двойственная задача:

$$\min_{U \in S^m} \langle U, B \rangle$$

s.t. $A^* U = c$

$U \succcurlyeq B$

Если $\exists X_0 : A X_0 \prec B$, то $A(\mathbb{R}^n) \cap \operatorname{int}(\{X \in S^n \mid X \prec B\}) \neq \varnothing$,

т.к оно содержит X_0 $\Rightarrow$ выполняется сильная двойственность

11

$A : \mathbb{R}^n \to S^m$, $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$, $A_i \in S^m$

сопряженный оператор A^*:

$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall Y \in S^m \quad \langle Ax, Y \rangle = \langle x, A^* Y \rangle$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \langle A_i, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A^* Y$ - верно для $\forall x$ =>

$\Downarrow$

$\forall i \quad \langle A_i, Y \rangle = (A^* Y)_i$ - это полностью определяет A^*

$A^* X = (\langle A_i, X \rangle)_{i=1}^{n}$

12

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$ s.t. $\sum_{i=1}^{n} x_i A_i \preceq B$ $\iff$ $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle + \delta_{\{Ax \preceq B\}}$ (A - оператор из предыдущей задачи)

$f(x) = \langle c, x \rangle$

$g(Y) = \delta_{\{Y \preceq B\}}$

$Y = Ax$

$f^* = \delta_{\{s = c\}}$

$g^*(U) = \sup\limits_{Y \preceq B} (\langle U, Y \rangle) = \sup\limits_{Y \preceq B} (\langle U, Y - B \rangle) + \langle U, B \rangle =$

$= \langle U, B \rangle$, $U \succeq B$

Здесь использовалось утверждение из задачи 10.

$$\delta^*_{S^n_+}(Y) = \sup_{X\in S^n_+} (\langle X, Y\rangle), \quad Y \in S^n$$

покажем, что если Y не отрицательно полуопределён, то $\sup = \infty$. Для этого воспользуемся спектральным разложением: $Y = V D_Y V^T$. Возьмём матрицу $X = V D_X V^T$, где D_X - диагональная и $D_X \succeq 0$. $X \in S^n_+$, поскольку $X = X^T$ и $X \succeq 0$. V - ортогональная.

$$\langle X, Y\rangle = tr(V D_X V^T V D_Y V^T) = tr(D_X D_Y).$$

Отсюда видно, что в случае, когда хоть один из элементов $D_Y > 0$ выбором D_X можно устремить $\langle X, Y\rangle$ к $+\infty$.

Значит $Y \preceq 0$.

Из $\langle X, Y\rangle = \langle D_X, D_Y\rangle$ видно, что $\langle X, Y\rangle \leqslant 0$, причём 0 достигается при $D_X = 0$.

Итого $\delta^*_{S^n_+}(Y) = 0$ при $Y \preceq 0$ и не определена иначе

значит $\boxed{\delta^*_{S^n_+} = \delta_{S^n_-}}$.

двойственная задача:

$$\min_{u\in[-1,0]^m} \frac{\|A^T u\|^2}{2\lambda} + \sum_{i=1}^m u_i$$

выполняется сильная двойственность, т.к. обе функции выпуклые и $A(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}^m \neq \varnothing$

Множество решений не пусто, т.к. обе функции сильно выпуклые.

d) $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m [1-\langle a_i, x\rangle]_+ + \lambda\|x\|_1$$

выражения для сопряженных функций получены в предыдущих пунктах.

двойственная задача:

$$\min_{u\in[-1,0]^m} \sum_{i=1}^m u_i$$

$$A^T u \in [-\lambda,\lambda]^n$$

сильная двойственность выполняется как и в предыдущих пунктах.

двойственная задача имеет решения по т. Вейерштрасса (непрерывная функция на компакте)

прямая задача имеет решение, поскольку можно найти такое $R\in\mathbb{R}$, что она эквивалентна $\min_{x\in \overline{B_R(0)}} \sum_{i=1}^m [1-\langle a_i, x\rangle]_+ + \lambda\|x\|_1$, поскольку

внутри $B_R(0)$ функция меньше чем на $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$.

Эта задача в свою очередь имеет решение по т. Вейерштр.

