# Методы оптимизации
# Лекция 2: Выпуклые множества и их свойства

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

14 сентября 2020 г.

# На прошлой лекции

- План на семестр

# На прошлой лекции

- План на семестр
- Классические задачи оптимизации

# На прошлой лекции

- План на семестр
- Классические задачи оптимизации
- Выпуклые множества

# На прошлой лекции

- План на семестр
- Классические задачи оптимизации
- Выпуклые множества
- Конусы

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

## Доказательство

# Аффинное множество

### Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

### Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

### Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.
  - Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, тогда $\theta \mathbf{x} = (1-\theta)0 + \theta \mathbf{x} \in \mathcal{A}$ — замкнутость для умножения на число

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}, \; \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.
  - Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, тогда $\theta \mathbf{x} = (1-\theta)0 + \theta \mathbf{x} \in \mathcal{A}$ — замкнутость для умножения на число
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, тогда $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \in \mathcal{A}$

# Аффинное множество

## Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

## Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.
  - Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, тогда $\theta \mathbf{x} = (1-\theta)0 + \theta \mathbf{x} \in \mathcal{A}$ — замкнутость для умножения на число
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, тогда $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \in \mathcal{A}$
  - $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 2\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ — замкнутость относительно сложения элементов

# Параллельность

## Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

# Параллельность

## Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

## Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

# Параллельность

## Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

## Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

## Доказательство

# Параллельность

## Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

## Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$

# Параллельность

## Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

## Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$

# Параллельность

## Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

## Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$
- В силу замкнутости подмножества относительно сложения $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_1 + \mathbf{a} = \mathcal{L}_2$

# Параллельность

### Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

### Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

### Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$
- В силу замкнутости подмножества относительно сложения $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_1 + \mathbf{a} = \mathcal{L}_2$
- Аналогично показывается, что $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$

# Параллельность

## Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

## Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$
- В силу замкнутости подмножества относительно сложения $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_1 + \mathbf{a} = \mathcal{L}_2$
- Аналогично показывается, что $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$
- Рассмотрим некоторый вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ и множество $\mathcal{A} - \mathbf{y} = \mathcal{A} + (-\mathbf{y})$, которое является аффинным и содержит 0, следовательно, подпространство

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2$

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta \mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффиннно

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффинннo
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффинннo
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффиннно
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$
  - Рассмотрим ортогональное подпространство $\mathcal{L}^\perp$ и его базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффинннно
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$
  - Рассмотрим ортогональное подпространство $\mathcal{L}^\perp$ и его базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$
  - $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^\perp)^\perp = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$

# Критерий аффинности множества

## Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

## Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффиннно
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$
  - Рассмотрим ортогональное подпространство $\mathcal{L}^{\perp}$ и его базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$
  - $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^{\perp})^{\perp} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$
  - $\mathcal{A} = \mathcal{L} + \mathbf{c} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\left(\mathcal{X}\right)$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора $\gamma_k$ не равных нулю одновременно

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора $\gamma_k$ не равных нулю одновременно
- Обозначим $\tau = \min_{\gamma_i > 0} \frac{\alpha_i}{\gamma_i}$ и рассмотрим $\hat{\alpha}_i = \alpha_i - \tau\gamma_i$

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора $\gamma_k$ не равных нулю одновременно
- Обозначим $\tau = \min_{\gamma_i > 0} \frac{\alpha_i}{\gamma_i}$ и рассмотрим $\hat{\alpha}_i = \alpha_i - \tau \gamma_i$
- $\sum_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \tau \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1$

# Теорема Каратеодори

## Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

## Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^m \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора $\gamma_k$ не равных нулю одновременно
- Обозначим $\tau = \min_{\gamma_i > 0} \frac{\alpha_i}{\gamma_i}$ и рассмотрим $\hat{\alpha}_i = \alpha_i - \tau\gamma_i$
- $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \tau \sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$
- $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i - \tau \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{x}_i = \mathbf{x}$

# Продолжение доказательства

- По построению существует $j$ такой что $\hat{\alpha}_j = 0$, значит можно исключить $\mathbf{x}_j$

# Продолжение доказательства

- По построению существует $j$ такой что $\hat{\alpha}_j = 0$, значит можно исключить $\mathbf{x}_j$
- Продолжая аналогично, сократим число слагаемых до $n + 1$

# Продолжение доказательства

- По построению существует $j$ такой что $\hat{\alpha}_j = 0$, значит можно исключить $\mathbf{x}_j$
- Продолжая аналогично, сократим число слагаемых до $n + 1$

## Упражнение

Докажите, что если $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, то любая точка из $\mathrm{cone}\,(\mathcal{X})$ может быть представлена в виде конической комбинации не более чем $n$ точек из $\mathcal{X}$.

