrutsa/optimization-fupm>

Основная книга

S. Boyd and L. Vandenberghe *Convex Optimization*

<https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/>

- ▶ A. Nemirovski *Lecture notes on Modern Convex Optimization*
- ▶ R. T. Rockafellar *Convex analysis*
- ▶ В. Г. Жадан *Методы оптимизации. Часть 1. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации: учебное пособие*

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
 - ▶ молекулярное моделирование

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление
 - ▶ обработка сигналов

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление
 - ▶ обработка сигналов
 - ▶ оценка параметров в статистике

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление
 - ▶ обработка сигналов
 - ▶ оценка параметров в статистике
 - ▶ и другие

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи
5. Реализация алгоритма и проверка его корректности

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \quad \quad f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \quad f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- ▶ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- ▶ $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — целевая функция

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \quad f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- ▶ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- ▶ $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — целевая функция
- ▶ $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функции ограничений

Пример: построение линейного классификатора

- ▶ Дана выборка: (\mathbf{x}_i, y_i) ,
 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i = \{+1, -1\}$, $i = 1, \dots, m$

Пример: построение линейного классификатора

- ▶ Дана выборка: (\mathbf{x}_i, y_i) ,
 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i = \{+1, -1\}$, $i = 1, \dots, m$
- ▶ Линейный классификатор $\hat{y} = \text{sign}(\mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b)$

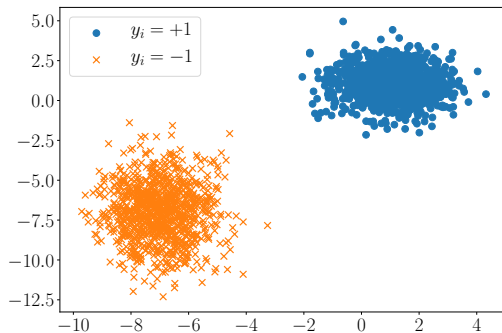
Пример: построение линейного классификатора

- ▶ Дана выборка: (\mathbf{x}_i, y_i) ,
 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i = \{+1, -1\}$, $i = 1, \dots, m$
- ▶ Линейный классификатор $\hat{y} = \text{sign}(\mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b)$
- ▶
$$\begin{cases} \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b > 1, & y_i = +1 \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b < -1, & y_i = -1 \end{cases}$$

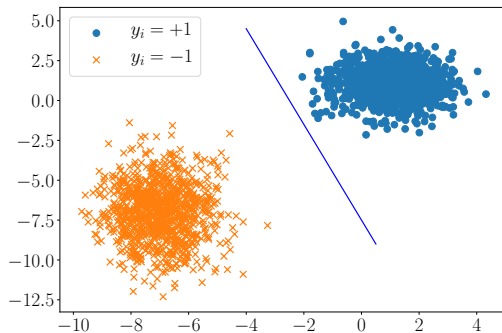
Пример: построение линейного классификатора

- ▶ Дана выборка: (\mathbf{x}_i, y_i) ,
 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i = \{+1, -1\}$, $i = 1, \dots, m$
- ▶ Линейный классификатор $\hat{y} = \text{sign}(\mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b)$
- ▶
$$\begin{cases} \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b > 1, & y_i = +1 \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b < -1, & y_i = -1 \end{cases}$$
- ▶ $y_i(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b) > 1$