в)

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \lambda\|x\|_1$$

$$f(x) = \lambda\|x_1\|$$

$$g(y) = \frac{1}{2}\|y-b\|^2$$

$$y = Ax$$

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (\langle s,x\rangle - \lambda\|x\|_1) = \delta_{\{[-\lambda,\lambda]^n\}}$$

$$g^*(u) = \langle u, b\rangle + \frac{\|u\|^2}{2}$$

двойственная задача:

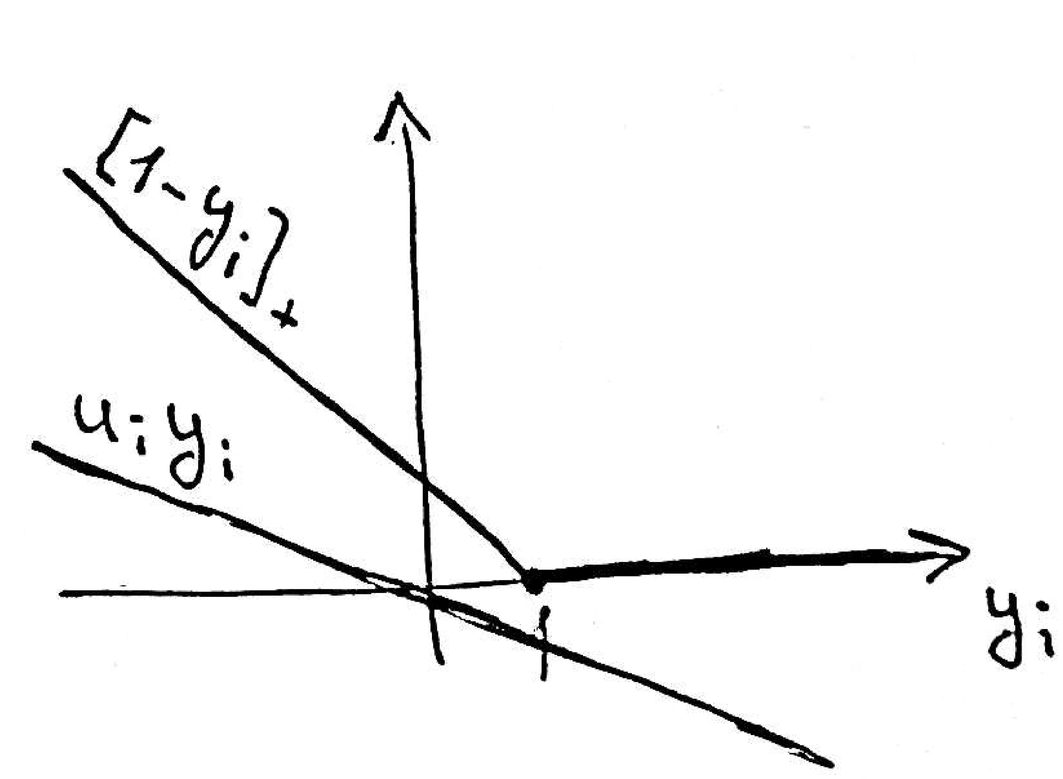
$$\min_{A^T u\in[-\lambda,\lambda]^n} \langle u,b\rangle + \frac{\|u\|^2}{2}$$

Выполняется сильная двойственность, т.к. в обеих задачах функции выпуклые и $A(\mathbb{R}^n)\cap\mathbb{R}^m \neq \varnothing$.

Множество решений не пусто, т.к. обе функции сильно выпуклые.

c)

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m [1-\langle a_i,x\rangle]_+ + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2$$



$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\|x\|^2$$

$$g(y) = \sum_{i=1}^m [1-y_i]_+$$

$$y = Ax$$

$$f^*(s) = \frac{\|s\|^2}{2\lambda}$$

$$g^*(u) = \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \left(\langle u,y\rangle - \sum_{i=1}^m [1-y_i]_+\right) = \sup_{y\in\mathbb{R}^m}\left(\sum_{i=1}^m (u_i y_i - [1-y_i]_+)\right)$$

из рисунка видно, что $y_i = 1$, $u_i \in [-1,0]$

$$g^*(u) = \sum_{i=1}^m u_i$$

a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2+\frac{\lambda}{2}\|x\|^2$

