Методы оптимизации
Лекция 3: Сопряжённые множества, конусы и их свойства

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

21 сентября 2020 г.

На прошлой лекции

- Аффинные множества

На прошлой лекции

- Аффинные множества
- Топологические свойства выпуклых множеств

На прошлой лекции

- Аффинные множества
- Топологические свойства выпуклых множеств
- Отделимость множеств

На прошлой лекции

- Аффинные множества
- Топологические свойства выпуклых множеств
- Отделимость множеств
- Опорная гиперплоскость

Сопряжённое множество

Определение

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^*$, что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Сопряжённое множество

Определение

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^*$, что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, тогда $\mathcal{G}_2^* \subset \mathcal{G}_1^*$.

Сопряжённое множество

Определение

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^*$, что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, тогда $\mathcal{G}_2^* \subset \mathcal{G}_1^*$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{p} \in \mathcal{G}_2^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}_2$
- Так как $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то $\langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle \geq -1 \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{G}_1$
- А значит $\mathbf{p} \in \mathcal{G}_1^*$

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^{**}$, что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{G}^{**} = \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)\right)$.

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^{**}$, что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{G}^{**} = \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)\right)$.

Доказательство

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^{**}$, что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{G}^{**} = \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)\right)$.

Доказательство

- Обозначим $\hat{\mathcal{G}} \equiv \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)\right)$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ тогда по определению $\mathcal{G}^*$ выполнено $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1$ для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{G}^*$. Это значит, что $\mathbf{x} \in \mathcal{G}^{**}$

Дважды сопряжённое множество

Определение

Дважды сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^{**}$, что

$$\mathcal{G}^{**} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^*\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{G}^{**} = \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)\right)$.

Доказательство

- Обозначим $\hat{\mathcal{G}} \equiv \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)\right)$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ тогда по определению $\mathcal{G}^*$ выполнено $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1$ для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{G}^*$. Это значит, что $\mathbf{x} \in \mathcal{G}^{**}$
- В итоге $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{**}$, но $\mathcal{G}^{**}$ содержит 0, является выпуклым и замкнутым, поэтому $\mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)\right) \subseteq \mathcal{G}^{**}$

- Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, но $\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить $\mathbf{y}$ и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle,\ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$

- Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, но $\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить $\mathbf{y}$ и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$

- Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, но $\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить $\mathbf{y}$ и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \tag{1}$$
$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \tag{2}$$

где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$

- Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, но $\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить $\mathbf{y}$ и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \tag{1}$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \tag{2}$$

  где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$
- Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$

- Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, но $\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить $\mathbf{y}$ и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle$, $\forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \tag{1}$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \tag{2}$$

где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$

- Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$
- Поскольку $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*, \mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, то по определению выполнено $\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle \geq -1$, что противоречит (2)

- Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, но $\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить $\mathbf{y}$ и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \tag{1}$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \tag{2}$$

  где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$
- Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$
- Поскольку $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*, \mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, то по определению выполнено $\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle \geq -1$, что противоречит (2)
- Значит $\mathcal{G}^{**} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$

- Пусть $\mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, но $\mathbf{y} \notin \hat{\mathcal{G}}$. Тогда можно строго отделить $\mathbf{y}$ и $\hat{\mathcal{G}}$: $\langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle > \beta > \langle \mathbf{q}, \mathbf{y} \rangle, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}}$
- Так как $0 \in \hat{\mathcal{G}}$, то $\beta < 0$
- Разделим все части неравенства на $-\beta$ и получим

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle > -1, \ \forall \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{G}} \tag{1}$$

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle < -1, \tag{2}$$

  где $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\beta$
- Так как $\mathcal{G} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$, то из (1) следует, что $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*$
- Поскольку $\mathbf{s} \in \mathcal{G}^*, \mathbf{y} \in \mathcal{G}^{**}$, то по определению выполнено $\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle \geq -1$, что противоречит (2)
- Значит $\mathcal{G}^{**} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$

Следствие

Если множество $\mathcal{G}$ выпукло, замкнуто и содержит 0, то $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$

Напоминание: конус

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Напоминание: конус

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0, \ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1\mathbf{x}_1 + \theta_2\mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Сопряжённый конус

Определение

Если $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ конус, то

$$\mathcal{K}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}\}.$$

Сопряжённый конус

Определение

Если $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ конус, то

$$\mathcal{K}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}\}.$$

Определение

Если $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ подпространство, то

$$\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp.$$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \le 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Самосопряжённые конусы