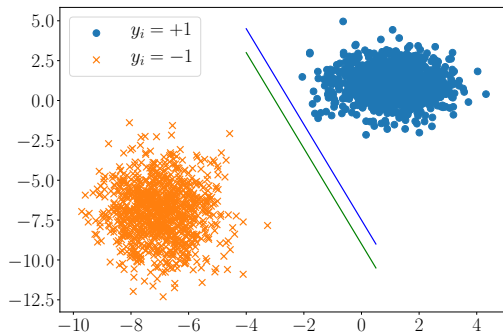
Возможные решения



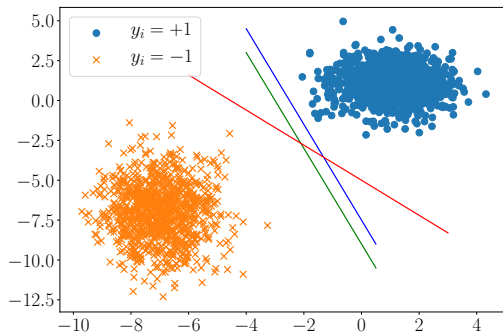
Возможные решения



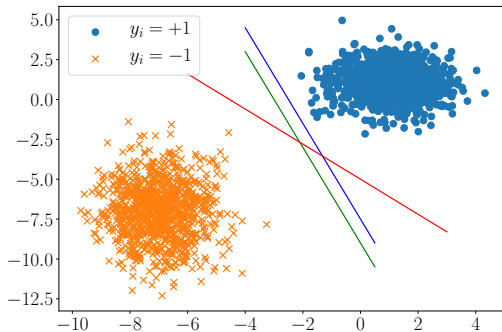
Возможные решения



Возможные решения



Возможные решения



Q: Как однозначно задать разделяющую гиперплоскость?

Максимизация зазора

Максимизация зазора

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

Максимизация зазора

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

- ▶ Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|_2}$$

Максимизация зазора

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

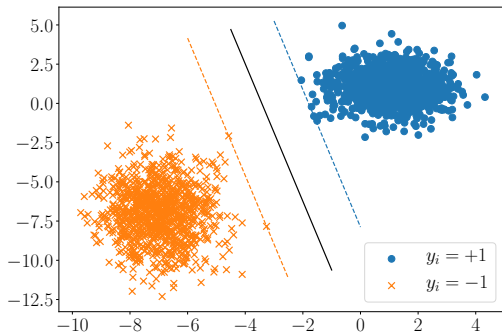
- ▶ Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|_2}$$

Финальная задача

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, b} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i + b) > 1, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Оптимальная гиперплоскость



Определения решений

Определения решений

Определение

Точка \mathbf{x}^ называется точкой глобального минимума, если $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ для всех \mathbf{x} из допустимого множества.*

Определения решений

Определение

Точка \mathbf{x}^ называется точкой глобального минимума, если $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ для всех \mathbf{x} из допустимого множества.*

Определение

Точка \mathbf{x}^ называется точкой локального минимума, если $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ для всех \mathbf{x} из окрестности точки \mathbf{x}^* и допустимого множества.*

Определения решений

Определение

Точка \mathbf{x}^* называется точкой **глобального минимума**, если $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ для всех \mathbf{x} из допустимого множества.

Определение

Точка \mathbf{x}^* называется точкой **локального минимума**, если $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ для всех \mathbf{x} из окрестности точки \mathbf{x}^* и допустимого множества.

Альтернативная запись задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \\ f_j(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

Как решать?

В общем случае:

- ▶ NP-полные
- ▶ рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

Как решать?

В общем случае:

- ▶ NP-полные
- ▶ рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

НО определённые классы задач могут быть решены быстро!

Как решать?

В общем случае:

- ▶ NP-полные
- ▶ рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

НО определённые классы задач могут быть решены быстро!

- ▶ Линейное программирование
- ▶ Задача наименьших квадратов
- ▶ Задача о малоранговом приближении матрицы
- ▶ Выпуклая оптимизация

История развития

- ▶ 1940-ые — линейное программирование
- ▶ 1950-ые — квадратичное программирование
- ▶ 1960-ые — геометрическое программирование
- ▶ 1990-ые — полиномиальные методы внутренней точки для задач конической оптимизации

Современные направления

- ▶ Решение задач огромной размерности ($\sim 10^8 - 10^{12}$)

Современные направления

- ▶ Решение задач огромной размерности ($\sim 10^8 - 10^{12}$)
- ▶ Распределённая оптимизация

Современные направления

- ▶ Решение задач огромной размерности ($\sim 10^8 - 10^{12}$)
- ▶ Распределённая оптимизация
- ▶ Быстрые тензорные методы

Современные направления

- ▶ Решение задач огромной размерности ($\sim 10^8 - 10^{12}$)
- ▶ Распределённая оптимизация
- ▶ Быстрые тензорные методы
- ▶ Стохастические алгоритмы: масштабируемость vs. точности