$f(x)=\frac{\lambda}{2}\|x\|^2$

$g(y)=\frac{1}{2}\|y-b\|^2$

$y=Ax$

$f^*(s)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\langle s,x\rangle-\frac{\lambda}{2}\|x\|^2\right)$

$s-\lambda x=0 \Rightarrow x=\frac{s}{\lambda}$

$f^*(s)=\frac{\|s\|^2}{2\lambda}$

$g^*(u)=\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^m}\left(\langle u,y\rangle-\frac{1}{2}\|y-b\|^2\right)$

$u-y+b=0 \Rightarrow y=u+b$

$g^*(u)=\frac{\|u\|^2}{2}+\langle u,b\rangle$

двойственная задача:

$\min\limits_{u\in\mathbb{R}^m} \langle u,b\rangle+\frac{\|u\|^2}{2}+\frac{\|A^Tu\|^2}{2\lambda}$

выполняется сильная двойственность, т.к $A(\mathbb{R}^n)\cap\mathbb{R}^m\neq\varnothing$.
множества решений прямой и двойственной задачи не пустые т.к. в обеих задачах функции сильно выпуклые.

d) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(sx - \sqrt{1+x^2} \right)$$

$$s - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Rightarrow s^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{s^2}{1-s^2}$$

$$f^*(s) = \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = -\sqrt{1-s^2}, \quad s \in [-1, 1]$$

$$\boxed{f^*(s) = -\sqrt{1-s^2}, \; s \in [-1, 1]}$$

e) $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

$$f^*(s) = \sup_{x \in [-1, 1]} \left(sx + \sqrt{1-x^2} \right)$$

$$s - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow s^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{s^2}{1+s^2}$$

$$f^*(s) = \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \sqrt{1+s^2}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{f^*(s) = \sqrt{1+s^2}}$$

f) $f(x) = -\ln x$

$$f^*(s) = \sup_{s \in \mathbb{R}_{++}} (sx + \ln x)$$

$$s + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{s}$$

$$\boxed{f^*(s) = -1 - \ln(-s), \; s \in \mathbb{R}_{--}}$$

g) $f(x) = -1 - \ln(-x)$

$$f^*(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}_{--}} (sx + 1 + \ln(-x))$$

$$s + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{s}$$

$$\boxed{f^*(s) = -\ln(s), \; s \in \mathbb{R}_{++}}$$

a) $f(x) = e^x$;

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (sx - e^x)$$

$$s - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln s \Rightarrow \boxed{f^*(s) = \begin{cases} s\ln s - s, & \text{при } s > 0 \\ 0, & \text{при } s = 0 \end{cases}}$$

в) $f(x) = \begin{cases} x\ln x - x, & \text{при } x > 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$

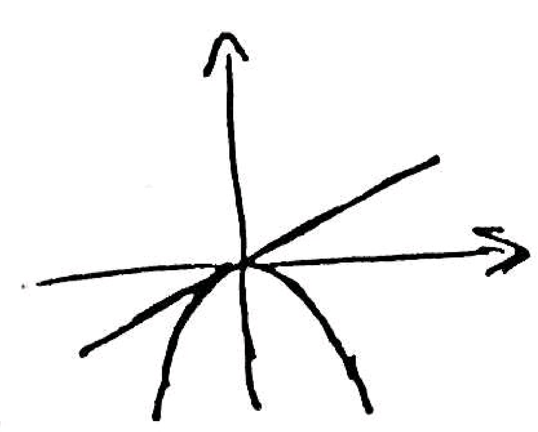
$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (sx - x\ln x + x)$$

$$s - \ln x - 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = e^s$$

$$\boxed{f^*(s) = e^s}$$

c) $f(x) = \frac{|x|^p}{p}, \ p > 1$

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(sx - \frac{|x|^p}{p}\right)$$



1) $s \geq 0$ из картинки видно, что $x \geq 0$

$$s - x^{p-1} = 0 \Rightarrow x = s^{\frac{1}{p-1}}$$

$$f^*(s) = s \cdot s^{\frac{1}{p-1}} - \frac{s^{\frac{p}{p-1}}}{p} = s^{\frac{p}{p-1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