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Самосопряжённые конусы

- $\mathbb{R}^n_+$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\le 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Утверждение

Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Самосопряжённые конусы

- $\mathbb{R}^n_+$
- Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \le t\}$

Самосопряжённые конусы

Сопряжённая норма

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ называется

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

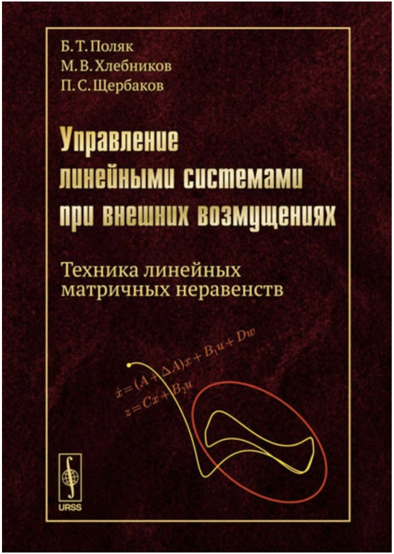
Утверждение

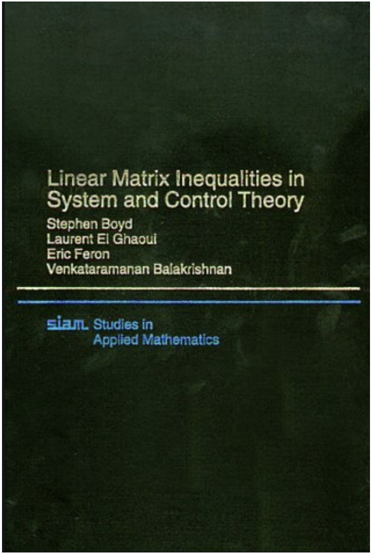
Нормой q сопряжённой норме p является такая норма что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Самосопряжённые конусы

- $\mathbb{R}^n_+$
- Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$
- $\mathbf{S}^n_+$

Линейные матричные неравенства и их приложения





Линейные матричные неравенства и их приложения

Определение

Линейным матричным неравенством (LMI) называется выражение вида

$$\mathbf{A}_0 + x_1\mathbf{A}_1 + \ldots + x_n\mathbf{A}_n \succeq 0,$$

в котором нужно проверить существование вектора $\mathbf{x}$, который удовлетворяет неравенству для заданных $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$.

Упражнение

Проверьте, что множество векторов $\mathbf{x}$, которые удовлетворяют данному LMI, является выпуклым.

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ устойчива iff $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ устойчива iff $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$\min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n_{++}} 0$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0$$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ устойчива iff $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n_{++}} 0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0
\end{aligned}
$$

- Очевидный ответ у замкнутой задачи $\mathbf{P} = 0$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ устойчива iff $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n_{++}} 0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0
\end{aligned}
$$

- Очевидный ответ у замкнутой задачи $\mathbf{P} = 0$
- Чтобы его избежать, исправим ограничения $\mathbf{P} - \varepsilon \mathbf{I} \in \mathbf{S}^n_+$ и $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \preceq -\alpha \mathbf{P}$

Исследование устойчивости динамической системы

Теорема

Динамическая система $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ устойчива iff $\exists \mathbf{P} \succ 0$ такая что $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0$

Задача разрешимости LMI

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n_{++}} \ 0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec 0
\end{aligned}
$$

- Очевидный ответ у замкнутой задачи $\mathbf{P} = 0$
- Чтобы его избежать, исправим ограничения $\mathbf{P} - \varepsilon \mathbf{I} \in \mathbf{S}^n_+$ и $\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \preceq -\alpha \mathbf{P}$
- Уменьшением параметров можно добиться эквивалентности задач, если это необходимо

Пример

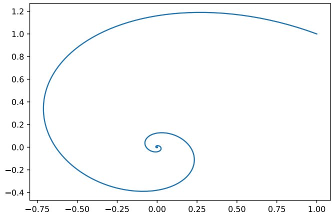
Динамическая система

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

Пример

Динамическая система

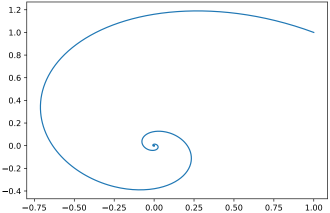
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$