# Компактность

## Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

# Компактность

## Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

## Доказательство

# Компактность

## Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

## Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$

# Компактность

## Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

## Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- $f$ непрерывна, $\Delta_{n+1}$ компакт

# Компактность

## Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

## Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- $f$ непрерывна, $\Delta_{n+1}$ компакт
- По теореме Каратеодори произвольный элемент $\mathbf{z} \in \mathrm{conv}\,(\mathcal{G})$ можно представить в виде $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{g}_i \in \mathcal{G}$

# Компактность

## Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

## Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- $f$ непрерывна, $\Delta_{n+1}$ компакт
- По теореме Каратеодори произвольный элемент $\mathbf{z} \in \mathrm{conv}\,(\mathcal{G})$ можно представить в виде $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{g}_i \in \mathcal{G}$
- $\mathrm{conv}\,(\mathcal{G}) = f(\Delta_{n+1} \times \mathcal{G} \times \ldots \times \mathcal{G})$

# Компактность

## Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

## Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- $f$ непрерывна, $\Delta_{n+1}$ компакт
- По теореме Каратеодори произвольный элемент $\mathbf{z} \in \mathrm{conv}\,(\mathcal{G})$ можно представить в виде $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{g}_i \in \mathcal{G}$
- $\mathrm{conv}\,(\mathcal{G}) = f(\Delta_{n+1} \times \mathcal{G} \times \ldots \times \mathcal{G})$
- Непрерывная функция отображает компакт в компакт

# Внутренность

### Внутренность множества

Внутренность множества $\mathcal{G}$ состоит из точек $\mathcal{G}$, таких что:

$$\text{int}\,(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \mathcal{G}\},$$

где $B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon\}$

**Q**: приведите пример непустого выпуклого множества с пустой внутренностью

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\,(\mathcal{X})$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

### Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

### Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\,(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim(\mathcal{X} + \mathbf{c}) \rightarrow 0 \in \mathcal{X}$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim (\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim (\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathtt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\,(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim (\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathtt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$
  - $\dim \mathcal{X} = n \to m = n$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim(\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \texttt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$
  - $\dim \mathcal{X} = n \to m = n$
  - $\operatorname{conv}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, 0) \subset \mathcal{X}$

# Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

## Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

## Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim (\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathtt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$
  - $\dim \mathcal{X} = n \to m = n$
  - $\operatorname{conv}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, 0) \subset \mathcal{X}$
  - Открытое множество $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i \mid \alpha > 0,\ \sum_{i=1}^m \alpha_i < 1\} \subset \mathcal{X} \to \operatorname{int}(\mathcal{X}) \neq \varnothing$

# Относительная внутренность и замыкание

## Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества $\mathcal{G}$ называют следующее множество:

$$\mathrm{relint}\,(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{aff}\,(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}\}$$

# Относительная внутренность и замыкание

## Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества $\mathcal{G}$ называют следующее множество:

$$\mathrm{relint}\,(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{aff}\,(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}\}$$

## Замыкание

Замыканием множества $\mathcal{G}$ называют множество $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$, где $\mathcal{G}(r)$ — это множество точек, удалённых от $\mathcal{G}$ меньше чем на $r$. Также это множество совпадает с множеством всех предельных точек множества $\mathcal{G}$.

# Выпуклость замыкания

## Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

# Выпуклость замыкания

### Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

### Доказательство

# Выпуклость замыкания

## Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

## Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$

# Выпуклость замыкания

## Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

## Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного $r$

# Выпуклость замыкания

### Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

### Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного $r$
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$

# Выпуклость замыкания

## Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

## Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного $r$
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$
- $\mathcal{G}$ и $B(0, r)$ выпуклые множества

# Выпуклость замыкания

## Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

## Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного $r$
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$
- $\mathcal{G}$ и $B(0, r)$ выпуклые множества
- $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество, как сумма Минковского выпуклых множеств

# Выпуклость замыкания

## Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

## Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного $r$
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$
- $\mathcal{G}$ и $B(0, r)$ выпуклые множества
- $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество, как сумма Минковского выпуклых множеств
- $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G})$ выпуклое множество как пересечение выпуклых множеств

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$.

# Выпуклость относительной внутренности

### Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$.