2) $s < 0$ из картинки видно, что $x < 0$

$$s + (-x)^{p-1} = 0 \Rightarrow x = -(-s)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$f^*(s) = -s(-s)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{(-s)^{\frac{p}{p-1}}}{p} = (-s)^{\frac{p}{p-1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

В итоге $\boxed{f^* = |s|^{\frac{p}{p-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)}$

$$\min_{X \in S^n_{++}} \langle C^{-1}, X \rangle - \ln Det(X)$$

s.t. $\langle Xa, a \rangle \leq 1$

Сумма выпуклой и строго выпуклой функций на выпуклом замкнутом множестве имеет ровно одну точку оптимума

$$L(X, \lambda) = \langle C^{-1}, X \rangle - \ln Det(X) + \lambda \langle Xa, a \rangle - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \begin{cases} C^{-1} - X^{-1} + \lambda a a^T = 0 \\ \lambda \langle Xa, a \rangle = \lambda \end{cases} \Rightarrow X^{-1} = C^{-1} + \lambda a a^T$$

1) $\lambda = 0 \Rightarrow X = C \Rightarrow \langle Ca, a \rangle \leq 1$

2) $\lambda \neq 0 \Rightarrow X = C - \dfrac{Caa^TC}{\lambda^{-1} + a^TCa}$

$$a^T X a = \underbrace{a^TCa}_{y} - \frac{a^TCaa^TCa}{\lambda^{-1} + a^TCa} = 1$$

$$y - \frac{y^2}{\lambda^{-1} + y} = 1 \Rightarrow \lambda^{-1} y = \lambda^{-1} + y \Rightarrow \lambda = \frac{y-1}{y} = \frac{a^TCa - 1}{a^TCa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^TCa \geq 1 \quad \text{т.к. } \lambda \geq 0$$

$$X = C - \frac{Caa^TC}{\frac{a^TCa}{a^TCa - 1} + a^TCa} = C - \frac{Caa^TC(a^TCa - 1)}{(a^TCa)^2} *$$

Ответ: $\langle Ca, a \rangle \leq 1 \Rightarrow X = C$

$$\langle Ca, a \rangle > 1 \Rightarrow X = C - \frac{Caa^TC}{a^TCa} + \frac{Caa^TC}{(a^TCa)^2}$$

в)
$$\min_{X \in S^n_{++}} \langle X^{-1}, I_n \rangle$$
$$\text{s.t. } \langle A, X \rangle \leq b$$

$$d\langle X^{-1}, I_n\rangle = \langle -X^{-1} dX X^{-1}, I_n\rangle = \langle dX, -X^{-2}\rangle$$

$$L(X,\lambda) = \langle X^{-1}, I_n\rangle + \lambda\langle A, X\rangle$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \begin{cases} -X^{-2} + \lambda A = 0 \\ \lambda\langle A, X\rangle = \lambda b \end{cases} \Rightarrow X = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{A^{-1}}$$

$$\sqrt{\lambda}\langle A, \sqrt{A^{-1}}\rangle = \lambda b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{b}{\langle A, \sqrt{A^{-1}}\rangle} = \frac{b}{tr(A \cdot \sqrt{A^{-1}})} = \frac{b}{\langle\sqrt{A}, I_n\rangle}$$

$$\boxed{X = \frac{b\sqrt{A^{-1}}}{\langle\sqrt{A}, I_n\rangle}}$$

5

Как и в задаче 4а будем минимизировать $-\ln Det$

$$\min_{X \in S^n_+} -\ln Det(X)$$
$$\text{s.t. } \|Xe_i\|^2 \leq 1$$

строго выпуклая функция на выпуклом замкнутом множестве имеет ровно одну точку оптимума.

$$d(\|Xe_i\|^2) = d(\langle Xe_i, Xe_i\rangle) = 2\,tr(Xe_ie_i^T dX^T)$$

$$L(X,\lambda) = -\ln Det(X) + \sum_{i=1}^n (\lambda_i\|Xe_i\|^2 - \lambda_i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = -X^{-1} + 2\sum_{i=1}^n \lambda_i X e_i e_i^T = -X^{-1} + 2X \cdot diag(\lambda) = 0 \Rightarrow X = diag\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda_i}}\right)$$

$$\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \|Xe_i\|^2 = 1 \Rightarrow 2\lambda_i = 1 \Rightarrow X = I_n \Rightarrow$$