Пример

Динамическая система

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

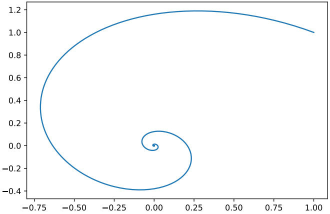


- $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0.21279944 & 0.00498653 \\ 0.00498653 & 0.22003798 \end{bmatrix}$ и $\lambda(\mathbf{P}^*) = \{0.21025717, 0.22258025\}$

Пример

Динамическая система

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$



- $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0.21279944 & 0.00498653 \\ 0.00498653 & 0.22003798 \end{bmatrix}$ и $\lambda(\mathbf{P}^*) = \{0.21025717, 0.22258025\}$
- $\lambda(\mathbf{A}^\top \mathbf{P}^* + \mathbf{P}^* \mathbf{A}) = \{-0.81189559, -0.47937813\}$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- Задача $\min\limits_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- Задача $\min\limits_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- Равносильное преобразование

$$
\begin{aligned}
&\min_{(\mathbf{x}, t)} t \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0
\end{aligned}
$$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- Задача $\min\limits_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- Равносильное преобразование

$$\min_{(\mathbf{x},t)} t$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0$$

Пример

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- Задача $\min\limits_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- Равносильное преобразование

$$\min_{(\mathbf{x}, t)} t$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0$$

Пример

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Минимизация максимального собственного значения

Постановка задачи

- Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i$
- Задача $\min\limits_{\mathbf{x}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$
- Равносильное преобразование

$$\min_{(\mathbf{x},t)} t$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A}(\mathbf{x}) - t\mathbf{I} \preceq 0$$

Пример

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0.96166719 & 0.33091336 \end{bmatrix}^\top, \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}^*)) \approx 0.0547863$$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathrm{cl}\,(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathrm{cl}\,(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathrm{cl}\,(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathrm{cl}\left(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*\right)$

Доказательство

- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathrm{cl}\left(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*\right)$

Доказательство

- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.
- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathrm{cl}\,(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.
- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- Значит $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq 0$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$. Тогда $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение аналогично следует из определения.

Сопряжение от композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathrm{cl}\,(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Доказательство

- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- Значит $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{C}_1^*$ и $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}_2^* \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение следует явно из определения.
- Пусть $\mathbf{p} \in (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^*$, тогда $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$
- Значит $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq 0$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0$. Тогда $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$. Обратное включение аналогично следует из определения.
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = (\mathcal{C}_1^{**} \cap \mathcal{C}_2^{**})^* = ((\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)^*)^* = (\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)^{**} = \mathrm{cl}\,(\mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*)$

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \; \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Copositive cone

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ называется copositive cone.

Свойства

- $\mathcal{C}^n$ выпуклое множество
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Упражнение

Найдите сопряжённый конус к $\mathcal{C}^n$

Полярный конус

Определение

Полярным конусом для конуса $\mathcal{C}$ называется следующее множество

$$\mathcal{C}^\circ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Заметим, что $\mathcal{C}^\circ = -\mathcal{C}^*$.

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

- Для любого линейного подпространства $\mathcal{L}$ и любого вектора $\mathbf{x}$ выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки $\mathbf{x}$ на множество $\mathcal{G}$

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

- Для любого линейного подпространства $\mathcal{L}$ и любого вектора $\mathbf{x}$ выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки $\mathbf{x}$ на множество $\mathcal{G}$
- $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

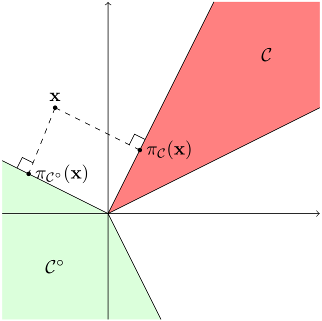
- Для любого линейного подпространства $\mathcal{L}$ и любого вектора $\mathbf{x}$ выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки $\mathbf{x}$ на множество $\mathcal{G}$
- $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- Для выпуклого конуса $\mathcal{C}$ и вектора $\mathbf{x}$ справедливо
$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$

Разложение Моро (Moreau)