### Доказательство

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0,1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \le \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$
- Заметим, что справедливо равенство $B = B(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}', \alpha r)$

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \mathrm{aff}\,(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$
- Заметим, что справедливо равенство $B = B(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}', \alpha r)$
- $\|\mathbf{c} - (\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}')\| = \|(1-\alpha)(\mathbf{b} - \mathbf{b}')\| \leq \alpha r \to \mathbf{c} \in B$

# Выпуклость относительной внутренности

## Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

## Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$
- Заметим, что справедливо равенство $B = B(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}', \alpha r)$
- $\|\mathbf{c} - (\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}')\| = \|(1-\alpha)(\mathbf{b} - \mathbf{b}')\| \leq \alpha r \to \mathbf{c} \in B$
- $B \cap \mathcal{A} = \alpha(B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A}) + (1-\alpha)\mathbf{b}' \subset \alpha\mathcal{X} + (1-\alpha)\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$

### Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

**Теорема**

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

**Доказательство**

### Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

### Доказательство

- $\operatorname{relint}(\mathcal{X}) \subset \operatorname{cl}(\mathcal{X})$

### Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

### Доказательство

- $\text{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \text{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
- По предыдущей теореме выберем $\mathbf{x} \in \text{relint}\left(\mathcal{X}\right), \mathbf{y} \in \text{relint}\left(\mathcal{X}\right) \ \subset \text{cl}\left(X\right)$

## Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

## Доказательство

- $\text{relint}\,(\mathcal{X}) \subset \text{cl}\,(\mathcal{X})$
- По предыдущей теореме выберем $\mathbf{x} \in \text{relint}\,(\mathcal{X})\,, \mathbf{y} \in \text{relint}\,(\mathcal{X}) \ \subset \text{cl}\,(X)$
- Точка вида $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in \text{relint}\,(\mathcal{X})$, $\alpha \in [0, 1]$

# Связь относительной внутренности и замыкания

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

# Связь относительной внутренности и замыкания

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

## Доказательство

# Связь относительной внутренности и замыкания

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

## Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

# Связь относительной внутренности и замыкания

### Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

### Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

1b Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$, рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subset \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Значит $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$ или $\mathbf{x} \in \partial \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Следовательно, $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

# Связь относительной внутренности и замыкания

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

## Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

1b Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$, рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subset \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Значит $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$ или $\mathbf{x} \in \partial\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Следовательно, $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

2a $\mathcal{X} \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right) \Rightarrow \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

# Связь относительной внутренности и замыкания

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

## Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

1b Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$, рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subset \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Значит $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$ или $\mathbf{x} \in \partial\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Следовательно, $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

2a $\mathcal{X} \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right) \Rightarrow \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

2b Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right)$, рассмотрим точку $\mathbf{y}_\alpha = (1-\alpha)\mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{x}$ при $\alpha > 1$, тогда $\alpha \to 1, \mathbf{y}_\alpha \to \mathbf{x}$. Выберем достаточно близкое к 1 $\alpha_0$, для которого $\mathbf{y}_{\alpha_0} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha_0}\mathbf{y}_{\alpha_0} + \left(1 - \frac{1}{\alpha_0}\right)\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

# Главное в первой части

- Критерий аффинности

# Главное в первой части

- Критерий аффинности
- Топологические свойства выпуклых множеств

# Главное в первой части

- Критерий аффинности
- Топологические свойства выпуклых множеств
- Относительная внутренность и замыкание

# Отделимость

## Определение

- *Множества* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *называются отделимыми, если существует гиперплоскость* $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$ *такая что* $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b \leq \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ *для всех* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *и* $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$ *и* $\mathbf{a}^\top \mathbf{z} \neq b$ *для произвольного* $\mathbf{z} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

# Отделимость

## Определение

- *Множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ называются отделимыми, если существует гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$ такая что $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b \leq \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{z} \neq b$ для произвольного $\mathbf{z} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*
- *Множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ называются* ***строго*** *отделимыми, если существует гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$ и числа $b_1 < b < b_2$ такие что $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b_1 < b_2 \leq \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$*

# Критерий отделимости множеств

## Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

# Критерий отделимости множеств

### Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ и $\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$

### Доказательство

# Критерий отделимости множеств

## Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

## Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем $b$ что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \leq b \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

# Критерий отделимости множеств

## Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

## Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем $b$ что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \leq b \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \leq b$ и $\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle \geq b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$

# Критерий отделимости множеств

## Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$

## Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем $b$ что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leq b \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leq b$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \geq b$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$
- Также в силу второго условия $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \neq b$ для $\mathbf{x} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Таким образом, множества отделимы