$Det(X) \leq 1$ при $\|X e_i\| \leq 1$ — частный случай нер-ва Адамара а) Вместо того, чтобы максимизировать $\operatorname{Det}(X)$, будем минимизировать $-\ln \operatorname{Det}(X)$. Задачи эквивалентны, т.к. $-\ln$ монотонно убывает.

$$\min_{X \in S_+^n} -\ln \operatorname{Det}(X)$$
$$\text{s.t. } \langle A, X\rangle \leq b$$

$\ln()$ и $\operatorname{Det}()$ - вогнутые функции $\Rightarrow -\ln \operatorname{Det}()$ - выпуклая, допустимое множество также выпуклое $\Rightarrow$ решение единственно

$$L(X,\lambda) = -\ln \operatorname{Det}(X) + \lambda\langle A, X\rangle - \lambda b$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \begin{cases} -X^{-1} + \lambda A = 0 \\ \lambda\langle A, X\rangle = \lambda b \end{cases} \Rightarrow X = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$\lambda = \frac{\langle A, A^{-1}\rangle}{b} = \frac{tr(AA^{-1})}{b} = \frac{n}{b}$$

Ответ: $\boxed{X = \frac{b}{n} A^{-1}}$

P.S. также стоит заметить, что $\operatorname{Det}(X) \neq 0$, потому что $\exists \varepsilon > 0$; $X^* = \varepsilon \cdot I_n$, такое что $\operatorname{Det}(X^*) > 0$ и $\langle A, X^*\rangle \leq b \Rightarrow$ решение задачи лежит в S_{++}^n и записи $\ln \operatorname{Det}(X)$ и X^{-1} корректны.

h) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}_{++}} \left(sx - \frac{1}{x}\right)$$

$$s + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-1}{s}}$$

$$f^*(s) = -\sqrt{-s} - \sqrt{-s} = -2\sqrt{-s}$$

$$\boxed{f^*(s) = -2\sqrt{-s}, \quad s \in \mathbb{R}_{--}}$$

i) $f(x) = -2\sqrt{-x}$

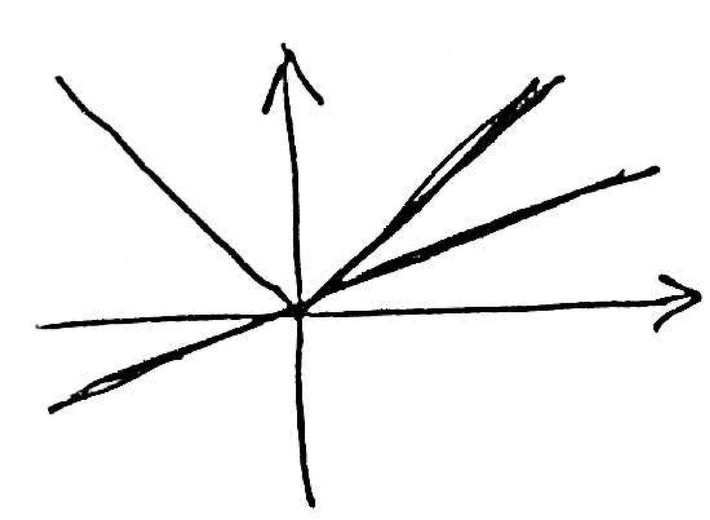
$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}_{--}} \left(sx + 2\sqrt{-x}\right)$$

$$s - \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{s^2}, \quad s > 0$$

$$f^*(s) = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{f^*(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0}$$