Современные направления

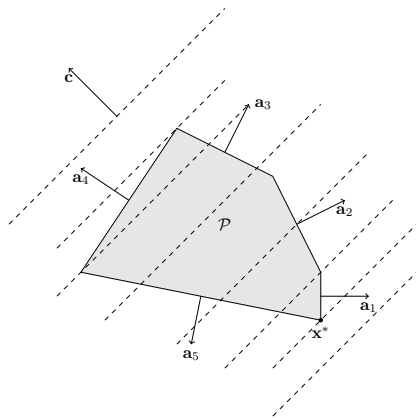
- ▶ Решение задач огромной размерности ($\sim 10^8 - 10^{12}$)
- ▶ Распределённая оптимизация
- ▶ Быстрые тензорные методы
- ▶ Стохастические алгоритмы: масштабируемость vs. точности
- ▶ Невыпуклые задачи определённой структуры

Современные направления

- ▶ Решение задач огромной размерности ($\sim 10^8 - 10^{12}$)
- ▶ Распределённая оптимизация
- ▶ Быстрые тензорные методы
- ▶ Стохастические алгоритмы: масштабируемость vs. точности
- ▶ Невыпуклые задачи определённой структуры
- ▶ Приложения выпуклой оптимизации

Линейное программирование (linear programming)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$



- ▶ нет аналитического решения
- ▶ существуют эффективные алгоритмы
- ▶ разработанная технология
- ▶ симплекс-метод входит в Топ-10 алгоритмов XX века¹

¹<https://archive.siam.org/pdf/news/637.pdf>

Задача наименьших квадратов (linear least squares problem)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- ▶ имеет аналитическое решение: $\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$
- ▶ существуют эффективные алгоритмы
- ▶ разработанная технология
- ▶ имеет статистическую интерпретацию

Малоранговое приближение (low-rank approximation)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \quad & \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F \\ \text{s.t.} \quad & \text{rank}(\mathbf{X}) \leq k \end{aligned}$$

Малоранговое приближение (low-rank approximation)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \quad & \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F \\ \text{s.t.} \quad & \text{rank}(\mathbf{X}) \leq k \end{aligned}$$

Теорема (Eckart–Young, 1993)

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ — сингулярное разложение (SVD) матрицы \mathbf{A} , где $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{r-k}] \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \dots, \sigma_r)$, $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_{r-k}] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ и $r = \text{rank}(\mathbf{A})$. Тогда решение задачи можно записать в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}_k \hat{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{V}_k^\top,$$

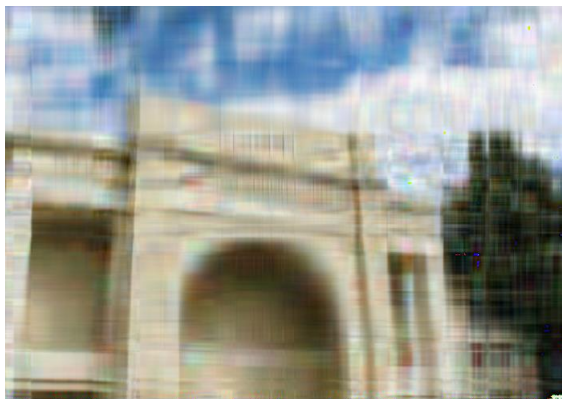
где $\hat{\mathbf{\Sigma}} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$.

Сжатие



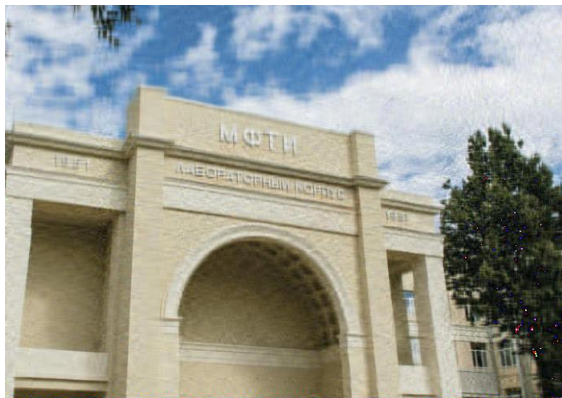
- ▶ Изображение $493 \times 700 \times 3$
- ▶ Каков эффективный ранг матрицы для каждого цвета?