# Критерий отделимости множеств

## Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

## Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем $b$ что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$
- Также в силу второго условия $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \ne b$ для $\mathbf{x}\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Таким образом, множества отделимы
- Пусть множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ отделимы. Тогда $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$

# Критерий отделимости множеств

## Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$

## Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем $b$ что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leq b \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leq b$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \geq b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$
- Также в силу второго условия $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \neq b$ для $\mathbf{x}\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Таким образом, множества отделимы
- Пусть множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ отделимы. Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leq b$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \geq b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$
- Так как $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z}\rangle \neq b$, $\mathbf{z}\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, то найдутся $\mathbf{x}_1\in\mathcal{A}, \mathbf{y}_1\in\mathcal{B}$, что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1\rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y}_1\rangle$ и выполнено второе условие

- Пусть выполнены условия 2. Тогда выберем $b$ так что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < b < \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$

- Пусть выполнены условия 2. Тогда выберем $b$ так что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < b < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
- Значит можно найти числа $b_1, b_2$, для которых будет выполнено условие в определении строгой отделимости

- Пусть выполнены условия 2. Тогда выберем $b$ так что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < b < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
- Значит можно найти числа $b_1, b_2$, для которых будет выполнено условие в определении строгой отделимости
- Пусть множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ строго отделимы. Тогда из определения сразу следует выполнение условия 2

# Отделимость выпуклого множества от точки

### Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \operatorname{cl}(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

# Отделимость выпуклого множества от точки

### Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

### Доказательство

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \operatorname{cl}(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\operatorname{cl}(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом
- Функция $d(\mathbf{x})$ принимает на нём минимальное значение в точке $\mathbf{x}_0$

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом
- Функция $d(\mathbf{x})$ принимает на нём минимальное значение в точке $\mathbf{x}_0$
- Значит $d(\mathbf{x}) \geq d(\mathbf{x}_0)$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

# Отделимость выпуклого множества от точки

## Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

## Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом
- Функция $d(\mathbf{x})$ принимает на нём минимальное значение в точке $\mathbf{x}_0$
- Значит $d(\mathbf{x}) \geq d(\mathbf{x}_0)$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Покажем, что для $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{x}_0$ выполнено $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого $\alpha$ выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого $\alpha$ выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие
- Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого $\alpha$ выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие
- Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Следоватиельно, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \|\mathbf{c}\|_2^2$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого $\alpha$ выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие
- Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Следоватиельно, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \|\mathbf{c}\|_2^2$
- И наконец $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle$ — критерий сильной отделимости

# Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

## Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

# Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

## Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

## Доказательство

# Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

## Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

## Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе $C$, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$

# Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

## Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

## Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе $C$, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$

# Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

## Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

## Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе $C$, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$

# Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

## Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

## Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе $C$, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$
- Значит $\mathbf{c}^\top \alpha \mathbf{a}_i < d \Rightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i < d/\alpha$. При $\alpha \to \infty$, $\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i \leq 0$

# Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

## Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

## Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе $C$, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$
- Значит $\mathbf{c}^\top \alpha \mathbf{a}_i < d \Rightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i < d/\alpha$. При $\alpha \to \infty$, $\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i \leq 0$
- Таким образом, $\mathbf{p} = -\mathbf{c}$ и выполнено второе условие

# Критерий отделимости выпуклых множеств

### Теорема

Два выпуклых множества отделимы, iff их относительные внутренности не пересекаются

# Критерий отделимости выпуклых множеств

## Теорема

Два выпуклых множества отделимы, iff их относительные внутренности не пересекаются

## Признак отделимости

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — выпуклые и непересекающиеся множества. Тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

# Опорная гиперплоскость

## Определение

Гиперплоскость называется опорной в точке $\mathbf{x}_0$ к множеству $\mathcal{X}$, если она отделяет множество и точку, то есть выполнено $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle < \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$

# Опорная гиперплоскость

## Определение

Гиперплоскость называется опорной в точке $\mathbf{x}_0$ к множеству $\mathcal{X}$, если она отделяет множество и точку, то есть выполнено $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle < \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$

## Критерий существования

Если $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ точка относительной границы множества, $\mathcal{X}$ выпуклое множество, тогда существует опорная гиперплоскость в точке $\mathbf{x}_0$ к множеству $\mathcal{X}$.

# Главное во второй части

- Отделимость множеств
- Лемма Фаркаша
- Опорная гиперплоскость