j) $f(x) = |x|$



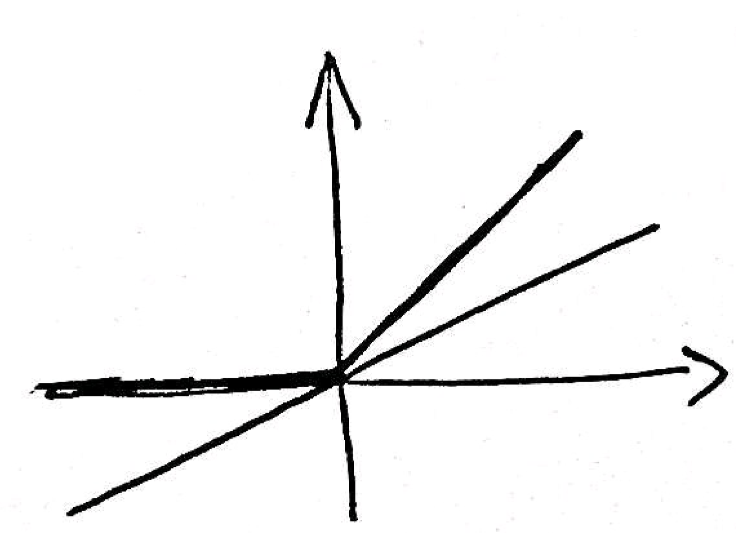
$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(sx - |x|\right)$$

$$\boxed{f^*(s) = \delta\{[-1,1]\}}$$

k) $f(x) = \delta_{\{[-1,1]\}}$

$$f^*(s) = \sup_{x \in [-1,1]} (sx) = \begin{cases} s, & s \geq 0 \\ -s, & s < 0 \end{cases} = \boxed{|s| = f^*(s)}$$

l) $f(x) = [x]_+$



$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(sx - [x]_+\right)$$

$$f^*(s) = \delta_{\{[0,1]\}}$$

m) $f(x) = \delta_{\{[0,1]\}}$

$$f^*(s) = \sup_{x \in [0,1]} (sx) = \begin{cases} s, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} = \boxed{[s]_+ = f^*(s)}$$

CTP10

e) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \langle Bx, x\rangle$

s.t. $\langle Ax, x\rangle \leq 1$

$$L(x,\lambda) = \langle Bx, x\rangle + \lambda\langle Ax, x\rangle - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \begin{cases} 2Bx + \lambda Ax = 0 \\ \lambda\langle Ax, x\rangle = \lambda \\ \langle Ax, x\rangle \leq 1 \end{cases}$$

$$\langle Bx, x\overset{\geq 0}{\rangle} + \lambda\langle Ax, x\overset{>0}{\rangle} = 0 \Rightarrow \langle Bx, x\rangle = 0,\ \lambda = 0 \Rightarrow Bx = 0$$

Ответ: $\ker B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle \leq 1\}$

3

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n_{++}} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i}$

s.t $\langle a, x\rangle \leq b$

оптимизируемая функция строго выпуклая, решение единственно
допустимое множество выпуклое =>
Чтобы показать существование можно доопределить функцию
на открытых границах допустимого множества (где $x_i = 0$) по непрерывности
(до ∞), тогда новое множество будет замкнуто и решение
$\exists$ по т. Вейерштрасса, причём это решение лежит в исходном
множестве, поскольку на нём функция конечна.

$$L(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} + \lambda\langle a, x\rangle - \lambda b$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_i = \begin{cases} -\frac{c_i}{x_i^2} + \lambda a_i = 0 \Rightarrow x_i = \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}} \\ \lambda\langle a, x\rangle = \lambda b \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i a_i} = b \Rightarrow \boxed{x_i = \sqrt{\frac{c_i}{a_i}} \cdot \frac{b}{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{c_j a_j}}}$$

c) $$\min_{x \in \mathbb{R}^n_{++}} \langle c,x\rangle + \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$L(x,\mu) = \langle c,x\rangle + \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + \mu \sum_{i=1}^n x_i - \mu$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_i = \begin{cases} c_i + \ln x_i + 1 + \mu = 0 \iff x_i = e^{-1-\mu-c_i} = \dfrac{e^{-c_i}}{e^{1+\mu}} \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n e^{-c_i}}{e^{1+\mu}} = 1$$