Сжатие: $k = 10$



► Коэффициент сжатия $\frac{3 \times (493 \times 10 + 10 + 10 \times 700)}{493 \times 700 \times 3} = 0.035$

Сжатие: $k = 50$



- Коэффициент сжатия $\frac{3 \times (493 \times 50 + 50 + 50 \times 700)}{493 \times 700 \times 3} = 0.173$

Сжатие: $k = 100$



► Коэффициент сжатия $\frac{3 \times (493 \times 100 + 100 + 100 \times 700)}{493 \times 700 \times 3} = 0.346$

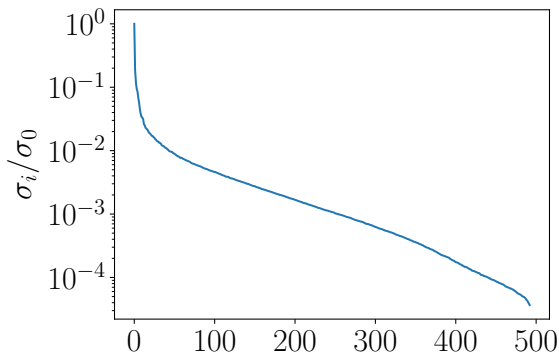
Сжатие: $k = 150$



► Коэффициент сжатия $\frac{3 \times (493 \times 150 + 150 + 150 \times 700)}{493 \times 700 \times 3} = 0.519$

Определение ранга

- ▶ Убывание сингулярных чисел связано с ошибкой аппроксимации
- ▶ Выбор ранга по величине сингулярного числа σ_k



- ▶ Некоторые авторы **предлагают** брать порог равным $4/\sqrt{3}$

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- ▶ нет аналитического решения

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- ▶ нет аналитического решения
- ▶ существуют эффективные алгоритмы

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- ▶ нет аналитического решения
- ▶ существуют эффективные алгоритмы
- ▶ часто сложно «увидеть» задачу выпуклой оптимизации

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- ▶ нет аналитического решения
- ▶ существуют эффективные алгоритмы
- ▶ часто сложно «увидеть» задачу выпуклой оптимизации
- ▶ существуют приёмы для преобразования задачи к стандартному виду

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- ▶ Локальный оптимум является глобальным

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- ▶ Локальный оптимум является глобальным
- ▶ Необходимое условие оптимальности является достаточным

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- ▶ Локальный оптимум является глобальным
- ▶ Необходимое условие оптимальности является достаточным

Вопросы:

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- ▶ Локальный оптимум является глобальным
- ▶ Необходимое условие оптимальности является достаточным

Вопросы:

- ▶ Любую ли задачу выпуклой оптимизации можно эффективно решить?

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- ▶ Локальный оптимум является глобальным
- ▶ Необходимое условие оптимальности является достаточным

Вопросы:

- ▶ Любую ли задачу выпуклой оптимизации можно эффективно решить?
- ▶ Можно ли эффективно решить невыпуклые задачи оптимизации?

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для всех $\alpha \in [0, 1]$ и любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ выполнено

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для всех $\alpha \in [0, 1]$ и любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ выполнено

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- ▶ Многоугольники

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для всех $\alpha \in [0, 1]$ и любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ выполнено

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- ▶ Многоугольники
- ▶ Гиперплоскости

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для всех $\alpha \in [0, 1]$ и любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ выполнено

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- ▶ Многоугольники
- ▶ Гиперплоскости
- ▶ Шары в *любой* норме и эллипсоиды

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для всех $\alpha \in [0, 1]$ и любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ выполнено

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- ▶ Многоугольники
- ▶ Гиперплоскости
- ▶ Шары в *любой* норме и эллипсоиды
- ▶ Симметричные положительно определённые матрицы