Утверждение

- Для любого линейного подпространства $\mathcal{L}$ и любого вектора $\mathbf{x}$ выполнено $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, где $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ — проекция точки $\mathbf{x}$ на множество $\mathcal{G}$
- $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- Для выпуклого конуса $\mathcal{C}$ и вектора $\mathbf{x}$ справедливо

$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$



Главное в первой части

- Сопряжённое множество и его свойства

Главное в первой части

- Сопряжённое множество и его свойства
- Сопряжённый конус и самосопряжённые конусы

Главное в первой части

- Сопряжённое множество и его свойства
- Сопряжённый конус и самосопряжённые конусы
- Конус положительных полуопределённых матриц и линейные матричные неравенства

Главное в первой части

- Сопряжённое множество и его свойства
- Сопряжённый конус и самосопряжённые конусы
- Конус положительных полуопределённых матриц и линейные матричные неравенства
- Полярный конус и разложение Моро

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\| \cdot \|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{X}}{\arg\min} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\| \cdot \|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\| \cdot \|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\| \cdot \|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \not\in \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$
- Тогда $\mathcal{G} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ является компактом

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$
- Тогда $\mathcal{G} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ является компактом
- $f(\mathbf{x})$ достигает на $\mathcal{G}$ своего минимального значение, которое и будет проекцией.

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$
- Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$
- Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости
- Тогда $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|_2 = \left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a})\right\|_2 < \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_1 - a\|_2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2$ — противоречие

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$
- Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости
- Тогда $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|_2 = \left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a})\right\|_2 < \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_1 - a\|_2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2$ — противоречие
- Значит проекция единственна

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
   - Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
   - Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$
   - $2\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle + \lambda\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 \geq 0$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
   - Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$
   - $2\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle + \lambda\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 \geq 0$
   - При $\lambda \to 0$ получим требуемое неравенство

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
    - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
    - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
    - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
    - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
    - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
   - Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
   - Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
   - Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
   - Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
   - Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
   - Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
   - Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
   - Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
   - Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
   - Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
   - Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
   - Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции
   - Далее покажем, что $\mathbf{u} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$.

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
   - Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
   - Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
   - Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции
   - Далее покажем, что $\mathbf{u} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$.
   - $\langle \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = \langle -\mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \geq 0$ по критерию проекции

Доказательство разложения Моро

1. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
   - Рассмотрим выражение из критерия проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle$
   - Так как $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^\circ$, а $\mathbf{c}$ произвольный элемент из $\mathcal{C}$, то $\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \leq 0$
   - По критерию проекции $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$
   - Аналогично доказывается, что $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$
   - По критерию проекции $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - Для $\mathbf{c} = 0$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$
   - Для $\mathbf{c} = 2\mathbf{x}$ имеем $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
   - Значит $\langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Покажем, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$
   - Сначала покажем, что $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\circ$. Используем определение и рассмотрим $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$ для произвольного $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$
   - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ по критерию проекции
   - Далее покажем, что $\mathbf{u} = \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{z})$.
   - $\langle \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = \langle -\mathbf{x}, \mathbf{c} - \mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \geq 0$ по критерию проекции
   - Значит $\mathbf{u} \equiv \mathbf{y}$

Проекция как нерастягивающий оператор

Теорема

Оператор проекции является нерастягивающим.

Доказательство

1. По свойству проекции, для любой точки $\mathbf{y}_1$
$$\langle \mathbf{y}_1 - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2)$, тогда
$$\langle \mathbf{y}_1 - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0$$
$$\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \mathbf{y}_2, \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0$$
3. Сложим
$\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \rangle$
4. По неравенству КБШ $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1)\|_2 \leq \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|_2$

Firmly non-expansiveness

Определение

Оператор f называется firmly non-expansive, если

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_2^2 \leq \langle f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

Теорема

Оператор проекции является firmly non-expansive:

$$\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y})\|_2^2 \leq \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \not\in \mathcal{X} \end{cases}$
- Решение задачи $\min f(\mathbf{x})$ для выпуклой функции f является неподвижной точкой проксимального оператора

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha}\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \not\in \mathcal{X} \end{cases}$
- Решение задачи $\min f(\mathbf{x})$ для выпуклой функции f является неподвижной точкой проксимального оператора
- Также является нерастягивающим и firmly non-expansiveness

Главное во второй части

- Проекция и её существование

Главное во второй части

- Проекция и её существование
- Критерий проекции

Главное во второй части

- Проекция и её существование
- Критерий проекции
- Понятие о проксимальном операторе и его свойствах