$$\boxed{x_i = \frac{e^{-c_i}}{\sum_{j=1}^n e^{-c_j}}}$$

d) $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c,x\rangle$$

$$\text{s.t.} \quad \langle Ax,x\rangle \leqslant 1$$

$$L(x,\lambda) = \langle c,x\rangle + \lambda\langle Ax,x\rangle - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \begin{cases} c + 2A\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \\ \lambda\langle Ax,x\rangle = \lambda \\ \lambda \geqslant 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-1}{2\lambda} A^{-1} c$$

$$\left\langle \frac{-1}{2\lambda} c, \frac{-1}{2\lambda} A^{-1} c \right\rangle = 1$$

$$\langle c, A^{-1} c\rangle = 4\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{\langle A^{-1}c, c\rangle}}{2}$$

$$x = \frac{-A^{-1}c}{\sqrt{\langle A^{-1}c,c\rangle}}$$

а) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \langle c, x\rangle$

s.t. $\langle a,x\rangle \leqslant b$

$L(x,\lambda) = \langle c,x\rangle + \lambda\langle a,x\rangle - \lambda b$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = c + \lambda a = 0 \\ \lambda\langle a,x\rangle = \lambda b \\ \lambda \geqslant 0 \end{cases}$$

Система имеет решение только при $c \uparrow\downarrow a$ => по т. ККТ решение исходной задачи существует только в этом случае

$$\lambda = \frac{\|c\|}{\|a\|} \neq 0 \Rightarrow \langle a,x\rangle = b$$

Ответ: если $c\uparrow\downarrow a$, то $x = \frac{a\cdot b}{\|a\|^2} + t$, где $\langle t, a\rangle = 0$

иначе нет решений

в) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \langle c, x\rangle$

s.t. $\sum\limits_{i=1}^n x_i = 1$

$-x_i \leqslant 0$

$L(x,\lambda,\mu) = \langle c,x\rangle + \mu\left(\sum x_i - 1\right) - \langle\lambda, x\rangle$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_i = \begin{cases} c_i + \mu - \lambda_i = 0 & \forall i \\ \lambda_i x_i = 0 & \forall i \\ \lambda_i \geqslant 0 & \forall i \\ \sum\limits_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases} \Bigg| \Leftrightarrow \begin{cases} (\mu + c_i)\, x_i = 0 \\ \mu + c_i \geqslant 0 \\ \sum x_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mu \geqslant -\min_{i\in\overline{n}}(c_i)$$

1) $\mu > -\min(c_i) \Rightarrow \forall i\ x_i = 0 \Rightarrow \sum x_i = 0$ — противоречие

2) $\mu = -\min(c_i)$, пусть $I = \{i\in\overline{n} \mid c_i = \mu\}$ - множество индексов, на которых min достигается.
$j = \operatorname{argmin}(c_i)$

Тогда множество всех решений системы:

$$\boxed{\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum_{i\in I} x_i = 1,\ \forall j\notin I\ x_j = 0\right\}}$$

по т. ККТ оно же является множеством решений исходной задачи

a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x-v\|^2$

s.t. $Ax=b$

$L(x,\mu)=\frac{1}{2}\|x-v\|^2+\mu^T(Ax-b)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x} = (x-v)+A^T\mu=0 \iff x=v-A^T\mu \\ Ax=b\end{cases}$$

$Av-AA^T\mu=b \Rightarrow \mu=(AA^T)^{-1}(Av-b)$

$\boxed{x=v-A^T(AA^T)^{-1}(Av-b)}$ – по т. ККТ точка глобального минимума, то есть проекция

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x-v\|^2$

s.t. $\langle a,x\rangle \le b$

$L(x,\lambda)=\frac{1}{2}\|x-v\|^2+\lambda(\langle a,x\rangle-b)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x} = x-v+\lambda a=0 \\ \lambda\langle a,x\rangle=\lambda b\end{cases}$$

1) $\lambda=0 \Rightarrow \boxed{x=v}$ – в случае, если $\langle a,v\rangle \le b$

2) $\lambda\ne 0 \Rightarrow \langle a,x\rangle = b$

$\langle a,x\rangle-\langle a,v\rangle+\lambda\|a\|^2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{\langle a,v\rangle-b}{\|a\|^2}$

$\boxed{x=v-\frac{\langle a,v\rangle-b}{\|a\|^2}a}$ – в случае, если $\langle a,v\rangle > b$