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество \mathcal{X} выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество \mathcal{X} выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- ▶ База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- ▶ Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество \mathcal{X} выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- ▶ База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- ▶ Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$
- ▶ Рассмотрим точку вида $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i$, где $\hat{\alpha} \in \Delta_m$

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество \mathcal{X} выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- ▶ База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- ▶ Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$
- ▶ Рассмотрим точку вида $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i$, где $\hat{\alpha} \in \Delta_m$
- ▶ Тогда найдётся $\hat{\alpha}_k < 1$ и $1 - \hat{\alpha}_k = \sum_{i \neq k} \hat{\alpha}_i$

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество \mathcal{X} выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- ▶ База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- ▶ Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$
- ▶ Рассмотрим точку вида $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i$, где $\hat{\alpha} \in \Delta_m$
- ▶ Тогда найдётся $\hat{\alpha}_k < 1$ и $1 - \hat{\alpha}_k = \sum_{i \neq k} \hat{\alpha}_i$
- ▶ $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i = \sum_{i \neq k} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_k \mathbf{x}_k =$
 $(1 - \hat{\alpha}_k) \sum_{i \neq k} \frac{\hat{\alpha}_i}{1 - \hat{\alpha}_k} \mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_k \mathbf{x}_k = (1 - \hat{\alpha}_k) \mathbf{y} + \hat{\alpha}_k \mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$ так
как множество выпукло

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств \mathcal{X}_i является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств \mathcal{X}_i является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств \mathcal{X}_i является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- ▶ Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- ▶ Построим точку $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}$, $\alpha \in [0, 1]$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств \mathcal{X}_i является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- ▶ Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- ▶ Построим точку $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}, \alpha \in [0, 1]$
- ▶ Так как все \mathcal{X}_i выпуклы, то $\mathbf{z} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств \mathcal{X}_i является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- ▶ Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- ▶ Построим точку $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}, \alpha \in [0, 1]$
- ▶ Так как все \mathcal{X}_i выпуклы, то $\mathbf{z} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- ▶ Следовательно, $\mathbf{z} \in \mathcal{X}$ и \mathcal{X} — выпукло

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть \mathcal{X} — выпуклое множество и $x, y \in \mathcal{X}$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть \mathcal{X} — выпуклое множество и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$
- ▶ Пусть f — линейное отображение вида $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть \mathcal{X} — выпуклое множество и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$
- ▶ Пусть f — линейное отображение вида $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- ▶ Покажем, что $\alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)f(\mathbf{y}) \in f(\mathcal{X})$, где $\alpha \in [0, 1]$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть \mathcal{X} — выпуклое множество и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$
- ▶ Пусть f — линейное отображение вида $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- ▶ Покажем, что $\alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)f(\mathbf{y}) \in f(\mathcal{X})$, где $\alpha \in [0, 1]$
- ▶ Действительно,

$$\begin{aligned}\alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)f(\mathbf{y}) &= \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) + (1 - \alpha)(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b} = f(\mathbf{z}),\end{aligned}$$

где $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{X}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$
- ▶ Пусть $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2$ и $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_2$ лежат в \mathcal{X} . Покажем, что в \mathcal{X} лежит точка $\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$
- ▶ Пусть $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2$ и $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_2$ лежат в \mathcal{X} . Покажем, что в \mathcal{X} лежит точка $\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}}$
- ▶ Действительно,
$$\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}} = [\alpha\hat{\mathbf{x}}_1 + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}}_1] + [\alpha\hat{\mathbf{x}}_2 + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}}_2] = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2,$$
где $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{X}_1$ и $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{X}_2$ в силу выпуклости множеств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- ▶ Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$
- ▶ Пусть $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2$ и $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_2$ лежат в \mathcal{X} . Покажем, что в \mathcal{X} лежит точка $\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}}$
- ▶ Действительно,
$$\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}} = [\alpha\hat{\mathbf{x}}_1 + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}}_1] + [\alpha\hat{\mathbf{x}}_2 + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{x}}_2] = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2,$$
где $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{X}_1$ и $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{X}_2$ в силу выпуклости множеств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Следствие

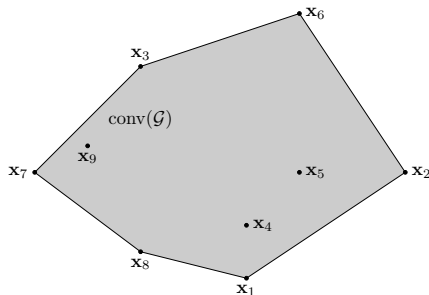
Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество

Выпуклая оболочка (convex hull)

Определение

Выпуклой оболочкой множества \mathcal{G} называется следующее множество

$$\text{conv}(\mathcal{G}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}$$



Альтернативные интерпретации

Эквивалентные формулировки

Выпуклая оболочка множества \mathcal{G} — это

- 1) минимальное по включению выпуклое множество, содержащее \mathcal{G} , то есть если \mathcal{X} выпуклое множество и $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$, то $\text{conv}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{X}$
- 2) пересечение всех выпуклых множеств, содержащих \mathcal{G}

Доказательство

- ▶ $\text{conv}(\mathcal{G})$ выпуклое множество (проверьте по определению!)
- ▶ $\mathcal{G} \subseteq \text{conv}(\mathcal{G})$
- ▶ \mathcal{X} содержит все выпуклые комбинации своих точек
- ▶ Если $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$, то \mathcal{X} содержит все выпуклые комбинации точек из \mathcal{G}
- ▶ А значит $\text{conv}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{X}$

Использование выпуклых оболочек

- ▶ При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**

Использование выпуклых оболочек

- ▶ При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- ▶ Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой

Использование выпуклых оболочек

- ▶ При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- ▶ Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой
- ▶ Решить задачу на этом множестве

Использование выпуклых оболочек

- ▶ При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- ▶ Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой
- ▶ Решить задачу на этом множестве
- ▶ Восстановить некоторым образом приближённое решение из исходной области

Конусы (cones)

Определение

Множество \mathcal{K} называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество \mathcal{K} называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Конусы (cones)

Определение

Множество \mathcal{K} называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество \mathcal{K} называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1\mathbf{x}_1 + \theta_2\mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Важные конусы

Конусы (cones)

Определение

Множество \mathcal{K} называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество \mathcal{K} называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1\mathbf{x}_1 + \theta_2\mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Важные конусы

- ▶ Неотрицательный октант

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\} \rightarrow \text{LP}$$

Конусы (cones)

Определение

Множество \mathcal{K} называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество \mathcal{K} называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1\mathbf{x}_1 + \theta_2\mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Важные конусы

- ▶ Неотрицательный октант

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\} \rightarrow \text{LP}$$

- ▶ Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\} \rightarrow \text{SOCP}$

Конусы (cones)

Определение

Множество \mathcal{K} называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество \mathcal{K} называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1\mathbf{x}_1 + \theta_2\mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Важные конусы

- ▶ Неотрицательный октант

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\} \rightarrow \text{LP}$$

- ▶ Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\} \rightarrow \text{SOCP}$

- ▶ Конус симметричных положительно полуопределённых матриц $\mathbf{S}_+^n \rightarrow \text{SDP}$

Коническая оболочка (conic hull)

Определение

Конической оболочкой множества \mathcal{G} называется множество точек вида $\sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{G}$ и $\theta_i \geq 0$ и обозначается $\text{cone}(\mathcal{G})$.

Теорема

Выпуклый конус содержит все конические оболочки своих элементов

Теорема

Коническая оболочка множества \mathcal{G} — это минимальный выпуклый конус, который содержит \mathcal{G} , то есть если \mathcal{K} выпуклый конус и $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$, то $\text{cone}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{K}$.

- ▶ Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения

- ▶ Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения
- ▶ Примеры задач оптимизации и приложения

- ▶ Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения
- ▶ Примеры задач оптимизации и приложения
- ▶ Выпуклые множества

- ▶ Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения
- ▶ Примеры задач оптимизации и приложения
- ▶ Выпуклые множества
- ▶ Способы определения является ли множество выпуклым